# ANÁLISE h-ADAPTATIVA TRIDIMENSIONAL DE PROBLEMAS DE ELASTOSTÁTICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM ELEMENTOS HEXAÉDRICOS TRILINEARES

**DAVID SOARES PINTO JÚNIOR**

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO REQUISITO FINAL PARA A TITULAÇÃO NO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Luiz Landau, D.Sc.
Presidente

Prof. Fernando L. B. Ribeiro, D.Sc.

Prof. Alvaro L. G. de A. Coutinho, D.Sc.

Prof. Abimael F. D. Loula, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO - 1994

JÚNIOR, DAVID SOARES PINTO.

ANÁLISE h-ADAPTATIVA TRIDIMENSIONAL DE PROBLEMAS DE ELASTOSTÁTICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM ELEMENTOS HEXAÉDRICOS TRILINEARES (RIO DE JANEIRO), 1994.
XI, 82 p., formato A4 (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1994)

TESE-UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, COPPE.
1. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ADAPTATIVO;
2. ANÁLISE h-ADAPTATIVA;
3. MALHAS ADAPTATIVAS;
4. ADAPTAÇÃO DE MALHAS;
5. MECÂNICA COMPUTACIONAL.
I. COPPE/UFRJ.
II. TÍTULO(Versão).

À meus pais, DAVID SOARES PINTO e SAYONARA T. MARINHO SOARES, à minha namorada WANDRÉA KELLY MELO SOARES, à meus irmãos SAYONARA MARINHO SOARES FILHA, MICHELINE MARINHO SOARES e KILDARE J. MARINHO SOARES, a meus avós maternos DJALMA MARINHO DO PASSO e SALOMÉ M. DO PASSO (in memorium) e a meus avós paternos SAMUEL SOARES PINTO(in memorium) e OLDA RODRIGUES PINTO(in memorium) e a Deus.

*NON IN SOLO PANE VIVIT HOMO.*
*(JESUS CRISTO)*

# AGRADECIMENTOS

Ao CNPq por financiar o meu curso de mestrado, contribuindo para gerar tecnologia e grupos de pesquisa no Brasil.

Ao Centro Nacional de Supercomputação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e , em especial, a Tibério e Denise pelo suporte computacional, gentileza e compreensão dispensada.

Ao Prof. Landau de quem esforcei-me por assimilar a experiência e a visão de um formador de pesquisadores e pelas inúmeras vezes que transmitiu sabedoria.

Ao Prof. Fernando L. B. Ribeiro pelo demonstrado envolvimento com o tema estudado, a dedicação à orientação, o notável amor à ciência e sentimento de perfeccionismo a quem atribuo traços determinantes em minha personalidade de pesquisador.

Ao Prof. Ronaldo Batista por possibilitar a realização de meu ideal de cursar o mestrado em Engenharia Civil. Ato vivo em minha memória.

Ao Prof. José Alves por criar um ambiente jovial e estimulante, transformando o desenvolvimento dos estudos numa convivência prazerosa e pelo apoio incisivo nas adversidades.

Ao Prof. Antônio por acreditar em minhas qualidades, introduzir-me na ciência e na pesquisa e indicar-me para esta instituição, a quem atribuo parte do meu sucesso.

Ao Prof. José Carlos por estimular minha vocação para a ciência.

Ao Prof. Jorge Lima cuja personalidade e sabedoria tanto interferiu em minhas metas de estudo.

Ao Prof. Josafá por proporcionar-me condições de apurar meus conhecimentos acadêmicos durante minha graduação que tanto me valeu neste estudo de pós-graduação.

À Sra. Albertina pelo tratamento humano e pelas palavras de fé, criando um sentimento especial por saber de pessoas que esperam por nosso sucesso.

À Geneilda pela cordialidade e atenciosidade que nos imprime estima e apreço, importantes nesta vida.

Ao Corpo Docente do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe ao qual atribuo meu saber de engenheiro e pelo qual conservo um sentimento nobre.

Ao Prof. Larrocerie por demonstrar profissionalismo, permitindo estudos que se mostrariam tão proveitosos para mim posteriormente.

Ao Prof. Ézio pelas palavras animadoras dirigidas a mim num momento adverso.

Ao Prof. Oscar por encorajar-me a cursar a pós-graduação, um projeto de vida tão almejado por mim.

Ao Prof. Roberto F. de Oliveira pela excelente relação professor-aluno e pelas teorias de Métodos Variacionais, essenciais neste estudo ora concluído.

Ao Prof. Alvaro pelo interesse natural em sugerir, comentar e discutir acerca dos problemas correlacionados com o tema da tese.

À Beth, Eunice, Rita e Gilberto pela atenciosidade e autenticidade constantes.

À Marilene e Rosana pela amabilidade no tratar, às quais trarei sempre nas lembranças.

À Isabel, Gigi, Jurandir, Jeriel, Marcia e Solange pela generosidade invariável durante o transcorrer deste meu estudo, pelos quais tenho muito apreço.

À Claudio, Leonardo e Alexandre pelo tratamento gentil dispensado durante a pós-graduação.

Ao Sr. Abel e à Sra. Sueli, figuras bondosas e presentes, por transmitir fé e esperança.

A Guilherme e Hélder pelo modo hospitaleiro com que me receberam, e todas as tristezas e alegrias vividas juntos certamente nos torna, agora, amigos até o fim.

Aos meus tios David e Mildred, e primas Patrícia, Vivian e Edinete pela hospitalidade com que me receberam, permitindo uma adaptação natural às circunstâncias, aos quais atribuo parte do meu sucesso.

À Claudio Cruz Nunes pelas experiências vividas, pelos conhecimentos assimilados e pelo sentimento de união compartilhado, o que nos faz, agora, amigos.

Aos amigos José Mário, Flávio, Norma, Ricardo e Nilda pelo ânimo e fé transmitidos com a palavra certa.

À Célio pela atenção dispensada no transcorrer deste trabalho.

À Prof$^{a.}$ Nadia Gomes pela ajuda e apoio com que me acorreu nos momentos finais deste trabalho, uma meta de vida.

Àqueles que embora não tenham sido citados e que merecem minha reverência, pois, de alguma forma deram algo de si para meu aperfeiçoamento como ser humano.

À Deus.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO REQUISITO FINAL PARA A TITULAÇÃO NO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

# ANÁLISE h-ADAPTATIVA TRIDIMENSIONAL DE PROBLEMAS DE ELASTOSTÁTICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM ELEMENTOS HEXAÉDRICOS TRILINEARES

**DAVID SOARES PINTO JÚNIOR**

DEZEMBRO - 1994

Orientadores: Fernando L. B. Ribeiro
Luiz Landau

Programa: Engenharia Civil

Idealizamos neste trabalho uma estrutura topológica para Análise h-Adaptativa Tridimensional com elementos finitos hexaédricos trilineares e funções de forma da família de Lagrange.

A Malha Adaptativa estudada é estruturada com padrão de refinamento do algoritmo **Octree**. A Estratégia Adaptativa projeta a distribuição de dimensões dos elementos através de um espectro de divisões ***via*** subdivisão de malha. Este procedimento incorpora tanto o refinamento sucessivo quanto o método de remalhamento.

Este procedimento de análise é aplicado na solução numérica de Problemas de Elastostática Linear Tridimensional.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS FINAL REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER IN SCIENCE (M.Sc.).

# TRIDIMENSIONAL h-ADAPTIVE ANALYSIS OF ELASTOSTATIC PROBLEMS BY FINITE ELEMENT METHOD WITH TRILINEAR HEXAEDRAL ELEMENTS

**DAVID SOARES PINTO JÚNIOR**

DECEMBER - 1994

Chairmen: Fernando L. B. Ribeiro
Luiz Landau

Department: Civil Engeneering

In this work we idealize a topological strucuture to Three-dimensional h-Adaptive Analysis with trilinear hexaedral finite elements and shape functions of Lagrange Family.

The Adaptive Mesh estudied here is structured with refinement pattern of the **Octree** algorithm. The Adaptive Strategy design the size distribuition of elements by a spectro of divisions ***via*** mesh subdivision. This procedure join both succesive refinement and remeshing method.

This procedure of analysis is applied in the numerical solution of Problems of Tridimensional Linear Elastostatics.

# ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL 4

II.1 - MODELO MATEMÁTICO 4

II.2 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL 5

II.3 - FORMULAÇÃO DISCRETA 6

II.4 - FORMULAÇÃO MATRICIAL 7

II.5 - ELEMENTO SÓLIDO HEXAÉDRICO 8

CAPÍTULO III - ANÁLISE h-ADAPTATIVA 11

III.1 - GENERALIDADES 11

III.2 - ESTIMATIVA DE ERRO 12

III.3 - ALGORITMO ADAPTATIVO 17

III.4 - TAXA DE CONVERGÊNCIA 21

CAPÍTULO IV - MALHAS TRIDIMENSIONAIS ADAPTATIVAS HEXAÉDRICAS 23

IV.1 - GENERALIDADES 23

IV.2 - PADRÃO DE REFINAMENTO 24

IV.3 - ESTRUTURA TOPOLÓGICA 25

IV.3.1 - Numeração Nodal 25
IV.3.2 - Numeração dos Elementos 26
IV.3.3 - Numeração das Arestas e das Faces 27
IV.3.4 - Vizinhanças Aréstica e Facial 30
IV.3.5 - Algoritmo de Refinamento do Hexaedro 33

IV.4 - ELEMENTOS A REFINAR 33

IV.5 - TRANSFORMAÇÕES DE RESTRIÇÃO 35

IV.5.1 - Tipos de Nós Irregulares 35

IV.5.2 - Transformações Matriciais 38

IV.6 - MÉTODO DE SOLUCÃO DE SISTEMAS LINEARES 42

CAPÍTULO V - PROBLEMAS RESOLVIDOS 48

V.1 - PROBLEMA DE VIGA MONOENGASTADA 48

V.1.1 -Análise h-Adaptativa do Problema da Viga 49

V.2 - PROBLEMA DE GEOMECÂNICA (BOUSSINESQ) 58

V.2.1 -Análise h-Adaptativa do Problema de Boussinesq 59

CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES 73

CAPÍTULO VII - SUGESTÕES 75

BIBLIOGRAFIA 78

# CAPÍTULO I

# INTRODUÇÃO

Cronologicamente, Courant [1], num artigo sobre Problemas de Torção em seções multiplamente conexas publicado em 1943, foi quem primeiro delineou o método dos elementos finitos através do formalismo variacional.

Os restritos avanços tecnológicos dos computadores digitais da época incapacitava, entretanto, as aplicações à engenharia.

A era dos elementos finitos, principiava em 1953, quando Levy [2] aplica o método na engenharia estrutural para analisar asas de aeroplanos. Clough batizou o método com o nome Método dos Elementos Finitos (Cook [3]).

Em 1963 (Cook [3]), o método dos elementos finitos se consagrava como método geral para resolver equações a derivadas parciais e equações integrais (Johnson [4]), pela sua sólida e fundamentada teorial variacional.

Desde então, vários códigos computacionais foram desenvolvidos para simulação numérica com elementos finitos.

Em 1978, Ivo Babuska [5] idealizou uma versão inédita do método chamada método dos elementos finitos adaptativo, impulsionando incisivamente a pesquisa em análise numérica.

A análise adaptativa é, modernamente, o procedimento mais inteligente de simulação através de elementos finitos. Adaptar uma malha significa criar graus de liberdade tal que os erros de discretização se equidistribuam, o que denomina-se princípio de equidistribuição de erros (Lyra [6]). Várias Estratégias Adaptativas utilizam este princípio (Devloo [7]).

Embora a Adaptatividade otimize o número de graus de liberdade para um determinado grau de exatidão da solução discreta, problemas inerentemente tridimensionais dependem do poder de processamento e memória dos computadores e dos sistemas de computação gráfica (Watson [8], Lo [9]).

Na década de 90, inúmeros problemas tipicamente tridimensionais como problemas de contato (Marques [10], Chen [11]), análise de tensões em reatores protendidos (Rashid[12]), condução de calor (Surana[13]),

física dos semi-condutores (Fitzsimons [14]) e fluxo transônico (Kallinderis [15]) tem sido abordados, impulsionado pelos atributos dos supercomputadores e sistemas de visualização.

Diante de tais avanços, a análise de elementos finitos tridimensionais tem atraído o interesse dos pesquisadores. Vários tópicos como funções de forma e fórmulas de integração para os diferentes tipos de elementos 3D (Bedrosian[16]) e elementos infinitos 3D (Viladkar[17]) ainda não estão perfeitamente compreedidos e testados.

Embora o formalismo matemático e computacional dos problemas 3D seja uma mera extensão dos casos uni e bidimensional, a multiplicidade de casos existentes em 3D cria naturalmente certa complexidade. Tal multiplicidade, induz logicamente, o estudo da automação da geração de malha, tópico importantíssimo em problemas desta natureza.

A automação da geração de malhas em 3D é de suma importância (Martins [18]) porque modelar um corpo sólido sem um pré-processador é improdutivo, senão, impossível. Apesar dos códigos adaptativos possuirem a dupla função de analisador e gerador, uma primeira discretização é essencial.

Raros estudos na literatura reunem adaptação de malhas e problemas tridimensionais. Devloo [7] apresenta um artigo onde desenvolve uma estratégia adaptativa em 3D, mas o tema continua em estudos.

Objetiva-se aqui o estudo da análise h-adaptativa tridimensional usando elementos hexaédricos de oito pontos nodais. O estudo compreende, portanto, o método-h ou versão-h do método dos elementos finitos aplicado a problemas 3D. O método-h consiste em dividir os elementos, criando, assim, graus de liberdade de tal forma a otimizar a aproximação. Este estudo compõe-se de uma estratégia adaptativa e de uma estrutura topológica correspondente.

Na estratégia utilizada, estima-se uma distribuição de dimensões dos elementos traduzidas por um espectro de divisões. A cada elemento é atribuído um número de particionamentos de modo que a nova malha gerada conduza a um percentual de erro pré-especificado.

O estimador de erro utilizado é uma extensão natural a três dimensões do indicador de erro de Zienkiewicz-Zhu.

A estrutura topológica criada é capaz de descrever a história do refinamento de malhas estruturadas uni-irregulares de hexaedros de oito pontos nodais segundo o algoritmo **Octree**.

A estrutura topológica compõe-se de uma vizinhança aréstica e de uma vizinhança facial. Associada a esta estrutura uma classificação de tipos nodais é introduzida para identificar os nós irregulares por aresta e por face e os nós ativos da malha. Esta estrutura de vizinhança e tipos transforma o algoritmo de refinamento do hexaedro num gerador hierárquico de malhas uma vez que a transferência de informação de topologia entre os refinamentos subsequentes é inteiramente conservada.

O código de análise h-adaptativa tridimensional desenvolvido é aplicado na resolução de problemas de elasticidade estática linear tridimensional.

O tema é apresentado em quatro capítulos, distribuídos conforme descrito abaixo:

Capítulo II - Descrição das formulações teóricas do problema clássico da elasticidade;

Capítulo III - Apresentação da estratégia e do algoritmo de análise h-adaptativa do problema;

Capítulo IV - Construção da estrutura topológica para malhas de hexaedros de oito pontos nodais;

Capítulo V - Resolução de problemas, discussões e interpretação de resultados.

No final do texto são apresentadas conclusões e uma série de sugestões são dadas como forma de orientar futuros estudos.

# CAPÍTULO II

# MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL

Apresenta-se sumariamente neste capítulo a definição matemática do problema clássico da Mecânica dos Corpos Deformáveis. Descreve-se as formulações Matemática Clássica, Variacional, Galerkiana e Matricial. Define-se, ainda, o tipo de elemento finito implementado e algumas de suas propriedades. O objetivo é fixar uma terminologia para o texto e metodizar a apresentação do tema.

## II.1 - MODELO MATEMÁTICO

Seja um corpo elástico, isotrópico e homogêneo, definido numa região $\Omega \subset R^3$ limitada por uma superfície de contorno $\Gamma$(FIGURA N$^{o}$.1). Sejam $\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$ as forças de corpo, n a normal exterior e $\mathbf{f}=(f_x,f_y,f_z)$ as forças de superfície. O contorno $\Gamma$ é composto por $\Gamma_u$ e $\Gamma_f$, $\Gamma_u$ para as condições de Dirichlet e $\Gamma_f$ para as condições de Neumann. Seja o campo vetorial incógnita $\mathbf{u}=(u_x,u_y,u_z)$, o tensor de tensões $\sigma_{ij}$, i,j=1,2,3 e o tensor de deformações $\varepsilon_{ij}$, i,j=1,2,3. Então, o Problema de Elasticidade é expresso por (Johnson[4]):

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \mathbf{b}_i = 0, \ \forall x \in \Omega \subset R^3 \ , i = 1,2,3. \tag{II.1}$$

$$u = \delta, \forall x \in \Gamma_u. \tag{II.2}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} . n_j = f_i , \forall x \in \Gamma_f , i = 1,2,3. \tag{II.3}$$

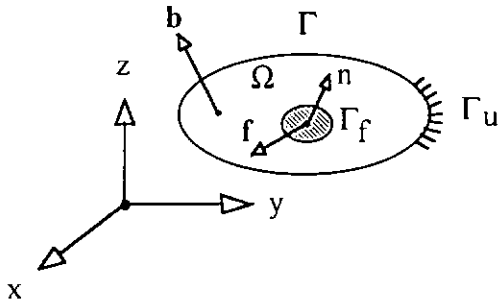


FIGURA Nº 1-Geometria do Corpo Sólido Elástico.

A associação do tensor de deformação com o campo de deslocamentos é expressa pela Equação Deformação-Deslocamento:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \; i,j = 1,2,3. \qquad \text{(II.4)}$$

E a associação do tensor de tensões com o tensor de deformações é expressa pela Lei de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \lambda \; \nabla \cdot \mathbf{u}\, \delta_{ij} + \mu \; \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}), \; \delta_{ij} \text{ é o Delta de Kronecker.} \qquad \text{(II.5)}$$

Os parâmetros $\lambda$ e $\mu$ são constantes positivas(constantes de Lamé) e $\nabla$ é o operador gradiente:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}. \qquad \text{(II.6)}$$

## II.2 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Denotemos por S o espaço das funções admssíveis e por V o espaço das funções peso. Cada elemento de S satisfaz as condições de Dirichlet em $\Gamma_u$ e os elementos de V anulam-se em $\Gamma_u$. Seja, então, determinar $\mathbf{u} \in S$ tal que $\forall \mathbf{w} \in V$ (Johnson [4]):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{w})\, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b}\, \mathbf{w}\, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}\, \mathbf{w}\, d\Gamma. \qquad \text{(II.7)}$$

Esta equação representa a formulação variacional associada ao Problema de Elasticidade. Para simplificar a notação, é usual definir as formas bilinear $B: S \times V \rightarrow R$ e linear $L: V \rightarrow R$ tal que:

$$B(\mathbf{u},\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{w})\, d\Omega, \quad i,j = 1,2,3, \tag{II.8}$$

$$L(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{b}\, \mathbf{w}\, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}\, \mathbf{w}\, d\Gamma, \tag{II.9}$$

assim, o problema de elasticidade pode ser formulado como: Determinar $\mathbf{u} \in S$ tal que

$$B(\mathbf{u},\mathbf{w}) = L(\mathbf{w}), \ \forall\, \mathbf{w} \in V. \tag{II.10}$$

Os espaços S e V são definidos conforme as condições de integrabilidade impostas às funções destes espaços pelas integrais. No caso em estudo tais espaços são expressos por:

$$S = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathbf{u} = \delta, \forall x \in \Gamma_u \right\},$$

$$V = \left\{ \mathbf{w} \in H^1(\Omega) : \mathbf{w} = 0, \forall x \in \Gamma_u \right\}.$$

O espaço $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev de 1ª ordem.

## II.3 - FORMULAÇÃO DISCRETA

Denote por $S^h$ e $V^h$ as aproximações de dimensãao finita para os espaços S e V. Designe $\mathbf{u}^h$ tal que $\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \delta^h$ , $\mathbf{v}^h \in V^h$ e $\delta^h$ é tal que $\mathbf{u}^h = \boldsymbol{\delta}$ , $\forall x \in \Gamma_u$. Seja, então, determinar $\mathbf{u}^h \in S^h$ tal que $\forall \mathbf{w}^h \in V^h$ :

$$B(\mathbf{u}^h,\mathbf{w}^h) = L(\mathbf{w}^h). \tag{II.11}$$

Esta é a formulação de Bubnov-Galerkin associada à formulação variacional do problema (Hughes [19]).

A construção dos espaços $S^h$ e $V^h$ depende da seleção de um tipo de elemento finito com o qual define-se uma malha ou discretização (Hughes [19]). O tipo de elemento finito utilizado nas aproximações é o elemento tridimensional isoparamétrico trilinear com funções de interpolação da família de Lagrange, portanto, de oito pontos nodais. As funções $\mathbf{v}^h$ são xpressa em termos de incógnitas nodais $d_i$ e de funções de forma $N_i$ como:

$$\mathbf{v}^h = \sum_{i=1}^{8} N_i \, d_i . \tag{II.12}$$

Esta formulação é reescrita em linguagem matricial para permitir o tratamento algorítmico geral do método dos elementos finitos.

## II.4 - FORMULAÇÃO MATRICIAL

Seja **K** a matriz de rigidez do corpo, **F** o vetor de forças nodais equivalentes e **d** o vetor de incógnits nodais, associados aos graus de liberdade da malha de elementos finitos (Hughes [19]). Computando as integrais da formulação discreta para um elemento finito genérico, tem-se:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}^h) \, \mathbf{D} \, \varepsilon_{ij}(\mathbf{w}^h) \, d\Omega, \quad i,j,k,l = 1,2,3, \tag{II.13}$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{b} \, \mathbf{w}^h \, d\Omega + \int_{\Gamma^e{}_f} \mathbf{f} \, \mathbf{w}^h \, d\Gamma - \mathbf{k}^e \delta^e . \tag{II.14}$$

A formulação matricial associado pode, então, ser expressa por (Hughes [19]):

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{d}\}=\{\mathbf{F}\}, \tag{II.15}$$

$$\mathbf{F} = \underset{e=1}{\overset{E}{\mathbf{A}}}(\mathbf{f}^{e}), \tag{II.16}$$

$$\mathbf{K} = \underset{e=1}{\overset{E}{\mathbf{A}}}(\mathbf{k}^{e}), \tag{II.17}$$

onde, **A** indica a operação de montagem da matriz de rigidez (**Assembling**), E o número de elementos finitos na malha, $\mathbf{k}^{e}$, $\mathbf{f}^{e}$ e $\delta^{e}$ são a rigidez, a força nodal equivalente e $\delta^{e}$ o deslocamento prescrito do e-ésimo elemento, respectivamente e **D** é a matriz isotrópica da elasticidade tridimensional. Tal matriz **D** é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2-2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \end{bmatrix}, \tag{II.18}$$

onde **E** é o módulo de elesticidade e $\nu$ é o coeficiente de Poisson.

## II.5 - ELEMENTO SÓLIDO HEXAÉDRICO

O elemento finito utilizado é um elemento tridimensional hexaédrico isoparamétrico conforme trilinear com funções de forma da Familia de Lagrange(FIGURA N$^{o}$·2).

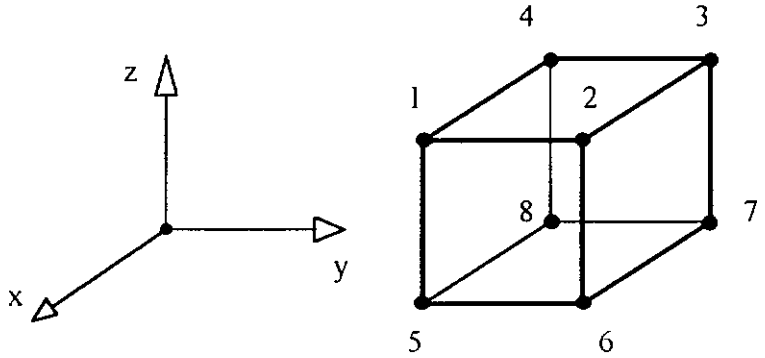


FIGURA Nº 2- Elemento Hexaédrico e Numeração Nodal.

As funções de forma unidimensionais desta classe podem ser geradas utilizando o polinômio de Lagrange (Hughes[19]):

$$\ell_i^{N-1}(\xi) = \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{N} (\xi - \xi_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{N} (\xi_i - \xi_j)}, \qquad \text{(II.19)}$$

onde N-1 é o grau do polinômio, i é ponto nodal e $\xi$ é a coordenada normalizada. Para o caso de três dimensões espaciais, uma função de forma de um ponto nodal genérico n é expressa por:

$$N_n(\xi, \eta, \lambda) = \ell_n(\xi)\, \ell_n(\eta)\, \ell_n(\lambda), \qquad \text{(II.20)}$$

portanto, as funções são trilineares.

Para que a solução aproximada de Galerkin convirja para a solução exata, as funções de forma devem possuir certas propriedades (Hughes [19]):

P1. Regular em $\Omega^e$.

P2. Continuidade em $\Gamma^e$.

P3. Completidade.

No elemento sólido de elasticidade tridimensional estudado as funções de forma satisfazem as três condições.

O mapeamento que descreve as transformações de coordenadas é expresso por:

$$x,y,z : [-1,+1] \times [-1,+1] \times [-1,+1] \rightarrow \Omega^e, \tag{II.21}$$

$$x(\xi,\eta,\lambda) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\lambda)\, x_i, \tag{II.22}$$

$$y(\xi,\eta,\lambda) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\lambda)\, y_i, \tag{II.23}$$

$$z(\xi,\eta,\lambda) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\lambda)\, z_i, \tag{II.24}$$

onde $x_i$, $y_i$ e $z_i$ são as coordenadas cartesianas de um ponto nodal genérico i. Para elementos isoparamétricos, o campo de deslocamento é escrita como:

$$\mathbf{u}^h(\xi,\eta,\lambda) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\lambda)\, \mathbf{d}_i^e, \tag{II.25}$$

onde $\mathbf{d}_i^e$ são os deslocamentos nodais do elemento.

O elemento hexaédrico apresenta ótimas qualidades de visualização gráfica (Zienkiewicz [20]) e é indicado para preencher volumes (Bedrosian [16]). A ordem polinomial do elemento não requer um procedimento otimizado de integração numérica como elementos hexaédricos de ordens espectrais maiores, onde a integração é uma determinante de natureza computacional(Irons[21]). No cômputo da rigidez de elemento usou-se quadratura de Gauss-Legendre com dois pontos de integração em cada direção.

# CAPÍTULO III

# ANÁLISE h-ADAPTATIVA

Este capítulo trata das formulações das medidas de erro de discretização da estratégia adaptativa implementada. São abordados resumidamente conceitos de normas de energia, estimativas de erro, a-priori e a-posteriori, indicador de erro, convergência-h e malha ótima.

Objetiva-se aqui a continuidade da teoria, com enfoque para o caso de elemento tridimensional hexaédrico trilinear tratado neste trabalho.

## III.1 - GENERALIDADES

A estratégia adaptativa corresponde a um módulo computacional que integra uma análise adaptativa, quantificando os erros de discretização inerentes à modelação do contínuo com uma malha de elementos finitos e definindo os critérios de refinamento dos elementos da malha.

As primeiras formulações teóricas puramente matemáticas sobre estimativas de erro utilizadas no método dos elementos finitos adaptativo foram apresentadas por Ivo Babuska e W. C. Rheinboldt [5], induzindo a utilização da análise de erro nos códigos gerais para simulação computacional.

Em problemas tridimensionais, onde memória e tempo são variáveis imperativas, a geração da malha precisa ser orientada de forma inteligente, e portanto, uma estimativa de erro a-posteriori é essencial (Ohtsubo et alii [22]).

Tal análise informa a dimensão do elemento com a qual constrói-se a malha adaptada, isto é, produz-se uma otimização da malha de elementos finitos original (Babuska et alii [23]). Para medir tais erros existem duas formas usuais: estimativas a-priori e estimativas a-posteriori. As estimativas a-priori precisam de informações sobre a solução exata (Szabó [24]), que são, em geral, complicadas e incógnitas. Existem, também, as várias técnicas de estimativa de erro a-posteriori, mas aqui usaremos o método do pós-processamento (Oden et alii [25]). Nas estimativas a-posteriori determinadas segundo a técnica do pós-processamento, uma estimativa de erro é computada pela comparação de uma versão pós-

processada da solução aproximada com a solução aproximada. Os indicadores de erro, assim construídos, criam um espécie de inteligência artificial no programa, orientando a evolução da malha adaptativa (Devloo [7]). Os indicadores de erro são, em geral, expressos em termos de normas naturais ou de energia. As malhas ótimas (Zienkiewicz[28]) são construídas de tal forma que as normas dos erros nos elementos sejam equidistribuídas na malha. As estimativas de erro usuais possuem propriedades de convergência demonstradas matematicamente (Ainsworth et alii [27]), possibilitando o uso do código adaptativo em análises de engenharia.

O estudo de indicadores de erro para análises adaptativas é de suma importância e tem atraído o interesse no sentido de criar indicadores (Ainsworth et alii [27]) com propriedades de convergência(estimador de erro assintoticamente exato) e generalidade (malhas irregulares) que condicionem análises complexas em engenharia e com segurança.

Em uma análise adaptativa a computação dos erros é repetitivamente realizada, entretanto, o grau de exatidão computado comparado ao número de graus de liberdade e tempo envolvido é compensador (Szabó [24]) e, portanto, é viável introduzir este tipo de procedimento nos códigos usuais de análise de elementos finitos.

## III.2 - ESTIMATIVA DE ERRO

A solução aproximada $\mathbf{u}^h$ difere da solução exata u pelo erro nos deslocamentos **e** (Zhu et alii [28]):

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h. \qquad \text{(III.1)}$$

Uma medida usual do erro é a calculada pela norma de energia. A denominação norma de energia reporta-se à dimensão das integrais que representam a energia de deformação associada ao erro. Esta norma é, também, a norma naturalmente deduzida da formulação variacional do problema.

Para a elasticidade tridimensional é expressa por:

$$\| \mathbf{e} \|_E^2 = B(\mathbf{e},\mathbf{e}) = \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)^t \, \mathbf{D} \, \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \, d\Omega. \qquad \text{(III.2)}$$

Analogamente, a norma de energia do erro pode ser escrita em função do erro nas tensões como:

$$\| \mathbf{e} \|_E^2 = B(\mathbf{e},\mathbf{e}) = \int_\Omega (\sigma - \sigma^h)^t \, \mathbf{D}^{-1} \, (\sigma - \sigma^h) \, d\Omega. \qquad \text{(III.3)}$$

onde $\sigma$ é o tensor de tensão exato, $\sigma^h$ é o tensor de tensão via elementos finitos e $\mathbf{D}^{-1}$ é a inversa da matriz constitutiva isotrópica de elasticidade tridimensional, definida por:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu \end{bmatrix} \qquad \text{(III.4)}$$

Esta norma representa a estimativa do erro de discretização associada à malha de elementos finitos. Tais normas quando computadas por elemento são ditas indicadores de erro.

As expressões das normas de erro indicam que alguma informação sobre a solução exata precisa ser dada. Em função disto, classificam-se dois tipos de estimativas: a-priori e a-posteriori. Na estimativa a-priori, supondo que a solução exata é bem comportada, é fixada alguma propriedade da função. Digamos que a derivada segunda é limitada. Então, se a ordem polinomial da interpolação é linear deduz-se uma desigualdade do tipo (Szabó [24]):

$$\| e \|_E \leq C \, h, \qquad \text{(III.5)}$$

onde C é uma constante real dependente de parâmetros específicos do problema estudado, mas independente da dimensão paramétrica h do elemento. Esta desigualdade (equação III.6) é típica do método-h de refinamento adaptativo (Ewing [29]). Esta classe de estimativa, entretanto, é abordada preferencialmente em análises matemáticas complexas para provar certas propriedades de convergência do estimador. Em análise numérica, especialmente em análise de elementos finitos, outras técnicas são aplicadas com o objetivo de quantificar o grau de exatidão da solução numérica. Compõe esta classe as estimativas a-posteriori. Existem inúmeras técnicas para construir estas estimativas (Oden et alii [25]), porém, usaremos o método do pós-processamento. Uma estimativa usual pertencente a este tipo método é o estimador de erro de Zienkiewicz-Zhu. Este estimador de erro é assintoticamente exato (Ainsworth et alii [27]), ou seja:

$$\theta = \frac{\| e \|_E}{\| e_{ex.} \|_E}, \quad \lim_{h \to 0} \theta = 1, \tag{III.6}$$

onde $\theta$ é o índice de efetividade do estimador, $\| e \|_E$ é o erro estimado, $\| e_{ex.} \|_E$ é o erro exato e a dimensão paramétrica h, neste caso, é a dimensão máxima do elemento.

Nos procedimentos numéricos de análise o estimador é usado como critério de parada dos módulos adaptativo, em função do qual define-se o erro relativo:

$$\eta = \frac{\| \mathbf{e} \|_E}{\| \mathbf{u} \|_E}, \tag{III.7}$$

$$\| \mathbf{u} \|_E^2 = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \tag{III.8}$$

Nas computações, este parâmetro é estimado como:

$$\eta \approx \frac{\| e \|_E^2}{\left\| u^h \right\|_E^2 + \| e \|_E^2}, \qquad \text{(III.9)}$$

$$\left\| u^h \right\|_E^2 = B(u^h, u^h). \qquad \text{(III.10)}$$

Este parâmetro orienta a estratégia de refinamento para projetar a malha adaptativa.

Para computar a estimativa de erro de Zienkiewicz-Zhu é construído um tensor de tensões contínuo pelo pós-processamento da solução de elementos finitos. O princípio intuitivo é que como o elemento finito é contínuo nos deslocamentos, o elemento sólido hexaédrico de elasticidade 3D é de Continuidade $C^0(\Omega)$, e descontínuo nas tensões, espera-se que o tensor contínuo criado, projetando-se as tensões discretas, represente uma aproximação mais realista da distribuição verdadeira de tensões no sólido elástico.

Define-se, então, o tensor de tensões contínuo por:

$$\sigma^c = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta, \lambda)\, \overline{\sigma}_i. \qquad \text{(III.11)}$$

onde $\overline{\sigma}_i$ é o tensor de tensões nodal médio de um ponto nodal genérico i.

O tensor de tensões nodal médio é determinado impondo que o erro ponderado sobre a malha de elementos finitos seja nulo, isto é:

$$\int_\Omega N^t\, (\sigma^c - \sigma^h)\, d\Omega = 0, \qquad \text{(III.12)}$$

Substituindo a equação do tensor contínuo (III.11) na equação do erro ponderado (III.12), tém-se:

$$\overline{\sigma}_i = \frac{\int_\Omega \mathbf{N}^t \sigma^h \, d\Omega}{\int_\Omega \mathbf{N}^t \, \mathbf{N} \, d\Omega}, \tag{III.13}$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3 \quad \mathbf{N}_4 \quad \mathbf{N}_5 \quad \mathbf{N}_6 \quad \mathbf{N}_7 \quad \mathbf{N}_8], \tag{III.14}$$

$$\mathbf{N}_i = N_i \, \mathbf{I}_6. \tag{III.15}$$

onde $\mathbf{I}_6$ é a matriz identidade de sexta ordem e $N_i$ é a função de interpolação do nó i.

Os atributos computacionais do indicador de erro, conforme indica a expressão do tensor de tensão nodal médio (equação matricial III.14), depende da matriz de massa, definida por:

$$\mathbf{M} = \int_\Omega \mathbf{N}^t \, \mathbf{N} \, d\Omega. \tag{III.16}$$

É preferível (Zienkiewicz[21]) que a matriz **M** seja diagonal, pois, o cômputo da sua inversa implicaria em resolver um sistema linear (equação matricial III.14). É notável, também, o volume de operações aritméticas associadas às integrações numéricas em malhas de elementos finitos tridimensionais relacionadas à determinação da estimativa de erro. A estimativa de erro, portanto, merece um tratamento computacional especial. No nosso caso, implementou-se uma extensão natural a três-dimensões do usual estimador de erro de Zienkiewicz-Zhu. Com isto, o tensor de tensões médio nodal é definido por:

$$\overline{\sigma}_i = \frac{1}{c}\sum_{e=1}^{c} \sigma_e^h, \tag{III.17}$$

$$\sigma_e^h = \mathbf{D}\,\varepsilon_e(u^h), \tag{III.18}$$

$$\overline{\sigma}_i = \begin{Bmatrix} \overline{\sigma}_{x_i} \\ \overline{\sigma}_{y_i} \\ \overline{\sigma}_{z_i} \\ \overline{\tau}_{xy_i} \\ \overline{\tau}_{yz_i} \\ \overline{\tau}_{zx_i} \end{Bmatrix}, \tag{III.19}$$

onde c é o número de elementos concorrentes no ponto nodal i e $\sigma_e^h$ é o tensor de tensões discreto do elemento e genérico cujo ponto nodal i pertence à sua incidência.

Em malhas adaptativas a média aritmética das tensões nodais, embora simples, traduz perfeitamente a tendência do refinamento em direcionar-se para a singularidade, demonstrando que localmente os elementos circunvizinhos de um nó possuem volumes praticamente equivalentes, e portanto, uma média ponderada pelos volumes implicaria em computações infrutíferas a nível de engenharia.

A título de comentário, no caso bi-dimensional, a média nodal é equivalente ao procedimento de diagonalização da matriz **M**, para malhas uniformes de elementos triangulares lineares, e para malhas não-uniformes, a diferença entre as estimativas de erro segundo a média nodal ou pela matriz diagonalizada não é significativa (Ribeiro [31]).

## III.3 - ALGORITMO ADAPTATIVO

Para o algoritmo adaptativo conduzir à malha ótima de forma que a magnitude do erro esteja equidistribuído nos elementos segundo uma norma

(Devloo [7], Zhu et alii [28]), uma estratégia de refinamento precisa ser definida onde, após a análise adaptativa ser executada, o erro relativo na malha obedece:

$$\eta \leq \overline{\eta}, \tag{III.20}$$

onde $\overline{\eta}$ é o erro relativo permissível prescrito.

A estratégia seleciona, segundo o indicador de erro, os elementos a serem refinados na malha. Existem variadas formas de definir o grupo de elementos refináveis em função deste critério de erro. Conforme o critério usado podemos ter uma subdivisão sucessivà ou remalhamento (Zhu et alii [28]). Nossa estratégia incorpora estas duas técnicas usuais. O refinamento sucessivo é um caso especial quando limita-se o número de divisões do espectro a uma unidade; e, o remalhamento é automaticamente realizado, em função da distribuição do número de divisões dos elementos, segundo o algoritmo **Octree** implementado, quando o espectro de divisões é genérico.

Sabendo que a ordem da convergência do erro é $O(h^p)$, então, após N divisões de um elemento com funções de interpolação lineares, o erro reduzir-se-á à ordem (Zhu et alii [28]):

$$O(\frac{h}{2^N}). \tag{III.21}$$

A estratégia adaptativa adotada, consiste em projetar uma distribuição de dimensão de elementos, para que a ordem do erro seja reduzida de uma quantidade especificada.

Seja, então, a norma da solução discreta em termos do tensor de tensões contínuo, expressa por:

$$\| \mathbf{u}_\sigma \|_E^2 = B(\mathbf{u}_\sigma, \mathbf{u}_\sigma) = \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}^c)^t \ \mathbf{D}^{-1} \ (\boldsymbol{\sigma}^c) \ d\Omega, \tag{III.22}$$

e, o erro médio, numa malha com o número de elementos igual a NE, dado por:

$$e_m^2 = \frac{\| \mathbf{e} \|_E^2}{NE}. \tag{III.23}$$

onde o erro total na malha é:

$$\| \mathbf{e} \|_E^2 = \sum_{i=1}^{NE} \left\| \mathbf{e}^i \right\|_E^2, \tag{III.24}$$

onde $\left\| \mathbf{e}^i \right\|_E^2$ é o erro do i-ésimo elemento.

Como o erro é proporcional à dimensão do elemento (equação III.5), então, pode-se escrever:

$$\frac{e_m}{\left\| \mathbf{e}^i \right\|_E} = \frac{\bar{h}_i}{h_i}, \tag{III.25}$$

onde $\bar{h}_i$ é a dimensão projetada para o elemento para que haja uma redução do erro nos elementos a um nível pré-especificado.

Substituindo as equações III.5 e III.23 na equação III.25, conclui-se que:

$$\rho_i = \frac{h_i}{\bar{h}_i} = \frac{\left\| \mathbf{e}^i \right\|_E \sqrt{NE}}{\| \mathbf{u}_\sigma \| \eta}. \tag{III.26}$$

Para um erro relativo permissível $\bar{\eta}$ prescrito pode-se computar o número de divisões de um elemento segundo o critério (Ribeiro e Landau [31]):

$$\text{número de divisões} = \begin{cases} 0, & 0 \le \rho_i < 2. \\ 1, & 2 \le \rho_i < 4. \\ 2, & 4 \le \rho_i. \end{cases} \tag{III.27}$$

Na implementação da estratégia é utilizado o seguinte arranjo vetorial:

**DIVISÕES(NE),**

onde **NE** é o número de elementos. Este arranjo informa quantas vezes cada elemento é refinado pelo algoritmo adaptativo. A cada refinamento o número de divisões do elemento é diminuído da unidade. O procedimento para quando o número de divisões de cada elemento da malha é nulo.

Diz-se que o espectro de divisões é de primeira ordem se o número máximo de divisões for um; de segunda ordem, se o número máximo de divisões for dois e, assim, sucessivamente. No caso de malhas tridimensionais hexaédricas, com padrão de refinamento do algoritmo **Octree**, é recomendado restringir-se o número de divisões máximo do espectro, pois, a lei de geração de elementos é a potêcia $2^{3N}$, onde N é o número de divisões do elemento. É, portanto, um poderoso gerador de malhas. Com esta limitação, a evolução da quantidade de memória para modelar o problema é mais gradual, permitindo um dimensionamento dos arranjos vetoriais e matriciais de forma otimizada.

Esta estratégia adaptativa unifica, portanto, as duas técnicas usuais de refinamento, refinamento sucessivo e remalhamento. Com isto, um número de análises inferior ao de um refinamento sucessivo é realizado, sem o uso de geradores de malha para redefinir a malha como no caso do remalhamento, uma vez que o algoritmo implementado é um gerador hierárquico, posto que a geração é automática e as informações topológicas das malhas são conservadas entre os refinamentos.

Com esta estratégia adaptativa pode-se construir o seguinte algoritmo:

Passo 1. Gerar modelo discreto.

Passo 2. Resolver o sistema de equações.

Passo 3. Computar os indicadores e a estimativa de erro.

Passo 4. Computar o número de divisões de cada elemento.

Passo 5. Selecionar os elementos a refinar.

Passo 6. Refinar os elementos marcados.

Passo 7. Se o número de divisões de algum elemento é não-nulo, retorne ao passo 5.

Passo 8. Se $\eta > \overline{\eta}$, retorne ao passo 2, senão, pare.

## III.4 - TAXA DE CONVERGÊNCIA

As computações executadas em engenharia objetivam conhecer informações relativas à resposta de sistemas físicos sob determinadas condições. Logicamente, a qualidade dos dados processados devem possuir um grau de exatidão e um nível de segurança numa medida essencialmente equivalente àqueles caso conhecêssemos a solução exata (Szabó [24]).

Para identificar se uma aproximação está convergindo, realizam-se extensões. Extensões são mudanças sistemáticas na discretização tal que o número de graus de liberdade é crescente. Existem três variantes usuais: extensão-h, extensão-p e extensão-hp (Szabó [24]).

Para quantificar a qualidade da extensão, um estudo da convergência deve ser realizado através de medidas comparativas de certas variáveis. Porque a solução de elementos finitos minimiza a energia do erro, este é o parâmetro natural para quanticar a convergência. Em geral, plota-se a norma de energia do erro versus o número de graus de liberdade, porém, é importante informar que outras variáveis interferem numa análise em engenharia e eventualmente devem ser ponderadas.

Em problemas, onde as funções são regulares, a relação entre a norma de energia do erro e o número de graus de liberdade é:

$$\| \mathbf{e} \|_E \leq \frac{k}{G^{\beta}} . \qquad \text{(III.28)}$$

onde k é uma constante real, G é o número de graus de liberdade e $\beta$ é um parâmetro chamado taxa assintótica de convergência na norma de energia com G tendendo ao infinito. E, neste caso, a desigualdade é reescrita como:

$$\log \| \mathbf{e} \|_E \approx \log k - \beta \log G . \qquad \text{(III.29)}$$

Nos experimentos numéricos, apresentadas posteriomente no tópico de problemas numéricos resolvidos, ilustraremos o desempenho da estratégia adaptativa através de gráficos que traduzam a equação III.29.

Nosso estudo, portanto, restringe-se a uma mera extensão do estimador de erro de Zienkiewicz-Zhu para elasticidade tridimensional com malhas de elementos finitos hexaédricos trilineares, por ser uma estimativa testada (Chang et alii [32]) e com propriedades de convergência comprovada. Embora, a extensão a três dimensões seja natural, a aplicação ao caso de elementos hexaédricos de oito pontos nodais é inédita. Optou-se, por esta estimativa neste primeiro ensaio, pela simplidade, da quadratura e da implemetação.

Nos problemas tridimensionais podemos esperar uma taxa de convergência-h igual a -p/3, pois:

$$\| e \|_E \leq C h^p, \tag{III.30}$$

$$G \propto h^{-3}, \tag{III.31}$$

$$\| e \|_E \leq C G^{-p/3}, \tag{III.32}$$

$$\beta = -p/3. \tag{III.33}$$

# CAPÍTULO IV

# MALHAS TRIDIMENSIONAIS ADAPTATIVAS HEXAÉDRICAS

Este capítulo apresenta a estrutura topológica criada para construir as malhas tridimensionais adaptativas de elementos hexaédricos segundo o padrão de refinamento do algoritmo **Octree**. Mostra como selecionar os elementos a refinar em função dos critérios de nível de refinamento e do número de divisões para que as malhas sejam estruturadas e com um único nó irregular por aresta ou por face.

Deduz-se as transformações matriciais induzidas pela aproximação restringida e discute o método de solução de sistemas lineares recomendado para os problemas tridimensionais. Descreve, também, o algoritmo para refinamento-h do hexaedro.

## IV.1 - GENERALIDADES

Os algoritmos adaptativos possuem uma estrutura topológica diferenciada das estruturas de dados usuais em elementos finitos porque constantemente as informações geométricas, topológicas e de condições de contorno são transferidas durante a evolução do refinamento. Os arranjos de tal estrutura devem ser capazes de descrever as variadas configurações existentes na malha adaptativa com otimização de memória (Kallinderis [15]). Estes arranjos estão associados aos padrões de refinamento implementados, traduzindo o grau de complexidade topológica da malha. Em função disto, é comum restringir-se o número de casos possíveis de refinamento implementados nos códigos adaptativos (Löhner [33]). Um padrão de refinamento usual em geração de malhas tridimensionais é o algoritmo **Octree** em que um hexaedro refinado gera oito hexaedros isomorfos (Schroeder [34]). Existe uma infinidade de padrões que podem ser implementados, conforme o tipo de elemento tridimensional e as propriedades de visualização gráfica objetivadas (Lo [9]).

Em problemas tridimensionais, a complexidade da geometria representa um tempo expressivo no pré-processamento dos dados e , em geral, incorre em erros humanos, por isto, os geradores de malha são de suma importância (Martins et alii [18]) para o analista numérico.

Os programas para análise adaptativa possuem a dupla função de gerador e analisador, e com isto, limita-se a sofisticação de uma primeira discretização construída pelo gerador.

É inerente, também, a esta classe de problemas, memória e tempo de processamento assumirem proporções que, frequentemente, inviabilizam a análise com métodos diretos para resolução de Sistemas Lineares cujo número de operações é da ordem $O(n^3)$, n é o número de equações.
Em análise adaptativa, a série de malhas geradas pelo avanço do refinamento, cria um ambiente natural para aplicação de métodos iterativos (Devloo [7]), como o método do gradiente conjugado pré-condicionado.

## IV.2 - PADRÃO DE REFINAMENTO

Do tipo de padrão de particionamento do elemento finito depende a criação da estrutura topológica. Embora exista um sem número de formas de refinar um elemento, e em três dimensões a quantidade de casos é ainda maior (Löhner [33]), a observância das qualidades dos elementos gerados, tais como ângulo sólido, distorção e distensão, é importante para a regularidade da malha (Kallinderis [15]).

Em problemas tridimensionais, duas técnicas para gerar automaticamente malhas tem sido usadas: a técnica de Delaunay e o algoritmo **Octree** (Schroeder [34]). No algoritmo **Octree** uma genealogia de hexaedros é construída, onde cada hexaedro se transforma em oito hexaedros que herdam as propriedades geométricas e topológicas do elemento original, conforme ilustrado na figura Nº 3.

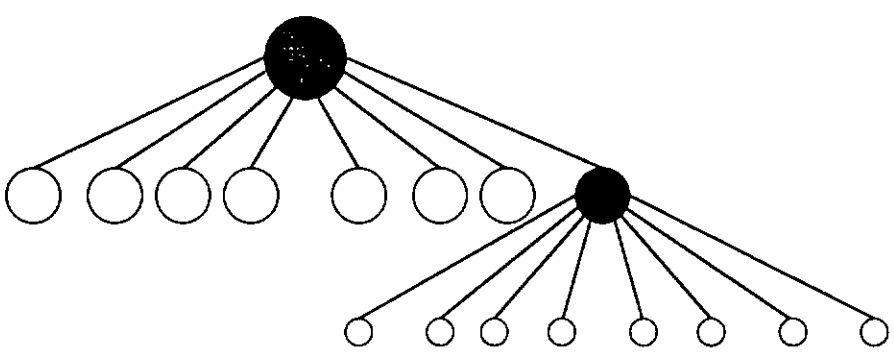

FIGURA Nº 3-Refinamento **Octree**.

Quando o hexaedro é refinado (particionado), os oito hexaedros (elementos filhos) gerados possuem uma forma semelhante àquela do hexaedro original( elemento pai). Assim, se o primeiro modelo discreto é composto de elementos sem distorções e distenções, esta regularidade será conservada pelo refinamento, ver figura N°·4.

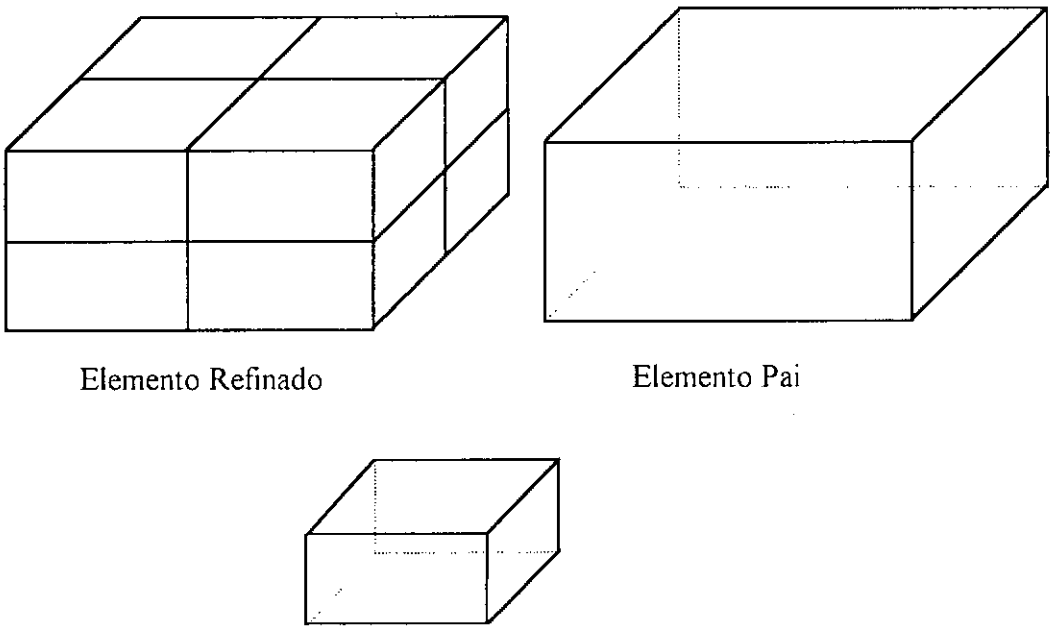


FIGURA N°·4-Isomorfismo dos Elementos.

## IV.3 - ESTRUTURA TOPOLÓGICA

### IV.3.1 - Numeração Nodal

Quando um elemento é refinado, os nós e elementos criados precisam ser incorporados à estrutura geométrica e topológica da malha anterior. É natural definir uma lei de ordenação nodal para automatizar a geração de coordenadas e condições de restrição em termos computacionais.

Designamos nó centroidal ao nó criado no centróide do elemento refinado. Designamos, ainda, nó de aresta ou aréstico aos nós criados nos

pontos médios das arestas do hexaedro; e, por nó de face ou facial, ao nós criados nos centros das faces do hexaedro.

Em função da conectividade do elemento original definimos a numeração nodal para os nós criados segundo a ordem apresentada na figura N°·5.

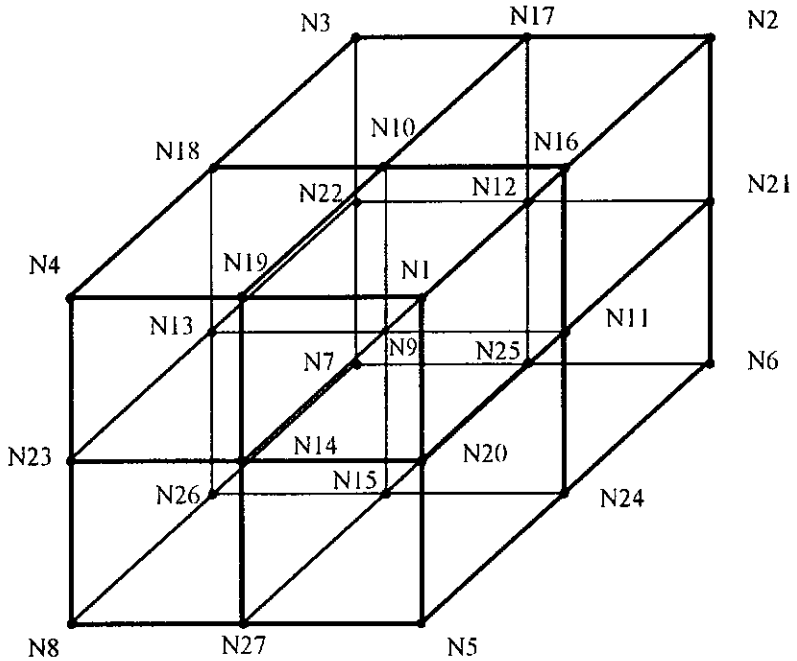


FIGURA N°·5-Numeração Nodal.

Os pontos nodais N1, N2, N3, N4, N5, N6, N7, N8 são os nós do elemento original; o nó N9 é o nó centroidal; os nós N10, N11, N12, N13, N14 e N15 são os nós faciais; e, os nós N16, N17, N18, N19, N20, N21, N22, N23, N24, N25, N26 e N27 são os nós arésticos.

As coordenadas do nó centroidal é dado pela média dos oito nós do elemento; as coordenadas do nó aréstico pela média dos nós da aresta do elemento e as coordenadas dos nós faciais pela média dos nós da face do elemento.

### IV.3.2 - Numeração dos Elementos

Similarmente, uma ordenação para os elementos fixa espacialmente a configuração dos elementos recém-criados. Para que esta configuração seja geral e independente, definiu-se que a seqüência de numeração dos

elementos segue a ordem da incidência dos nós, ou seja, associa-se a cada um dos nós um elemento. Com isto cada nó do elemento original pertence a um único elemento filho. Esta propriedade é utilizada para simplificar os algoritmos. A figura Nº·6 ilustra a distribuição espacial dos elementos filhos.

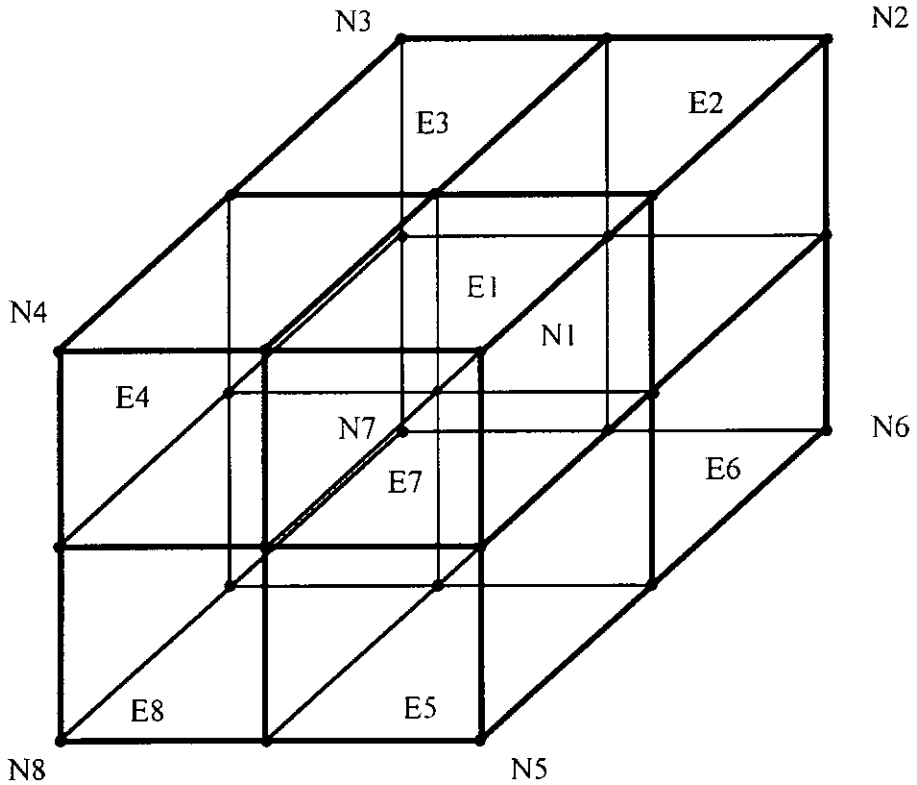


FIGURA Nº·6-Numeração dos Elementos.

No módulo computacional de refinamento, atribui-se ao elemento E1 o número do elemento pai, numerando os outros na ordem indicada pela figura Nº·6. Com as numerações nodais e de elementos definidas, as conectividades dos elementos filhos estão implicitamente construídas.

### IV.3.3 - Numeração das Arestas e das Faces

Para simplificar o tratamento computacional do particionamento do hexaedro, numera-se as arestas e as faces do hexaedro. As figuras Nº·7 e Nº·8 mostram esta numeração.

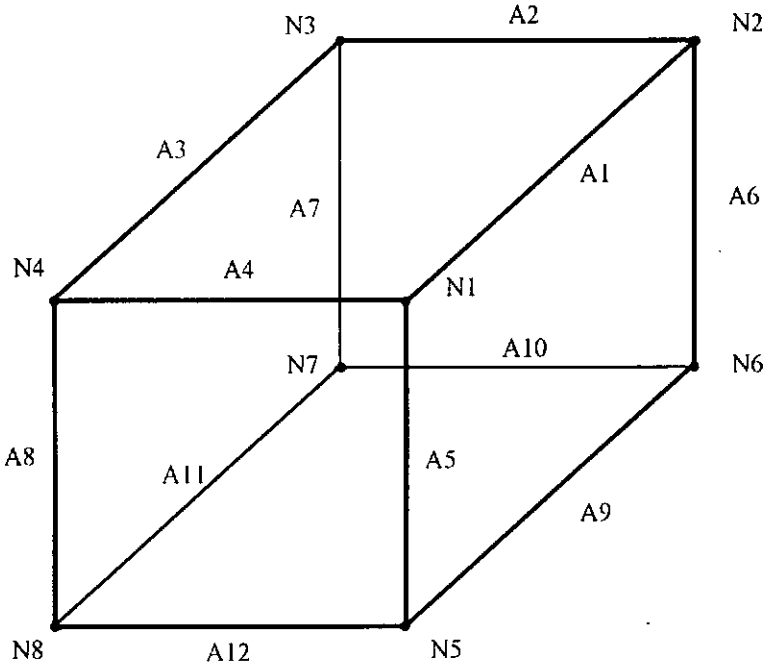


FIGURA Nº·7-Numeração das Arestas.

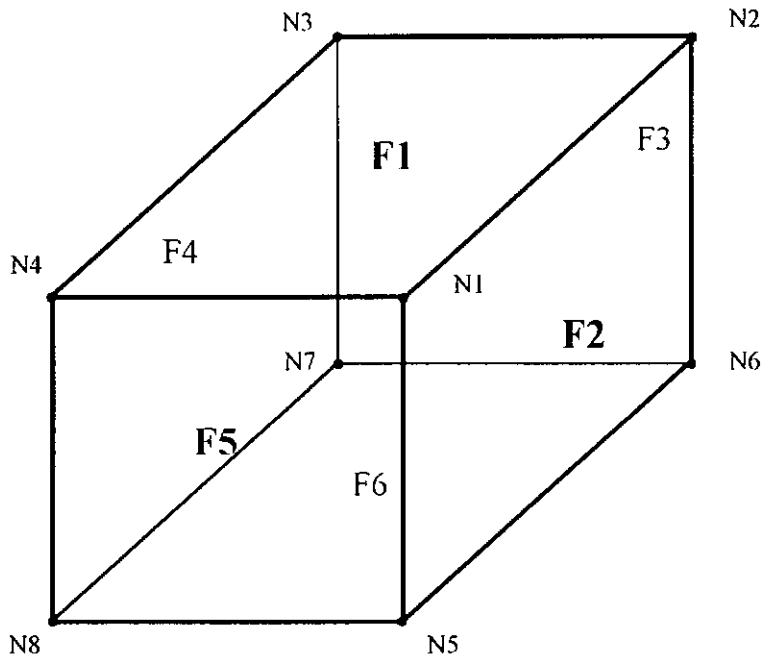


FIGURA Nº·8-Numeração das Faces.

Existe, portanto, duas associações: dos nós com a face e dos nós com a aresta, capazes de identificar reciprocamente estes parâmetros.

Assim, dados dois nós de uma aresta sabe-se qual a aresta associada e vice-versa; bem como, dados quatro nós de uma face sabe-se qual a face associada e vice-versa. Existem, ainda, duas associações implícitas que são os quatro elementos filhos de uma dada face e os dois elementos filhos de uma dada aresta. Portanto, a numeração da face do elemento refinado é capaz de identificar os quatro elementos que se originaram nesta face; e a numeração da aresta do elemento refinado é capaz de identificar os dois elementos que se originaram nesta aresta. Esta propriedade é importantíssima no módulo de refinamento-h.

A estrutura de dados criada para representar estas informações é formada pelos arranjos **NOSF(4,6)** e **NOSA(2,12)**, correspondendo, respectivamente, à ordem de numeração dos nós de cada face e de cada aresta. Tais listas são definidas pelos arranjos matriciais definidos a seguir e elucidados pelas tabelas N$^{o}$·1 e N$^{o}$·2:

**NOSF(4,6)** **NOSA(2,12).**

**NOSA**

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| no1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| no2 | 2 | 3 | 4 | 1 | 5 | 6 | 7 | 8 | 6 | 7 | 8 | 5 |

TABELA N$^{o}$·1 - Lista dos Nós da Aresta.

**NOSF**

| | F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| no1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 |
| no2 | 2 | 5 | 6 | 7 | 4 | 8 |
| no3 | 3 | 6 | 7 | 8 | 8 | 7 |
| no4 | 4 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

TABELA N$^{o}$·2 - Lista dos Nós da Face.

A tabela N°·1 informa quais são os nós do elemento que pertencem a cada uma das arestas. Similarmente, a tabela N°·2 informa quais são os nós do elemento que pertencem a cada uma das faces.

### IV.3.4 - Vizinhanças Aréstica e Facial

Para a definição adequada da topologia da malha, dois tipos de vizinhança dos elementos são tratados separadamente: a vizinhança por face ou facial e a vizinhança por aresta ou aréstica. Dois elementos são vizinhos por face se possuem quatro nós em comum; dois elementos são vizinhos por aresta se possuem dois nós em comum.

As figuras N°·9 e N°·10 mostram os dois tipos de vizinhança. Os nós nf1, nf2, nf3 e nf4 são os únicos quatro nós pertencentes, concomitatemente, à dois elementos ditos vizinhos faciais. Analogamente, os nós na1 e na2 são os únicos dois nós pertencentes, simultaneamente, a dois elementos ditos vizinhos arésticos.

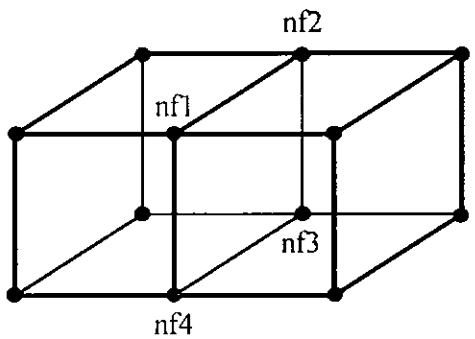


FIGURA N°·9-Vizinhos por Face.

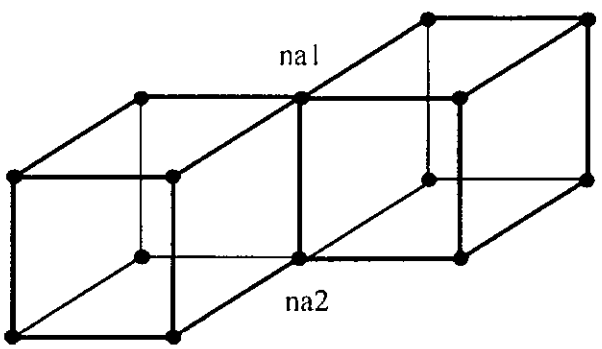


FIGURA N°·10-Vizinhos por Aresta.

As relações de vizinhança descritas anteriormente são continuamente redefinidas durante a evolução das malhas adaptativas. Computacionalmente, dois arranjos matriciais são usados para transferir estas informações. Como existem doze arestas e seis faces em um hexaedro, a vizinhança deve conter as informações de cada uma das arestas e de cada uma das faces. Para que a malha refinada tenha somente um nó irregular por aresta ou por face, é necessário utilizar uma estrutura de dados que contenha quatro vizinhos por face e dois vizinhos por aresta para cada elemento. Portanto, definimos os arranjos matriciais:

**VIZINHOF(24 , NE)  VIZINHOA(24 , NE)**

onde NE é o número de elementos da malha. O arranjo VIZINHOF representa a vizinhança facial e o arranjo VIZINHOA, a vizinhança aréstica. Tanto uma quanto a outra podem ter até vinte e quatro vizinhos por elemento, caso os vizinhos estejam refinados. Quando o vizinho é refinado, define-se um sentido de ordenação para os vizinhos arésticos, de um nó para outro da aresta; e, define-se uma circulação com normal exterior para os vizinhos faciais sobre os nós da face.

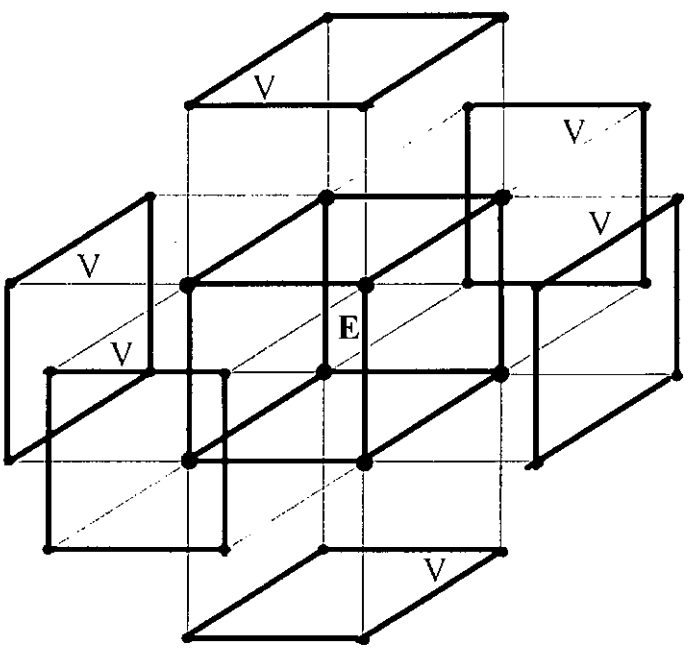


FIGURA Nº 11-Elemento E e Vizinhos Faciais V.

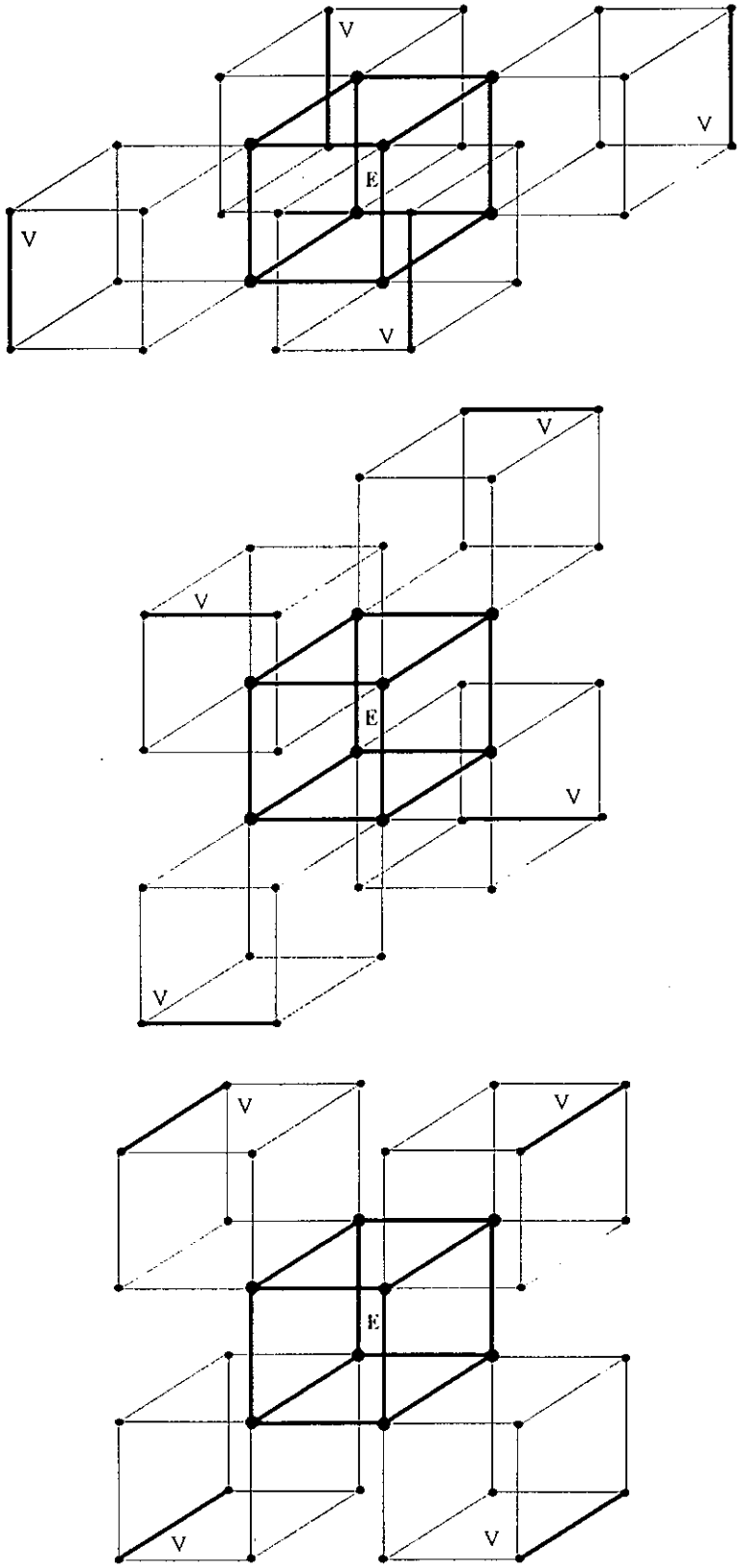


FIGURA Nº 12-Elemento **E** e Vizinhos Arésticos V.

A figura Nº·12 completa as informações de natureza topológica que são capazes de descrever o refinamento-h de malhas hexaédricas.

### IV.3.5 - Algoritmo de Refinamento do Hexaedro

A figura Nº·13 descreve resumidamente um algoritmo de refinamento h-adaptativo de uma malha de hexaedros.

```
INÍCIO DO MÓDULO DE REFINAMENTO-H DE MALHAS HEXAÉDRICAS
LAÇO NOS ELEMENTOS REFINÁVEIS
   NUMERAR ELEMENTOS FILHOS
   DEFINIR INCIDÊNCIA DO ELEMENTO REFINÁVEL
   DEFINIR VIZINHOS POR FACE E POR ARESTA
   LAÇO NAS ARESTAS DO ELEMENTO REFINÁVEL
      SE O VIZINHO ARÉSTICO É REFINADO ENTÃO
         DETERMINAR O NÓ IRREGULAR POR ARESTA
      SE UM VIZINHO FACIAL ADJACENTE É REFINADO ENTÃO
         DETERMINAR O NÓ IRREGULAR POR ARESTA
      SENÃO
         CRIAR UM PONTO NODAL NA ARESTA
         DETERMINAR AS COORDENADAS CARTESIANAS DO NÓ DA ARESTA
         DEFINIR A CONDIÇÃO DE RESTRIÇÃO DO NÓ DA ARESTA
      FIM DO SE
      REDEFINIR A VIZINHANÇA ARÉSTICA DO VIZINHO POR ARESTA
      DEFINIR A CONDIÇÃO DE CONTORNO ARÉSTICA DOS ELEMENTOS FILHOS
   FIM DO LAÇO NAS ARESTAS
   LAÇO NAS FACES DO ELEMENTO REFINÁVEL
      SE O VIZINHO FACIAL É REFINADO ENTÃO
         DETERMINAR O NÓ IRREGULAR POR FACE
      SENÃO
         CRIAR UM PONTO NODAL NA FACE
         DETERMINAR AS COORDENADAS CARTESIANAS DO NÓ DA FACE
         DEFINIR A CONDIÇÃO DE RESTRIÇÃO DO NÓ DA FACE
      FIM DO SE
      REDEFINIR A VIZINHANÇA FACIAL DO VIZINHO POR FACE
      DEFINIR A CONDIÇÃO DE CONTORNO FACIAL DOS ELEMENTOS FILHOS
   FIM DO LAÇO NAS FACES
   CRIAR O NÓ CENTROIDAL
   DETERMINAR AS COORDENADAS CARTESIANAS DO NÓ CENTROIDAL
   DEFINIR A CONDIÇÃO DE RESTRIÇÃO DO NÓ CENTROIDAL
   DETERMINAR AS INCIDÊNCIAS DOS ELEMENTOS FILHOS
   REDEFINIR A VIZINHANÇA ARÉSTICA DOS VIZINHOS POR FACE
   REDEFINIR A VIZINHANÇA FACIAL DOS VIZINHOS POR FACE
   REDEFINIR A VIZINHANÇA ARÉSTICA DOS VIZINHOS POR ARESTA
   DEFINIR TIPO DE MATERIAL DOS ELEMENTOS FILHOS
   DEFINIR VIZINHANÇA FACIAL ENTRE ELEMENTOS FILHOS
   DEFINIR VIZINHANÇA ARÉSTICA ENTRE ELEMENTOS FILHOS
   DEFINIR O NÍVEL DE REFINAMENTO DOS ELEMENTOS FILHOS
   ATUALIZAR O NÚMERO DE DIVISÕES DOS ELEMENTOS FILHOS
   ATUALIZAR O NÚMERO TOTAL DE ELEMENTOS NA MALHA
FIM DO LAÇO NOS ELEMENTOS REFINÁVEIS
FIM DO MÓDULO DE REFINAMENTO-H DE MALHAS HEXAÉDRICAS
```

FIGURA Nº·13-Algoritmo de Refinamento-h de Malhas Hexaédricas.

## IV.4 - ELEMENTOS A REFINAR

Para proceder ao refinamento h-adaptativo da malha de hexaedros é preciso marcar os elementos a refinar. Observa-se que os elementos não podem ser refinados aleatoriamente porque as malhas estudadas são estruturadas e uni-irregulares por aresta e por face. Assim, é preciso que haja uma compatibilidade de níveis entre o elemento a refinar e os vizinhos arésticos e faciais. Portanto, a seleção do elemento está condicionada ao número de divisões, definido pela estratégia adaptativa, e ao critério de nível de refinamento do elemento, imposto pela uni-irregularidade. A estrutura de dados usada para definir os elementos a refinar envolve as duas estruturas topológicas de vizinhança, o arranjo de divisões e o arranjo vetorial:

**NÍVEL(NE).**

onde NE é o número de elementos da malha. Segundo nossa estratégia quando um elemento é refinado o número de divisões do elemento pai é diminuído de uma unidade e atribuído aos elementos filhos. O refinamento é repetido até que número de divisões de cada elemento seja nulo para a malha inteira. Com a combinação dos dois critérios, às vezes, certos elementos devem ser selecionados para o refinamento, ainda que o número de divisões seja nulo. A condição de refinável deve ser verdadeira tanto na vizinhança por aresta quanto na vizinhança por face. Existe, portanto, uma ordem em que os elementos são particionados para que a uni-irregularidade da malha seja conservada. A observância destes critérios permite construir o arranjo vetorial:

**REFINAR(NR).**

onde NR é o número de elementos a refinar da malha. Observar que as dimensões destes arranjos vetoriais estão continuamente crescendo à medida em que o refinamento avança.

Para ilustrar como um certo elemento pode pertencer ao grupo dos elementos a refinar, embora seu número de divisões seja nulo, veja-se a malha hipotética da figura N$^{o}$·14. Nesta malha, os elementos E9 e E10 devem ser refinados primeiro, apesar do número de divisões D9 e D10 serem nulos. Neste caso, o nível de refinamento induziu o refinamento

daqueles elementos. Executado o refinamento destes elementos, os elementos E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 e E8 formam o grupo subsequente dos elementos a refinar, mas agora, o número unitário de divisões D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7 e D8 é que forçou o refinamento. Portanto, existe uma hierarquia de refinamento que compatibiliza a uni-irregularidade da malha.

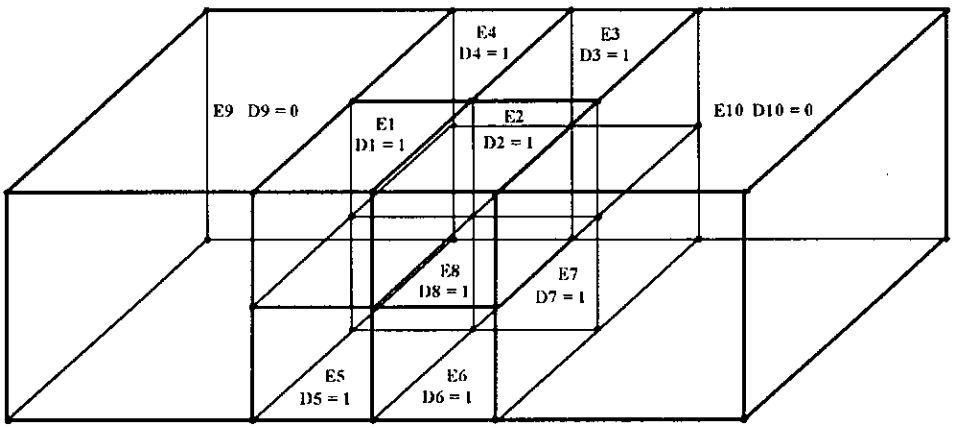


FIGURA Nº 14- Elementos a Refinar.

## IV.5 - TRANSFORMAÇÕES DE RESTRIÇÃO

A introdução de nós irregulares nas malhas h-adaptativas através do refinamento destrói a continuidade no contorno inter-elemento. Uma forma de forçar a continuidade é impor uma condição de restrição, relacionando os graus de liberdade dos nós irregulares aos graus de liberdade dos nós ativos (Devloo [36], Lyra [6]); outra forma é construir uma malha mista, onde o nó irregular unido a nós ativos da malha origina elementos (em geral, de tipo diferente), transformando o nó irregular em nó ativo (Ribeiro [30]).

### IV.5.1 - Tipos de Nós Irregulares

Nas malhas h-adaptativas hexaédricas, dois tipos de nós irregulares podem ser criados pelo refinamento: o nó irregular aréstico ou por aresta e o nó irregular facial ou por face.

Designa-se nó irregular por face ao nó criado na face de um elemento cujo vizinho facial possui nível de refinamento idêntico. Designa-se nó irregular por aresta ao nó criado na aresta de um elemento cujo vizinho

aréstico ou um dos vizinhos faciais adjacentes à aresta possui nível de refinamento idêntico. A figura N$^{o}$·15 mostra a ocorrência de um nó irregular por face **F** e a figura N$^{o}$·16 mostra a ocorrência de um nó irregular por aresta **L**.

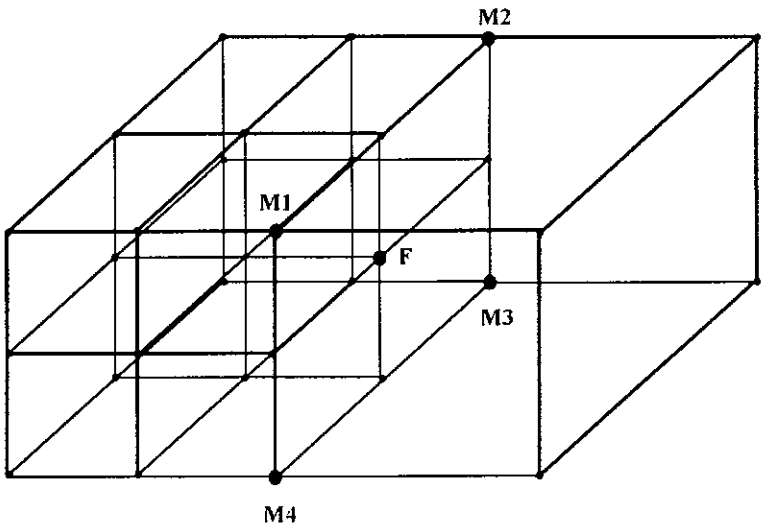


FIGURA N$^{o}$·15-Nó Irregular Facial.

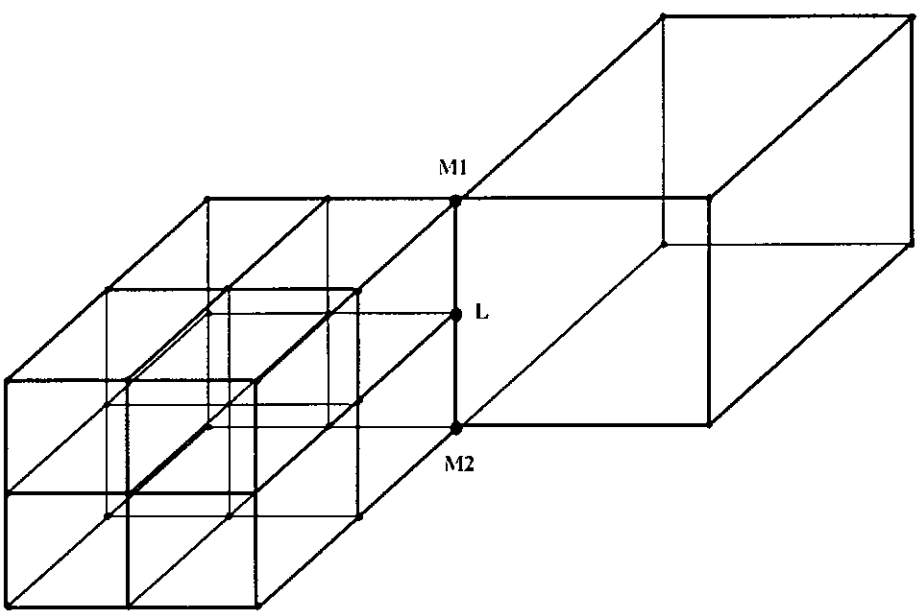


FIGURA N$^{o}$·16-Nó Irregular Aréstico.

Na figura N$^{o}$·15, os nós ativos **M1**, **M2**, **M3** e **M4** definem os deslocamentos do nó **F**. Analogamente, na figura N$^{o}$·16 os nós ativos **M1** e **M2** definem os deslocamentos do nó **L**. É interessante notar que tais

restrições são funções de vinculação impostas ao funcional energia do sistema estrutural, podendo ser tratado com multiplicadores de Lagrange (Courant e Hilbert [37]). Para simplificar o tratamento computacional da irregularidade da malha, usaremos uma linguagem matricial.

Em função disto, verifica-se a existência de três tipos de nós: os ativos, os irregulares por face e os irregulares por aresta. Para automatizar as computações, um arranjo vetorial de tipos é criado para informar o tipo de cada nó da malha. Este arranjo é definido por:

$$\mathbf{TIPOS}(\mathrm{NN}) = \begin{cases} \mathrm{A,\ Ativo} \\ \mathrm{F,\ Irregular\ por\ Face} \\ \mathrm{L,\ Irregular\ por\ Aresta} \end{cases}$$

onde NN é o número de nós da malha. Os nós ativos e prescritos assumiram o código A para definir seus tipos porque em termos de implementação esta nomenclatura simplifica as comparações no programa. Este arranjo vetorial é utilizado num módulo que restaura as condições de restrição nodais a partir da numeração dos graus de liberdade nodais antes de proceder ao refinamento adaptativo. A codificação do procedimento é simplificada com o uso do arranjo de tipos nodais.

Para o caso de funções de forma de Lagrange (Trilinear) em elementos finitos hexaédricos de oito pontos nodais, a Aproximação Restringida capaz de representar a continuidade na face inter-elemento e na aresta inter-elemento é expressa por:

$$\mathbf{d}_F = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} d_{M_i}, \qquad \text{(IV.1a)}$$

$$\mathbf{d}_L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} d_{M_i}, \qquad \text{(IV.1b)}$$

onde $\mathbf{d}_F$ e $\mathbf{d}_L$ são os deslocamentos dos nó irregular por face F e por aresta L. O deslocamento $d_{M_i}$ é o deslocamento de cada nó i que define a aresta ou a face onde o nó irregular existe.

### IV.5.2 - Transformações Matriciais

As relações de restrição (equações IV.1) podem ser reescritas de forma matricial, conforme o tipo de nó como:

1) Nó Ativo:

$$\mathbf{d_a} = \mathbf{I_3}\, \mathbf{d_{M_a}}, \tag{IV.2a}$$

$$\mathbf{d_a} = \begin{Bmatrix} d_{xa} \\ d_{ya} \\ d_{za} \end{Bmatrix}, \; \mathbf{d_{M_a}} = \begin{Bmatrix} d_{xM_a} \\ d_{yM_a} \\ d_{zM_a} \end{Bmatrix}, \tag{IV.2b}$$

$$\mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{IV.2c}$$

onde $\mathbf{d_a}$ e $\mathbf{d_{M_a}}$ são os vetores deslocamento do nó ativo **a**. Portanto, os deslocamentos de um nó ativo não são transformados pelas equações de restrição porque os nós ativos são definidos por si próprios.

2) Nó Irregular por Aresta:

$$\mathbf{d_l} = \mathbf{T_L}\, \mathbf{d_{M_l}}, \tag{IV.3a}$$

$$\mathbf{d_l} = \begin{Bmatrix} d_{xl} \\ d_{yl} \\ d_{zl} \end{Bmatrix}, \; \mathbf{d_{M_l}} = \begin{Bmatrix} d_{xM_1} \\ d_{yM_1} \\ d_{zM_1} \\ d_{xM_2} \\ d_{yM_2} \\ d_{zM_2} \end{Bmatrix}, \tag{IV.3b}$$

$$\mathbf{T_L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \text{(IV.3c)}$$

onde $\mathbf{d_l}$ é o vetor deslocamento do nó irregular por aresta **l**, $\mathbf{d_{M_l}}$ é o vetor deslocamento dos nós que define a aresta (FIGURA Nº 16) e $\mathbf{T_L}$ é a matriz de transformação.

Portanto, os deslocamentos do nó irregular por aresta é a média dos deslocamentos dos nós que definem a aresta.

3) Nó Irregular por Face:

$$\mathbf{d_f} = \mathbf{T_F}\, \mathbf{d_{M_f}}, \qquad \text{(IV.4a)}$$

$$\mathbf{d_f} = \begin{Bmatrix} d_{xf} \\ d_{yf} \\ d_{zf} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d_{M_f}} = \begin{Bmatrix} d_{xM_1} \\ d_{yM_1} \\ d_{zM_1} \\ d_{xM_2} \\ d_{yM_2} \\ d_{zM_2} \\ d_{xM_3} \\ d_{yM_3} \\ d_{zM_3} \\ d_{xM_4} \\ d_{yM_4} \\ d_{zM_4} \end{Bmatrix}, \qquad \text{(IV.4b)}$$

$$\mathbf{T_F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \qquad \text{(IV4.c)}$$

onde $\mathbf{d_f}$ é o vetor deslocamento do nó irregular por face **f**, $\mathbf{d_{M_f}}$ é o vetor deslocamento dos nós que define a face (FIGURA N$^{o}$·15) e $\mathbf{T_F}$ é a matriz de transformação.

Portanto, os deslocamentos do nó irregular por face é a média dos deslocamentos dos nós que definem a face.

Com estas sub-matrizes de transformação podemos construir uma matriz de transformação **T** para a conectividade do elemento através da composição de $\mathbf{I_3}$ , $\mathbf{T_L}$ e $\mathbf{T_F}$ conforme os tipos dos nós do elemento. Seja, então, determinar a matriz **T** do elemento ilustrado na figura N$^{o}$·17.

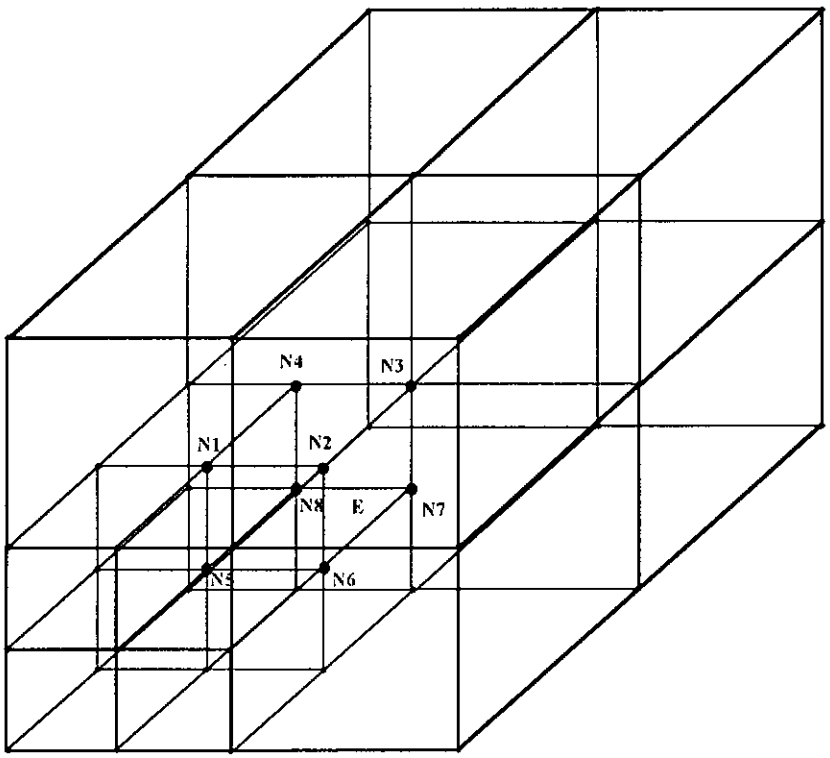


FIGURA N$^{o}$·17-Elemento com Nós Irregulares.

Conforme indica a figura N$^{o}$·17 os nós da incidência do elemento **E** possuem os tipos: F (N1), L (N2), A (N3), L (N4), A (N5), F (N6), L (N7) e F (N8). Podemos, então, compor a matriz de transformação **T** para o elemento **E** que é expressa por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}\,\mathbf{D_M}\,, \tag{IV.5a}$$

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D_M} = \begin{Bmatrix} d_{M_1} \\ d_{M_2} \\ d_{M_3} \\ d_{M_4} \\ d_{M_5} \\ d_{M_6} \\ d_{M_7} \\ d_{M_8} \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_F \end{bmatrix}, \tag{IV.5b}$$

(IV.5c)

onde **D** é o vetor de deslocamentos dos oito pontos nodais do elemento, $\mathbf{D_M}$ é o vetor de deslocamentos dos nós ativos que definem N1, N2, N3, N4, N5, N6, N7 e N8, segundo o tipo nodal e **T** é a matriz de transformação correspondente a estes tipos de nós.

É importante frisar que a configuração mostrada na figura Nº 17 reproduz o caso limite em que um elemento é descrito por vinte pontos nodais, equivalendo, portanto, a um elemento finito hexédrico tri-quadrático. Logicamente, este caso restringe-se ao nosso estudo de malhas hexaédricas estruturadas e uni-irregulares por aresta e por face.

Para proceder às computações em elementos finitos é preciso formular a matriz de rigidez transformada e o vetor de cargas transformado em termos da matriz de transformação **T** associada à conectividade de um elemento finito genérico da malha. Deduz-se estas equações de forma simples através da energia do sistema estrutural (Cook [3]) expressa em termos de elementos finitos, isto é:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{D}_e^t \, \mathbf{k}^e \, \mathbf{D}_e - \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{D}_e^t \, \mathbf{f}^e . \qquad \text{(IV.6)}$$

Digamos que um elemento **e** cujos tipos nodais de sua incidência possui uma relação de transformação para os delocamentos dada por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T} \, \mathbf{D}_M . \qquad \text{(IV.7)}$$

Substituindo a relação de transformação (equação IV.7) na expressão da energia (equação IV.6), conclui-se que a matriz de rigidez transformada **K** e o vetor de força transformado **F** são, a nível de elemento:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^t \, \mathbf{k}^e \, \mathbf{T} . \qquad \text{(IV.8)}$$

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{T}^t \, \mathbf{f}^e . \qquad \text{(IV.9)}$$

## IV.6 - MÉTODO DE SOLUCÃO DE SISTEMAS LINEARES

Na engenharia, a resolução do sistema linear interfere incisivamente em vários contextos da análise e é uma área de interesse contínuo da pesquisa tecnológica. Objetiva-se, em geral, maximizar a aceleração das computações e minimizar o volume de memória.

Existem duas classes gerais de métodos de resolução de sistemas de lineares: os métodos diretos e os métodos iterativos. O objetivo central destes métodos é resolver os sistemas lineares representados pelas formulações matriciais originadas das aproximações numéricas de um problema físico.

Em análise estrutural, a formulação de elementos finitos conduz a sistemas cuja matriz é esparsa e simétrica. Tais propriedades são exploradas pelos algoritmos dos métodos diretos, entre os quais cita-se o método de Crout e o de Cholesky. Estes métodos, na verdade, são variantes do método de Gauss. Tal método é fundamentado em transformações elementares da Álgebra Linear, cuja finalidade é fatorizar a matriz do sistema em produtos de matrizes triangular superior e inferior (Duff [35]). Portanto, estes métodos, matematicamente, são equivalentes.

Esta classe de métodos, entretanto, não é recomendada em análise h-adaptativa porque a esparsidade da matriz é destruída durante o refinamento da malha e nem para problemas tridimensionais onde a largura de banda é gigantesca.

Os métodos iterativos são os mais indicados para análise h-adaptativa tridimensional. Em primeiro lugar, a série de soluções geradas pela análise adaptativa, cria um ambiente natural para solucionadores iterativos, uma vez que a solução da análise anterior, projetada, é um ótimo vetor de partida para a análise posterior, acelerando a convergência expressivamente (Devloo [7]). Tais métodos, em conjução com algoritmos elemento-por-elemento, possibilitam a resolução de sistemas de equações sem requerer a formação da matriz do sistema, e portanto, minimizando a quantidade de memória (Hughes [38]).

Dentre os métodos iterativos usuais estão o método do gradiente, o método do grandiente conjugado, o método do gradiente conjugado pré-condicionado e os métodos **Multigrid**.

Historicamente, o método do gradiente conjugado foi criado por Hestenes e Stiefel em 1952 [39] e possui uma bem fudamentada formulação variacional. É um método iterativo com uma série de propriedades atraentes, pode ser implementado elemento-por-elemento e com um pré-condicionador e é extensivamente aplicado em análise de engenharia de problemas avançados.

Descreveremos, agora, abreviadamente, alguns conceitos e propriedades do método iterativo implementado no programa de análise h-adaptativa tridimensional, comentando algumas experiências que podem ser proveitosas.

Neste estudo implementou-se o método do gradiente conjugado pré-condicionado com pré-condicionador de Jacobi, ou diagonal, com o algoritmo elemento-por-elemento.

Um funcional quadrático Q é um funcional da forma (Axelson [40]):

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\mathbf{D}^t \mathbf{K}\ \mathbf{D} - \mathbf{D}^t \mathbf{F}. \qquad \text{(IV.10)}$$

O funcional energia do sistema estrutural originado pela formulação de elementos finitos é um funcional quadrático (Axelson [40]). Minimizar o funcional quadrático de energia e resolver o sistema linear da estrutura são problemas matematicamente equivalentes (Golub [41]).

É demonstrável que em um número de iterações, no máximo igual à ordem do sistema, o método do gradiente conjugado reproduz a solução exata a menos dos erros de truncamento (Johnson [4]).

No método do gradiente conjugado as aproximções sucessivas são do tipo (Johnson [4]):

$$\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \alpha_k \boldsymbol{\lambda}^k\ ,\ k = 0,\ 1,\ \ldots \qquad \text{(IV.11)}$$

onde $\alpha_k$ é um escalar comprimento da k-ésima iteração, $\boldsymbol{\lambda}^k$ é um vetor direção conjugada da k-ésima iteração e $\mathbf{d}^k$ é o vetor solução da k-ésima iteração.

Quando a matriz do sistema é bem condicionada, a aceleração da convergência do método é ótima.

O número de condicionamento espectral $\kappa(\mathbf{K})$ define as propriedades de convergência do gradiente conjugado. Mostra-se que o número de iterações **N** executadas até o erro se reduzir a um valor $\varepsilon > 0$ obedece a desigualdade (Johnson [4]):

$$N \geq \kappa(K) \log \frac{1}{\varepsilon} . \qquad (IV.12)$$

Uma forma de modificar as qualidades de condicionamento da matriz do sistema é introduzir uma transformação de variáveis, através de pré-condicionadores, cujo número de condicionamento espectral da matriz transformada seja inferior.

Introduzindo, então, uma transformação de variáveis, tem-se que (Johnson [4]):

$$\kappa(P^{-t} K P^{-1}) \leq \kappa(K) , \qquad (IV.13)$$

onde **P** é uma matriz que define a transformação de variáveis. O número de iterações **N**, portanto, pode ser tão inferior quanto menor for o número de condicionamento espectral da matriz resultante da transformação de variáveis.

Um pré-condicionador simples e usual é o pré-condicionador diagonal ou de Jacobi (Golub [41]). Para construir este pré-condicionador basta obter a diagonal da matriz de rigidez da estrutura, armazenando os seus coeficientes num arranjo vetorial da forma:

**DIAGONAL(EQ),**

onde EQ é o número de equações do sistema linear da estrutura. No estudo da análise h-adaptativa tridimensional com malhas hexaédricas não se percebeu nenhum demérito quanto à estabilidade numérica deste pré-condicionador. Este tópico, porém, merece um estudo posterior mais pormenorizado.

Na implementação do método do gradiente conjugado pré-condicionado no código de análise h-adaptativa tridimensional usou-se , naturalmente, a solução da análise adaptativa anterior como vetor de partida para a análise posterior. Uma forma bem mais inteligente é construir um vetor de partida, completando a solução adaptativa pela interpolação dos graus de liberdade existentes. A estrutura topológica idealizada permite que seja desenvolvido um módulo para criar este vetor, mas isto não é tão trivial. Portanto, limitaremos nosso estudo, por

simplicidade, ao vetor de partida mais natural que é a solução do refinamento anterior.

A matriz de rigidez do sistema estrutural é armazenada num arranjo tridimensional do tipo:

**RIGIDEZ(L, C, NE).**

onde L é o número de linhas da matriz de rigidez de elemento, C é o número de colunas da matriz de rigidez de elemento (lembrar que a matriz de rigidez de elemento é quadrada e simétrica) e NE é o número de elementos na malha hexaédrica. Comparada ao método da banda variável (**SkyLine**) esta forma de armazenar a matriz de rigidez da estrutura é preferível, mas ainda não é o ideal, porque a matriz de rigidez de elemento é inteiramente armazenada. Sabe-se, todavia, que apenas os coeficientes da diagonal e os coeficientes da parte triangular superior ou inferior são suficientes. Limitou-se a esta forma primária e simples de armazenar a matriz por tratar-se de um estudo preliminar.

O algoritmo de solução do sistema, também não explora as possibilidades de vetorização e paralelismo.

Tal possibilidade é inerente ao método do gradiente conjugado implementado com algoritmo elemento-por-elemento. Posteriormente, entretanto, isto será reestudado.

No caso das malhas tridimensionais de hexaedros, a irregularidade da malha impõe várias ordens para as matrizes de rigidez de elemento, a ordem podendo variar entre a vigésima quarta e a sexagésima.

Portanto, também a matriz do sistema representa um volume expressivo de memória, demonstrando a importância de estudar os solucionadores de sistemas lineares mais indicados para resolver problemas tridimensionais.

Teoricamente, o método do gradiente conjugado determina a solução exata do sistema linear de equações. Na prática, entretanto, a ortogonalidade das direções conjugadas são destruídas pelos erros de truncamento envolvidos nas operações computacionais. Isto transforma o método do gradiente conjugado numa técnica tipicamente iterativa. Assim, um erro relativo, medido numa certa norma, deve ser especificado para o cômputo da solução iterada. Esta tolerância é de fundamental importância

na interpretação numérica dos valores computados e os analistas menos experientes podem se confrontar com soluções degeneradas, destituídas de qualquer significação. Experimentou-se, neste estudo, o limite de $10^{-10}$, mas fixou-se o valor $10^{-8}$ nos problemas estudados.

A título de ilustração, deve-se dizer que observou-se uma perfeita coincidência entre a solução discreta via método do gradiente conjugado pré-condicionado e aquela determinada pelo método de Gauss.

# CAPÍTULO V

# PROBLEMAS RESOLVIDOS

Resume-se neste capítulo os resultados da análise h-adaptativa tridimensional de problemas de Elasticidade 3D.

A estratégia adaptativa é ilustrada com gráficos que medem a qualidade da convergência. Algumas figuras demonstram a capacidade da estrutura topológica de vizinhança de descrever a história do refinamento e a irregularidade nodal, como tamém a definição das malhas geradas.

Os parâmetros da malha, tais como: número de nós, número de elementos, número de equações, norma de energia da solução e erro relativo, são apresentados em tabelas para cada tipo de análise.

A distribuição de grandezas escalares, vetoriais ou tensoriais na malha podem ser visualizados pela associação do espectro de cores com a magnitude da grandeza através de algumas figuras. As cores se distribuem na seguinte ordem: vermelho escuro e claro, laranja, amarelo, verde claro e escuro, azul claro e escuro, e lilás. Ao vermelho escuro corresponde o valor máximo da grandeza e ao lilás, o valor mínimo, com a consideração dos sinais (positivo e negativo).

Dois problemas são resolvidos e discutidos: Viga monoengastada e Problema de Boussinesq.

Os problemas foram resolvidos no supercomputador **CRAY Y-MP-2E** onde o limite máximo utilizável de memória é de 25 Mw. O visualizador gráfico **VIEW3D**, desenvolvido no Programa de Engenharia Civil da **COPPE/UFRJ**, foi utilizado como pós-processador.

## V.1 - Problema de Viga Monoengastada

Seja a viga monoengastada da figura N°·18 cujas propriedades elásticas e geométricas, as cargas e condições de restrição estão indicadas.

A seção engastada é a do plano XZ. A carga total **P** é distribuída nos nove nós da seção do extremo livre.

A viga possui vinte divisões na direção longitudinal do comprimento **L**, perfazendo um total de 80 elementos hexaédricos com formato cúbico, conforme a figura N°·18.

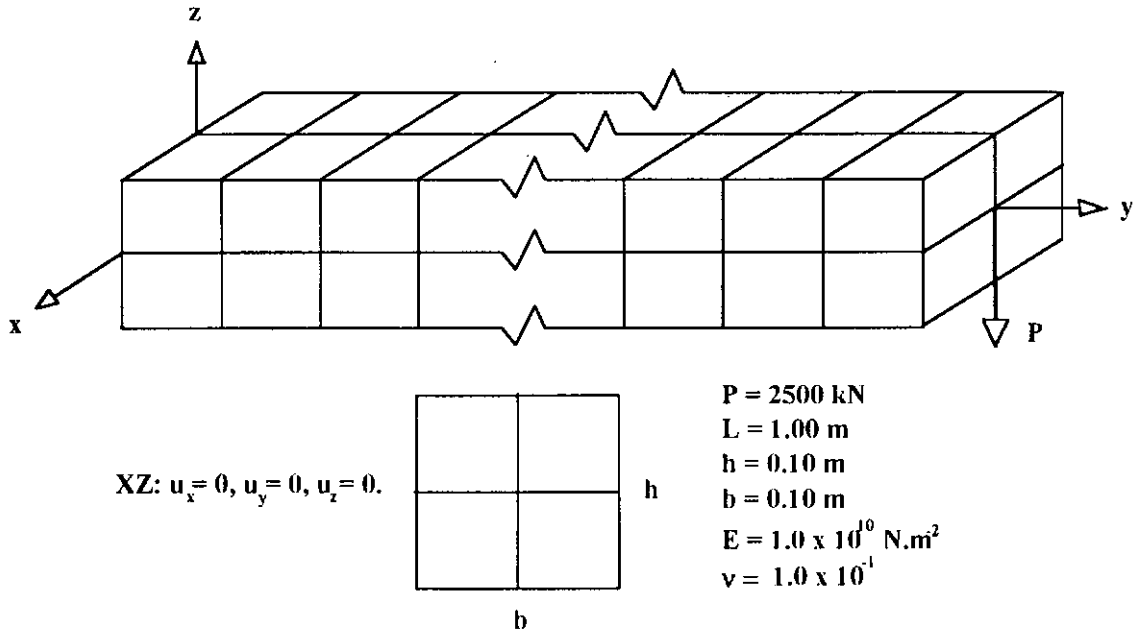


FIGURA Nº 18- Viga Monoengastada.

### V.1.1 - Análise h-Adaptativa do Problema da Viga

Neste sub-item apresenta-se através de tabelas, gráficos e figuras os resultados da análise do problema; uma discussão sumária descreve o comportamento observado e os fatos relevantes. Na análise h-adaptativa descrita abaixo, fixou-se a tolerância de convergência do solucionador iterativo e o grau de exatidão para projetar a malha ótima em:

$\varepsilon \leq 10^{-8}$, $\overline{\eta} = 10\%$.

a) Análise Uniforme, Sucessiva e via Subdivisão:

| Ordem Malha | Número Elementos | Número Nós | Número Equações | $\lVert u^h \rVert_E$ | $\lVert u_\sigma \rVert_E$ | $\eta$ % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º. | 80 | 189 | 540 | 4.74 | 4.52 | 33.8 |
| 2º. | 640 | 1025 | 3000 | 4.94 | 4.87 | 17.2 |
| 3º. | 5120 | 6561 | 19440 | 4.99 | 4.97 | 8.75 |

TABELA Nº 3- Parâmetros da Malha: Refinamento Uniforme.

| Ordem Malha | Número Elementos | Número Nós | Número Equações | $\left\|u^h\right\|_E$ | $\left\|u_\sigma\right\|_E$ | $\eta$ % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º. | 80 | 189 | 540 | 4.74 | 4.52 | 33.8 |
| 2º. | 444 | 738 | 2091 | 4.93 | 4.85 | 18.0 |
| 3º | 1452 | 2054 | 5703 | 4.96 | 4.92 | 13.6 |
| 4º. | 3076 | 4054 | 11703 | 4.99 | 4.96 | 9.68 |

TABELA Nº.4- Parâmetros da Malha: Refinamento Sucessivo.

| Ordem Malha | Número Elementos | Número Nós | Número Equações | $\left\|u^h\right\|_E$ | $\left\|u_\sigma\right\|_E$ | $\eta$ % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º. | 80 | 189 | 540 | 4.74 | 4.52 | 33.8 |
| 2º. | 1788 | 2438 | 6855 | 4.96 | 4.92 | 13.2 |
| 3º. | 3300 | 4328 | 15645 | 4.99 | 4.97 | 8.86 |

TABELA Nº.5- Parâmetros da Malha: Subdivisão de Malha.

Conforme infere-se das tabelas Nº.4 e Nº.5, o número de ciclos de refinamento é menor para a análise h-adaptativa via subdivisão de malha, como também erro relativo percentual.

Das tabelas Nº.3, Nº.4 e Nº.5, observa-se que a norma da solução discreta computada pelo campo de deslocamentos $\left\|u^h\right\|_E$ e a norma da solução discreta computada pelo campo de tensões suavizadas $\left\|u_\sigma\right\|_E$ convergem para um único valor.

Na tabela Nº.5 o espectro é de segunda ordem.

b) Lei h x G do Refinamento Uniforme:

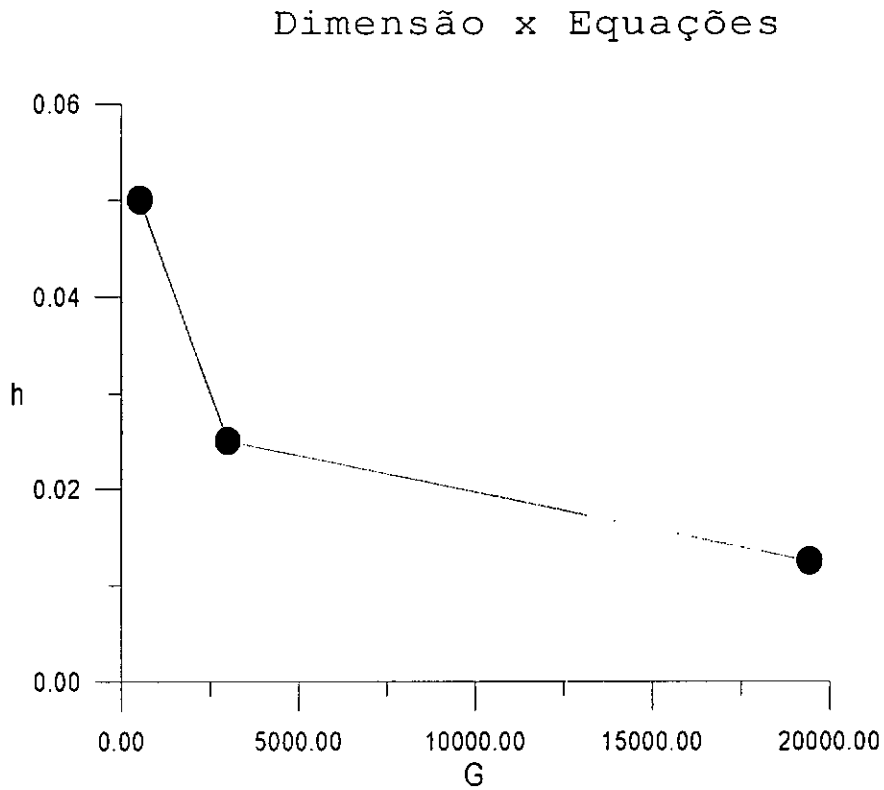


GRÁFICO Nº 1- Lei h x G do Refinamento Uniforme.

No gráfico Nº 1 é ilustrada a lei de dependência entre a dimensão paramétrica do elemento e o número de graus de liberdade. Uma interpolação no sentido do Método dos Mínimos Quadrados com uma curva do tipo $G = C h^a$ ( $C = 0.704$, $a = -2.63$ ) mostrou ótima concordância da curva interpolada e os pontos dados. A taxa de convergência h teórica esperada para soluções regulares seria -p/3, p é a ordem do polinômio. O expoente a ($a \approx 3$) confirma este número. É interessante comentar que no caso unidimensional $G \propto h^{-1}$ , no caso bidimensional $G \propto h^{-2}$ e no caso tridimensional $G \propto h^{-3}$ , portanto, o problema tridimensional é uma mera extensão.

c) Convergência-h Adaptativa:

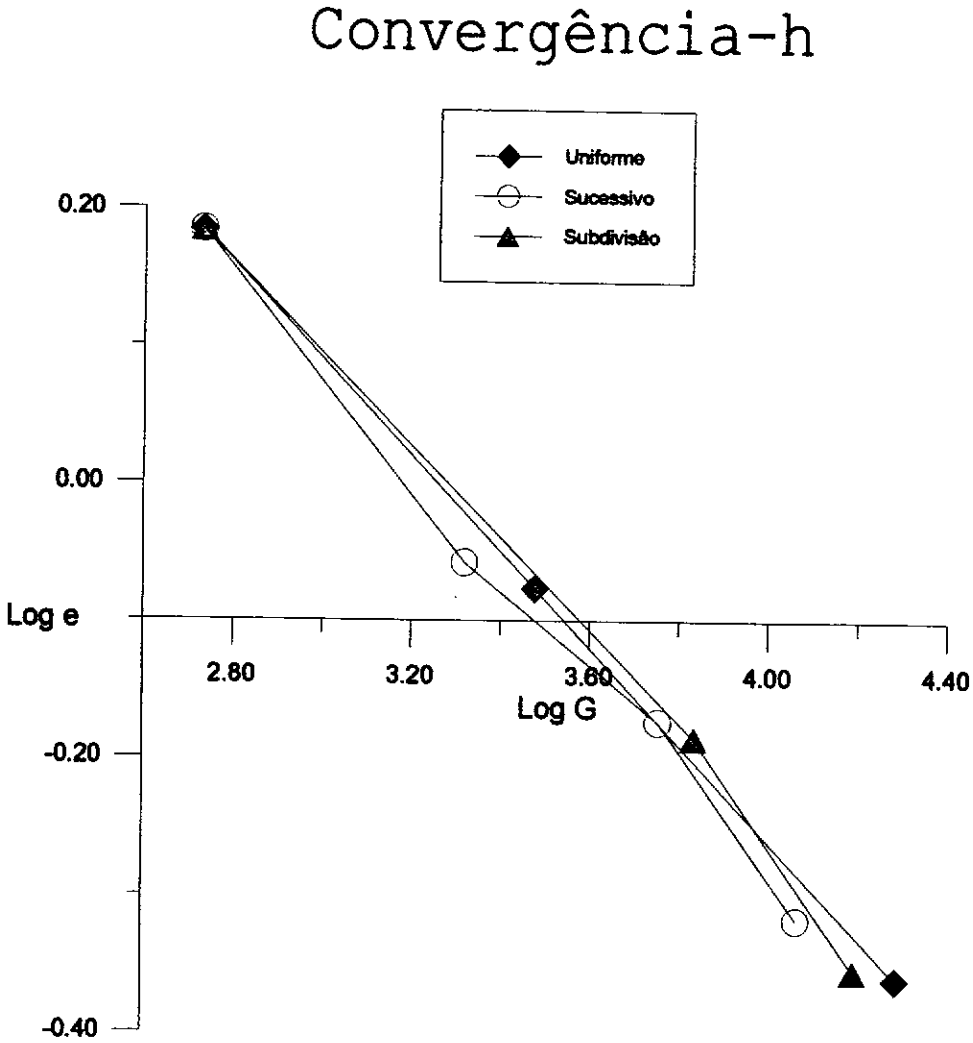


GRÁFICO Nº·2- Convergência-h dos Refinamentos.

O gráfico Nº·2 ilustra a convergência-h de três formas de análise: uniforme, sucessiva e via subdivisão.

As taxas de convergência-h computadas para cada uma das análises foram: $\beta_{uni.} = -0.35$, $\beta_{suc.} = -0.46$ e $\beta_{sub.} = -0.47$. A taxa de convergência para a estratégia adaptativa via subdivisão de malha forneceu, portanto, melhor resultado.

d) Evolução das Malhas:

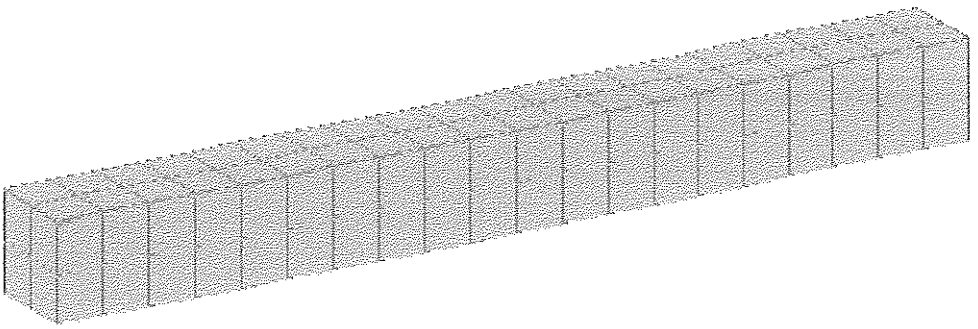

FIGURA Nº·19-a) Evolução do Refinamento via Subdivisão: 1ª· Malha.

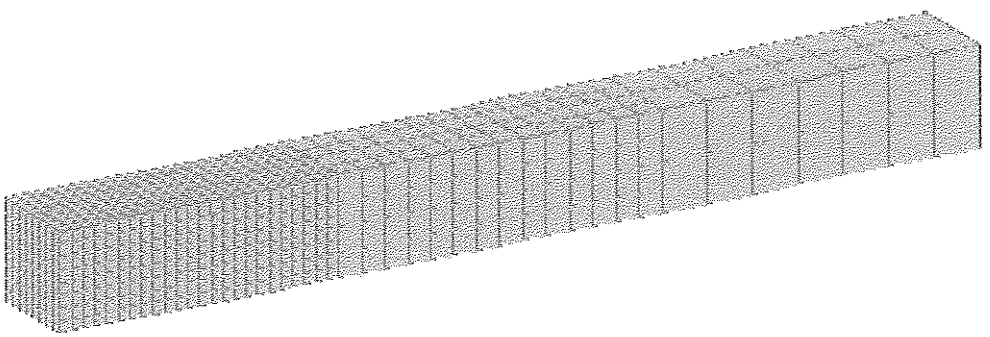

FIGURA Nº·19-b) Evolução do Refinamento via Subdivisão: 2ª· Malha.

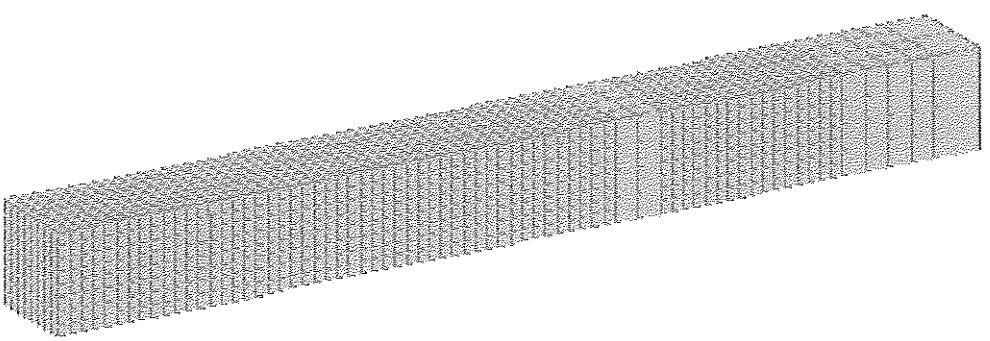

FIGURA Nº·19-c) Evolução do Refinamento via Subdivisão: 3ª· Malha.

As figuras Nº·19 a), b) e c) mostram a história do refinamento através da evolução das malhas.

Tais figuras referem-se ao refinamento por subdivisão de malha com espectro de 2ª· ordem. O objetivo é mostrar o avanço do refinamento induzido pela estratégia adaptativa.

Nota-se que a distribuição de número de divisões do espectro separou a viga em três regiões: elementos com duas, uma e zero divisões, como se esperava intuitivamente pela distribuição de erro, pois, na região do engaste é que deve-se se concentrar mais elementos para descrever bem a variação de curvatura naquela parte da viga.

e) Campo de Deslocamentos:

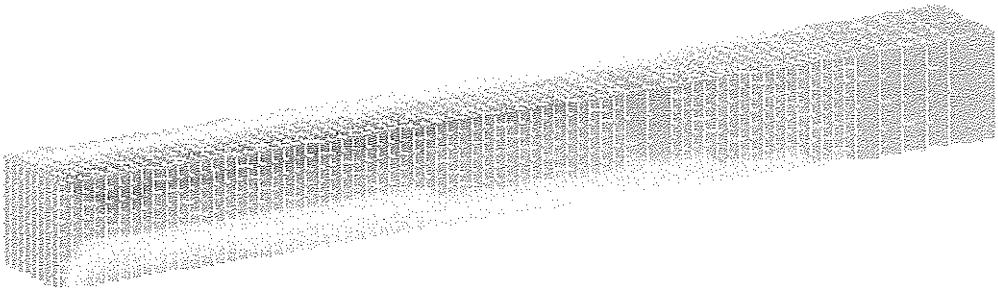

FIGURA Nº·20-a) Campo de Deslocamentos por Subdivisão: $\mathbb{D}_x$.

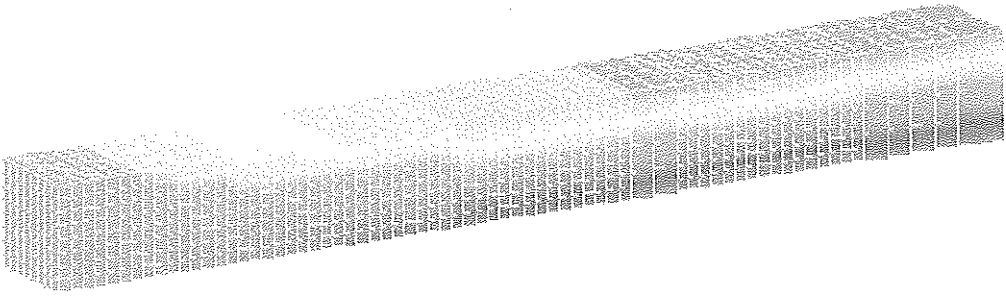

FIGURA Nº·20-b) Campo de Deslocamentos por Subdivisão: $\mathbb{D}_y$.

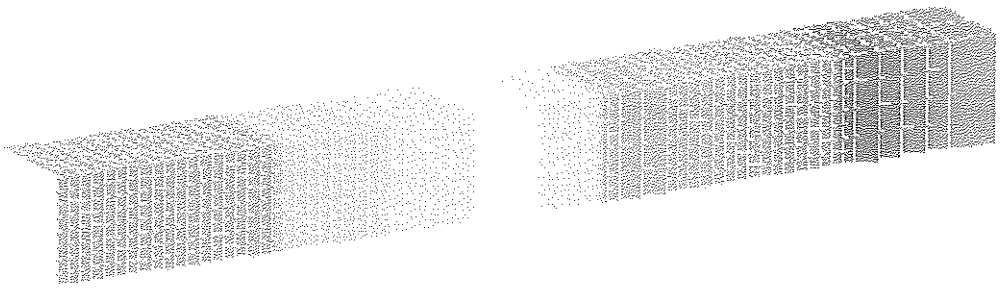

FIGURA Nº·20-c) Campo de Deslocamentos por Subdivisão: $\mathbb{D}_z$.

Nas figuras Nº·20 a), b) e c), o campo de deslocamentos nodais, dado pelas componentes $\mathbb{D}_x$ , $\mathbb{D}_y$ e $\mathbb{D}_z$, permite observar que a Teoria de Vigas de Bernoulli é incapaz de predizer o formato trapezoidal assumido pela seção transversal da viga quando uma análise tridimensional elástica é realizada. As componentes de deslocamento apresentadas referem-se à terceira malha do refinamento por subdivisão de malha com espectro de 2ª. ordem.

A figura Nº·20 a) mostra que o coeficiente de Poisson induz uma contração da aresta superior da seção da viga e uma dilatação da inferior, como é intuitivamente esperado.

A figura Nº·20 b) confirma fisicamente o tracionamento das camadas acima do eixo neutro, e a compressão das camadas abaixo.

A figura Nº·20 c) representa o deslocamento segundo o eixo-$\mathbb{Z}$. A solução analítica pela Teoria de Vigas de Bernoulli para o deslocamento máximo da deformada é de 1.00E-2 m e a solução numérica computada é 0.9977E-2 m.

f) Componente de Tensão $\sigma_y$:

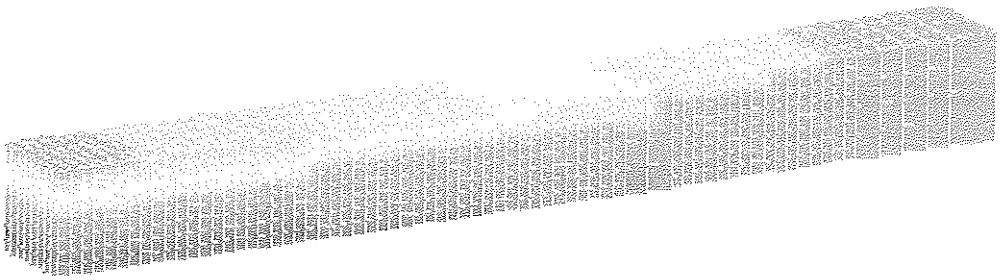

FIGURA Nº·21- Componente de Tensão $\sigma_y$ por Subdivisão.

Na figura Nº·21 a componente de tensão $\sigma_y$ que gera o momento fletor é associado ao espectro de cores. A solução exata segundo a Teoria de Vigas de Bernoulli é 0.150E+8 $kN.m^{-2}$; a solução discreta é 0.1634E+8 $kN.m^{-2}$. A distribuição da componente de tensão $\sigma_y$ da figura Nº·21 refere-se à terceira malha do refinamento via subdivisão de malha com espectro de 2ª· ordem.

g) Distribuição de Erros de Discretização:

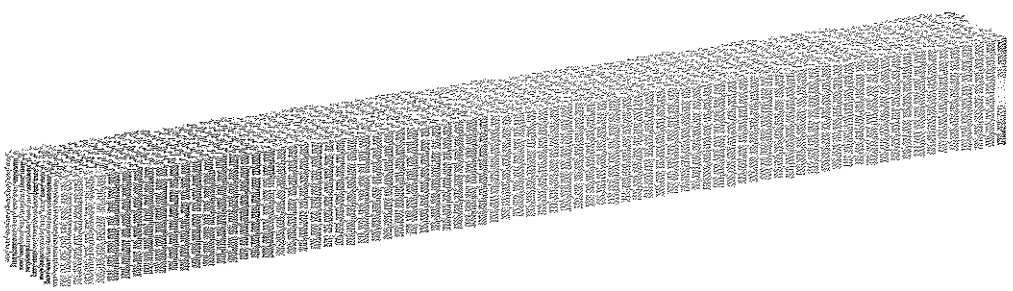

FIGURA Nº·22-a) Distribuição de Erros: Refinamento Uniforme.

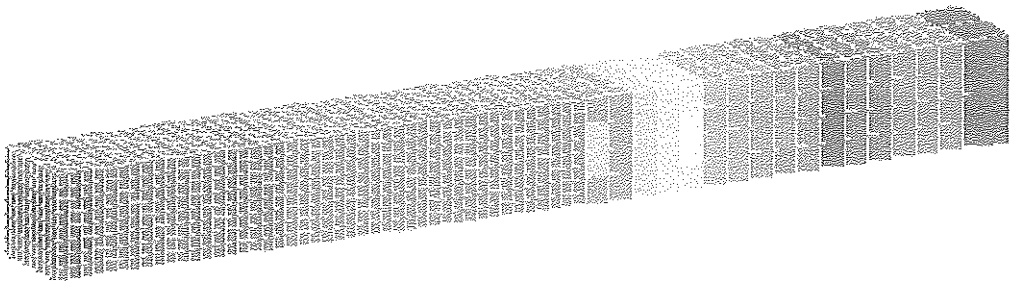

FIGURA Nº·22-b) Distribuição de Erros: Refinamento Sucessivo.

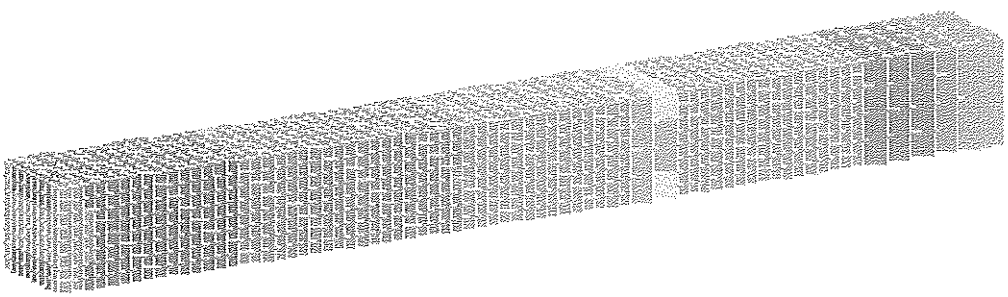

FIGURA Nº·22-c) Distribuição de Erros: Subdivisão de Malha.

As distribuições de erro das figuras Nº·22 a), b) e c) refere-se às três formas de refinamento simuladas com a estratégia implementada: uniforme, sucessivo e via subdivisão. As malhas correspondem às últimas malhas das tabelas Nº·3, Nº·4 e Nº·5.

Como existe uma limitação na implementação de tipos de carregamento, duas regiões singulares se desenvolvem: o engaste e o extremo livre. Isto é visível na distribuição de erros da figura Nº·22 a) onde os elementos possuem volumes idênticos, diferentemente das figuras Nº·22 b) e c).

Notou-se, dos experimentos numéricos realizados, que a estratégia adaptativa condiciona a evolução do refinamento e depende das condições de contorno do problema, do modelo discreto e da ordem do espectro de divisões. Isto é, quando se refina a malha e a solução numérica se aproxima da solução ótima especificada, tanto no espectro de 1ª·, 2ª· como no de 3ª·

ordem, os elementos selecionados são únicos. Assim, as últimas malhas da análise h-adaptativa são idênticas. Este fenômeno pode ser interpretado quando se compreende que a solução discreta via Método dos Elementos Finitos é convergente para a solução exata e que é única.

### V.2 - Problema de Geomecânica(Boussinesq):

Seja o problema clássico de Elasticidade Tridimensional, denominado Problema de Boussinesq (Timoshenko [42]). Tal problema consiste num sólido semi-infinito com uma força concentrada aplicada sobre a superfície de contorno na direção perpendicular ao plano do contorno. Para simular tal problema utilizamos a discretização apresentada na figura Nº·23. Embora, o problema seja posto numa região ilimitada, o domínio é representado por um corpo cúbico de aresta **a**, conforme ilustra a figura Nº·23.

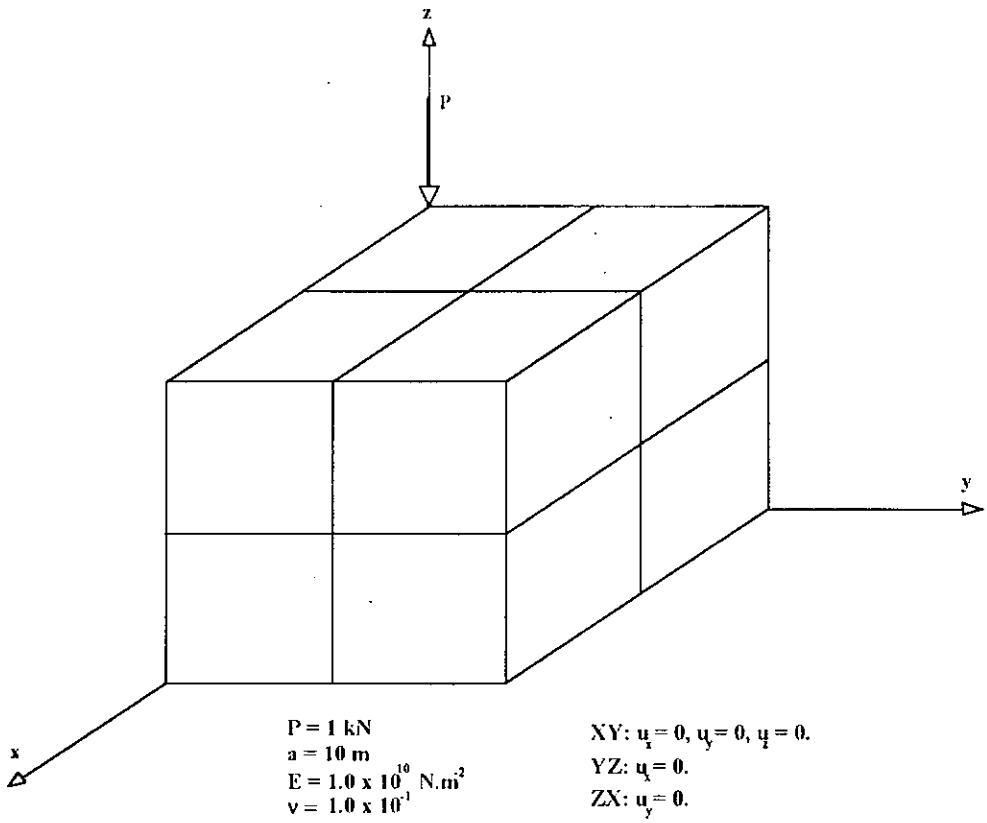


FIGURA Nº·23- Problema de Boussinesq.

### V.2.1 - Análise h-Adaptativa Tridimensional:

O Problema de Boussinesq é resolvido aqui para ilustrar o poder de geração de malha do algoritmo **Octree**. Uma análise h-adaptativa típica não é aplicada porque a carga puntual gera uma energia infinita no sistema (Szabó[24]).

a) Parâmetros das Malhas via Subdivisão de Malha:

| Ordem Malha | Memória Arranjos kBytes | Número Nós | Número Elementos | Número Equações | Nós Irregulares Aresta | Nós Irregulares Face |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º. | 266 | 27 | 8 | 42 | 0 | 0 |
| 2º. | 1477 | 108 | 50 | 176 | 12 | 4 |
| 3º. | 3696 | 251 | 127 | 392 | 54 | 21 |
| 4º. | 6718 | 431 | 232 | 665 | 107 | 43 |
| 5º. | 10745 | 658 | 372 | 1031 | 168 | 69 |
| 6º. | 14974 | 899 | 519 | 1412 | 234 | 97 |
| 7º. | 20008 | 1182 | 694 | 1871 | 310 | 129 |
| 8º. | 25445 | 1485 | 883 | 2366 | 390 | 163 |
| 9º. | 32088 | 1842 | 1114 | 2981 | 478 | 201 |
| 10º. | 38933 | 2213 | 1352 | 3611 | 571 | 241 |

TABELA Nº.6- Parâmetros da Malha: Espectro de 1ª. Ordem ($0 \leq \rho \leq 1$).

| Ordem Malha | Memória Arranjos kBytes | Número Nós | Número Elementos | Número Equações | Nós Irregulares Aresta | Nós Irregulares Face |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º. | 266 | 27 | 8 | 42 | 0 | 0 |
| 2º. | 8326 | 469 | 288 | 928 | 60 | 24 |
| 3º. | 33075 | 1693 | 1149 | 3289 | 312 | 135 |
| 4º. | 77727 | 3769 | 2703 | 7603 | 671 | 298 |
| 5º. | 134243 | 6366 | 4670 | 13090 | 1104 | 495 |

TABELA Nº.7- Parâmetros da Malha: Espectro de 2ª. Ordem ($0 \leq \rho \leq 2$).

| Ordem Malha | Memória Arranjos kBytes | Número Nós | Número Elementos | Número Equações | Nós Irregulares Aresta | Nós Irregulares Face |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º. | 266 | 27 | 8 | 42 | 0 | 0 |
| 2º. | 8326 | 469 | 288 | 928 | 60 | 24 |
| 3º. | 130972 | 5747 | 4558 | 13102 | 750 | 342 |

TABELA Nº.8- Parâmetros da Malha: Espectro de 3ª. Ordem ($0 \leq \rho \leq 3$).

| Ordem Malha | Memória Arranjos kBytes | Número Nós | Número Elementos | Número Equações |
|---|---|---|---|---|
| 1º. | 266 | 27 | 8 | 42 |
| 2º. | 1881 | 125 | 64 | 260 |
| 3º. | 14766 | 729 | 512 | 1800 |
| 4º. | 117725 | 4913 | 4096 | 13328 |
| 5º. | 940894 | 35937 | 32768 | 102432 |

TABELA Nº.9- Parâmetros da Malha: Espectro Uniforme ($\rho \equiv 1$).

Nas tabelas Nº.6, Nº.7, Nº.8 e Nº.9 são apresentados parâmetros de definição das malhas: memória dos arranjos, número de nós, número de elementos, número de equações e número de nós irregulares, para os diferentes espectros de divisão usados na estratégia adaptativa. O objetivo é ilustrar o comportamento da combinação do algoritmo **Octree** com a estratégia de subdivisão de malha, enfocando a acelerada geração de nós, elementos e graus de liberdade, em função da ordem do espectro.

A memória dos arranjos refere-se à definição de incidência, coordenadas cartesianas, condições de restrição, força nodais, matriz de rigidez, vizinhança de elemento, tipos nodais, solução discreta, pré-condicionador **et cetera**. Estes arranjos são pré-dimensionados em função de três parâmetros: número de nós, número de elementos e número de equações.

Conforme se observa nas tabelas Nº.6, Nº.7, Nº.8 e Nº.9, o espectro de divisões define a gradual velocidade de propagação de nós e de elementos, determinando o número de ordens de malhas, cujas

discretizações podem ser armazenadas pelos arranjos vetoriais e matriciais. O código de análise h-adaptativa tridimensional desenvolvido possui um módulo contador que determina o número de nós, o número de elementos e número de equações na malha adaptativa subsequente, computando, também, a memória associada aos arranjos. Assim, sabe-se até que ordem de malha o modelo computacional pode ser definido.

Para o espectro de primeira ordem a evolução de memória para descrever a discretização é mais gradual, limitou-se, por concisão do texto, até a décima. No caso de espectro de 2ª. é possível simular até a quinta malha; no caso de espectro de 3ª. até a terceira; no caso de espectro uniforme até a quarta malha, a quinta já extrapola os limites de memória utilizável. A geração exponencial de nós e elementos para o espectro uniforme demonstra que modelos discretos para corpos sólidos representados por malhas uniformes são proibitivos.

b) Lei h x G do Refinamento Uniforme:

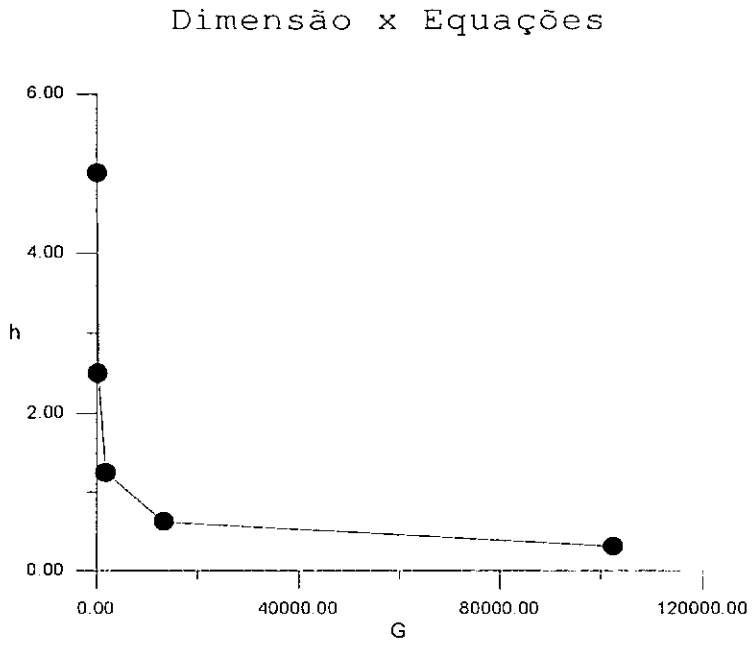


GRÁFICO Nº.3- Lei h x G do Refinamento Uniforme.

O gráfico Nº.3 mostra o decaimento potencial da dimensão do elemento em termos do número de graus de liberdade.

Interpolando pelo Método dos Mínimos Quadrados com uma curva do tipo $G = C h^a$ uma ótima concordância da curva e os pontos dados é observada.

As constantes da curva são: $C = 3548.725$, $a = -2.8587$. A taxa de convergência h teórica esperada para soluções regulares seria $-p/3$, p é a ordem do polinômio, no caso trilinear. O expoente a computado ($a \approx -3$) confirma a taxa esperada.

Enquanto no caso unidimensional o número de graus de liberdade é proporcional ao inverso de h e no caso bidimensional , ao inverso do quadrado de h, os números acima indicam que para o caso tridimensional $G \propto h^{-3}$. Tais números indicam que existe uma perfeita similaridade entre os problemas uni, bi e tridimensionais.

c) Evolução das Malhas:

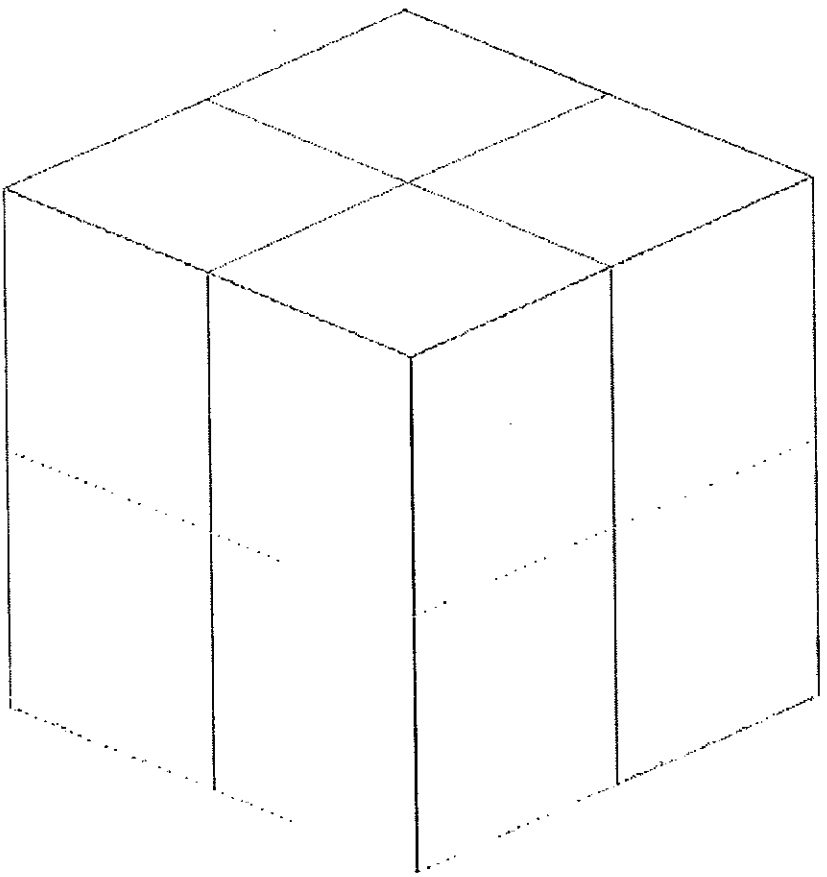

FIGURA Nº 22-a) Evolução do Refinamento(2ª Ordem): 1ª Malha.

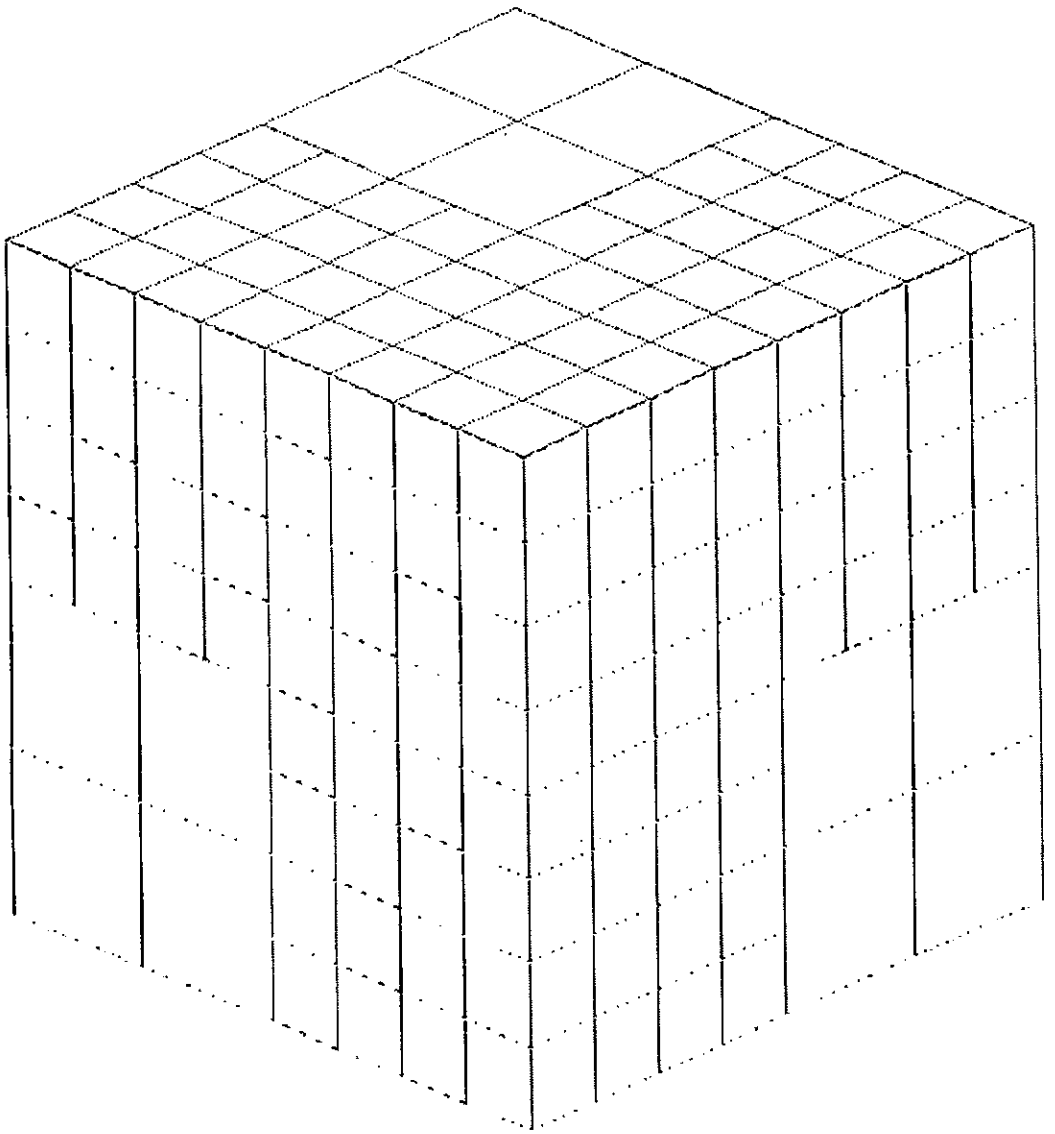

FIGURA Nº 22-b) Evolução do Refinamento(2ª. Ordem): 2ª. Malha.

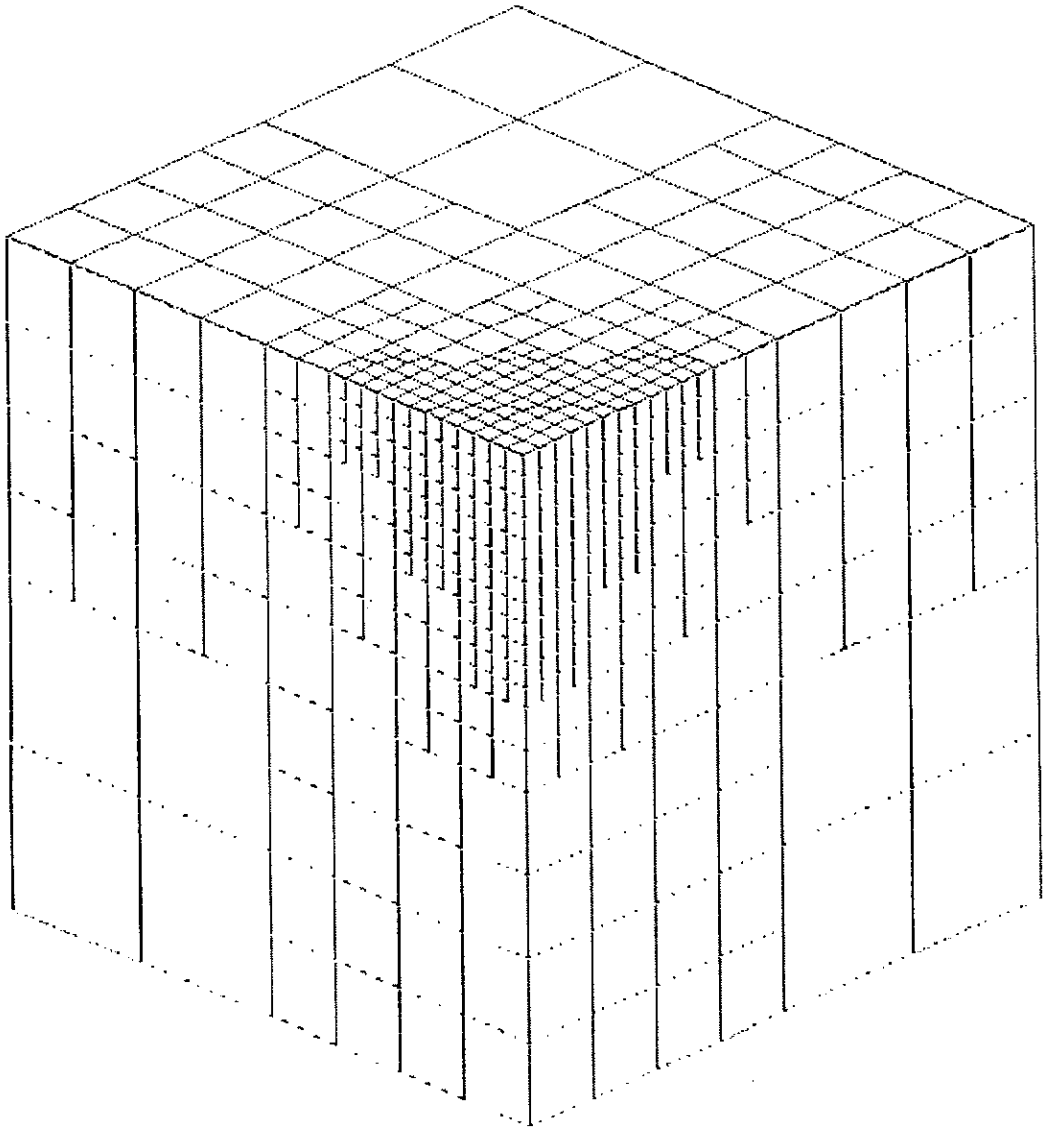

FIGURA Nº 22-c) Evolução do Refinamento(2ª Ordem): 3ª Malha.

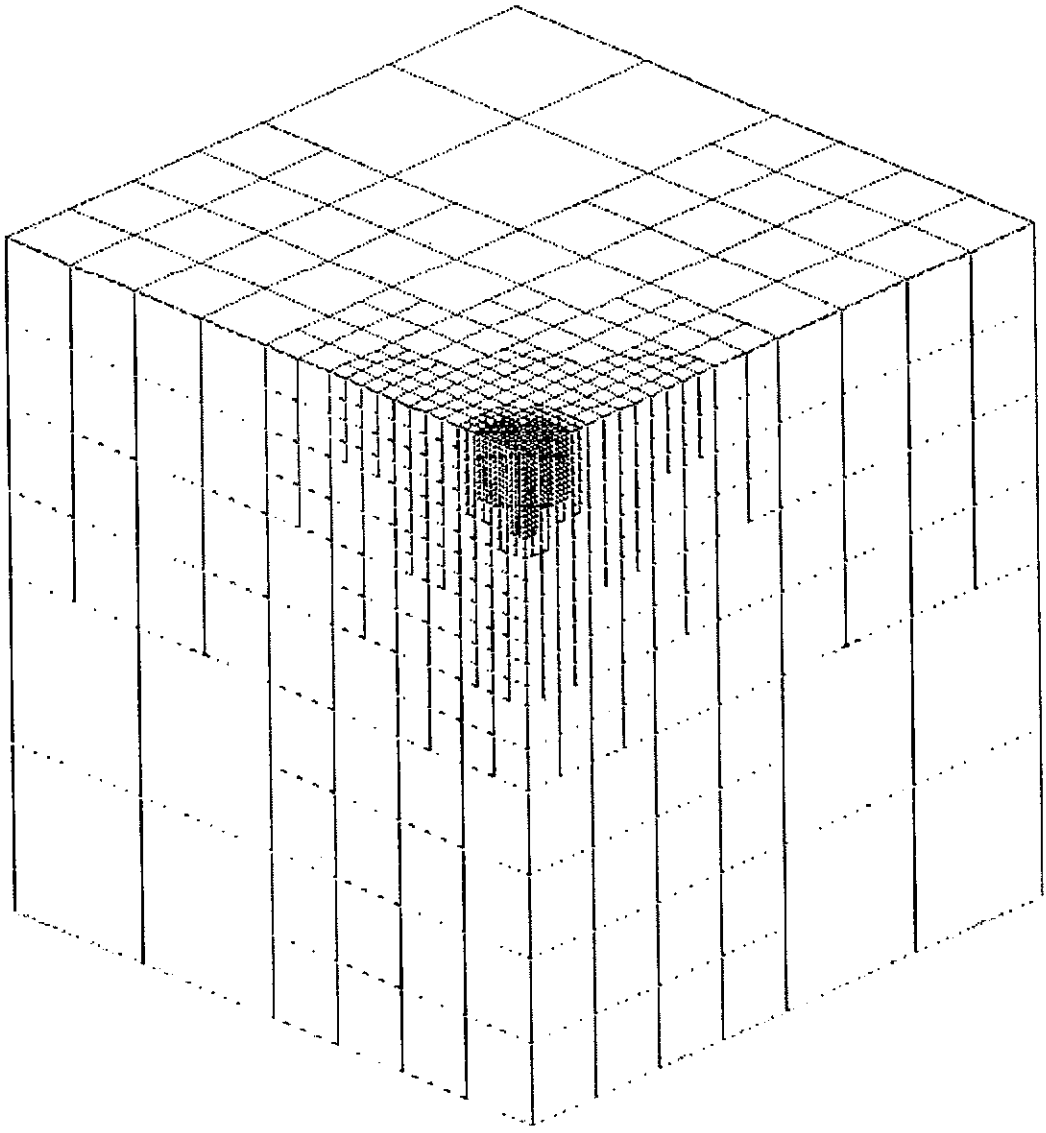

FIGURA Nº 22-d) Evolução do Refinamento(2ª Ordem): 4ª Malha.

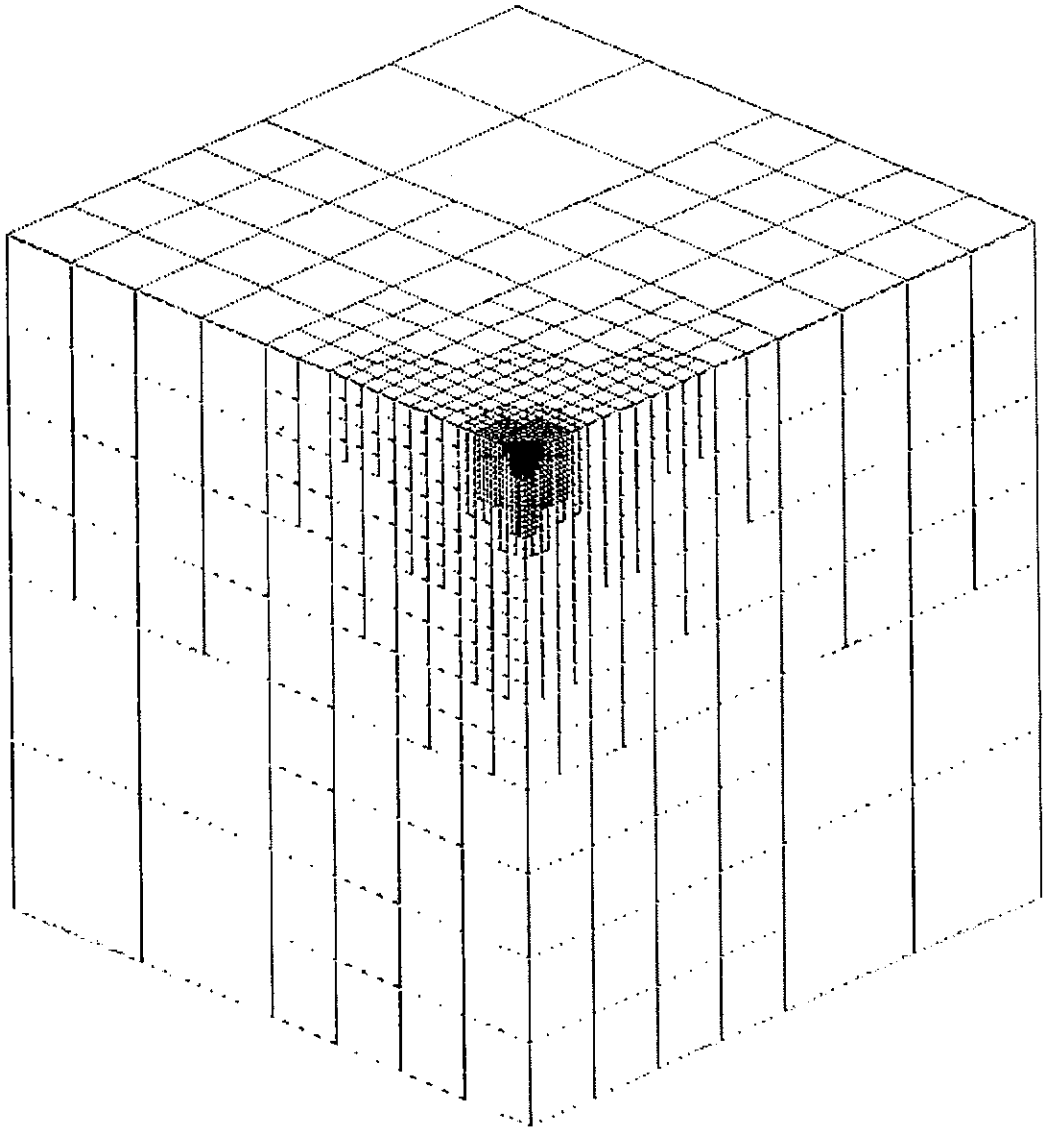

FIGURA Nº 22-e) Evolução do Refinamento(2ª. Ordem): 5ª. Malha.

Nas figuras N°·22 a), b), c), d) e e) têm-se uma visualização gráfica da evolução da história do refinamento. O objetivo é mostrar através das perspectivas a definição das malhas de hexaedros e a funcionabilidade da estrutura topológica como também o poder de geração de malha do algoritmo **Octree**. Tais figuras referem-se à estratégia com espectro de divisões de 2ª· ordem. Dada à singularidade do problema, um espectro de ordem superior incapacita uma visualização gradativa da evolução do refinamento, pois, o volume de memória associado à malha adaptativa assume proporções que impossibilita gravar as informações das discretizações subsequentes.

As figuras N°·22 a), b) e c) mostram que o epicentro da singularidade é o ponto de aplicação da carga. Percebe-se visualmente que o elemento que contém o nó onde incide a carga é que foi particionado segundo o número máximo de divisões do espectro, no caso duas divisões porque o espectro é de segunda ordem. Certamente, tal fenômeno se repetiu nas outras duas malhas, mas a diminuta dimensão dos elementos do último nível, impossibilita uma perfeita visualização. Nota-se, também, que são criadas várias superfícies concêntricas de nós irregulares cujo centro é a singularidade do problema.

d) História do Refinamento das Malhas:

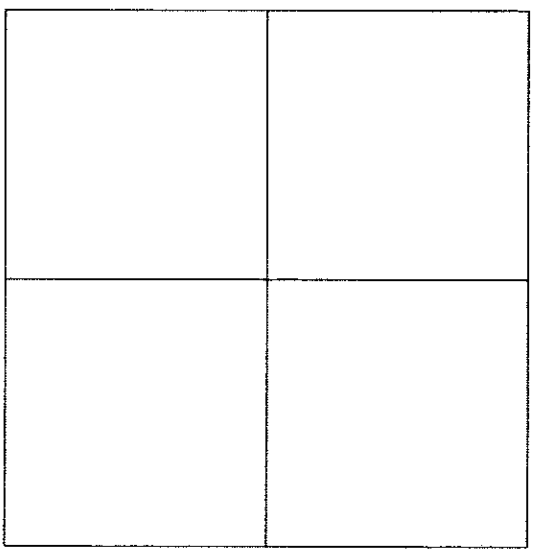

FIGURA N°·23-a) Evolução do Refinamento(3ª· Ordem): 1ª· Malha.

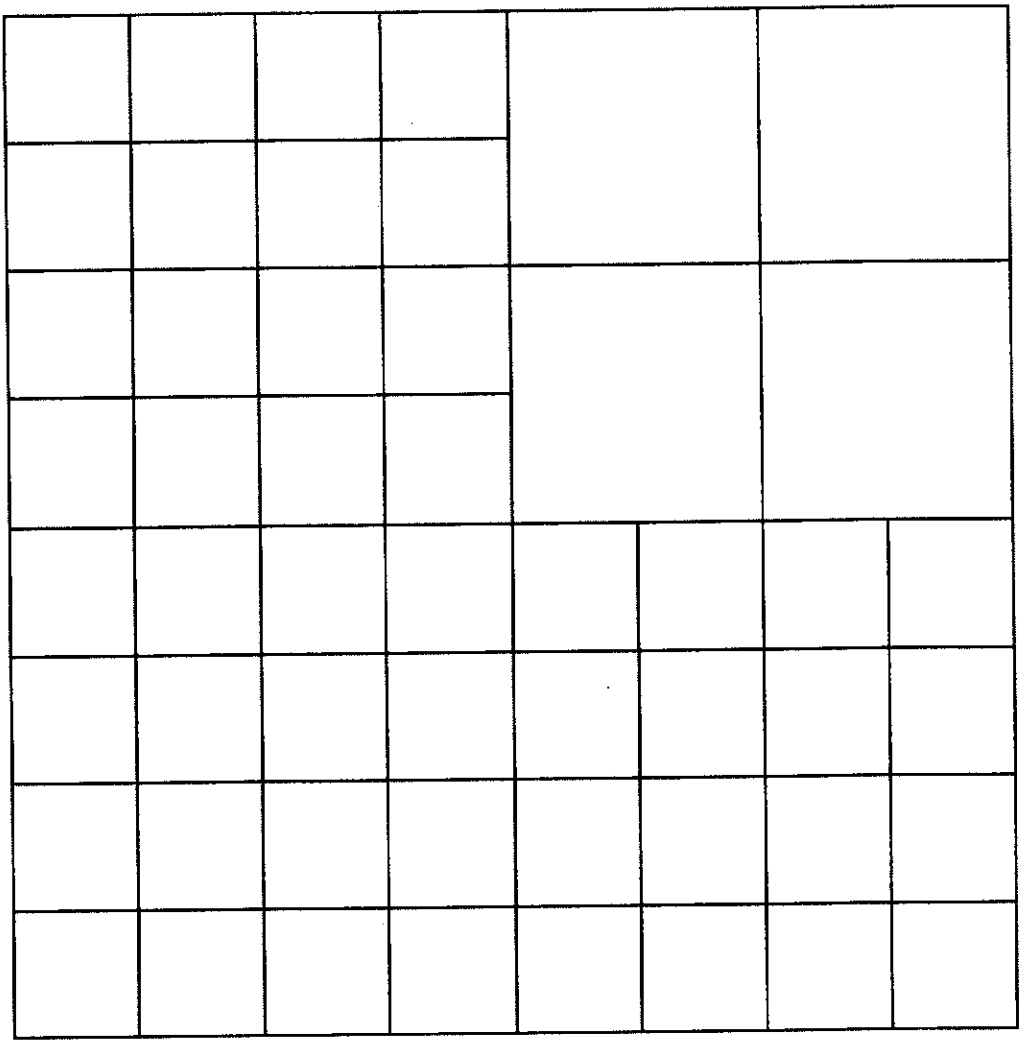

FIGURA Nº·23-b) Evolução do Refinamento(3ª· Ordem): 2ª· Malha.

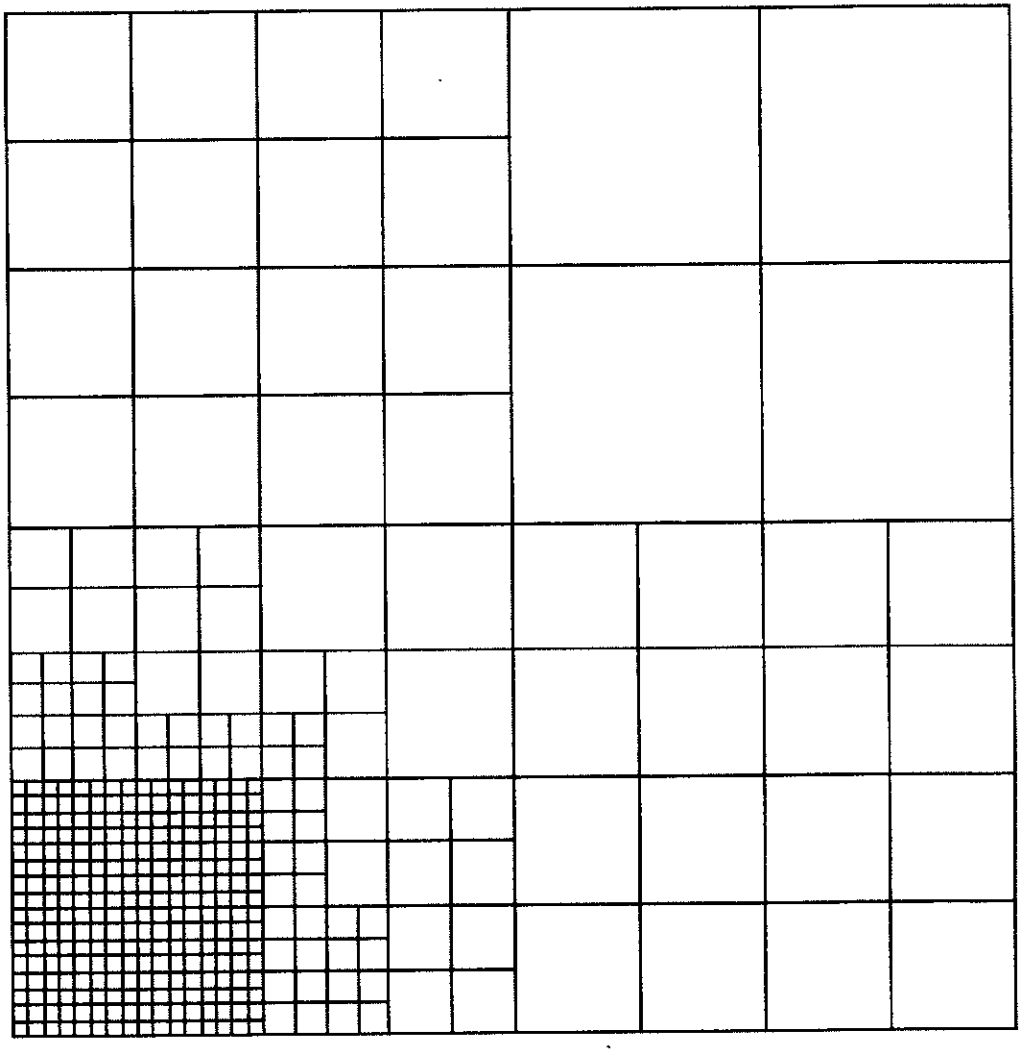

FIGURA Nº 23-c) Evolução do Refinamento(3ª Ordem): 3ª Malha.

Nas figuras N°·23 a), b) e c) pode ser visualizado o avanço do refinamento e a conexão existente entre a história do refinamento e a estratégia adaptativa. O objetivo aqui é permitir uma visualização gráfica com mais resolução, em função das perspectivas das figuras N°·22 a), b), c), d) e e) não serem tão bem definidas. Analisando as figuras N°·23 a) , b) e c), observa-se que os elementos menores são do quinto nível. Uma malha refinada uniformemente até o quinto nível, partindo de idêntico modelo discreto, totaliza $64^3=262144$ elementos; enquanto a terceira malha adaptativa (figura N°·23-c) perfaz 4558 elementos. Portanto, malhas uniformes são inteiramente inviáveis para análises numéricas de Problemas Tridimensionais.

e) Distribuição de Erros de Discretização:

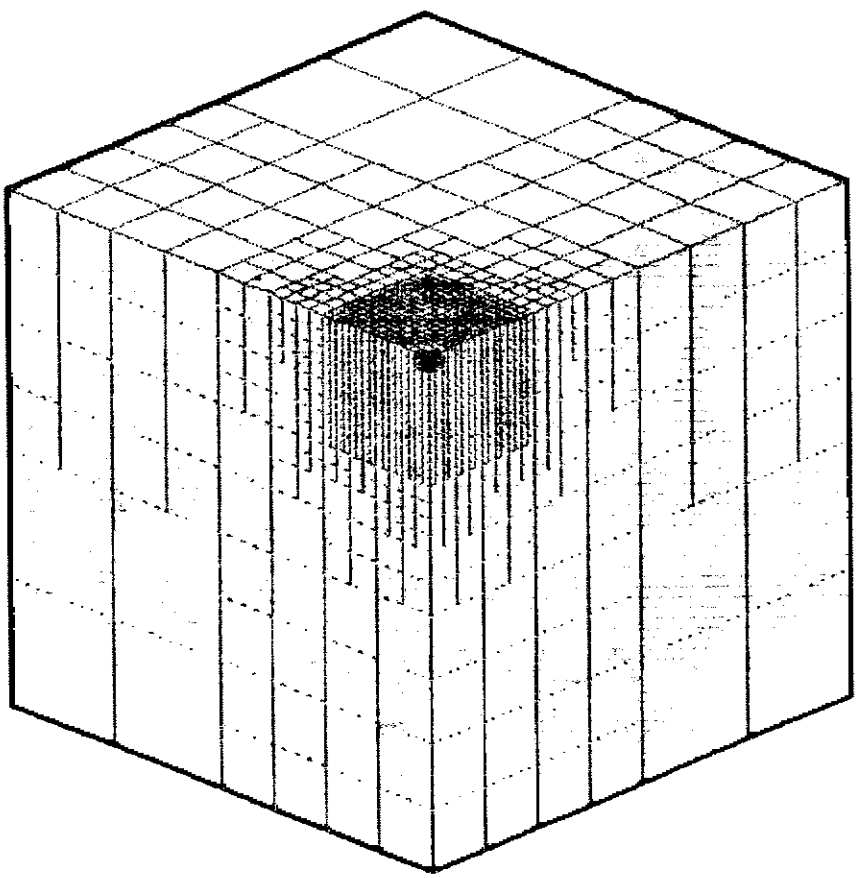

FIGURA N°·24-Distribuição de Erro: Espectro de 3ª· Ordem.

A figura Nº·24 representa a distribuição de erros de discretização da última malha da análise com espectro de 3ª· ordem. Nota-se que a solução é regular praticamente no domínio inteiro do problema, restringindo-se a singularidade a uma região infinitesimalmente próxima do ponto de aplicação da carga. Lembrar que a análise processar-se-á ***ad infinitum***, sem convergir, com o refinamento a concentrar elementos na região singular, sem reduzir, entretanto, a magnitude do erro, uma vez que a carga puntual gera uma energia infinita no sistema.

f) Distribuição de Tensões $\sigma_z$:

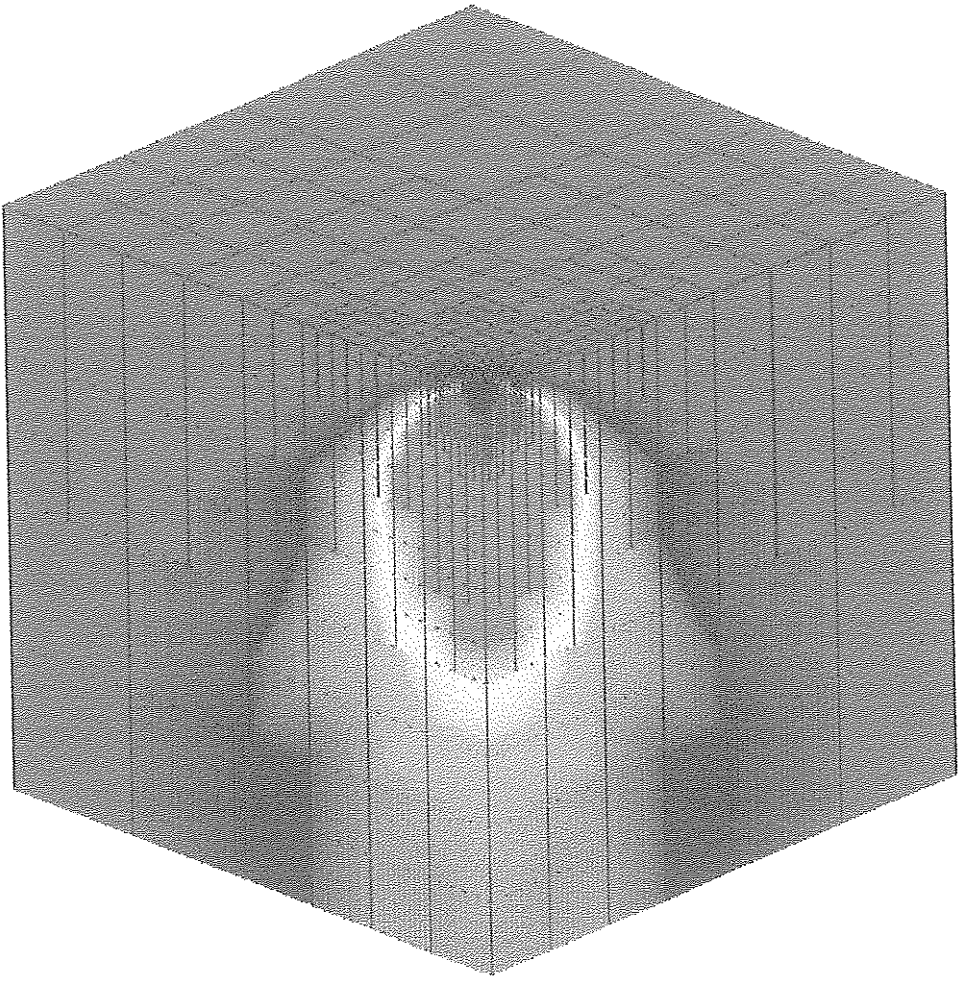

FIGURA Nº·25-Distribuição de Tensões $\sigma_z$: Espectro de 2ª· Ordem.

A figura N$^{o}$·25 mostra a distribuição de pressões $\sigma_z$ correspondente à última malha com espectro de divisões de 2$^{a}$· ordem.

Neste experimento numérico, observou-se que a região da singularidade é diminuta se comparada às dimensões geométricas do problema, mas é onde ocorrem os maiores gradientes da solução discreta. É numericamente caótica e a visualização da distribuição de pressões da componente $\sigma_z$ ( figura N$^{o}$·25 ) do tensor de tensões é possível quando os elementos que compõe tal região são desprezados.

# CAPÍTULO VI

# CONCLUSÕES

O tema Análise h-Adaptativa Tridimensional desenvolvido neste texto é um ensaio preliminar na área de Adaptação de Malhas.

Certamente, existem tanto estruturas topológicas quanto padrões de refinamento ainda desconhecidos ou não estudados que sejam simples e capazes de descrever a história de malhas adaptativas de forma inteligente e moderna.

Do estudo e análise dos experimentos numéricos realizados podemos concluir que:

1) A variável memória é a determinante na Análise h-Adaptativa Tridimensional. O modelo computacional associado à discretização do corpo através dos arranjos vetoriais e matriciais que definem a topologia, a geometria e as condições de contorno limita as possibilidades de análise dos problemas. Otimizar a estrutura topológica é condicionar o estudo avançado de problemas numa escala superior;

2) O algoritmo **Octree** é um poderoso gerador hierárquico de malhas, apresentando uma excelente correlação entre número de nós e número de elementos gerados pelo refinamento de cada hexaedro. Significa que ao particionar um hexaedro são gerados graus de liberdade de forma compensadora se comparado ao volume de operações das integrações numéricas, da descrição geométrica e topológica da malha e da multiplicação matriz-vetor do solucionador iterativo induzido pela adaptação da malha;

3) A estrutura topológica para o algoritmo **Octree** é genérica, e independe de qual fenômeno físico é tratado. Portanto, é incorporável aos códigos gerais de Análise de Elementos Finitos e pode ser usado na construção de visualizadores gráficos de malhas tridimensionais e de reordenadores;

4) O módulo de refinamento-h do hexaedro pode ser utilizado para criar um gerador automático de malhas tridimensionais, para discretização de corpos sólidos limitados por superfícies definidas por funções regulares;

5) A estrutura topológica de vizinhança criada pode ser usada para construir o módulo de **Mesh Colouring**, essencial para paralelizar o solucionador iterativo implementado, permitindo, assim, análises mais abrangentes;

6) Embora as funções de interpolação do hexaedro sejam de ordem polinomial trilinear, o elemento apresentou excelente propriedade de convergência, sem requerer uma integração numérica tão pesada.

Finaliza-se aqui este estudo da Análise h-Adaptativa Tridimensional aplicada a Problemas de Elastostática. Sugere-se, a seguir, temas para a continuidade deste trabalho.

# CAPÍTULO VII

## SUGESTÕES

O tema Malhas Adaptativas de Elementos Finitos é uma abrangente área de pesquisa e uma técnica consolidada em Análise Numérica. Adaptação em 3D, entretanto, é um campo aberto para aplicação dos seus princípios gerais.

Existe uma infinidade de tópicos que podem ser sugeridos para orientar a continuidade deste trabalho no sentido de construir um código para análises numéricas realistas de problemas de engenharia. Queremos, entretanto, citar alguns dos mais importantes:

a) Implementar o procedimento de desrefinamento, pois, o particionamento de um elemento modifica, momentaneamente, a distribuição de erro nos elementos sobre a malha. Uma convergência mais acelerada, com um número bem inferior de refinamentos executados até computar-se o grau de exatidão prescrito para a solução discreta, poderia ser esperada, caso este algoritmo seja introduzido.

b) Testar outras variantes computacionais para uma definição da topologia da malha e outros critérios de refinamento para criar malhas regulares com um uso otimizado de memória.

c) Implementar uma variedade mais expressiva de cargas para simulação de uma classe maior de problemas, entre as quais: cargas de corpo, de superfície, deformação imposta, variação térmica **et cetera.**

d) Criar um biblioteca de elementos finitos tridimensionais versátil, incorporando elementos com diferentes ordens espectrais e variadas geometrias (e.g. tetraedros, prismas **et cetera**), possibilitando discretizações de corpos com geometrias genéricas.

e) Estudar outros tipos de funções de forma, objetivando ótimas qualidades de convergência e adaptação a contornos curvos.

f) Estudar as técnicas e os vários tipos de solucionadores iterativos de sistemas de equações algébricas lineares mais indicados para resolver problemas associados a malhas adaptativas de elementos finitos tridimensionais. Por não ser este tópico a ênfase do tema da tese, as implementações visavam simplesmente condicionar a viabilização da análise, por isto, não sofisticou-se nem o produto matriz-vetor nem o vetor de partida. As experimentações numéricas demonstraram, entretanto, existir uma expressiva interferência sobre a análise. Dada a sua prioritária importância, posteriormente este item será abordado especialmente.

g) Adaptar o programa, transformando-o num código orientado para a arquitetura dos computadores paralelos e vetoriais.

h) Tratar o Problema Física e Geometricamente Não-Linear, dada as inúmeras aplicações práticas, entre as quais, cita-se em Metalurgia a Modelação de Metais.

i) Combinar o programa com outros métodos da Análise Numérica, a saber, Método das Diferenças Finitas e dos Elementos de Contorno, para viabilizar variadas formas de análise em engenharia, usando os atributos de cada técnica.

j) Estudar a Análise de Erros de Discretização para Problemas Tri-Dimensionais de Elasticidade com o propósito de criar um estimador de erro a posteriori computacional e matematicamente simples que possa ser usado para projetar adaptativamente a malha ótima.

k) Otimizar as integrações numéricas para o cômputo do indicador de erro, para acelerar a análise adaptativa. Uma quadratura de Gauss-Legendre usa três pontos em cada direção, perfazendo um total de 27 pontos de integração, ou seja, exatidão de sexta ordem.

l) Construir um Gerador de Malhas Tridimensionais com o módulo de refinamento-h do hexaedro.

m) Extender o programa para realizar a Análise h-p Adaptativa Tridimensional.

# BIBLIOGRAFIA


**1.** Courant, R. - Variational Methods for The Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations, Bulletin of The American Mathematical Society, Vol. 49, pp. 1-23(1943).

**2.** Levy, S. - Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings. - Journal for Aerospace Science, Vol. 20, Nº·7, pp. 449-454(1953).

**3.** Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis. - Jonh Wiley & Sons, Inc., 3rd Edition, New York(1989).

**4.** Johnson, C. - Numerical Solution of Partial Differential Equations by Finite Element Method. - Studentlitteratur, Lund, 4th Edition, Sweden(1992).

**5.** Babuska, I. and Rheinboldt, W. C. - Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations. - SIAM Journal Numerical Analysis, Vol. 15, Nº·4, pp. 736-754(1978).

**6.** Lyra, P. R. M. - Uma Estratégia de Refinamento Auto-Adaptativo versão h do Método dos Elementos Finitos Aplicada à Problemas Bi-Dimensionais Regidos pela Equação de Campo, Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro(1988).

**7.** Devloo, P. R. - A Three-Dimensional Adaptive Finite Element Strategy. - Computers & Structures, Vol. 38, Nº· 2, pp. 121-130(1991).

**8.** Watson, A. S. and Anumba, C. J. - The Need for an Integrated 2D/3D CAD System in Structural Engineering. - Computers & Structures, Vol. 41, Nº· 6, pp. 1175-1182(1991).

**9.** Lo, S. H. - Visualization of 3D Solid Finite Element Mesh by The Method of Sectioning. - Computers & Structures, Vol. 35, Nº. 1, pp. 63-68(1990).

**10.** Marques, M. J. M. B., and Martins, P. A. F. - Three-Dimensional Finite Element Contact Algorithm for Metal Forming. - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, pp. 1341-1354(1990).

**11.** Chen, W. -H. and Yeh, J. -T. - Three-Dimensional Finite Element Analysis of Static and Dynamic Contact Problems with Friction. - Computers & Structures, Vol. 35, Nº. 5, pp. 541-552(1990).

**12.** Rashid, Y. R. and Rockenhauser, W. - Pressure Vessel Analysis by Finite Element Techniques. - Proc. Conf. on Prestressed Concrete Pressure Vessels, The Institution of Civil Engineers, London, 1968.

**13.** Surana, K. S. and Teong, K. W. - A Twenty-Seven-Node Three-Dimensional Solid Element for Heat Conduction Based on p-Version. - Computers & Structures, Vol. 41, Nº. 5, pp. 897-907(1991).

**14.** Fitzssimons, C. J., Miller, J. J. H., Wang, S. and Wu, C. H. - Hexaedral Finite Elements for The Stationary Semiconductor Device Equations. - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 84, pp. 43-57(1990).

**15.** Kallinderis, Y. and Vijayan, P. - Adaptive Refinement-Coarsening Scheme for Three-Dimensional Unstructured Meshes. - American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol. 31. Nº. 8, August 1993.

**16.** Bedrosian, G. - Shape Functions and Integration Formulas for Three-Dimensional Finite Element Analysis. - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 35, pp. 95-108(1992).

**17.** Viladkar, M. N., Godbole, P. N. and Noorzaei, J. - Some New Three-Dimensional Infinite Elements. - Computers & Structures, Vol. 34, Nº. 3, pp. 455-467(1990).

**18.** Martins, P. A. F. and Marques, M. J. M. B. - MODEL3 - A Three-Dimensional Mesh Generator. - Computers & Structures, Vol. 42, Nº 4, pp. 511-529(1992).

**19.** Hughes, T. J. R. - The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic finite Element Analysis. - Prentice-Hall International Editions, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey(1987).

**20.** Zienkiewcz, O. C. and Taylor, R. L. - The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems. - McGraw-Hill International Editions, 4th Edition, London(1989).

**21.** Irons, B. M. - Quadrature Rules for Brick Based on Finite Elements. - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pp. 293-294(1971).

**22.** Ohtsubo, H. and Kitamura, M. - Element by Element a Posteriori Error Estimation of The Finite Element Analysis for Three-Dimensional Elastic Problems. - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, pp. 1755-1769(1992).

**23.** Babuska, I. and Rheinboldt, W. C. - A-Posteriori Error Estimates for The Finite Element Method. - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, pp. 1597-1615(1978).

**24.** Szabó, B. and Babuska, I. - Finite Element Analysis. - John Wiley & Sons, Inc., New York(1991).

**25.** Oden, J. T., Demkowicz, L., Rachowicz, W. and Watermann, T. A. - Towards a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part II: A Posteriori Error Estimation. - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 77, pp. 113-180(1989).

**26.** Ainsworth, M., Zhu, J. Z., Craig, A. W. and Zienkiewicz, O. C. - Analysis of The Zienkiewz-Zhu a-posteriori Error Estimator in The Finite

Element Method. - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp. 2161-2174(1989).

**27.** Ainsworth, M. and Oden, J. T. - A Procedure for a Posteriori Error Estimation for h-p Finite Element Methods. - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 101, pp. 73-96(1992).

**28.** Zhu, J. Z. and Zienkiewicz, O. C. - A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engeneering Analysis. - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 337-357(1987).

**29.** Ewing, R. E. - A Posteriori Error Estimation. - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 82, pp. 59-72(1990).

**30.** Ribeiro, F. L. B. - Estratégia H-P de Refinamento para o Método dos Elementos Finitos, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro(1991).

**31.** Ribeiro, F. L. B. and Landau, L. - An h-Refinement Method for Transient Problems Using Triangular Finite Elements. Department of Civil Engineering, COPPE/Federal University of Rio de Janeiro (1994).

**32.** Chang, K. -H. and Choi, K. K. - An Error Analysis and Mesh Adaptation Method for Shape Design of Structural Components. - Computers & Structures, Vol. 44, Nº 6, pp. 1275-1289(1992).

**33.** Löhner, R. and Baum, J. D. - Adaptive h-Refinement on 3-D Unstructured Grids for Transient Problems. - International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 14, pp. 1407-1419(1992).

**34.** Schroeder, W. J. and Shephard, M. S. - A Combined Octree/Delaunay Method for Fully Automatic 3-D Mesh Generation. - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, pp. 37-55(1990).

**35.** Duff, J. S., Erisman, A. M. & Reid, J. K. - Monographs on Numerical Analysis: Direct Methods for Sparse Matrices. - Oxford Science Publications, Oxford University Press, New York(1986).

**36.** Devloo, P. R. B. - An H-P Adaptive Finite Element Method for Steady Compressible Flow, Ph. D. Thesis, University of Texas, Austin(1987).

**37.** Courant, R. & Hilbert, D. - Methods of Mathematical Physics. - John Wiley & Sons, 1st English Edition, Vol. I, New York(1953).

**38.** Hughes,T. J. R., Levit, I. & Winget, J. - An Element-by-Element Solution Algorithm for Problems of Strutural and Solid Mechanics. - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 36, pp. 241-254(1983).

**39.** Hestenes, M. R. & Stiefel, E. - Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. - J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B., Vol. 49, pp 409-436(1952).

**40.** Axelsson, O. & Barker, V. A. - Finite Element Solution of Boundary value Problems: Theory and Computation. - United Kingdom Edition, Academic Press, Inc., Florida, U.S.A. (1984).

**41.** Golub, G. H. & Van Loan, C. F. - Matrix Computations. - The Johns Hopkins University Press, 5th printing, Baltimore, Maryland(1987).

**42.** Timoshenko, S. P. & Goodier, J. N. - Teoria da Elasticidade. - Editora Guanabara Dois S. A., 3ª. Edição, Rio de Janeiro(1980).