



ANÁLISE DE PROBLEMAS DE DIFUSÃO TRANSIENTE ATRAVÉS DO MÉTODO
DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Daniela Silva Santurio

Dissertação de Mestrado
apresentada ao Programa de Pós-
graduação em Engenharia Civil,
COPPE, da Universidade Federal do
Rio de Janeiro, como parte dos
requisitos necessários à obtenção do
título de Mestre em Engenharia
Civil.

Orientadores: José Claudio de Faria Telles

José Antônio Fontes Santiago

Rio de Janeiro

Julho de 2015

ANÁLISE DE PROBLEMAS DE DIFUSÃO TRANSIENTE ATRAVÉS DO MÉTODO
DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Daniela Silva Santurio

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

Prof. José Claudio Faria Telles, Ph.D.

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D.Sc.

Prof. Edivaldo F. Fontes Junior, D.Sc.

Prof. Bruno da Fonseca Monteiro, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JULHO DE 2015

Santurio, Daniela Silva

Análise De Problemas De Difusão Transiente Através Do
Método Das Soluções Fundamentais/ Daniela Silva Santurio.-
Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE,2015

VIII, 71 p.: il, 29,7cm

Orientadores: José Claudio de Faria Telles

José Antônio Fontes Santiago

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de
Engenharia Civil, 2015.

Referencias bibliográficas: p. 64-71

1. Difusão transiente. 2. Meshless. 3. Método das
Soluções Fundamentais. I. Telles, José Claudio de Faria *et al.* II.
Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de
Engenharia Civil. III. Título.

*“La utopia está en el horizonte.
Camino dos pasos, ella se aleja dos pasos
y el horizonte se corre diez pasos más allá.
¿Entonces para que sirve la utopia?
Para eso, sirve para caminhar.”*

Eduardo Galeano

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a minha família, aos meus pais Diliege e Daniel e ao meu irmão Gustavo. Eu nada seria sem o exemplo, o amor e o apoio incondicional que vocês sempre me deram por toda a vida.

Agradeço ao Kleber por sempre estar ao meu lado. Obrigado pelo companheirismo, pela lealdade, pelo amor e principalmente pela paciência.

Agradeço aos meus orientadores, professor Telles e professor Santiago por toda orientação além apenas da vida acadêmica.

Agradeço a todos os outros professores que me ajudaram durante toda minha formação acadêmica, em especial o professor George Ainsworth.

Agradeço a todas as minhas amigas, pelo apoio incondicional e compreensão durante todos esses anos. Obrigada a Lilinha, as Mari(s), as Laura(s), a Ruiva, a Silvia, as meninas do Opção e da faculdade.

Agradeço à Universidade Federal do Rio de Janeiro pela formação, à Rede Doctum pelo apoio e à CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE DE PROBLEMAS DE DIFUSÃO TRANSIENTE ATRAVÉS DO MÉTODO
DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Daniela Silva Santurio

Julho/2015

Orientadores: José Claudio de Faria Telles

José Antonio Fontes Santiago

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta estratégias e aplicações do método das soluções fundamentais (MSF) para equações de difusão. Soluções fundamentais dependentes do tempo desenvolvidas para as equações de difusão são utilizadas diretamente a fim de se obter a solução do problema através da combinação linear da solução fundamental do problema. O esquema proposto é livre dos esquemas convencionalmente usados seja ele através da transformada de Laplace ou através do esquema de diferenças para lidar com a derivada temporal na equação governante. Ao colocar corretamente os pontos campo e os pontos fonte a um dado nível de tempo, a solução avança no tempo até que as soluções de estado estacionário sejam obtidas. Foram propostos dois modelos de posicionamento dos pontos fontes (fontes fixas e fontes móveis) e através de exemplos numéricos serão estudados a influência de diversos parâmetros no condicionamento e na precisão dos resultados calculados para o problema.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

TRANSIENT DIFFUSION PROBLEMS ANALYSIS THROUGH THE
FUNDAMENTAL SOLUTIONS METHOD

Daniela Silva Santurio

July/2015

Orientadores: José Claudio de Faria Telles

José Antonio Fontes Santiago

Department: Civil Engineering

This paper presents strategies and applications of the method of fundamental solutions (MFS) for diffusion equations. Time dependent fundamental solutions developed for the diffusion equations are used directly in order to obtain the solution of the problem by linear combination of fundamental solution of the diffusion operator. The proposed scheme is free from the conventionally used schemes whether by Laplace transform or by differences scheme to deal with the time derivative term of the governing equation. By correctly placing the field points and source points to a given level of time, the solution progresses over time until the steady state solution is achieved. Were proposed two models of positioning of points sources (stationary sources and mobile sources) and through numerical examples will be studied the influence of various parameters on the conditioning and the accuracy of the results calculated for the problem.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	2
1.1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	7
1.2. OBJETIVOS E CONTEÚDO	9
2. EQUAÇÕES GOVERNANTES	12
2.1. CAMPO ESCALAR	12
2.2. EQUACIONAMENTO GERAL	15
2.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO	20
3. MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS	23
3.1. EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO 24	
3.2. MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS TRANSIENTES	29
3.3. POSICIONAMENTO DOS PONTOS FONTES	32
3.4. TÉCNICAS DE REGULARIZAÇÃO DE MATRIZES	34
4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS	37
EXEMPLO1 – PLACA SUBMETIDA À CARREGAMENTO SENOIDAL	38
EXEMPLO2 – PLACA SUBMETIDA À CARREGAMENTO VARIÁVEL	44
EXEMPLO 3 – CHOQUE TÉRMICO EM TODO O CONTORNO	52
EXEMPLO 4 – CHOQUES TÉRMICOS SUCESSIVOS	54
EXEMPLO 4 – Problema 1 : $t_0 = 0s$ e $t_1 = 0,5s$	55
EXEMPLO 4 – Problema 2: $t_0 = 0s$ e $t_1 = 1,0s$	56
5. CONCLUSÕES	60
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	64

1. INTRODUÇÃO

1. INTRODUÇÃO

No último século observou-se um avanço exponencial na área de tecnologia e como consequência, um incrível desenvolvimento na capacidade de armazenamento e processamento dos computadores, gerando no meio acadêmico, uma notável popularização destes para a resolução de modelos matemáticos de problemas não triviais.

Na intenção de analisar esses complexos problemas de Engenharia, os métodos numéricos foram desenvolvidos. Esses métodos permitem resolver problemas governados por equações diferenciais através de soluções aproximadas, com um grau de precisão controlada, o que se torna muito importante, uma vez que poucos problemas da engenharia possuem soluções analíticas conhecidas. Ao longo do tempo tais métodos demonstraram ser uma poderosa ferramenta na resolução de modelos de difícil resolução matemática e, por isso, há muito vêm chamando a atenção da comunidade científica.

Tais métodos possuem como principal finalidade a resolução de equações que descrevam o comportamento de um fenômeno físico através de técnicas de discretização do domínio e/ou contorno. Em geral, quanto melhor discretizado for o problema, mais preciso serão os resultados, em compensação, maior será o custo computacional. Na literatura, os métodos numéricos mais conhecidos são: Método das Diferenças Finitas (MDF); Método dos Elementos Finitos (MEF); Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O Método das Diferenças Finitas (MDF) foi o primeiro método numérico amplamente conhecido e bastante utilizado pelos pesquisadores. No MDF, o domínio é substituído por um conjunto estruturado de pontos, que são agrupados em moléculas que descrevem o comportamento local de uma equação. Isto resulta num sistema de equações lineares que dá origem a uma única solução desde que as condições de contorno do problema tenham sido

satisfeitas. Não utiliza integração numérica, trabalha com matrizes esparsas, e possui formulação matemática simples. Apesar da fácil implementação e de produzir soluções estáveis, o MDF apresenta dificuldades em se modificar o tamanho do quociente entre os pontos em algumas regiões, não sendo, portanto, adequado para modelos de domínios irregulares (JICHUN *et al.*, 2002).

No Método dos Elementos Finitos (MEF), a equação diferencial que governa o problema é transformada em um sistema de equações integrais equivalentes que contém as incógnitas a serem determinadas. Estas equações integrais são aproximadas através da discretização de todo o domínio em elementos, onde as incógnitas são interpoladas usando funções simples, substituindo as funções desconhecidas por seus valores nodais. Na engenharia, o MEF já é consagrado, sendo aplicado a muitos problemas práticos, inclusive de geometria complexas. Uma de suas grandes desvantagens é que para se obter resultados precisos há a necessidade de refinamento da malha, o que implica em um número maior de elementos e, conseqüentemente, de incógnitas, gerando grandes sistemas matriciais.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem sido apresentado como uma boa alternativa para fugir das desvantagens apresentadas pelo MDF e MEF (BREBBIA *et al.*, 1984; BREBBIA e DOMINGUES, 1989). Na formulação clássica, o MEC baseia-se em uma equação integral que envolve incógnitas apenas do contorno. Uma das grandes vantagens do MEC sobre o MDF e o MEF é que apenas o contorno é discretizado. A discretização processada só no contorno gera sistemas de equações com um menor número de graus de liberdade e, portanto, requer um menor tempo computacional, dando maior estabilidade numérica às soluções. Todavia, se a equação a ser resolvida não é homogênea, o MEC torna-se menos atrativo, devido à formulação integral que envolve uma integral de domínio, que requer técnicas especiais para ser transformada em integrais de contorno. Além disso, problemas de conectividade, para a aplicação do MEC em duas dimensões, são facilmente

resolvidos, no entanto, em três dimensões, utiliza-se elementos de superfície e a questão da conectividade deve ser considerada.

Recentemente, os Métodos Sem Malha ou Métodos Meshless vêm recebendo considerável atenção em relação aos métodos numéricos clássicos, isto se deve a sua fácil discretização, que se contrapõe a dificuldade comum a todos os métodos malha rígida, que é a obtenção de uma malha adequada e o grande esforço computacional empregado na geração da mesma. Em concomitância com o avanço computacional, o desenvolvimento de algoritmos mais eficientes e robustos vem sendo alvo de pesquisas e, os algoritmos de malha rígida que antes criavam um gargalo computacional hoje vem perdendo espaço para os métodos que não dependem de malha. Os Métodos Sem Malha (Meshless) vêm se sobressaindo para os mais diversos tipos de modelagem, não apenas por facilitar a discretização espacial do modelo, mas também por mostrar-se uma poderosa ferramenta de análise com características versáteis e de precisão controlada.

Ressaltando sua característica de versatilidade, uma breve pesquisa sobre os Métodos Meshless revela as mais variadas abordagens decorrentes de diversas origens matemáticas, tornando-os utilizáveis em uma ampla gama de aplicações. Devido às várias origens matemática e a adaptabilidade necessária para cada conjunto físico, diversos Métodos Meshless foram e estão sendo desenvolvidos, e classificar tais métodos não é tarefa simples. Sob uma luz geral pode-se dizer que grande parte destes ou é baseada nas formulações de MEF ou de MEC.

Apesar das variadas abordagens, todos os esquemas sem malha não necessitam do conceito de conectividade e ignoram o uso convencional de malha em algum grau. Métodos de malha rígida, como por exemplo, o método de elementos finitos (MEF), métodos de diferenças finitas (MDF), e volumes finitos métodos (MVF), tradicionalmente têm contado

com o uso de elementos, redes entrelaçadas, ou volumes finitos como discretização espacial do domínio existente. Por outro lado, os sistemas sem malha requerem apenas nuvens de pontos, a partir dos quais as equações governantes podem ser discretizadas.

Dentre as diversas formulações existentes para os Métodos Meshless, o presente trabalho optou por utilizar o Método das Soluções Fundamentais (MSF), um método baseado no uso das soluções fundamentais desenvolvidas, inicialmente, para o MEC. O fenômeno físico a ser estudado é o fenômeno da difusão e, optou-se por utilizar o MSF para modelar este fenômeno, pois além das soluções fundamentais já estarem disponíveis, o método possui grande simplicidade de implementação com relativa precisão. Este método vem sendo bastante estudado e utilizado em problemas (estáticos e dinâmicos) em que se faz uso de soluções fundamentais estáticas, mas a nova proposta é utilizá-lo na resolução de problemas de difusão dinâmica, ou seja, o método modelará problemas em que o fluxo de fluido é dependente do domínio do tempo fazendo uso da resposta fundamental transiente. A modelagem do fenômeno da difusão pode ser ilustrada praticamente na Engenharia como quaisquer problemas com distribuições de potenciais, como por exemplo, a temperatura em problemas de condução de calor, a concentração de substâncias em problemas sem convecção em um meio ao longo do tempo, tendo aplicações nas mais diversas áreas.

Além da adequação do MSF ao modelo, sua escolha se deu também porque, como o MSF é um método baseado no MEC, pode-se fazer uso de uma das principais características do Método dos Elementos de Contorno que é tornar possível a redução da nuvem de pontos e a dimensionalidade do problema em uma ordem. O MEC quando aplicado à equação da difusão exige o tratamento tanto da derivada temporal, através da transformada de Laplace (ZHU SP, 1998; ZHU SP *et al.*, 1998; SUTRADHAR *et al.*, 2002) ou diferenças finitas (BULGAKOV *et al.*, 1998), quanto da equação se esta não for homogênea aplicando o Método da Reciprocidade Dual (NARDINI e BREBBIA, 1982). Entretanto, o maior problema

enfrentado pelo MEC é a determinação das integrais singulares no contorno, as quais demandam grande esforço computacional.

Através da utilização do Método das Soluções Fundamentais tais problemas podem ser aliviados, isto porque, por ser um método de contorno indireto ele não faz uso de integração numérica em geral, e em particular evita a singularidade da solução fundamental do problema. A solução fundamental transiente da difusão possui dois tipos de singularidade, uma temporal e outra espacial, e estas estão diretamente ligadas ao conceito de inserção de pontos virtuais (fontes virtuais).

A ideia principal do MSF consiste em aproximar a solução do problema através da combinação linear de soluções fundamentais geradas pela aplicação das fontes virtuais nos pontos campo existentes no contorno. Portanto, o problema original é reduzido à determinação dos coeficientes desconhecidos das soluções fundamentais, fazendo com que a aproximação satisfaça as condições de contorno. Estas soluções fundamentais apresentam singularidades que desaparecem quando os pontos fonte são inseridos corretamente, para o caso transiente estes pontos ou não podem coincidir geometricamente com os pontos campo ou não podem estar aplicados no mesmo tempo.

Apesar da grande vantagem de não apresentar integrais singulares, o MSF não teve a devida consagração justamente devido a escolha de como posicionar os pontos fonte (no tempo e no espaço) em relação aos pontos campo. A particularidade do MSF é fazer uso de fontes virtuais alocadas exteriormente a geometria real do problema, gerando assim, uma gama de pontos que nunca coincidirão com os pontos campo propostos para o modelo, mas para o caso de problemas dinâmicos, que envolvem a variável tempo, além da posição geométrica dos pontos fonte virtuais em relação aos pontos campo devem ser considerados a posição entre mesmos pontos porém em relação ao tempo. Surge assim uma nova dificuldade,

a posição temporal ocupada pelas fontes em relação aos pontos campo. O fato é que posicionar tais fontes virtuais com precisão ainda é uma incógnita, mas tal desvantagem pode ser tratada de algumas maneiras. Entretanto, o estudo da colocação destes pontos fictícios será realizado e poderá ser analisada a relação destes com a precisão de resultados.

A proposta desta dissertação é fazer uso diretamente da solução fundamental transiente já existente para o problema de difusão e aplicá-la ao MSF, não fazendo uso de nenhum esquema especial de discretização temporal. O método da reciprocidade dual não será utilizado, visto que, o problema modelado é regido por uma equação diferencial homogênea.

Como todo processo de difusão é evolutivo no tempo, a partir das condições iniciais do problema os termos transientes do modelo podem ser calculados através dos resultados gerados pelo MSF em vários passos de tempo. Várias formas e problemas foram considerados, os resultados obtidos mostraram-se dependentes da distância entre a geometria do problema e a superfície virtual e dependente também, da diferença entre o tempo de aplicação da fonte em relação ao tempo de captação no campo.

1.1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O Método das Soluções Fundamentais (MSF) foi proposto primeiramente na década de sessenta, por (KUPRADZE e ALEKSIDE, 1964), e durante as décadas atuais têm reaparecido nas pesquisas da comunidade acadêmica. O MSF é conhecido na literatura por diferentes nomes, como por exemplo: Método de Simulação de Potencial “*Charge Simulation Method*” (AMANO, 1994; RAAMACHANDRAN e RAJAMOHAN, 1996) e o Método de Colocação no Contorno, “*Boundary Colocation Method*” (LEVIN e TAL, 1986) e Método da

Superposição “*Superposition Method*” (KOOPMAN *et al.*, 1988; BURGESS e MAHAJERIN, 1984).

O fato de o MSF requerer o correto posicionamento das fontes virtuais em relação ao domínio do corpo gera um problema de precisão para o modelo, tal desvantagem foi estudada e algumas técnicas surgiram na intenção de tratar tal problema. Primeiramente, pode-se estabelecer que as fontes virtuais são fixas em uma superfície de mesma geometria da real, porém maior, para que o domínio possa ser todo envolvido, assunto que pode ser visto em (PATTERSON e SHEIKH, 1983; REDEKOP e THOMPSON, 1983; CHEN, 1995; GOLBERG, 1995b; GOLBERG *et al.*, 1996; PARTRIDGE e SENSALÉ, 2000; MEDEIROS *et al.*, 2000; MEDEIROS e PARTRIDGE, 2001). Outra opção de localizar estes pontos é usar técnicas de otimização, técnica a qual requer um alto custo computacional e que foi estudada por (KARAGEORGHIS e FAIRWEATHER, 1987; KARAGEORGHIS e FAIRWEATHER, 1989a; KARAGEORGHIS, 1992; FAIRWEATHER e KARAGEORGHIS, 1998; POULLIKKAS *et al.*, 1998; BERGER e KARAGEORGHIS, 1999; KARAGEORGHIS e FAIRWEATHER, 1999^a; KARAGEORGHIS e FAIRWEATHER, 1999b).

Na sua forma original, o MSF, semelhante ao MEC, é aplicável a problemas descritos por equações homogêneas, para os quais uma solução fundamental completa seja disponível. (CHEN, 1995; GOLBERG, 1995b; GOLBERG *et al.*, 1996), aplicou o Método das Soluções na resolução de problemas regidos pela equação de Poisson. Mais tarde, (FAIRWEATHER e KARAGEORGHIS, 1998; POULLIKKAS *et al.*, 1998) utilizaram com êxito o MSF para resolver problemas de valor de contorno harmônicos e bi-harmônicos (KARAGEORGHIS e FAIRWEATHER, 1987; KARAGEORGHIS e FAIRWEATHER, 1988; KARAGEORGHIS e FAIRWEATHER, 1989b; POULLIKKAS *et al.*, 1998^a; POULLIKKAS *et al.*, 1998b).

DEMEY (1985) considerou a resolução unidimensional do problema da transferência de calor transiente através do método dos elementos de contorno. Posteriormente sua abordagem foi utilizada no MSF para problemas bidimensionais com soluções fundamentais integradas no tempo por WALKER (1992) e WALKER (1997).

Para problemas de difusão dinâmico CHEN *et al.*, (1998), BALAKRISHNAN e RAMACHANDRAN (2000) expandiram a aplicação do MSF utilizando a solução fundamental de Helmholtz Modificada. Grande parte dos trabalhos até então fazem uso da transformada de Laplace ou através de diferenças finitas para tratar a derivada temporal e obter respostas evolutivas no tempo.

Recentemente novas técnicas para tratar a equação diferencial representante do problema da difusão vêm sendo desenvolvidas. Como o problema já possui resposta fundamental transiente não seria necessário nenhum esquema de especial de integração no tempo, seria necessário apenas elaborar técnicas de posicionamento temporal dos pontos fonte (além do posicionamento geométrico). Essas técnicas podem ser vistas em YOUNG (2004), YOUNG & FAN (2004), YOUNG *et al.* (2014), REEVE & JOHANSSON (2013).

1.2. OBJETIVOS E CONTEÚDO

A presente dissertação possui como abordagem principal a análise de problemas de dinâmica dos fluidos. Tais problemas podem ser formulados através dos princípios gerais da mecânica do contínuo, sendo possível assim que os princípios físicos envolvidos sejam descritos em termos de equações diferenciais.

Para que se possa realizar a análise da aplicação do Método das Soluções Fundamentais em problemas de difusão, serão estudados modelos bidimensionais regidos por

equações diferenciais que possuam respostas fundamentais evolutivas no tempo. O principal foco será a utilização de soluções fundamentais já transientes na aplicação do método, ou seja, não será necessária a utilização de nenhuma técnica especial para o tratamento das derivadas temporais. Além da avaliação dos resultados do modelo proposto, será analisado também a relação destes com as diferentes localizações das fontes virtuais requerida pelo método, comparando os resultados entre si, entre a solução analítica e soluções disponíveis na literatura, a fim de se estabelecer as vantagens e desvantagens relativas ao método.

O conteúdo presente nessa dissertação foi dividido em mais quatro capítulos. No segundo capítulo é realizado um breve estudo sobre os conceitos básicos relacionados aos meios difusivos transientes e suas equações governantes assim como a apresentação das condições de contorno e condições iniciais necessárias para a definição e análise do problema dinâmico.

Ao final do segundo capítulo apresenta-se a formulação matemática do Método das Soluções Fundamentais, partindo das funções de Green. Ressalta-se que o problema em questão é regido por equações homogêneas bidimensionais.

O terceiro capítulo apresenta o tratamento numérico das equações do modelo, as formulações básicas para o Método das soluções Fundamentais no domínio do tempo para resolução de problemas de potencial.

O capítulo quatro traz as aplicações e análises utilizando todos os métodos discutidos ao longo do trabalho. As análises apresentadas tem o intuito de validar e demonstrar as vantagens e desvantagens advindas da nova metodologia.

No quinto capítulo é feita uma conclusão sobre o presente trabalho assim como sugestões de continuidade dessa pesquisa.

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

A difusão é o fenômeno de movimento livre de partículas (fluido ou gás) que acontece apenas quando o sistema não está em equilíbrio. No fenômeno da difusão, a distribuição espacial de moléculas não deve ser homogênea, deve existir uma diferença de potencial que pode se traduzir em um gradiente.

Um dos fenômenos mais comuns que envolvem difusão é a transmissão de calor ou propagação térmica, tais processos recebem esta denominação, pois representam a transição de energia térmica (que durante a transferência recebe o nome de calor) de um sistema para outro ou de uma parte para outra do mesmo sistema.

Como a transmissão de calor é apenas uma particularização do fenômeno da difusão, para melhor entendimento o presente capítulo apresentará as equações governantes do problema de propagação térmica, assim como serão apresentados conceitos e leis básicas da transmissão de calor até a dedução da equação geral diferencial da difusão.

2.1. CAMPO ESCALAR

Segundo LOWFFLER NETO (1988), a teoria de campo ou potencial constitui-se em uma abordagem recente, desenvolvida principalmente no século passado, que possui como objetivo integrar os mais diversos problemas físicos presentes na natureza segundo um mesmo enfoque matemático.

Fisicamente um campo escalar significa a distribuição espacial de uma magnitude escalar, isto é, a cada ponto de uma determinada região do domínio do sistema é associado a um valor numérico que representa uma quantidade. Esse valor ou potencial podem especificar temperatura, pressão, densidade elétrica, deslocamentos unidirecionais e outras grandezas.

Essa totalidade de quantidades físicas constitui um campo, que toma a designação específica de cada fenômeno, tal como: campo gravitacional, campo elétrico, campo térmico, campo de deslocamentos, etc.

Para exemplificar o conceito de campo escalar, considere uma placa de material sólido que é aquecida em uma extremidade e resfriada em outra. Devido à transmissão de calor que ocorre da extremidade mais quente para extremidade resfriada, os pontos localizados no interior da barra sofrerão alteração de temperatura no decorrer do processo. Logo, além de ser dependente o tempo que ocorre o fenômeno a temperatura será função das coordenadas cartesianas (x,y,z) da peça, caracterizando assim um campo térmico.

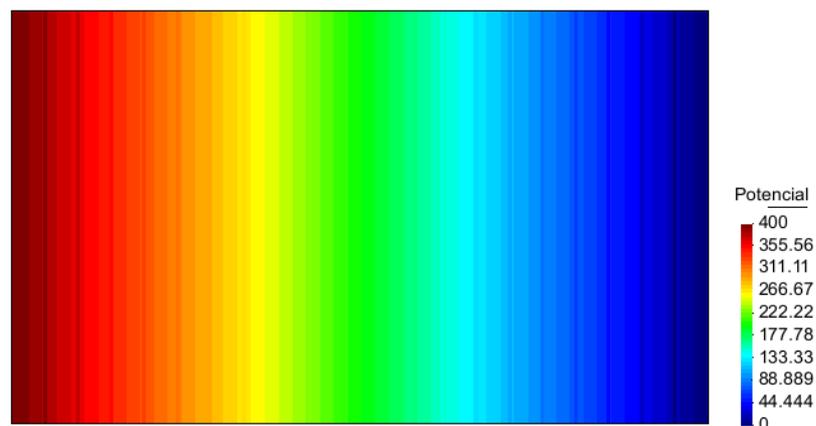


Figura 2.1: Exemplo de distribuição de um campo escalar

Outra forma de trabalhar com os campos escalares consiste-se em se definir “linhas” ou contornos imaginários em todos os pontos campo que possuem o mesmo valor de potencial. O modelo matemático concebido pela teoria de campos estabelece esta rede de linhas de fluxo e linhas equipotenciais, que representam o comportamento da grandeza física no espaço considerado. Para o caso exemplificado pela Figura 2.2 observam-se linhas isotérmicas ilustradas a seguir.

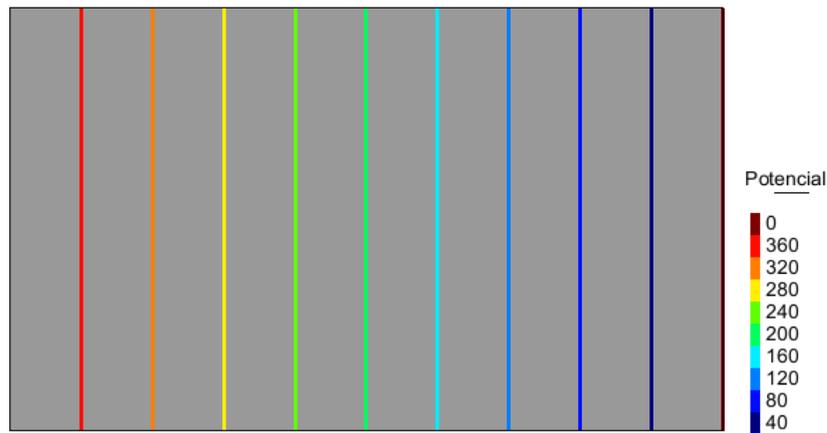


Figura 2.2: Linhas Isotérmicas

A partir do conhecimento da existência de linhas equipotenciais o problema que antes era modelado de forma bidimensional agora pode ser representado de forma unidimensional. No exemplo acima torna-se desnecessário o processamento dos potenciais em toda a placa, apenas uma linha de pontos horizontal já é capaz de representar o fenômeno físico em sua totalidade. Tal fato é de grande interesse em uma gama de problemas estudados na mecânica computacional, isto devido ao fato de gerar uma grande redução no esforço computacional.

Com base nas linhas de fluxo pode-se, também, estabelecer um vetor que indica o sentido e a direção na qual, obtém-se o maior incremento possível no valor do potencial a partir do qual foi definido o campo escalar. Constrói-se assim, a partir do campo escalar e do operador gradiente, um campo vetorial, que atrela a cada ponto do espaço o correspondente vetor gradiente para qualquer grandeza escalar, no caso ilustrado, tem-se um gradiente de temperatura.

Assim, através da teoria do campo escalar o fenômeno da difusão pode ser completamente representado. Os potenciais serão conhecidos em todos os pontos do corpo em análise e o vetor gradiente deste campo representará o fluxo de potencial existente no problema, pode-se então, analisar o caso por completo.

2.2. EQUACIONAMENTO GERAL

O calor, em sua essência, é transmitido ou se “move” mediante um gradiente de temperatura, ou seja, este é propagado através da transmissão de energia de uma região para outra como resultado de uma diferença de temperatura entre as regiões. Como existem diferenças de temperatura em todo o universo, os fenômenos da transmissão de calor são tão universais quanto os associados às atrações gravitacionais. Todos os processos de transmissão de calor envolvem o intercâmbio e/ou conversão de energia térmica, estes processos são: a condução, a convecção e a radiação.

O fenômeno da difusão está diretamente ligado ao processo de condução. A condução ocorre quando existe diferença de temperatura dentro de um meio ou entre diferentes meios em contato físico, gerando assim, fluxo de calor por condução. Neste processo ocorre a transformação de energia cinética em energia térmica, isto se deve ao fato de que, em zonas de maior temperatura as moléculas possuem maior energia cinética e, quando, estas colidem com moléculas existentes em zonas de menor temperatura (menos energia cinética) a energia é desprendida na forma de calor.

Para executar a análise dos problemas de transmissão de calor, as leis e relações físicas que governam os mecanismos de transmissão de calor devem ser investigadas. Como o enfoque deste trabalho é a difusão, será usada a relação básica para transmissão de calor por condução, que foi proposta por J.B. Fourier em 1822.

A Lei de Fourier é uma lei fenomenológica, isto é, uma lei desenvolvida a partir de fenômenos observados e não desenvolvida por princípios fundamentais, através desta é possível quantificar o processo de transferência de calor através da seguinte equação:

$$\dot{q} = -\alpha A \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

onde:

\dot{q} = fluxo de calor transmitido por unidade de tempo

α = condutividade térmica do material

A = área da seção da qual o calor flui por condução

$\frac{dT}{dx}$ = gradiente de temperatura na seção

A Lei de Fourier estabelece que, se for mantida uma diferença de temperaturas através de um meio, haverá o aparecimento de um fluxo de energia na forma de condução de calor através do mesmo. Este fluxo é diretamente proporcional a área da seção transversal e à propriedade do material mas é inversamente proporcional à distância entre as superfícies que provocam o fluxo. O sinal negativo foi adicionado para que o fluxo seja positivo no sentido da propagação do calor.

Considere agora um corpo em forma de paralelepípedo de lados paralelos dx, dy, dz e orientados segundo o eixo cartesiano mostrado na Figura 2.3.

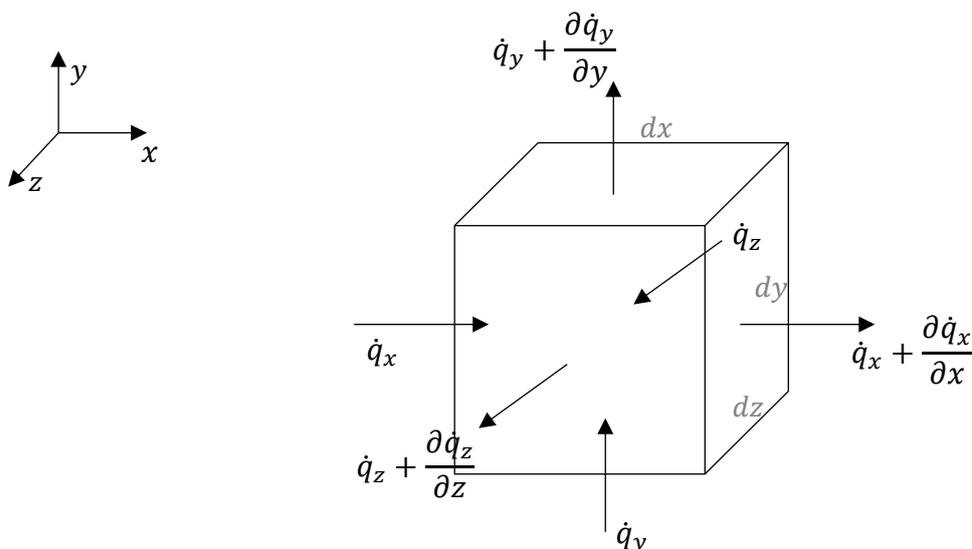


Figura 2.3. Sistema termodinâmico para dedução da equação da difusão

A 1ª Lei da Termodinâmica diz que um sistema não pode criar ou destruir energia, mas apenas transmiti-la na forma de calor e/ou na forma de trabalho. Aplicando-a no corpo da figura 2.3 tem-se:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \dot{q} - \dot{w} \quad (2.2)$$

onde $\frac{\partial E}{\partial t}$ representa a variação da energia total do sistema, \dot{q} é o fluxo líquido de calor e \dot{w} é o trabalho realizado pelo sistema.

Sabe-se que a energia total do sistema é composta pela energia potencial gravitacional (E_p), energia interna do corpo (E_i), e energia cinética (E_c):

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial E_c}{\partial t} \quad (2.3.a)$$

Considerando apenas o fluxo de calor no sistema e o reescrevendo em termos de massa específica (ρ) e calor específico (c), tem-se que a energia total do sistema será:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E_i}{\partial t} = \rho c (dx dy dz) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3.b)$$

O trabalho realizado pelo sistema é dado como a taxa de geração interna de calor por unidade de tempo:

$$\dot{w} = (dx dy dz) \dot{q}_g \quad (2.4)$$

onde \dot{q}_g representa a taxa de geração interna de calor ou fonte de calor por unidade de volume.

O fluxo líquido de calor no sistema é dado pela relação entre a quantidade de calor que entra no corpo por unidade tempo e a quantidade de calor sai por unidade de tempo:

$$\dot{q} = (\dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z) - (\dot{q}_{x+\Delta x} + \dot{q}_{y+\Delta y} + \dot{q}_{z+\Delta z}) \quad (2.5)$$

O calor transmitido para dentro do corpo pode ser escrito de acordo com a equação

(2.1) como:

$$\begin{aligned} \dot{q}_x &= \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) dydz \\ \dot{q}_y &= \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx dz \\ \dot{q}_z &= \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial z}\right) dx dy \end{aligned} \tag{2.6}$$

Já o calor transmitido para fora do corpo é representado:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{x+\Delta x} &= \left[\left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx \right] dydz \\ \dot{q}_{y+\Delta y} &= \left[\left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial y}\right) dy \right] dx dz \\ \dot{q}_{z+\Delta z} &= \left[\left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial z}\right) dz \right] dx dy \end{aligned} \tag{2.7}$$

Substituindo as equações (2.6) e (2.7) na equação (2.5):

$$\begin{aligned} \dot{q}_x - \dot{q}_{x+\Delta x} &= \frac{\partial \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x} dx dy dz \\ \dot{q}_y - \dot{q}_{y+\Delta y} &= \frac{\partial \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y}\right)}{\partial y} dx dy dz \\ \dot{q}_z - \dot{q}_{z+\Delta z} &= \frac{\partial \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial z}\right)}{\partial z} dx dy dz \end{aligned} \tag{2.8}$$

Aplicando-se as equações (2.8), (2.4) e (2.3.b) na equação do balanço de energia (2.2) e dividindo todos os termos por $dx dy dz$, tem-se:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_g \quad (2.9)$$

Se o sistema for considerado homogêneo, que o calor específico c juntamente com a massa específica ρ são independentes da temperatura e que α seja uniforme, reescreve-se a equação (2.9) como:

$$\frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_g}{\alpha} \quad (2.10)$$

onde a constante $k = \alpha/\rho c$ é chamada de *difusividade térmica*. A equação (2.10) é conhecida como a *equação geral de condução de calor*, e estabelece a distribuição de temperatura e a transmissão de calor por condução em um sólido que possui propriedades físicas uniformes.

Adotando a teoria do campo escalar pode-se generalizar a equação (2.10) para quaisquer problemas de difusão:

$$\frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b \quad (2.11)$$

sabe-se que U representa o potencial a ser calculado e b é uma fonte qualquer.

Algumas particularizações da equação (2.11) podem ser realizadas como, por exemplo, se não houver fontes no sistema:

$$\frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.12)$$

Se o sistema estiver em regime permanente (sem variação temporal do potencial) mas com fonte, a equação (2.11) se reduzirá a *Equação de Poisson*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b = 0 \quad (2.13)$$

Para o mesmo estado da equação (2.13), a distribuição de potencial num corpo sem fontes deverá satisfazer a *Equação de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (2.14)$$

2.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Os sistemas examinados são constituídos de um domínio $\Omega(\mathbf{X})$, onde \mathbf{X} representa as variáveis espaciais do campo, delimitado por um contorno $\Gamma(\mathbf{X}) = \Gamma_u(\mathbf{X}) + \Gamma_q(\mathbf{X})$ sujeito a condições específicas para cada categoria de problemas. De um modo geral $\Gamma_u(\mathbf{X})$ é a parte do contorno pertencente a $\Gamma(\mathbf{X})$ onde são prescritas as condições de contorno essenciais (potenciais) e $\Gamma_q(\mathbf{X})$ representa as regiões onde são conhecidas as condições de contorno naturais (derivadas do potencial com relação à normal ao contorno).

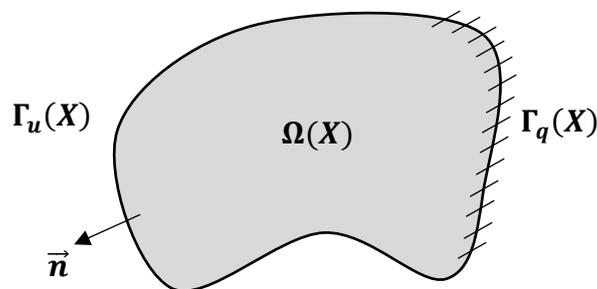


Figura 2.4. Representação do problema analisado

No caso de problemas estacionários, regidos pela *Equação de Laplace* (equação (2.14)) as condições de contorno são dadas por:

$$U(\mathbf{X}) = \bar{U}(\mathbf{X}) \text{ em } \Gamma_u(\mathbf{X}) \quad (2.15.a)$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{X})}{\partial n} = \frac{\partial \bar{U}(\mathbf{X})}{\partial n} \text{ em } \Gamma_q(\mathbf{X}) \quad (2.15.b)$$

Para problemas transientes, além das condições de contorno anteriores que devem se estender durante todo o processo é necessário a seguinte condição inicial para garantir que o problema de valor de contorno seja bem posto:

$$U(\mathbf{X}, t) = \bar{U}(\mathbf{X}, t) \text{ em } \Gamma_u(\mathbf{X}) \quad (2.16.a)$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{X}, t)}{\partial n} = \frac{\partial \bar{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \text{ em } \Gamma_q(\mathbf{X}) \quad (2.16.b)$$

$$U(\mathbf{X}, 0) = \bar{U}(\mathbf{X}, 0) = U_0 \text{ em } \Omega(\mathbf{X}) \quad (2.16.c)$$

3. MÉTODO DAS SOLUÇÕES

FUNDAMENTAIS

3. MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Após a obtenção da representação matemática do modelo físico através de um sistema de equações diferenciais com um conjunto de condições de contorno e iniciais prescritas, torna-se possível a resolução do problema analiticamente ou através dos métodos numéricos. Para problemas de geometria ou condições de contorno complexas, resolver analiticamente o problema torna-se uma tarefa impossível, em contrapartida, com a discretização das equações diferenciais através de um método numérico a resolução deste torna-se viável e em muitos casos a única forma de resolução.

Dentre os mais variados métodos numéricos descritos na literatura, optou-se por utilizar neste trabalho um método sem malha baseado na formulação do Método dos Elementos de Contorno, o Método das Soluções Fundamentais (MSF). Vale destacar que o MSF é um método de colocação verdadeiramente sem malha, pois este não utiliza nenhum tipo de elemento ou célula afim de resolver quaisquer integrais advindas do problema.

Inicialmente será desenvolvida a equação integral de contorno para a difusão transiente e, a partir desta, serão obtidas as soluções fundamentais que satisfazem o problema em questão no domínio do tempo. Assim, as equações que regem o MSF poderão ser desenvolvidas para que possa ser realizada a análise acerca da aplicabilidade do método.

3.1. EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO

O problema de valor de contorno analisado neste trabalho é descrito pela equação (2.12) e possui condições de contorno e iniciais expressas pelas equações (2.16).

Reescrevendo-o:

$$\frac{\partial U(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = k \nabla^2 U(\mathbf{X}, t) \text{ em } \Omega(\mathbf{X}) \quad (3.1)$$

$$U(\mathbf{X}, t) = \bar{U}(\mathbf{X}, t) \text{ em } \Gamma_u(\mathbf{X}) \quad (3.2.a)$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{X}, t)}{\partial n} = P(\mathbf{X}, t) \text{ em } \Gamma_q(\mathbf{X}) \quad (3.2.b)$$

$$U(\mathbf{X}, 0) = \bar{U}(\mathbf{X}, 0) = U_0 \text{ em } \Omega(\mathbf{X}) \quad (3.2.c)$$

onde ∇^2 é operador Laplaciano de derivadas parciais.

Segundo WROBEL (1981) três formulações podem ser usadas para transformar a equação parcial em uma equação integral. A primeira faz uso da transformada de Laplace, a segunda utiliza diferenças finitas para aproximar a variação no tempo e a terceira faz uso de soluções fundamentais dependentes no tempo, esquema que será discutido a seguir.

As formulações que estabelecem a equação integral do problema no domínio do tempo são resolvidas através da utilização de esquemas de avanços numéricos e, já que as soluções fundamentais são dependentes do tempo, tem-se:

$$U^* = U^*(\mathbf{X}, \xi; t_F, t) \quad (3.3)$$

esta solução corresponde ao potencial solução de um problema de campo escalar transiente, onde um carregamento unitário concentrado é aplicado impulsivamente, podendo ser representado pela função delta de Dirac no tempo.

Assim, na equação (3.3) t_F é o tempo de observação (campo) e t é o tempo de aplicação da fonte. Uma interpretação do comportamento de soluções fundamentais já transientes pode ser visto na propagação de ondas térmicas, tais ondas possuem velocidade de propagação o que com consequência, faz com que o alcance da frente de onda seja delimitado num dado instante de tempo. Ou seja, desde o momento de aplicação da fonte até o momento de captação do seu efeito nos pontos campo existirão zonas que foram perturbadas e zonas de repouso (com potencial nulo), esta condição pode ser representada por:

$$U^*(\mathbf{X}, \xi; t_F, t) = 0 \text{ sempre que } t_F - t < \mathbf{X} - \xi \quad (3.4)$$

e é conhecida como condição de causalidade. A interpretação física desta condição seria o fato de o potencial ser nulo quando o carregamento ainda não foi aplicado.

Apenas por motivos de conveniência, para que se possa realizar a dedução das soluções fundamentais transientes a equação (3.1) será escrita em notação indicial:

$$kU_{,ii} = \dot{U} \quad (3.4)$$

sendo $\dot{U} = \frac{\partial U(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$ e $\nabla^2 U(\mathbf{X}, t) = U_{,ii}$.

Considerando as condições de homogeneidade e isotropia, a formulação integral da equação (3.4) no espaço e no tempo é dada por:

$$k \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_F} U_{,ii} U^* dt d\Omega = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_F} \dot{U} U^* dt d\Omega \quad (3.5)$$

Desenvolvendo o primeiro termo da equação (3.5) através da aplicação da técnica de integração de Green:

$$\int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} U_{,ii} U^* d\Omega dt = \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} U_{,ii}^* U d\Omega dt - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} U Q^* d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} Q U^* d\Gamma dt \quad (3.6)$$

O lado direito da equação (3.5) é desenvolvido de maneira análoga para o domínio do tempo:

$$\int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_F} \dot{U} U^* dt d\Omega = \int_{\Omega} [U U^*]_{t_0}^{t_F} d\Omega - \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_F} U \dot{U}^* dt d\Omega \quad (3.7)$$

Substituindo as equações (3.6) e (3.7) na equação (3.5) chega-se:

$$\begin{aligned} k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} (U_{,ii}^* + U^*) U d\Omega dt \\ = k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} U Q^* d\Gamma dt - k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} Q U^* d\Gamma dt + \int_{\Omega} [U U^*]_{t_0}^{t_F} d\Omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicando-se as propriedades do delta de Dirac e a condição de causalidade chega-se à Equação Integral de Contorno, válida para todos os pontos do contorno ou do domínio:

$$\begin{aligned} c(\xi) U(\xi, t_F) = & \alpha \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} Q(\mathbf{X}, t) U^*(\mathbf{X}, \xi; t_F, t) d\Gamma(\mathbf{X}) dt \\ & - \alpha \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} U(\mathbf{X}, t) Q^*(\mathbf{X}, \xi; t_F, t) d\Gamma(\mathbf{X}) dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $c(\xi)$ é uma constante dependente da geometria do problema, ξ são as coordenadas do ponto fonte e \mathbf{X} são as coordenadas do ponto campo.

As soluções fundamentais U^* e sua derivada Q^* são funções de Green que descrevem o campo de temperatura gerado através de uma fonte de calor unitária aplicada no ponto ξ e no tempo t :

$$U^*(\mathbf{X}, \xi; t_F, t) = \frac{1}{(4\pi\alpha\tau)^{d/2}} \exp\left[\frac{-r^2(\mathbf{X}, \xi)}{4\alpha\tau}\right] H(\tau) \quad (3.10.a)$$

$$Q^*(\mathbf{X}, \xi; t_F, t) = \frac{-r(\mathbf{X}, \xi) \frac{\partial r(\mathbf{X}, \xi)}{\partial n}}{8\pi\alpha\tau^2} \exp\left[\frac{-r^2(\mathbf{X}, \xi)}{4\alpha\tau}\right] \quad (3.10.b)$$

onde: $\tau = t_F - t$

d – dimensão do modelo

$r(\mathbf{X}, \xi)$ – raio medido entre o ponto fonte e o ponto campo em questão

$\frac{\partial r(\mathbf{X}, \xi)}{\partial n}$ – projeção do raio sobre a normal do contorno

$H(\tau)$ – função de Heaviside

Destaca-se que a função de Heaviside foi incluída para enfatizar o fato de que a solução fundamental é zero se $t > t_F$.

O comportamento da solução fundamental de potencial ($U^*(\mathbf{X}, \xi; t_F, t)$) ao longo do tempo para um raio constante, ou seja, com distâncias fixas entre um ponto fonte e um ponto campo, pode ser observado na figura 3.1. Já a figura 3.2 contém o gráfico com o comportamento da solução fundamental com distâncias variáveis mas com tempos fixos, isto é, o comportamento da solução quando analisada para pontos diferentemente espaçados na malha no mesmo instante de tempo.

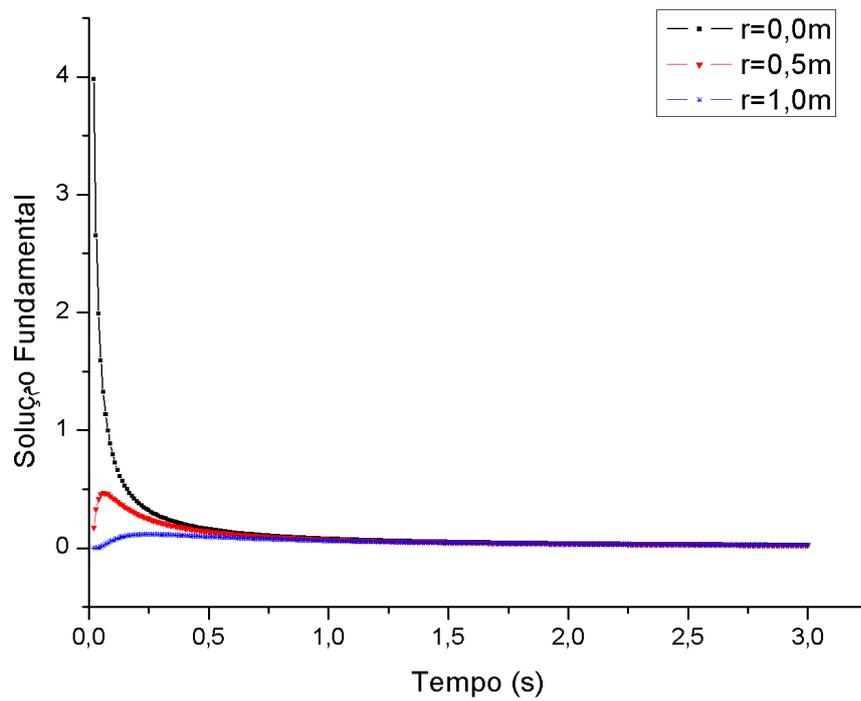


Figura 3.1. Solução Fundamental transiente – Distâncias fixas

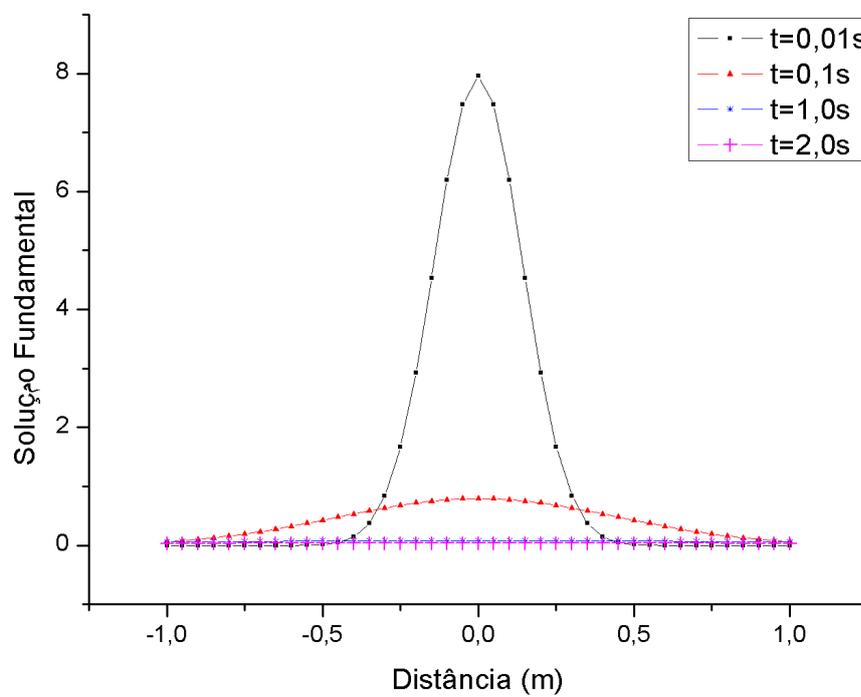


Figura 3.2. Solução Fundamental transiente – Tempos fixos

3.2. MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS TRANSIENTES

Para o problema de difusão transiente descrito pela equação (3.1) com condições de contorno e inicial prescrita pelas equações (3.2), sabe-se que as soluções fundamentais representadas pelas equações (3.10) devem satisfazer:

$$\frac{\partial U^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}; t_F, t)}{\partial t} = k\nabla^2 U^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}; t_F, t) + \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})\delta(t_F - t) \quad (3.11)$$

onde $\delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})$ é a função delta de Dirac em relação as coordenadas geométricas e $\delta(t_F - t)$ é a função delta de Dirac relacionada as coordenadas temporais. A função delta de Dirac possui como principal característica gerar um ponto de singularidade quando $\mathbf{X} = \boldsymbol{\xi}$ ou $t_F = t$ e possuir valor zero em todos os outros pontos. Matematicamente:

$$\delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \infty, & \text{se } \mathbf{X} = \boldsymbol{\xi} \\ 0, & \text{se } \mathbf{X} \neq \boldsymbol{\xi} \end{cases} \quad (3.12.a)$$

$$\delta(t_F - t) = \begin{cases} \infty, & \text{se } t_F = t \\ 0, & \text{se } t_F \neq t \end{cases} \quad (3.12.b)$$

E,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{X} = 1 \quad (3.13.a)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(t_F - t) dt = 1$$

(3.13.b)

tais propriedades fazem com que o delta de Dirac seja considerado uma fonte de valor unitário em todo do domínio. Para que não haja singularidade na aplicação das soluções fundamentais no problema torna-se necessário a cuidadosa escolha de posicionar geométrica e temporalmente os pontos fonte, de modo que, estes nunca poderão ter coordenadas coincidentes em ambos os domínios. A forma como se dá a escolha dos pontos fontes será descrito no item 3.3.

Admitindo que pontos fontes fossem posicionados corretamente e como a solução fundamental mostrada satisfaz a equação homogênea da difusão, é possível admitir que a solução geral do problema possa ser considerada como a combinação linear das soluções fundamentais do operador da difusão.

De acordo com o método das soluções fundamentais, as soluções numéricas para a equação da difusão terão a seguinte forma:

$$U(\mathbf{X}, t_F) = \sum_{j=1}^{N_i+N_b} \alpha_j U^*(\mathbf{X}, t_F; \xi_j, t_j)$$

(3.14.a)

$$Q(\mathbf{X}, t_F) = \sum_{j=1}^{N_i+N_b} \alpha_j Q^*(\mathbf{X}, t_F; \xi_j, t_j)$$

(3.14.b)

sabe-se que \mathbf{X} representa a localização geométrica dos pontos campo e ξ representa a mesma localização mas para os pontos fonte; t_F e t são os tempos do ponto campo (tempo de observação) e dos pontos fontes, respectivamente; N_i é o número de fontes iniciais

(existentes apenas no domínio) e N_b é o número de fontes no contorno e, finalmente, α_j são os coeficientes a serem determinados que representam a intensidade das fontes aplicadas.

Observa-se então que para que o problema possa ser resolvido torna-se necessário o conhecimento dos valores das intensidades das fontes. A fim de se determinar α_j o sistema linear abaixo deve ser resolvido:

$$[A_{ij}]\{\alpha_j\} = \{b_i\} \quad (3.15)$$

onde A_{ij} é a matriz que contém as soluções fundamentais para os pontos escolhidos e b_i é o vetor que contém as condições iniciais e as condições de contorno prescritas. Nesta dissertação apenas problemas com condições de potencial prescritas foram considerados, logo:

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi\alpha(t_F - t))^{d/2}} \exp\left[\frac{-r^2(\mathbf{X}, \xi)}{4\alpha(t_F - t)}\right] H(t_F - t), & \text{para } t_{F_i} > t_j \\ 0, & \text{para } t_{F_i} < t_j \end{cases} \quad (3.16)$$

$$b_i = \begin{cases} \bar{U}(\mathbf{X}, 0) \rightarrow \text{condições iniciais} \\ \bar{U}(\mathbf{X}, t) \rightarrow \text{condições de contorno} \end{cases} \quad (3.17)$$

Para a montagem da matriz A é necessário realizar a escolha do posicionamento temporal e geométrico dos pontos fonte e, além disso, observou-se que a matriz é quase-singular tornando necessário também o uso de alguma técnica de regularização, assuntos que serão tratados nas próximas seções.

Assim, o problema é resolvido para cada passo de tempo através da resolução do sistema linear descrito na equação (3.15) e posterior cálculo do potencial nos pontos internos através da equação (3.14).

3.3. POSICIONAMENTO DOS PONTOS FONTES

Através das equações (3.16) e (3.17) nota-se que tanto a dimensão da matriz quanto a do vetor depende do número de pontos campo e pontos fonte escolhidos em cada passo de tempo. Para tanto, deve-se saber que cada passo de tempo é dividido em passos intermediários de tempo onde, primeiramente determinam-se os coeficientes α para os pontos em que as condições iniciais são prescritas e depois os pontos onde as condições de contorno são conhecidas.

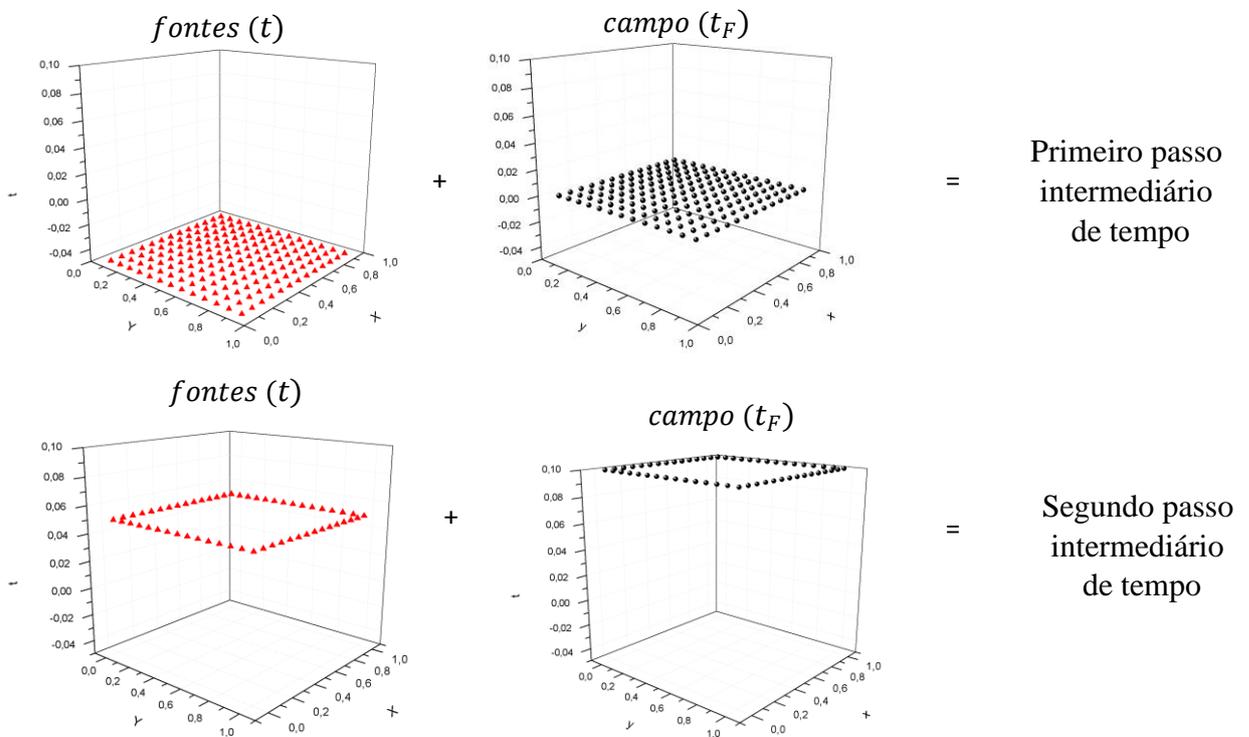


Figura 3.3: Relação coordenadas geométricas com o tempo de aplicação

A escolha da posição tanto geométrica quanto temporal dos pontos fonte está diretamente relacionada com a precisão do MSF. Em relação à posição geométrica das fontes optou-se nesta dissertação, por simplicidade, analisar somente um esquema de discretização: pontos fonte com posição coincidente com a posição dos pontos campo. Já em relação à coordenada temporal destas fontes, foi decidido que, para estas seriam testadas duas formas de distribuição: pontos fonte fixos no início do problema e pontos de coordenadas variantes no tempo.

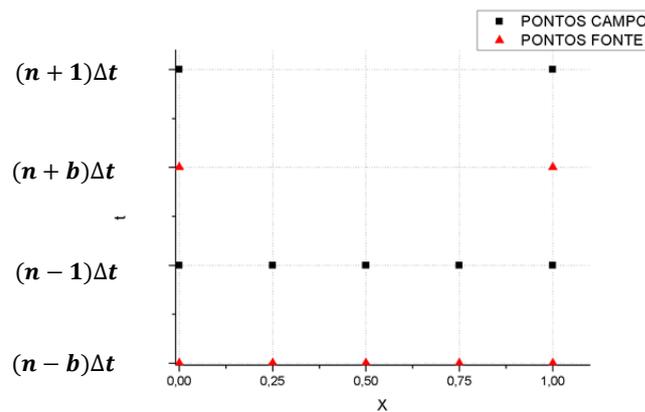


Figura 3.4: Malha unidimensional ilustrando os pontos fontes variando no tempo com coordenadas geométricas iguais às coordenadas do campo

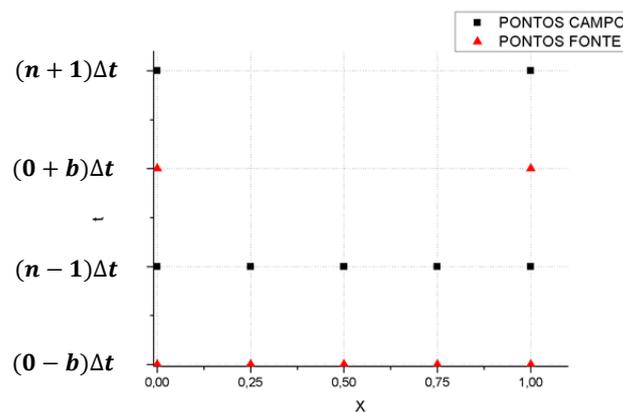


Figura 3.5: Malha unidimensional ilustrando os pontos fontes fixos no tempo com coordenadas geométricas iguais às coordenadas do campo

Pode-se notar pelas figuras acima (figura 3.4 e figura 3.5) que para a resolução do problema transiente é necessário a determinação do passo intermediário gerado por b . Afim de se estudar a melhor escolha do posicionamento temporal da fonte adotou-se como fator de passos intermediários $b = 0.4$, $b = 0.5$ e $b = 0.6$ e coordenadas geométricas coincidente com o campo, gerando uma simplificação do modelo sem o surgimento de nenhuma singularidade.

3.4. TÉCNICAS DE REGULARIZAÇÃO DE MATRIZES

O sistema de equações expresso em (3.15) é mal condicionado e por isso não pôde ser resolvido por técnicas simples de resolução de sistemas lineares como por exemplo eliminação de Gauss. Com o objetivo de contornar tal problema, testou-se o método de decomposição por valores singulares (DVS) mas os resultados não foram satisfatórios, optou-se então por fazer uso da técnica de regularização de Tikhonov que será brevemente descrita.

A regularização de Tikhonov substituí o sistema $A\alpha = b$ pelo problema de minização:

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \|A\alpha - b\|^2 + \lambda \|L_k \alpha\|^2 \quad (3.18)$$

onde $\lambda > 0$ é o parâmetro de regularização cujos valores geralmente variam entre 10^{-14} e 10^{-1} .

O termo residual $\|A\alpha - b\|^2$ pode ser visto como um indicador de quão bem a solução α aproxima o sistema, assim este termo deve ser suficiente pequeno, exigindo que

λ seja pequeno. Entretanto, para se ter uma solução razoavelmente estável λ deve ser grande, o que faz a escolha do parâmetro de regularização uma escolha delicada.

A norma $\|\mathbf{L}_k \boldsymbol{\alpha}\|^2$ controla a caráter oscilatório da solução causado por perturbações. O operador \mathbf{L}_k é geralmente $\mathbf{L}_k = \mathbf{I}$ (matriz identidade), ou uma aproximação discreta do operador diferencial definido pela primeira ou segunda derivada.

Reescrevendo a equação (3.18):

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda\|\mathbf{L}_k \boldsymbol{\alpha}\|^2 &= (\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}) + \lambda(\mathbf{L}_k \boldsymbol{\alpha})^T (\mathbf{L}_k \boldsymbol{\alpha}) \\
 &= (\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{b}^T) (\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}) + \lambda \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{L}_k^T \mathbf{L}_k \boldsymbol{\alpha} \\
 &= \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} + \lambda \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{L}_k^T \mathbf{L}_k \boldsymbol{\alpha} \\
 &= \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} + \lambda \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{L}_k^T \mathbf{L}_k \boldsymbol{\alpha}
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Para determinar o mínimo faz-se o gradiente de (3.19) igual a zero:

$$\mathbf{2A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{2A}^T \mathbf{b} + 2\lambda \mathbf{L}_k^T \mathbf{L}_k \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}
 \tag{3.20}$$

Depois de reorganizar (3.20), o $\boldsymbol{\alpha}$ mínimo é dado pela resolução de:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}
 \tag{3.21}$$

4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Com o objetivo de ilustrar e averiguar toda a teoria desenvolvida, estabelece-se no presente capítulo alguns exemplos de aplicação do Método das Soluções Fundamentais com o uso de soluções fundamentais transientes. A análise e verificação a cerca da aplicabilidade do método em problemas de difusão se deu através de programas computacionais implementados ao longo da elaboração deste estudo.

Quatro exemplos bidimensionais dinâmicos (domínio do tempo) relativos ao problema em questão serão analisados de forma a explorar a potencialidade do método. Os dois primeiros exemplos foram desenvolvidos para carregamentos variantes no espaço e no tempo: no primeiro exemplo considera-se uma placa sujeita a um carregamento senoidal prescrito, já o segundo analisa uma superfície submetida a um carregamento função de senos e cossenos. Para os dois últimos exemplos, considerou-se condições iniciais e de contorno constantes ao longo do tempo, desta forma, o terceiro exemplo é um caso difusão transiente bidimensional em uma região retangular com o contorno submetido a um choque inicial e no último foi analisada difusão em uma região circular submetida à sucessivos choques térmicos.

Para todos os exemplos estudados fez-se presente a necessidade de se utilizar técnicas e regularização de matrizes já que estas demonstraram ser extremamente mal condicionadas. Empregou-se, assim, a técnica de Tikhonov com o parâmetro $\lambda = 10^{-8}$ em todas as aplicações.

EXEMPLO1 – PLACA SUBMETIDA À CARREGAMENTO SENOIDAL

Neste primeiro exemplo é estudada a difusão em uma placa quadrada de dimensão 1m x 1m (figura 4.1.a) submetida às seguintes condições:

Inicial: $U(x, y, 0) = \text{sen}(\pi x) + \text{sen}(\pi y)$

Contorno: $U(0, y, t) = [\text{sen}(\pi y)]e^{-k\pi^2 t}$

$$U(1, y, t) = [\text{sen}(\pi y)]e^{-k\pi^2 t}$$

$$U(x, 0, t) = [\text{sen}(\pi x)]e^{-k\pi^2 t}$$

$$U(x, 1, t) = [\text{sen}(\pi x)]e^{-k\pi^2 t}$$

A solução analítica é dada por:

$$U(x, y, t) = [\text{sen}(\pi x) + \text{sen}(\pi y)]e^{-k\pi^2 t}$$

onde foi adotado o coeficiente de difusividade k foi adotado igual a $0.1 \text{ m}^2/\text{s}$.

Para o estudo deste problema foi considerado apenas uma conjunto de 225 pontos ilustrada na figura (4.1.b), o critério de passo intermediário $b = 0.5$ foi adotado tanto para o MSF com fontes fixas quanto para o MSF com fontes móveis e diferentes incrementos de tempo $\Delta t = 0.08\text{s}$, $\Delta t = 0.16\text{s}$ e $\Delta t = 0.32\text{s}$ foram analisados.

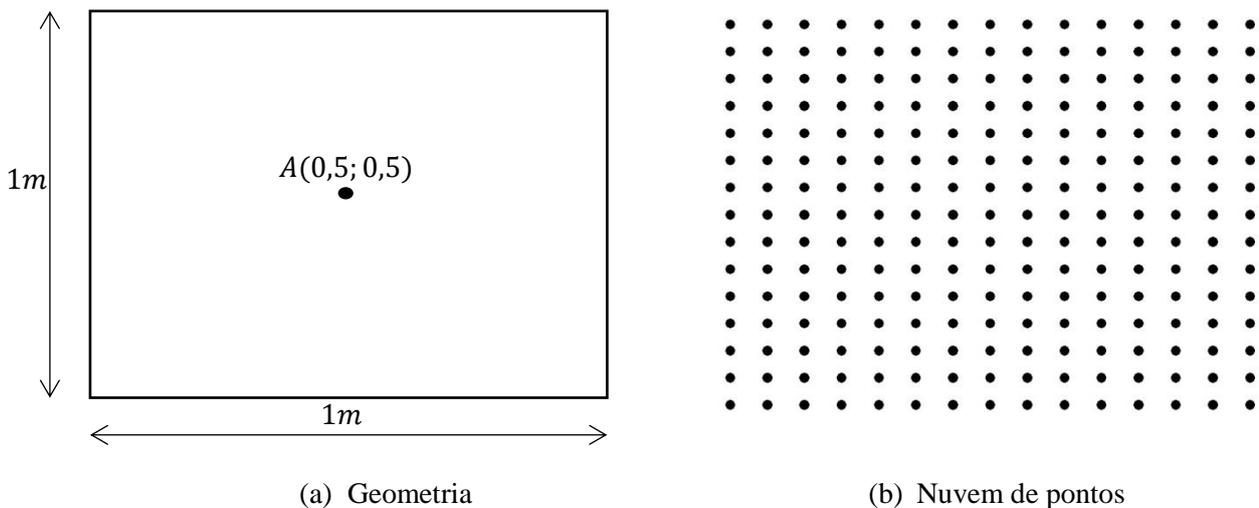


Figura 4.1: Discretização exemplo 1

Os resultados de potencial no ponto A (0,5;0,5) (figura 4.1.a) para ambos os métodos em consideração (MSF com fontes fixas e MSF com fontes móveis) levando em consideração diferentes incrementos de tempo propostos pode ser visto na figura (4.2). Para um melhor entendimento do problema, o desenvolvimento do potencial em A foi primeiramente analisado para o MSF com fontes fixas (figura 4.2.a) e posteriormente analisado para o MSF com fontes móveis (figura 4.2.b) e, em ambos os casos, a resposta foi comparada à analítica disponível para o problema.

Percebe-se que, para o problema considerado, a variação no incremento de tempo não gerou significativa alteração nas respostas quando analisada para um tempo total de 3s. Para os quatro Δt s estudados nota-se uma proximidade relevante em relação a resposta analítica e, em ambos os casos, percebe-se uma dificuldade de distinção entre as respostas, o que mostra uma excelente precisão dos métodos propostos.

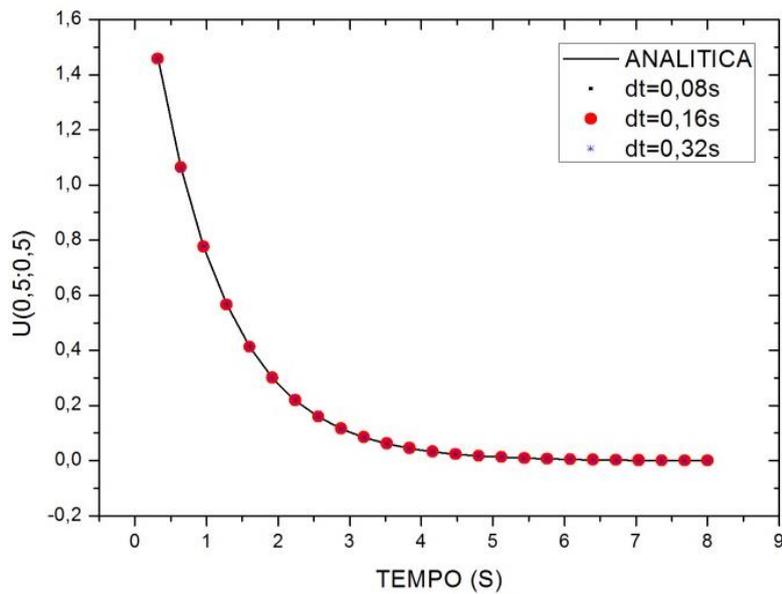
Devido à proximidade obtida nos resultados e a fim de se realizar uma análise mais detalhada acerca da precisão dos métodos apresenta-se uma comparação do erro absoluto para todos os incrementos de tempo para ambos os casos. Este erro foi calculado através de:

$$erro = \sqrt{(U_{analitica} - U_{calculado})^2} \quad (4.1)$$

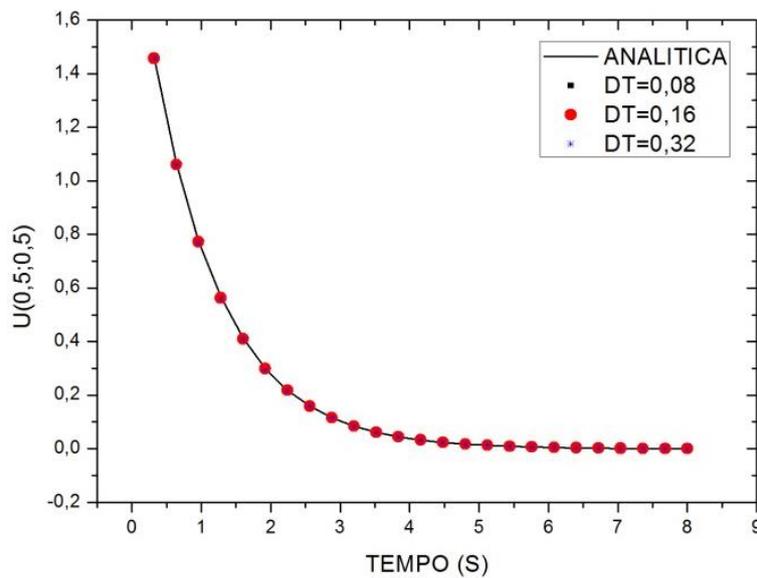
onde $U_{analitica}$ é o potencial calculado pela solução analítica e $U_{calculado}$ é o potencial obtido pelo MSFD.

Observa-se pela figura (4.3.a) que para fontes fixas quando há o decréscimo do incremento de tempo melhor a precisão da resposta calculada. Em contrapartida, para o caso de fontes móveis na figura (4.3.b), percebe-se que o melhor comportamento para o erro acontece quando $\Delta t = 0.16s$.

Conclui-se também que, para ambas as fontes, a precisão quando relacionada apenas aos incrementos de tempo não sofre significativo aumento quando há decrescimento do tempo, mas a existência de um Δt ideal para o caso estudado fica clara. Em compensação, a precisão sofre considerável alteração quando os métodos são comparados entre si, para fontes fixas no início do problema o erro gerado para quaisquer incremento de tempo utilizado é sensivelmente menor quando relacionado a fontes móveis.

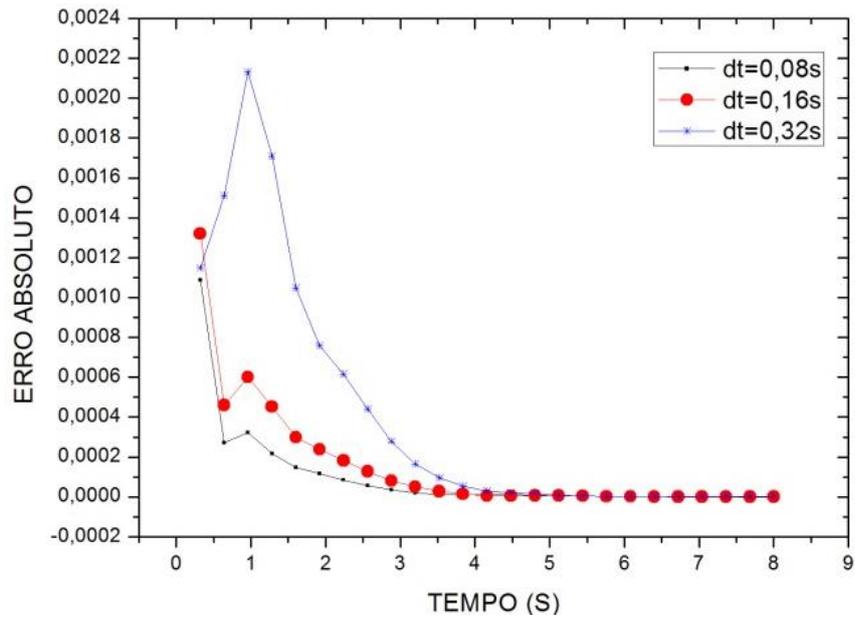


(a) Fontes fixas no tempo

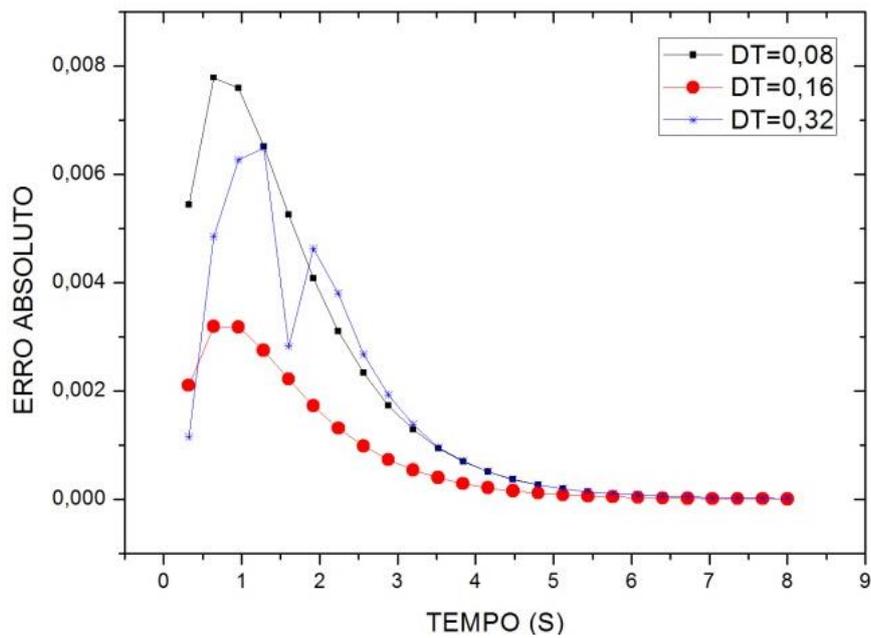


(b) Fontes móveis no tempo

Figura 4.2: Resultados do potencial para o ponto A(0,5;0,5) em relação à diferentes incrementos de tempo para (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo



(a) Fontes fixas no tempo



(b) Fontes móveis no tempo

Figura 4.3: Erro absoluto do potencial para o ponto A(0,5;0,5) em relação à diferentes incrementos de tempo para (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

Outra forma de análise dos resultados é conhecer o desenvolvimento dos potenciais ao longo de uma linha horizontal de pontos em diferentes passos de tempo até que a solução do problema estático seja atingida. Os pontos escolhidos são:

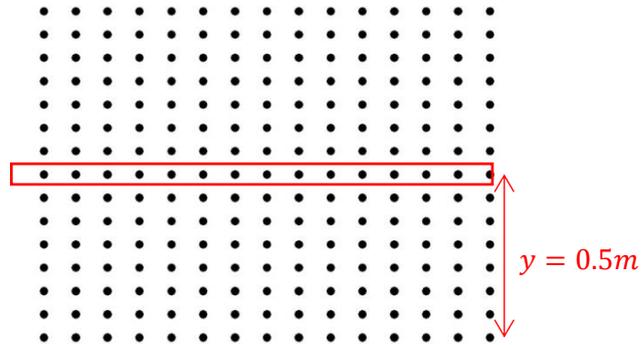


Figura 4.4: Linha horizontal de pontos escolhidos para análise do desenvolvimento do potencial no espaço

A partir da escolha dos pontos de interesse pode-se observar o comportamento da resposta em relação ao domínio do problema nos tempos fixados de interesse. Para esta análise ambos os tipos de fonte foram considerados para $t = 0.16s, t = 0,32s$ e $t = 0.544s$. Através da figura (4.5), novamente pode ser vista uma grande precisão de ambos os métodos em relação à analítica.

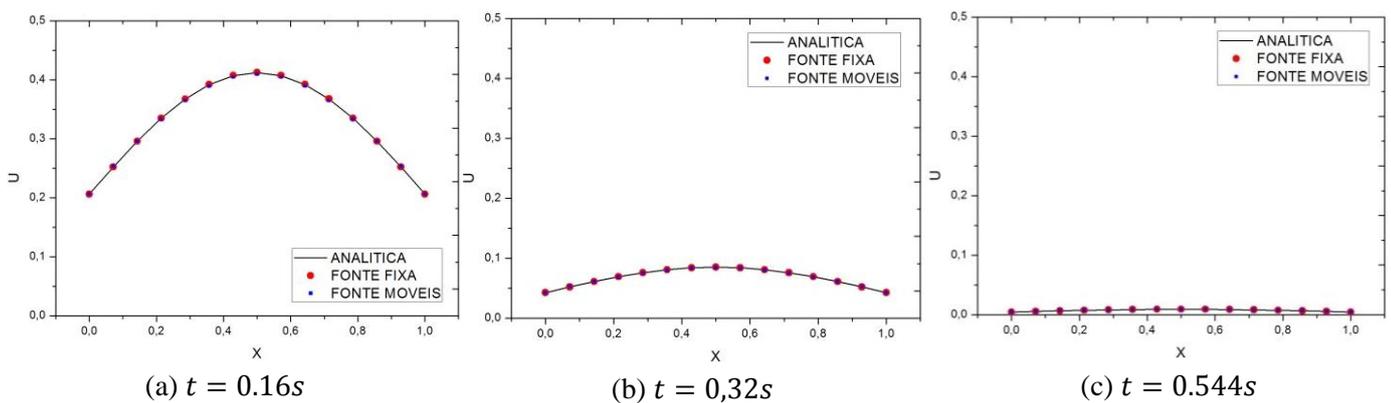
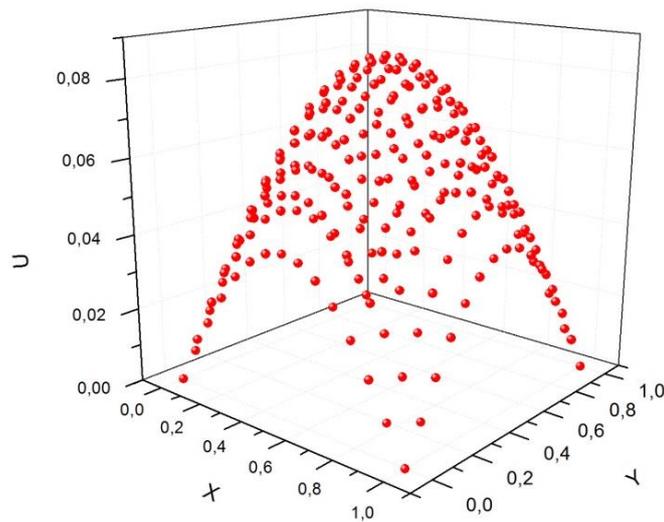
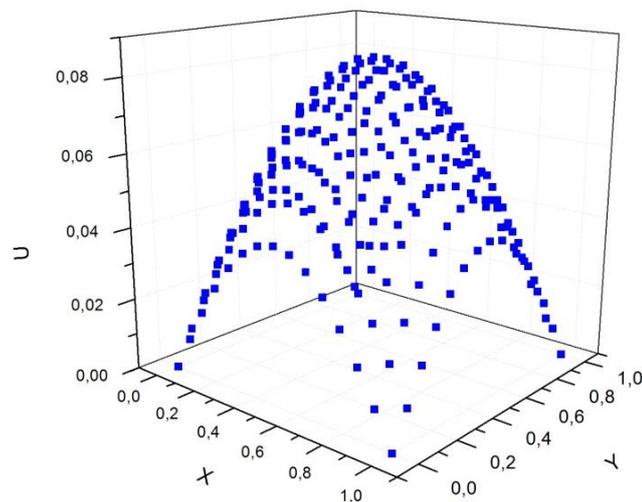


Figura 4.5: Desenvolvimento do potencial para uma linha de pontos localizados ($x, y = 0.5m$) para (a) $t = 0.16s$; (b) $t = 0,32s$ e (c) $t = 0.544s$

O potencial para os dois modelos de fontes e em todos os pontos da malha no para o tempo com valor de $t = 0,32s$ são apresentadas na figura (4.6). Além de facilitar a comparação espacial entre os métodos, nota-se que a solução calculada apresenta comportamento condizente com o esperado para o problema. Como a equação da difusão é uma equação parabólica sabe-se que a solução será uma variação do tipo parabólica também, propriedade ilustrada pela figura (4.6).



(a) Fontes fixas no tempo



(b) Fontes móveis no tempo

Figura 4.6: Potencial em todos os nós da malha no tempo $t = 0,32s$ para (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

EXEMPLO2 – PLACA SUBMETIDA À CARREGAMENTO VARIÁVEL

Neste segundo exemplo é estudada a difusão em uma placa quadrada de dimensão 1m x 1m similar àquela utilizada no exemplo 1 (figura 4.1.a) submetida às seguintes condições:

$$\text{Inicial: } U(x, y, 0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

$$\text{Contorno: } U(0, y, t) = [1 + \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right)]e^{\frac{-k\pi^2 t}{4}}$$

$$U(1, y, t) = [\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + 1 + \text{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right)]e^{\frac{-k\pi^2 t}{4}}$$

$$U(x, 0, t) = [\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 + \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)]e^{\frac{-k\pi^2 t}{4}}$$

$$U(x, 1, t) = [\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1]e^{\frac{-k\pi^2 t}{4}}$$

A solução analítica é dada por:

$$U(x, y, t) = [\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right)]e^{\frac{-k\pi^2 t}{4}}$$

onde o coeficiente de difusão adotado foi $k = 1.0 \text{ m}^2/\text{s}$.

Para o estudo deste problema foram consideradas 3 nuvens de pontos (figura 4.5), para o critério de passo intermediário foram considerados $b = 0.4$, $b = 0.5$ e $b = 0.6$ e diferentes incrementos de tempo $\Delta t = 0.01\text{s}$, $\Delta t = 0.05\text{s}$ e $\Delta t = 0.10\text{s}$.

Para cada variação de malha foi estudado o comportamento do MSF tanto para fontes fixas quanto para fontes variáveis com $b = 0.5$ e $\Delta t = 0.01s$. Para cada b testado ambos os posicionamentos das fontes foram considerados aplicados à MALHA 2 e $\Delta t = 0.01s$. Para a variação do incremento de tempo foi adotado apenas fontes fixas, a MALHA foi a 2 e $b = 0.5$.

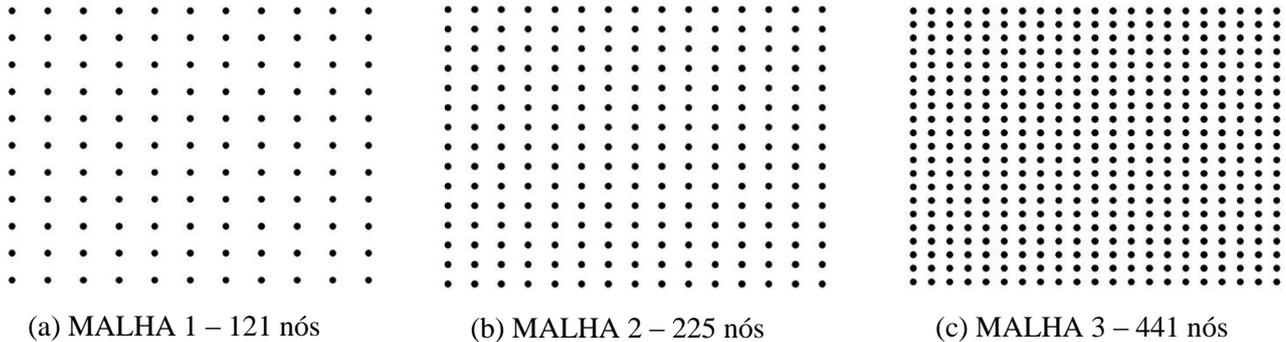


Figura 4.7: Discretizações utilizadas no exemplo 2

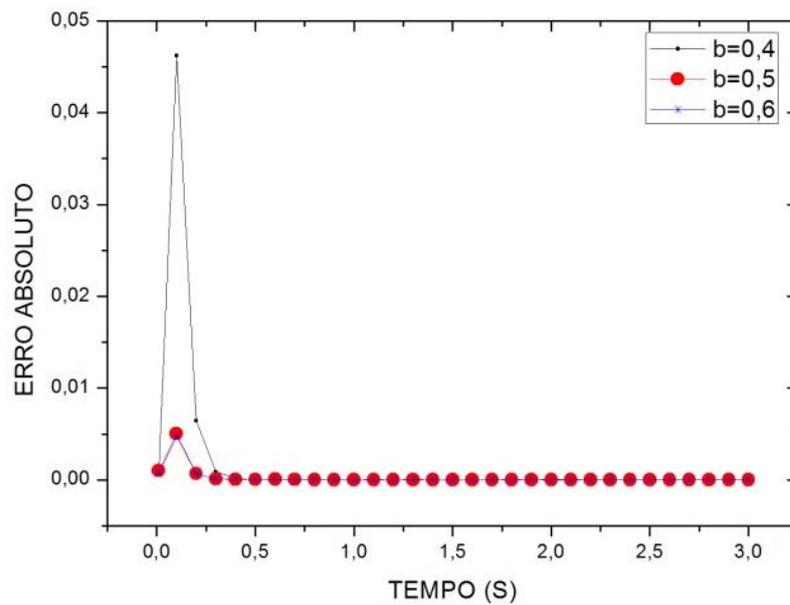
Para o caso estudado no exemplo 2 realizou-se a priori uma análise de erros de diferentes maneiras para que posteriormente fossem plotados apenas os resultados de melhor precisão.

Na figura 4.8 realizou-se o estudo de diferentes passos intermediários de tempo para os casos de fontes fixas e fontes móveis e, para ambos os métodos observou-se que o b que melhor se adequa ao problema estudado é aquele de valor 0.6. Isto se deve ao fato de que quando das fontes ficam mais distantes dos pontos campo, estas não geram excessivas perturbações na resposta.

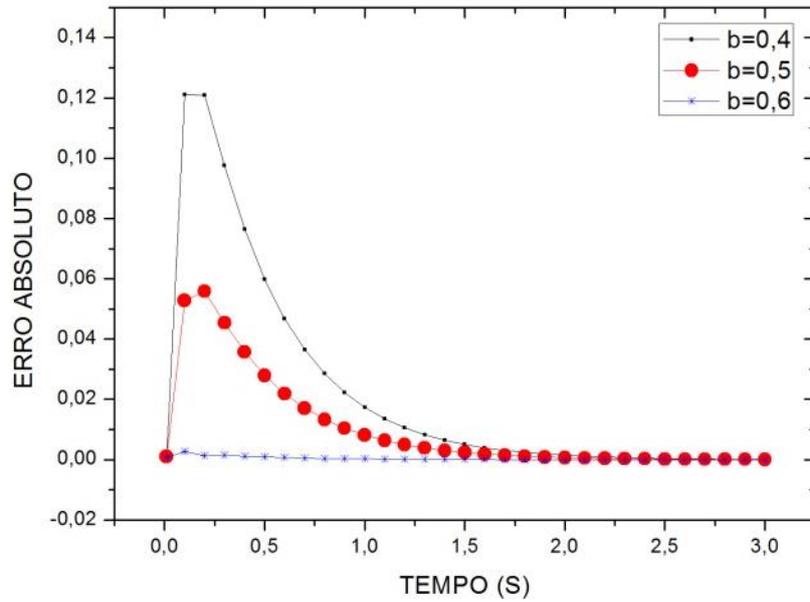
Quando se relaciona a solução fundamental para distâncias fixas com tempos variáveis (figura 3.2) percebe-se que nos instantes iniciais da solução existe um pico no seu valor, logo, o fato da precisão aumentar com aumento de b parece adequado (ponto campo em tempo mais distante capta menor perturbação).

Além disso, o fato da solução fundamental apresentar tal pico para tempos iniciais levou a observação de que, com a diminuição do valor de b a matriz calculada para o problema se torna cada vez mais singular, necessitando de técnicas de regularização mais rígidas. Através da figura 4.8, tanto para fontes fixas quanto para fontes móveis, esse fato pode ser notado quando $b = 0.4$, para este passo intermediário observa-se os maiores erros.

Já na figura 4.9 pode-se observar a relação entre o erro e a discretização espacial adotada também para o caso de fontes fixas e de fontes móveis. Pode-se perceber que para o problema estudado o número de nós existentes na malha não exerce grande influência quando relacionado à precisão.

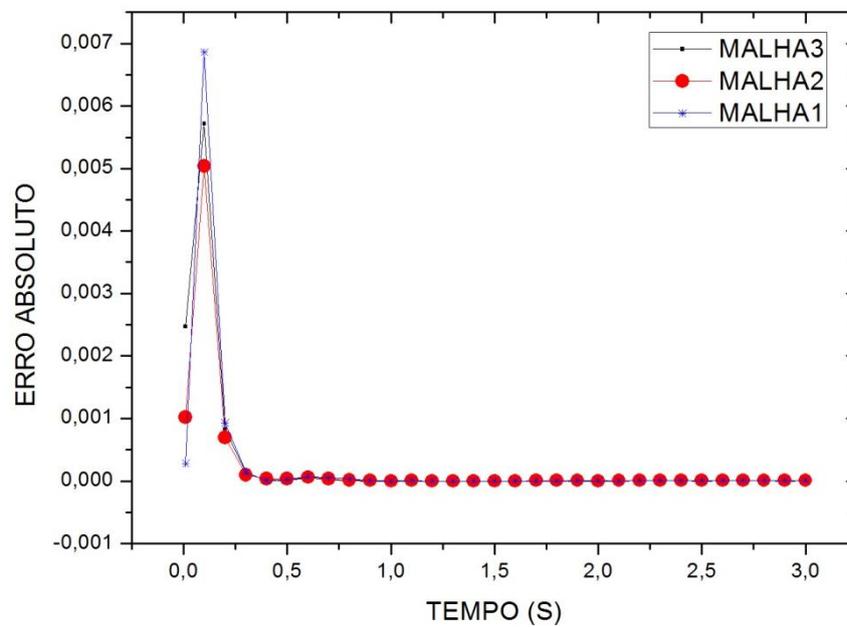


(a) Fontes fixas no tempo

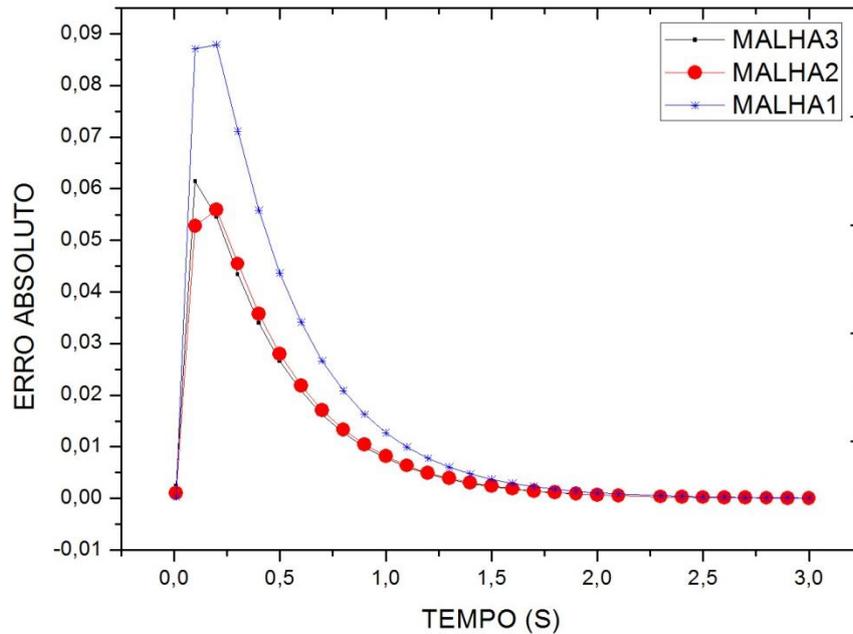


(b) Fontes móveis no tempo

Figura 4.8: Erro absoluto para MALHA 2 com $b = 4,0; 0,5$ e $0,6$ e $\Delta t = 0,01s$ para (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo



(a) Fontes fixas no tempo



(a) Fontes móveis no tempo

Figura 4.9: Erro absoluto para MALHA 1, 2 e 3 com $b = 0.5$ e $\Delta t = 0.01s$ para (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

A partir da observação dos gráficos de erro detalhados acima, optou-se por utilizar a malha que demonstrou ter bom comportamento quando relacionado à precisão (em ambos os casos) que é a MALHA 2 e o b que possui desempenho similar para os dois tipos de MSF estudado o $b = 0.5$ para realizar a análise dos potenciais.

Para as figuras 4.10 e 4.11 escolheu-se o ponto de coordenada (0,5;0,5) para que pudesse ser efetivada a análise a cerca do comportamento da resposta, primeiro para a variação de incrementos de tempo em casos de fonte fixa e segundo para a resposta obtida pelos dois tipos de fonte durante todo o tempo do problema.

No primeiro caso (figura 4.10) observou-se que, para este exemplo, o incremento de tempo não exerce nenhuma significativa alteração na resposta, mesmo quando comparada à analítica. Já para o segundo caso (figura 4.11), notou-se que para o caso das

fontes móveis houve uma suave discrepância em relação a resposta analítica quando relacionada àquela obtida pelas fontes fixas.

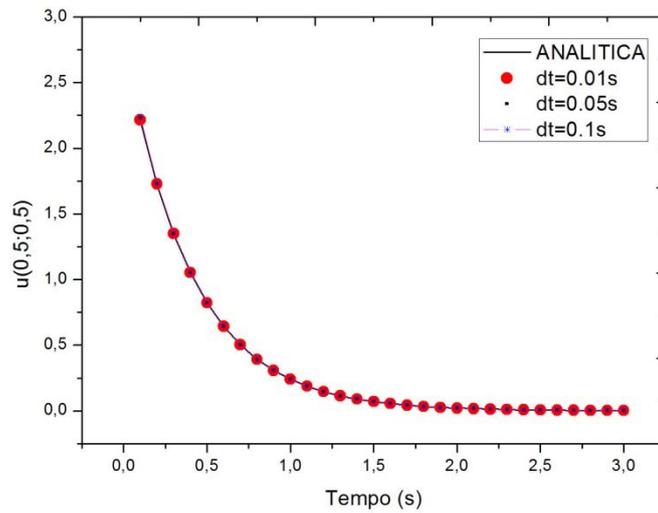


Figura 4.10: Relação entre o potencial para o ponto (0,5;0,5) e os incrementos de tempo

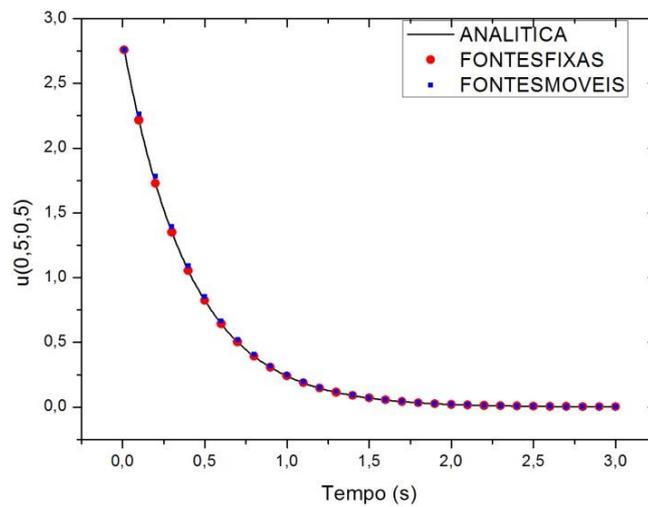


Figura 4.11: Relação entre o potencial para o ponto (0,5;0,5) e a posição das fontes

Como a análise através de fontes móveis não demonstrou ser uma opção para o exemplo estudado, optou-se por utilizar apenas fontes fixas para observar o desenvolvimento da solução em diferentes passos de tempo na mesma linha horizontal de pontos do exemplo 1 (figura 4.4). Os passos escolhidos foram $t = 0,04s, t = 0,08s, t = 0,12s, t = 0,16s, t = 0,20s, t = 0,24s$ e estão representados na figura 4.12.

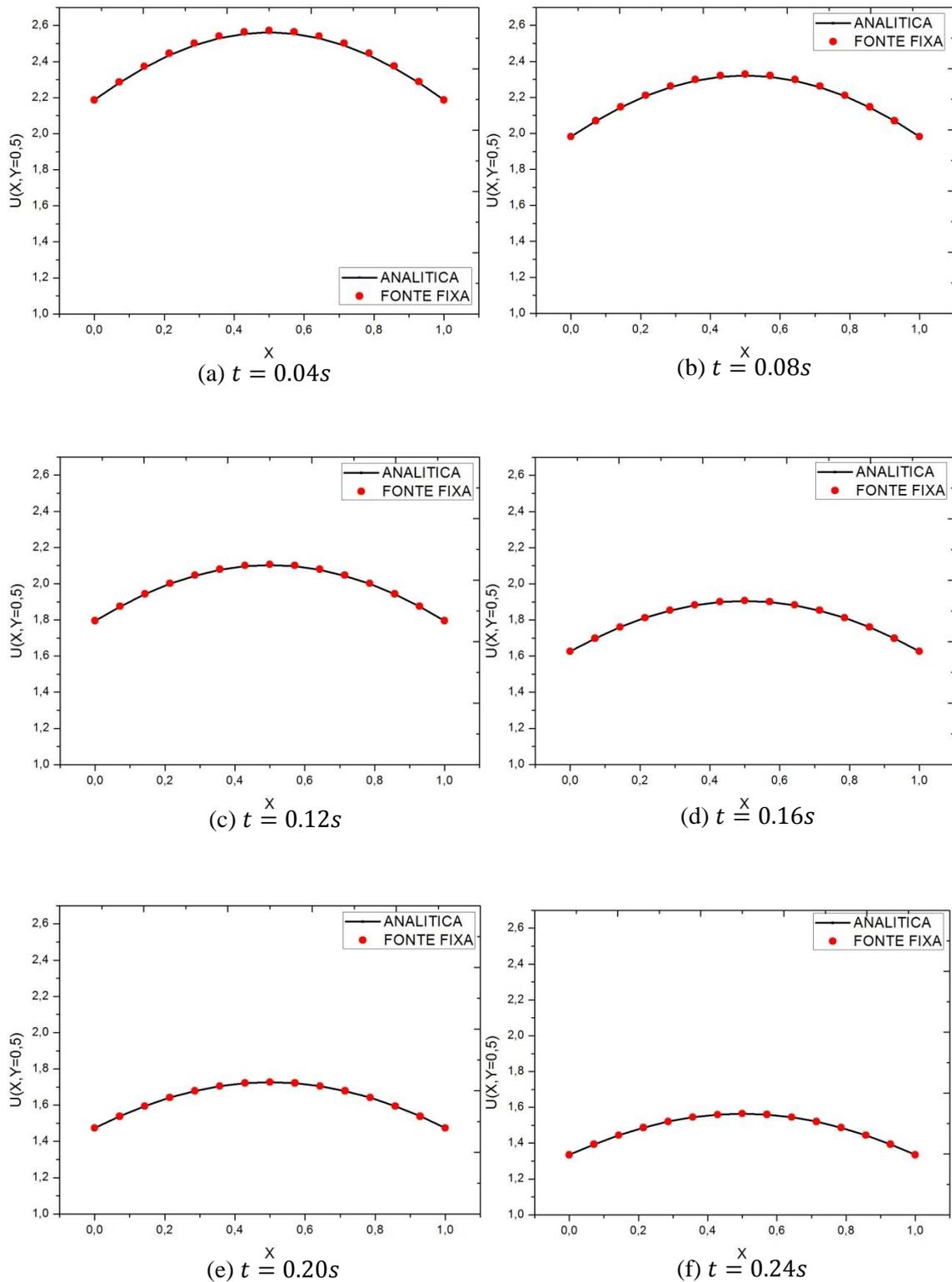
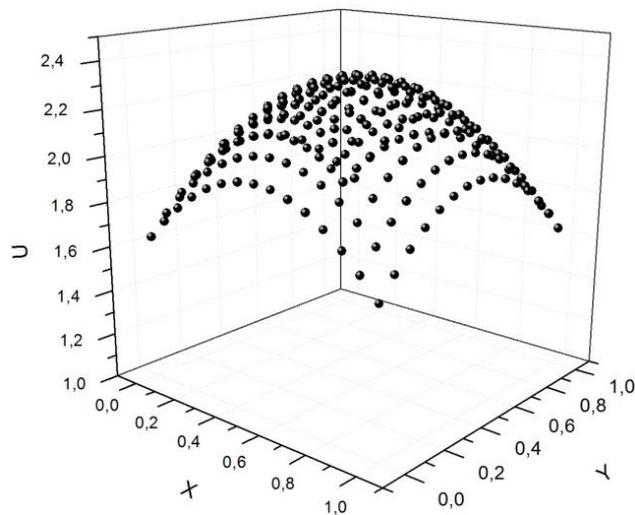
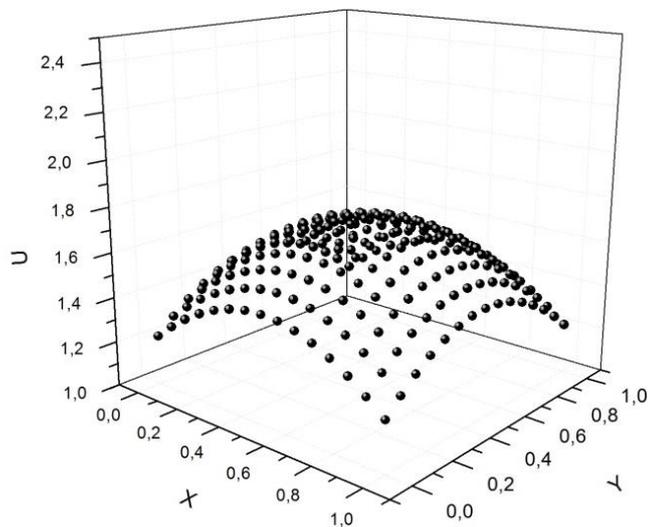


Figura 4.12: Desenvolvimento do potencial para uma linha de pontos localizados ($x, y = 0.5m$) para (a) $t = 0.04s$, (b) $t = 0.08s$, (c) $t = 0.12s$, (d) $t = 0.16s$, (e) $t = 0.20s$, (f) $t = 0.24s$

Como potencial para o modelo de fontes fixas mostrou-se condizente com àquele esperado para o problema (figura 4.12), foi decidido calcular essa resposta e em todos os pontos da malha e para a discretização espacial 2 (MALHA 2) e no tempo de valor $t = 0.08s$ e de $t = 0.32s$ (figura 4.13). Além de promover uma melhor visualização do comportamento do problema, assim como o exemplo 1, pode-se perceber o comportamento parabólico da solução em relação ao domínio.



(a) $t = 0.08s$



(b) $t = 0.32s$

Figura 4.13: Potencial em todos os nós da malha para fontes fixas no (a) $t = 0.08s$

e (b) $t = 0.32s$

EXEMPLO 3 – CHOQUE TÉRMICO EM TODO O CONTORNO

Uma chapa retangular representada na figura (4.13.a), mantida inicialmente a 0°C é submetida a um choque de 1°C em todo se contorno. Este problema pode ser representado matematicamente pelas condições:

Inicial: $U(x, y, 0) = 0^{\circ}\text{C}$ em Ω

Contorno: $U(x, y, t) = 1^{\circ}\text{C}$ em Γ

A discretização espacial escolhida utiliza 67 pontos e é apresentada na figura 4.14 juntamente com a ilustração das condições iniciais e de contorno. Para este problema estudou-se a variação da temperatura ao longo do tempo no ponto $A(0,0)$.

A partir da observação dos problemas anteriores foi deciso utilizar apenas uma malha, uma discretização temporal com $b = 0.5$ e somente o caso de fontes fixas foi analisado. Para o desenvolvimento da solução no tempo empregou-se $\Delta t = 0.25\text{s}$, $\Delta t = 0.5\text{s}$ e $\Delta t = 1.0\text{s}$.

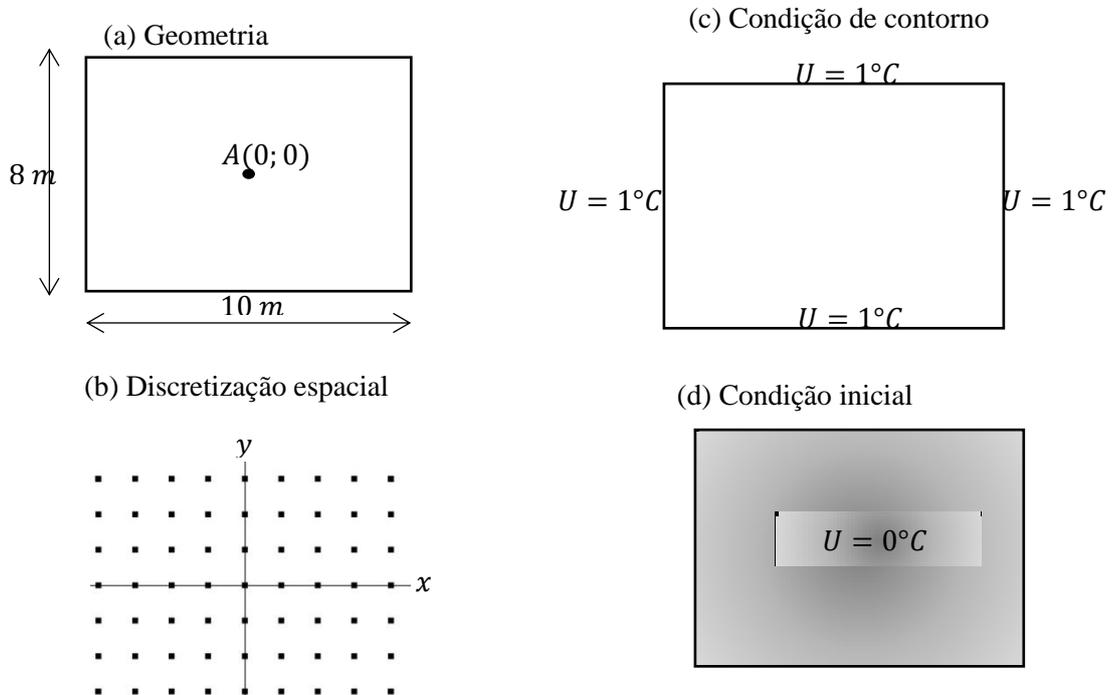


Figura 4.14: Difusão transiente bidimensional – choque térmico em todo o contorno

Os resultados obtidos são mostrados na figura 4.15 e foram comparados com a resposta analítica disponível em WROBEL (1981). Observa-se que para este problema não necessariamente a redução do Δt terá como consequência o aumento da acurácia do resultado. Neste caso, observou-se que entre os intervalos de tempo testados, o intervalo adequado para o problema é o de $\Delta t = 0.50s$.

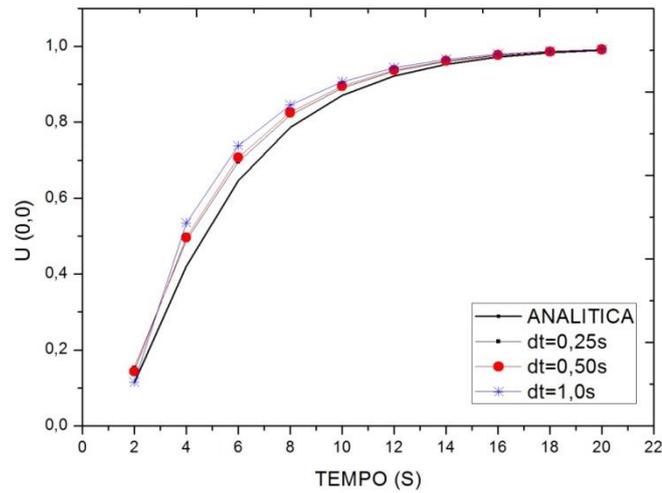


Figura 4.15: Temperatura ao longo do tempo em A(0,0)

De forma a analisar mais precisamente os resultados obtidos para os diversos intervalos de tempo gerou-se o gráfico que relaciona o erro relativo aos incrementos de tempo (figura 4.16). Pode-se perceber que, como foi observado anteriormente o $\Delta t = 0.50s$ é aquele que apresenta melhor comportamento durante o período de decorrência do problema.

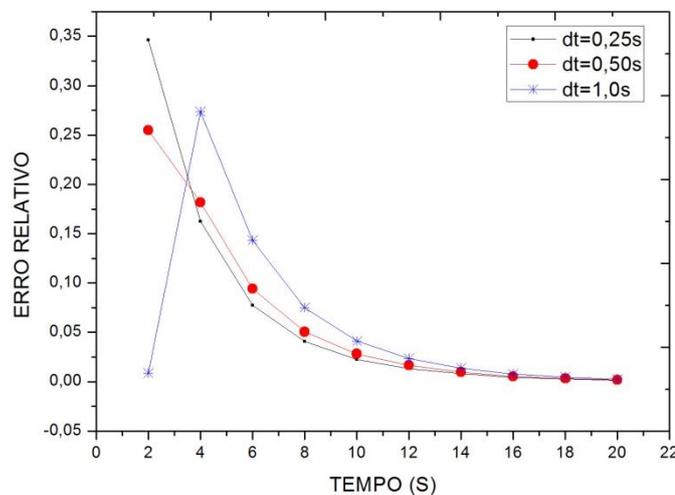


Figura 4.16: Erro relativo ao longo do tempo para o ponto A(0,0)

EXEMPLO 4 – CHOQUES TÉRMICOS SUCESSIVOS

Uma região circular de raio unitário inicialmente a 0°C é submetida a dois choques térmicos, em todo seu contorno nos instantes t_0 e t_1 como representado por :

Inicial: $U(x, y, 0) = 0^{\circ}\text{C}$ em Ω

Contorno: $U(x, y, t) = 50^{\circ}\text{C}$ para $0 < t < t_0$ em Γ

$$U(x, y, t) = 100^{\circ}\text{C} \text{ para } t_0 < t < t_1 \text{ em } \Gamma$$

A discretização espacial escolhida utiliza 189 pontos e é apresentada na figura 4.16 juntamente com a ilustração das condições iniciais e de contorno. Para este problema estudou-se a variação da temperatura ao longo do tempo nos pontos A e B indicados.

Foram considerados dois problemas diferentes de acordo com o tempo de acontecimento do choque térmico, mas, para ambos utilizou-se fontes fixas e fontes móveis, $\Delta t = 0.05\text{s}$ e o passo intermediário de tempo variando de acordo com $b = 0.4$, $b = 0.5$ e $b = 0.6$.

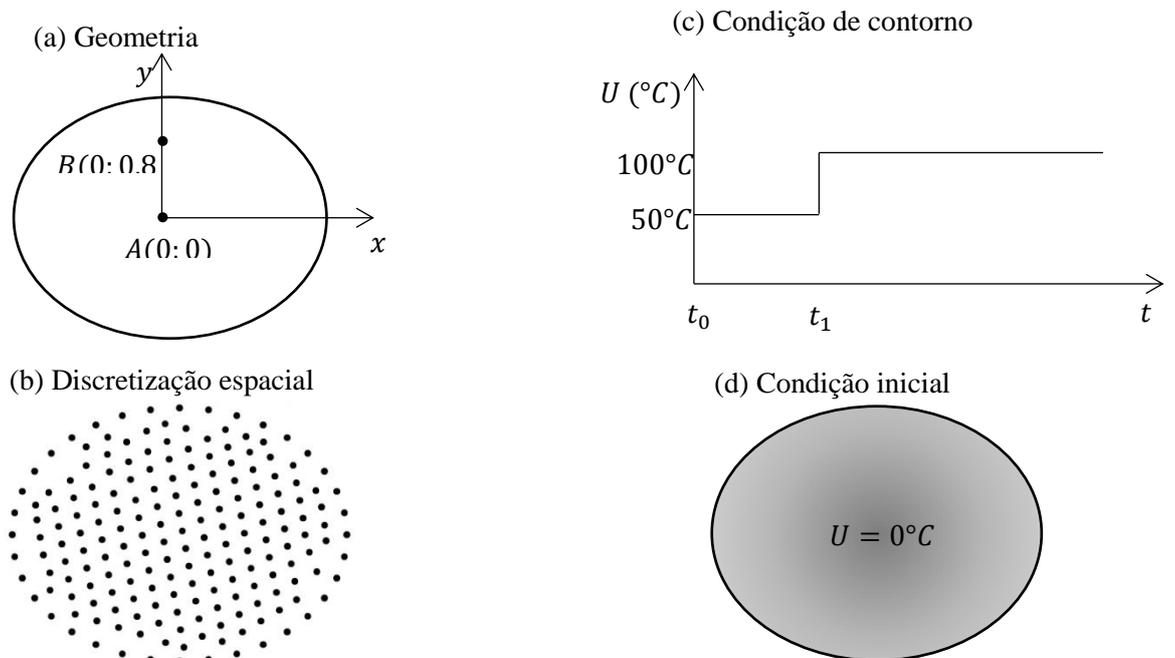
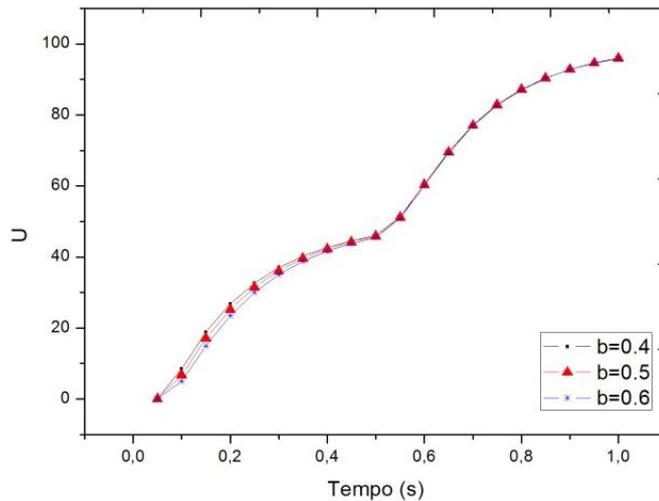


Figura 4.17: Difusão transiente bidimensional – sucessivos choques térmicos

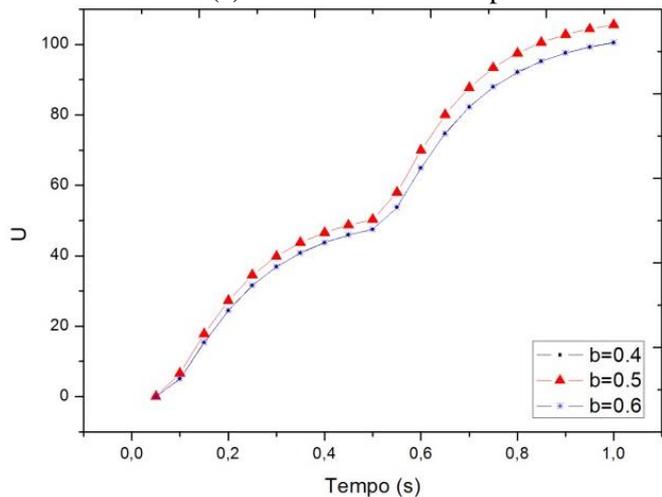
EXEMPLO 4 – Problema 1 : $t_0 = 0s$ e $t_1 = 0,5s$

Na figura 4.18.a pode-se observar a variação da resposta no ponto B(0;0,8) em relação ao tempo total para vários passos intermediários b utilizando o MSF com fontes fixas e, na figura 4.18.b, o mesmo gráfico foi gerado mas para o MSF com fontes móveis. Em ambos os gráficos nota-se que todos os passos b foram capazes de captar o choque térmico ocorrido durante o problema.

Mais uma vez fica evidente que, para fontes fixas a viração de b não gera grandes alterações na resposta enquanto ao observar as fontes móveis percebe-se que, para o problema tratado, este método é relativamente sensível a escolha de b .



(a) Fontes fixas no tempo



(b) Fontes móveis no tempo

Figura 4.18: Potencial para o ponto B ao longo do tempo para a variação de b utilizando (a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

Na figura (4.19) realizou-se a comparação entre o MSF com fontes fixas e o MSF com fontes móveis para $b = 0.5$ para o ponto B. Percebe-se que ambos estão condizentes com o choque ocorrido no tempo de 0,5s mas com o decorrer do tempo a resposta obtida com fontes fixas parece ser mais estável que para as fontes móveis, assim fica claro observar como as repostas divergem com passar do tempo.

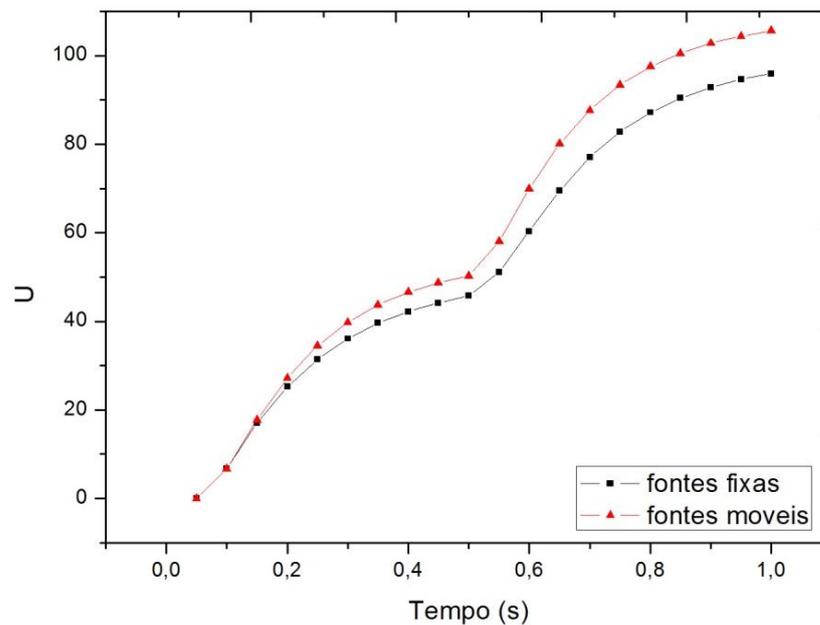
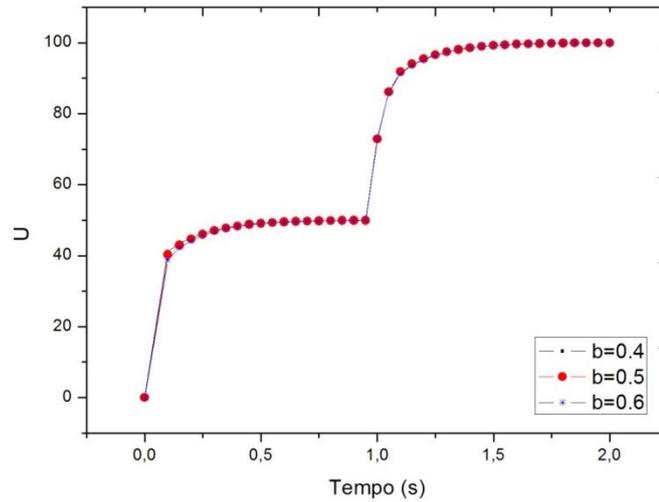


Figura 4.19: Relação entre a temperatura ao longo do tempo para fontes fixas e móveis no ponto B

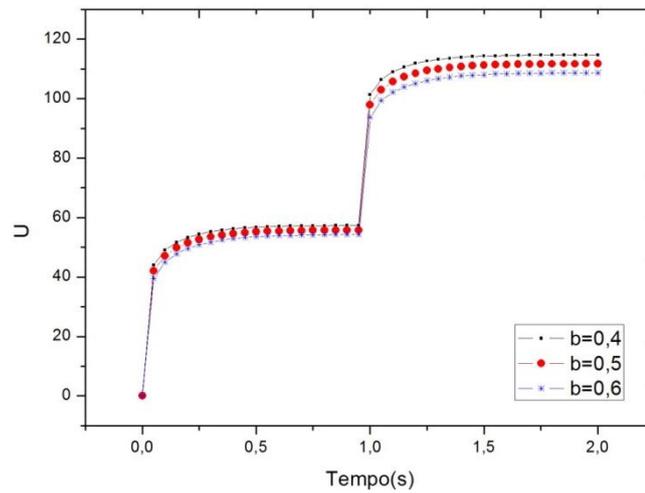
EXEMPLO 4 – Problema 2: $t_0 = 0s$ e $t_1 = 1,0s$

A partir figura (4.20.a) pode-se observar a variação da resposta no ponto A(0;0) com o tempo para vários passos intermediários b utilizando o MSF com fontes fixas e na figura 4.20.b o mesmo gráfico foi gerado mas para o MSF com fontes móveis. Análogo ao problema 1, em ambos os gráficos nota-se que todos os passos b foram capazes de captar o choque térmico ocorrido durante o problema.

Para o ponto estudado neste problema do exemplo 4 é evidente a diferença quando relaciona-se as fontes fixas e fonte móveis b . No primeiro caso as diferenças na resposta de temperatura são mínimas, enquanto para o segundo caso existe uma considerável diferença nas soluções obtidas.



(a) Fontes fixas no tempo



(b) Fontes móveis no tempo

Figura 4.20: Potencial para o ponto A ao longo do tempo para a variação de b utilizando

(a) fontes fixas no tempo e (b) fontes móveis no tempo

Para melhor visualização dos dois métodos, na figura 4.21 realizou-se a comparação entre o MSF com fontes fixas e o MSF com fontes móveis para $b = 0.5$ para o ponto A. Similarmente ao problema 1, percebe-se que ambos estão condizentes com o choque ocorrido no tempo de 1,0s mas com o decorrer do tempo a resposta obtida com fontes fixas parece ser mais estável que para as fontes móveis e, observa-se pelo gráfico como as repostas divergem com passar do tempo.

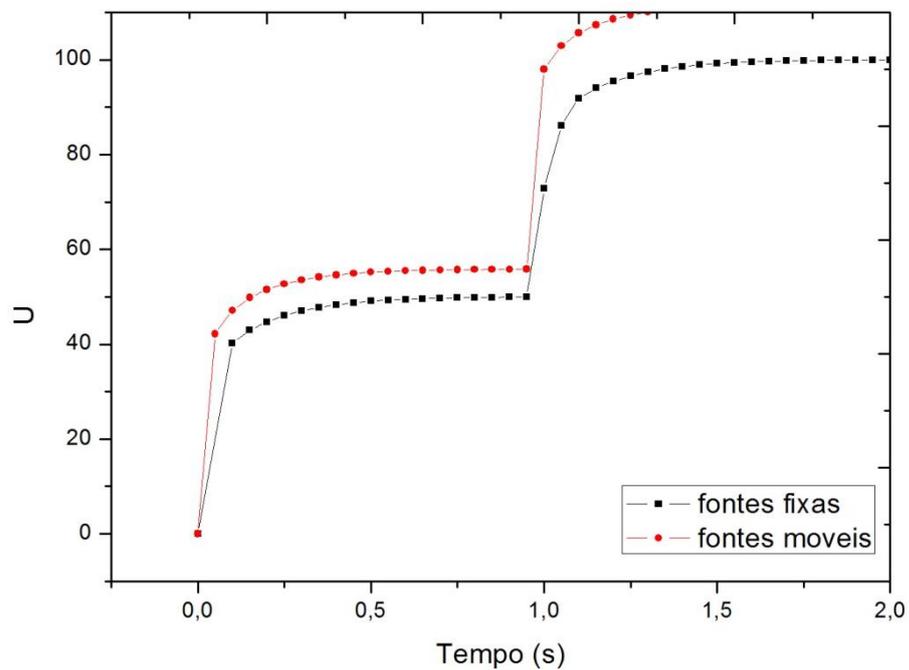


Figura 4.21: Relação entre a temperatura ao longo do tempo para fontes fixas e móveis no ponto A

5. CONCLUSÕES

5. CONCLUSÕES

Esse trabalho teve como tema a análise da formulação do Método das Soluções Fundamentais utilizando soluções fundamentais transientes para o problema da difusão. O principal objetivo desta dissertação foi avaliar a aplicação do MFS em modelos físicos sem a necessidade de nenhuma discretização ou transformada no domínio do tempo.

A utilização da transformada de Laplace ou o esquema de diferenças finitas são as maneiras mais comuns de se tratar o termo de derivada temporal existente na formulação do problema, mas a formulação proposta aqui não requer nenhum dos dois procedimentos. Para que o método pudesse ter sido aplicado diretamente ao modelo, fez-se necessário que a variável independente tempo fosse tratada como um dos domínios de solução das soluções fundamentais, gerando assim, uma solução com espaço-tempo unificado.

Para possibilitar à utilização destas soluções fundamentais transientes torna-se necessário que os pontos fonte sejam colocados corretamente tanto geometricamente quanto temporalmente. De forma a simplificar ainda mais o método, percebeu-se que a utilização de pontos fonte coincidentes espacialmente com os pontos campo não seria motivo causador de singularidades, desde que ambos não estivessem atuando no mesmo tempo.

Da mesma forma que o posicionamento dos pontos fonte é ainda muito estudado para aplicação do MFS em problemas estáticos, o posicionamento temporal dos pontos fonte em problemas dinâmicos merecem atenção. Com intuito de estudar este posicionamento dois modelos foram propostos para a utilização do método: um modelo utilizando fontes fixas no início do tempo proposto e outro modelo com fontes que mudam de coordenadas temporais juntamente com os pontos campos.

Além do posicionamento das fontes outro fato comum à maioria das formulações de MFS é o da singularidade da matriz que compõe o sistema a ser resolvido. Tal matriz é composta pelas soluções fundamentais em todos os nós da malha estudada, logo, para que pudesse ser feita a análise da singularidade da matriz optou-se por utilizar variações nas formas dos domínios, variações nas discretizações dos domínios e variações de incremento de tempo.

O sistema linear advindo da formulação do problema só pôde ser resolvido através de uma técnica de regularização de matriz. Foi testado o método de decomposição por valores singulares (DVS) mas este demonstrou ser insatisfatório para ambos os modelos, portanto utilizou-se outra técnica de regularização que apresentou bons resultados, a técnica de Tikhonov. A escolha do parâmetro de regularização do método deve ser feita cuidadosamente, e neste trabalho foi utilizado $\lambda = 10^{-8}$. Vale ressaltar que não foi o foco da dissertação o estudo de técnicas de regularização de matrizes.

Uma gama de exemplos foi estudada com o intuito de ilustrar a viabilidade dos métodos desenvolvidos e comprovar a eficiência computacional e numérica. Boa precisão foi encontrada em todos os exemplos analisados, sendo destaque para ambos os métodos a eficiência computacional e simplicidade de implementação.

Apesar do bom desenvolvimento de ambas as metodologias observou-se, que em todos os exemplos analisados, a utilização da metodologia MSF com fontes fixas no início de tempo do problema é mais precisa do que aquela que possui fontes variando no tempo. Além disso, percebeu-se que o refinamento da discretização do domínio em questão e a variação do incremento de tempo possui pouca influencia na resposta final e, tais parâmetros possuem valores ideais diferentes de acordo com o caso estudado.

Em relação o posicionamento temporal das fontes, percebeu-se que a resposta melhora de acordo com o afastamento desses pontos. Acredita-se que fontes localizadas muito perto dos pontos campo geram uma perturbação na solução final.

Em conclusão dos exemplos estudados cita-se como vantagens do MSF com soluções fundamentais transientes:

- ✓ Não existe o calculo de integrações numéricas;
- ✓ Não é necessário tratamento da derivada temporal da formulação;
- ✓ Preciso para discretizações relativamente simples;
- ✓ Eficiente computacionalmente;
- ✓ Simples implementação;
- ✓ Aplicabilidade comprovada

Em contrapartida as vantagens descritas observaram-se também limitações que ainda devem ser estudadas:

- ✓ Dificuldade de posicionamento das fontes, tanto espacialmente quanto temporalmente;
- ✓ Mal condicionamento das matrizes;
- ✓ Escolha de parâmetros adequados para cada problema

Por fim conclui-se que os métodos desenvolvidos possuem uma formulação que se revelou eficiente na solução dos diversos problemas de potencial aqui tratados, não obstante as suas limitações, percebeu-se que o método possui nível de precisão controlável, versatilidade, ganho computacional e fácil implementação, o que os torna de grande utilidade para aplicações correntes da engenharia moderna.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, J. S. CARLOS e ANTUNES R. S. PEDRO, (in press). The Method of Fundamental Solutions Applied to the calculation of Eigenfrequencies and Eigenmodes of 2D Simply connected Shapes, *Engineering Analysis with Boundary Elements*

ALVES. C. J. S., (2009). On the choice of source points in the method of fundamental solutions. *Eng. Anal. Boundary Elements*, 33:1348–1361.

BALAKRISHNAN K, RAMACHANDRAN PA., (2000) The method of fundamental solutions for linear diffusion-reaction equations. *Math Comput Model*; 31(2/3):221–37.

BERGER, J. R., e KARAGEORGHIS A., (1999). The Method of Fundamental Solutions for Heat Conduction in Layered Materials, *Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 45, pp 1681-1694.

BERGER J. R. e KARAGEORGHIS A., (2001). The method of fundamental solutions for layered elastic materials, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 25, pp 877-886.

BOGOMOLNY, A., (1984). Fundamental Solutions Method for Elliptic Boundary Value Problems, *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal*, vol 22, pp 644-669.

BREBBIA, C. A. e DOMINGUEZ, J., (1989). *Boundary Elements an Introductory Course*, Computational Mechanics Publications, Southampton, McGraw-Hill Book Company.

BREBBIA, C.A. e FERRANTE, A. J., (1986). *Computational Methods for the solution of Engineering Problems*, Pentech Press.

BREBBIA, C.A., TELLES J. C. F. e WROBEL L. C., (1984). Boundary Elements Techniques – Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg-New YorkTokyo.

BULGAKOV V, SARLER B, KUHN G., (1998). Iterative solution of systems of equations in the dual reciprocity boundary element method for the diffusion equation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.43, pp-713–32.

BURGESS G. e MAHAJERIN E., (1984). A comparison of the boundary element and superposition methods, Computers and Structures, vol 19, pp 697-705. Cao Y.S., Schultz W.W. & Beck R.F., (1991). 3-Dimensional desingularized boundary integral methods for Potential Problems, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol 8, pp 785-803.

CHANTASIRIWAN S., (2006). Methods of fundamental solutions for time-dependent heat conduction problems. Int. J. Numer. Meth. Eng., 66:147–165, 2006.

CHEN, C. S., (1995). The Method of Fundamental Solutions for non-linear Thermal Explosions, Communications in Numerical Methods in Engineering, vol 11, pp 675-681.

CHEN CS, GOLBERG MA, HON YC., (1998). The method of fundamental solutions and quasi-Monte-Carlo method for diffusion equations. Int J Numer Meth Eng 43:1421–35.

FAIRWEATHER G. e KARAGEORGHIS A., (1998). The Method of Fundamental Solutions for Elliptic Boundary Value Problems, Advances in Computational Mathematics, vol 9, pp 69- 95.

FAIRWEATHER G., KARAGEORGHIS A. & MARTIN P. A., (2003). The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol 27, pp 759-769.

FOURIER J.B.J., (1878). The Analytical Theory of Heat. Kessinger Publishing, Montana, 2008. English translation: translated by A. Freeman.

GOLBERG M. A., (1995a). The numerical evaluation of particular solutions in the EBM - a review, *Boundary Elements Communications* , vol 6, pp 99-106.

GOLBERG, M. A, (1995B). The method of Fundamental Solutions for Poissons Equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 16, pp 205-213, 1995.

GOLBERG M. A. e CHEN C. S., (1996). A bibliography on radial basis function approximation, *Boundary Element Communications*, vol 7, pp 155-163.

GOLBERG M. A. e CHEN C. S., (1998). The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems. In: Golberg MA, editor. *Boundary integral methods: numerical and mathematical aspects*, Boston/Southampton: WIT Press, p. 103-176.

GOLBERG, M. A., CHEN C. S. e MULESHKOV A. S., (1999B). The method of fundamental solutions for time dependent problems, *BETECH XIII*, Eds C. S. Chen et al, WIT press, Southampton, pp 377-386.

JICHUN LI, HON Y. C. e CHEN C. S., (2002). Numerical comparisons of two meshless methods using radial basis functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26, 205-225.

JOHANSSON, B. T. e LESNIC, D., (2008). A method of fundamental solutions for transient heat conduction. *Eng. Anal. Boundary Elements*, 32:697–703.

JOHANSSON, B. T. e LESNIC, D., (2009). A method of fundamental solutions for transient heat conduction in layered materials. *Eng. Anal. Boundary Elements*, 33:1362–1367.

JOHNSTON, R. L. e FAIRWEATHER, G., (1984). The method of fundamental solutions for problems in potential flow, *Applied Mathematical Modelling*, vol 8, pp 265-270.

KARAGEORGHIS A., (1992). The Method of Fundamental Solutions for the Solution of Steady State Free Boundary Problems, *Journal of Computational Physics*, vol 98, pp 119-128.

KARAGEORGHIS A. e FAIRWEATHER G., (1987). The Method of Fundamental Solutions for the Numerical Solution of the Biharmonic Equation, *Journal of Computational Physics*, Vol 69, pp 434-459.

KARAGEORGHIS A. e FAIRWEATHER G., (1989a). The Method of Fundamental Solutions for the Solutions of Nonlinear Plane Potential Problems, *IMA J. Numerical Analysis*, Vol 9, pp 231-242.

KARAGEORGHIS A. e FAIRWEATHER G., (1989B). The simple layer potential method of fundamental solutions for certain biharmonic problems, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol 9, pp 1221-1234.

KARAGEORGHIS A. e FAIRWEATHER G., (1999A). The Method of Fundamental Solutions for Axisymmetric Potential Problems, *Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 44, pp 1653-1669.

KARAGEORGHIS A. e FAIRWEATHER G., (1999B). The Method of Fundamental Solutions for Axisymmetric Problems, *BETECH XIII Eds. C. S. Chen et al, WIT Press, Southampton - Boston*, pp 387 – 396.

KUPRADZE, V. D. e ALEKSIDZE, M. A., (1964). A Method for the approximate solution of limiting problems in mathematical physics, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol 4, pp 199-205.

LEVIN, D e TAL, A., (1986). A Boundary Collocation Method for the Solution of a Flow Problem in a Complex Three-Dimensional Porous Medium, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 6, pp 611-622.

LOEFFLER NETO,C.F., (1988). Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MEDEIROS G. C., (2001). O Método das Soluções Fundamentais com Reciprocidade Dual para Problemas de Potencial, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília – DF.

MEDEIROS, G. C, PARTRIDGE, P. W e SENSALE B., (2000). O Método das Soluções Fundamentais com Reciprocidade Dual para Problemas de Potencial com Condições Mistas de Contorno, XXI Ibero Latin American Congress of Computer Methods in Engineering, Rio de Janeiro.

MEDEIROS, G. C, PARTRIDGE, P. W e SENSALE B., (2001). O Método das Soluções Fundamentais para alguns Problemas em Elasticidade Linear, XXII Ibero Latin American Congress of Computer Methods in Engineering, Campinas-SP.

MERA N. S.,(2005). The method of fundamental solutions for the backward heat conduction problem. *Inverse Problems Sci. Eng.*, 13:65–78

MULESHKOV, A. S., GOLBERG, M. A. e CHEN, C. S., (1999). Particular Solutions of Helmholtz-type Operators Using Higher Order Polynomial Splines, Journal of Computational Mechanics, Vol 23, 311-419.

NARDINI, D. e BREBBIA, C. A., (1982). A New Approach for Free Vibration Analysis using Boundary Elements, Boundary Element Methods in Engineering, (Ed C. A. Brebbia), pp 312-326, Springer-Verlag, Berlin and New York.

PARTRIDGE P. W. e SENSALÉ B., (2000). The Method of Fundamental Solutions with Reciprocity Dual for Diffusion and Diffusion-convection Using Subdomains, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol 24, pp 633-641.

PATTERSON, C. e SHEIKH, M. A., (1983). A Modified Trefftz Method for Three Dimensional Elasticity, in Boundary Elements Ed. C. A. Brebbia, Springer Verlag, pp 427-437.

POULLIKKAS A., KAREGEORGHIS A. e GEORGIU G., (1998A). The method of fundamental solutions for inhomogeneous elliptic problems, Computational Mechanics, vol 22, pp 100- 107.

POULLIKKAS A., KARAGEORGHIS A. e GEORGIU G., (1998B). Methods of Fundamental Solutions for Harmonic and Biharmonic Boundary value Problems, Computational Mechanics, Vol 21, pp 416-423. Powell M. J. D., (1990). The theory of radial functions approximation. Lancaster, UK: Numerical Analysis Summer School. Press, W. H.,

RAMACHANDRAN J. e RAJAMOHAN C., (1996). Analysis of composite plates using charge simulation method, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol 18, pp 131-135.

REEVE, T., e JOHANSSON, B. T. (2013). The method of fundamental solutions for a time-dependent two-dimensional Cauchy heat conduction problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(3), 569-578.

SUTRADHAR A, PAULINO GH, GRAY LJ., (2002) Transient heat conduction in homogeneous and non-homogeneous materials by the Laplace transform Galerkin boundary element method. *Eng Anal Bound Elem*, vol.26:119–32.

TIKHONOV A. N. AND ARSENIN V. Y., (1977). *Solutions of Ill-Posed Problems*. John Wiley & Sons, New York, Toronto, London.

TSAI CC, (2002). *Meshless numerical methods and their engineering applications*. PhD Thesis. Department of Civil Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan.

WALKER SP., (1992). Diffusion problems using transient discrete source superposition. *Int J Numer Meth Eng*;35:165–78.

WROBEL, L.C., (1981). *Potential and Viscous Flow Problems Using The Boundary Element Method*, Ph.D. Thesis, Southampton University.

WROBEL L. C. e BREBBIA C. A, (1981). A formulation of the boundary element method for axisymmetric transient heat conduction. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 24(5):843–850.

YOUNG, D. L. , TSAI C. C., MURUGESAN K., FAN C. M., AND CHEN C. W., (2004). Time-dependent fundamental solutions for homogeneous diffusion problems. *Eng. Anal. Boundary Elements*, 28:1463–1473.

YOUNG, D. L., TSAI, C. C., & FAN, C. M. (2004). Direct approach to solve nonhomogeneous diffusion problems using fundamental solutions and dual reciprocity methods. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 27(4), 597-609.

ZHU SP., (1998). Solving transient diffusion problems: time-dependent fundamental solution approaches versus LTDRM approaches. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.21, pp 87-90.

ZHU SP, LIU HW, LU XP., (1998) A combination of LTDRM and ATPS in solving diffusion problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.21, pp 285-9.