COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E DOS ELEMENTOS FINITOS: APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE POTENCIAL

Eduardo Marques

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Webe João Mansur
(Presidente)

Prof. Luiz Carlos Wrobel

Prof. José Cláudio de Faria Telles

Prof. Luiz Eloy Vaz

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1986

MARQUES, EDUARDO

Combinação dos Métodos dos Elementos de Contorno e dos Elementos Finitos: Aplicação a Problemas de Potencial (Rio de Janeiro, 1986).

viii, 158p., 29,7cm (COPPE/UFRJ), M.Sc., Engenharia Civil, 1986).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Elemento de Contorno. I. COPPE/UFRJ II. Título(série).

À minha mãe

Ao meu avô Fortunato.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Webe João Mansur pelo seu inesgotável esforço em desenvolver o melhor trabalho, conseguindo aliar uma orientação impecável, uma dedicação incansável e uma amizade sem igual.

Ao Eng. Heitor Augusto de Araújo Filho pelo apoio técnico e científico.

Ao Prof. Agustin Juan Ferrante, pelo apoio na área de Elementos Finitos.

Aos Profs. Eduardo C. S. Thomaz e Nelson Szilard Galgoul pelo incentivo dedicado durante a elaboração deste trabalho.

Aos Colegas Amorim, Ayabe, Martius, Lena, Marcio, Marta, Pontes, Santiago e Teresa pelo incentivo e auxílio prestados.

Ao meu irmão José Antonio pelo apoio dedicado à apresentação deste trabalho.

À Eliana pela impecável datilografia.

Ao Gilberto pela confecção dos desenhos.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E DOS ELEMENTOS FINITOS: APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE POTENCIAL

Eduardo Marques

Dezembro, 1986

Orientador: Prof. Webe João Mansur
Programa: Engenharia Civil

RESUMO

O presente trabalho procura desenvolver uma metodologia computacional para a resolução de estruturas que envolvam malhas compostas por elementos finitos e/ou elementos de contorno em problemas de potencial.

Apresentam-se estudos comparativos sobre os principais métodos desenvolvidos para tratamento de descontinuidades físicas e geométricas inerentes a malhas de elementos de contorno.

A seguir, colocam-se dois enfoques para a formação da matriz global: um a partir da matriz obtida com o Métodos dos Elementos Finitos e outro a partir daquela oriunda do Método dos Elementos de Contorno.

São então analisados alguns aspectos associados à Simetrização da matriz global, bem como à resolução do sistema de equações formado.

Por fim, exemplos comparativos são elaborados no sentido de se verificar a eficiência dos procedimentos mostrados até então.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

COUPLING OF THE FINITE ELEMENT METHOD AND THE BOUNDARY ELEMENT METHOD: AN APPLICATION TO POTENTIAL PROBLEMS

Eduardo Marques

December, 1986

Chairman: Prof. Webe João Mansur
Department: Civil Engineering

ABSTRACT

The present work is concerned with the development of computational procedures for numerical analysis in which it is advantageous using Boundary Elements and Finite Elements for solving potential problems.

The main procedures employed so far to deal with phisical and geometrical descontinuities in Boundary Element analysis are studied.

Two approaches are studied to form the complete global matrix combining the FEM and BEM: one obtainning an equivalent matrix from the Boundary Element matrices and another by the condensation of the Finite Element Matrix on the boundary nodes.

It is also presented a discussion concerning some aspects of Symmetrization of the Global Matrix obtained with the BEM and the resolution of the final system of equations.

Finally, comparative examples are presented aimming to check the eficiency of the procedures discussed.

ÍNDICE

PÁGINA

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

I.1 - Descrição Histórico-Bibliográfica 1

I.2 - Apresentação do Escopo da Tese 4

CAPÍTULO II - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS DE POTENCIAL 6

CAPÍTULO III - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A PROBLEMAS DE POTENCIAL 14

CAPÍTULO IV - ASPECTOS ESPECÍFICOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO 21

IV.1 - Discretização do Contorno 21

IV.1.1 - Elementos Constantes 22

IV.1.1.1 - Método da Colocação 22

IV.1.1.2 - Método de Galerkin 24

IV.1.2 - Elementos Lineares 25

IV.1.2.1 - Método da Colocação 25

IV.1.2.2 - Método de Galerkin 27

IV.2 - Problemas Motivados por Descontinuidades Geométricas e Físicas 28

IV.2.1 - Soluções Utilizando o Método da Colocação 34

IV.2.1.1 - Elemento Não Conforme 34

IV.2.1.2 - Elemento Interpolado 40

IV.2.1.3 - Tratamento Geométrico 48

IV.2.2 - Solução Utilizando o Método de Galerkin 54

CAPÍTULO V - COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS (MEF + MEC) 63

V.1 - Formação da Matriz de Potencial Equivalente 63

V.1.1 - Condensação da Matriz de Potencial Obtida com o Método dos Elementos Finitos 64

V.1.2 - Obtenção da Matriz de Potencial Equivalente com o Método dos Elementos de Contorno 66

V.2 - Obtenção da Solução para Pontos Internos do Domínio 67

V.3 - Comentários sobre os "Solvers" Envolvidos e sobre a Simetrização da Matriz Global .....

CAPÍTULO VI - DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS IMPLEMENTADOS .. 73

CAPÍTULO VII - ANÁLISE DE RESULTADOS E COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS CONSIDERADOS PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DESCONTINUIDADES 80

VII.1 - Comparação dos 3 Métodos da Colocação, tomando malhas formadas apenas por elementos de Contorno 83

VII.2 - Comparação dos 3 Métodos de Colocação, tomando malhas Compostas por Elementos Finitos e de Contorno 99

VII.3 - Comparação dos Resultados dos Métodos da Colocação com aqueles obtidos com o Método de Galerkin 130

CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES 140

APÊNDICE I - Montagem das Matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$ no Método do Elemento Interpolado - Exemplo 144

APÊNDICE II - Correção da Matriz $\underset{\sim}{H}$ devido a Descontinuidades Geométricas e de Fluxo, usando o Tratamento Geométrico - Exemplo 148

APÊNDICE III - Matrizes de Interpolação ($\underset{\sim}{M}$) 151

APÊNDICE IV - Implementação da Prescrição de Potencial - Exemplo 152

APÊNDICE V - Cálculo da Matriz de Interpolação $\underset{\sim}{M}$ para o Elemento Não Conforme 154

REFERÊNCIAS 157

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - DESCRIÇÃO HISTÓRICO-BIBLIOGRÁFICA

Há muito se vem desenvolvendo a idéia de se combinarem os 2 principais métodos numéricos: o método dos elementos de contorno e dos elementos finitos.

Sabe-se bem das facilidades e limitações que cada um oferece e, portanto, torna-se necessário que se possibilite fazer com que os dois métodos se desenvolvam à mesma proporção.

Este trabalho se destina exatamente a apresentar os problemas e as vantagens de um "software" que combine o MEC e o MEF, além de procurar de forma definitiva resolver alguns aspectos relativos a descontinuidades físicas ou geométricas.

São muitas as aplicações em que se torna notória a vantagem da combinação que ora se apresenta, entre as quais:

- No âmbito de problemas de campo (potencial):

. Fluxo de temperatura
. Proteção Catódica em Estruturas off-shore
. Fluxo de um líquido sobre uma estrutura

- No âmbito de elastostática

. Interação solo-estrutura: Sabe-se que uma malha de elementos de contorno modela de forma muito simples o solo, como meio infinito ou semi-infinito.

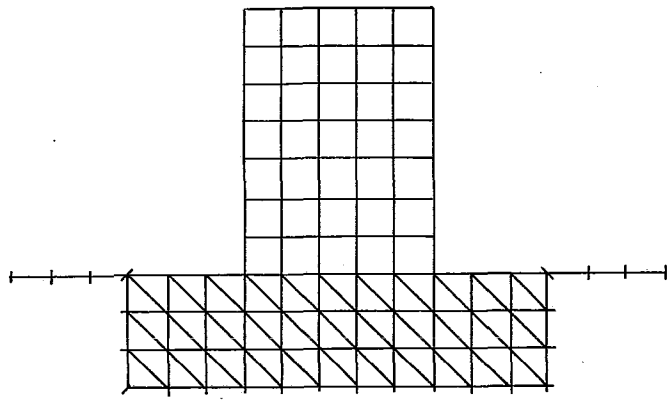


Fig. I.1 - Interação Solo - Estrutura com Malha Conjugada

- No âmbito de Elastodinâmica

. Análise de cravabilidade de estacas, utilizando, por exemplo a equação da onda de Smith.

. Solicitação periódica de estacas.

Com o intuito de introduzir alguns conceitos acerca da combinação dos dois métodos, Brebbia |1| apresenta a obtenção da matriz equivalente a do Método dos Elementos Finitos a partir daquelas oriundas do Método dos Elementos de Contorno. Este procedimento foi então desenvolvido por Brebbia, Telles, Wrobel em |2|.

Neste trabalho, com base no que se coloca por GEORGIOU |10| se mostra tanto o procedimento acima, quanto aquele em que se obtém a Matriz Global por condensação da Matriz calculada

pelo MEF.

O Método dos Elementos Finitos, sendo há mais tempo estudado e portanto mais difundido possui já uma grande gama de processos e técnicas para a resolução dos problemas que se apresentam em sua implementação.

Para o Método dos Elementos de Contorno, encontram-se ainda em pesquisa soluções para algumas dificuldades a ele inerentes, tais como:

- problemas de descontinuidade física e geométrica ("problemas de canto");
- formação de uma matriz não simétrica e cheia, o que não permite a utilização direta dos algoritmos até então desenvolvidos para resolução de sistemas simétricos e em banda;
- dificuldade de se obterem soluções fundamentais para problemas de meios cujas propriedades físicas variam de ponto para ponto (meios não homogêneos).

Em contraste a esta última propriedade, o MEF se apresenta com sucesso para a discretização de meios não homogêneos, uma vez que pode acomodar coeficientes físicos a variações espaciais por meio de aproximações polinomiais, com pequenos elementos.

Por outro lado, quando se trata de imersões em meios isotrópicos ou infinitos e semi-infinitos, o MEC mostra resultados bem mais precisos, envolvendo menor número de elementos, e, portanto, com menor custo operacional (para modelagem da estru-

tura) e computacional (para a resolução da mesma).

Quanto ao "problema de canto", PATTERSON |8| apresenta a introdução de um elemento não conforme que faz afastar o ponto fonte do canto crítico, por extrapolação de valores da função de interpolação no elemento.

Por outro lado, MUSTOE |6| indica para problemas de elasticidade o também afastamento do ponto fonte, desta vez, mantendo intacta a função de interpolação.

Finalmente RUDOLPHI |7| aplica um tratamento geométrico para o problema não deslocando o ponto fonte, mas valendo-se da própria geometria da descontinuidade.

Em se tratando das características da matriz formada (não simétrica e cheia), AMORIM |5| estudou duas alternativas para resolver problemas da elasticidade com o método dos elementos de contorno e dos elementos finitos combinados. A conclusão daquele trabalho é que utilizando-se colocação com procedimento indicado GEORGIOU |10| para considerar descontinuidades de fluxo, bons resultados são obtidos quando não se simetriza a matriz do MEC. A simetrização leva a resultados pobres. O método de Galerkin também foi testado, no trabalho de AMORIM onde pode-se verificar que para este caso simetrizar ou não leva ao mesmo resultado.

1.2 - APRESENTAÇÃO DO ESCOPO DA TESE

A fim de desenvolver sentimento na combinação dos métodos, procurou-se com este trabalho, resolvendo problemas de campo, criar um embasamento físico e, mormente computacional que

possibilite a implementação das soluções já consagradas para elastostática e elastodinâmica lineares (e, eventualmente não lineares), para 2 ou 3 dimensões.

Os capítulos 2 e 3 apresentam respectivamente as formulações do método dos elementos de contorno e elementos finitos para a resolução de problemas de Campo.

No capítulo 4 encontram-se descritos os Métodos da Colocação e de Galerkin para a integração no contorno de elementos constantes e lineares (ÍTEM 4.1). O ítem 4.2 apresenta os tratamentos dados aos problemas de canto já indicados no ítem 1.1: os procedimentos associados ao Método da Colocação (elemento não conforme, elemento interpolado e tratamento geométrico) e ao Método de Galerkin.

O capítulo 5 encerra os critérios utilizados matemática e computacionalmente para a combinação dos métodos. Encontra-se também um estudo sobre a resolução do sistema formado, composto por uma matriz contendo uma parte simétrica e em banda e outra assimétrica e cheia.

Os programas de computador implementados para as análises descritas nos capítulos 4 e 5 são comentados no capítulo 6.

Finalmente, o capítulo 7 contém exemplos comparativos e análise de resultados para os diversos procedimentos utilizados.

Em anexo, apresentam-se as referências bibliográficas e alguns apêndices elucidativos sobre a teoria utilizada ao longo do trabalho.

CAPÍTULO II

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS DE POTENCIAL

A equação de Laplace extendida apresenta-se como uma das que governam alguns dos problemas de campo e pode ser apresentada como da forma abaixo:

$$\nabla^2 u + \lambda u = c \qquad \text{(II.1)}$$

ou, de forma mais geral,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(hx \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(hy \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda u = c \qquad \text{(II.2)}$$

para domínio Ω (ver fig. II.1) cujo contorno pode ser dividido em duas partes:

. $\Gamma_u \rightarrow \overline{u}$ prescrito (condições de contorno essenciais)

. $\Gamma_q \rightarrow \overline{q}$ prescrito (condições de contorno naturais)

sendo $q = \partial u / \partial \eta$

Por simplificação: pode-se tomar $hx = hy = 1$ e $\lambda = c = 0$, ficando-se portanto, com a Equação de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \text{(II.3)}$$

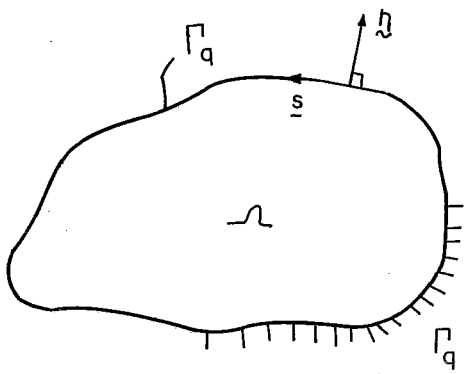


Fig. II.1 - Definição do Domino Ω e dos Contornos Γu e Γq

Para a formulação da equação integral associada à expressão (II.3) pode-se utilizar do Método dos Resíduos ponderados (Referências |1| e |2|) através da função peso u*, que nos fornece:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* \, d\Omega = \int_{\Gamma_q} (q-\bar{q}) u^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u-\bar{u}) q^* \, d\Gamma \qquad (II.4)$$

onde: $q^* = \dfrac{\partial u^*}{\partial n}$

Integrando por partes 2 vezes o termo da esquerda e operando conforme indicado na Ref. |2|, chega-se a:

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 u^*) d\Omega = - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \, u^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} q \, u^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_q} u \, q^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u} \, q^* \, d\Gamma \qquad (II.5)$$

Se supusermos uma fonte concentrada em um ponto 'ζ', a equação de Laplace mostrada acima se torna:

$$\nabla^2 u^*(\zeta; x) + \Delta(\zeta; x) = 0 \qquad \text{(II.6)}$$

onde: $\Delta(\zeta; x)$ é a função Delta de DIRAC que assume os seguintes valores:

$$\Delta(\zeta; x) = 0 \quad , \quad \text{para} \quad \zeta \neq x$$

$$\Delta(\zeta; x) = \infty \quad , \quad \text{para} \quad \zeta = x$$

Resolvendo-se a equação (II.6) para um domínio infinito, obtém-se $u^*(\zeta; x)$ que é denominada SOLUÇÃO FUNDAMENTAL.

Desta forma, temos:

$\int_\Omega u(\nabla^2 u^* + \Delta i)d\Omega = \int_\Omega u\ \nabla^2 u^*\ d\Omega + u^i$, o que, para satisfazer a equação (II.6) se torna:

$$\int_\Omega u(\nabla^2 u^*)\ d\Omega = -u^i \qquad \text{(II.7)}$$

Aplicando a exp. (II.7) em (II.5), ficamos com:

$$u(\zeta) + \int_{\Gamma_q} u(x)q^*(\zeta;x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_u} \overline{u}(x)q^*(\zeta;x)d\Gamma(x) =$$

$$= \int_{\Gamma_q} \overline{q}(x)u^*(\zeta;x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_u} q(x)u^*(\zeta;x)d\Gamma(x) \qquad \text{(II.8)}$$

Ou, observando que $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$:

$$u + \int_{\Gamma} u\, q^*\, d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*\, q\, d\Gamma \qquad (II.9)$$

Demonstra-se que, para um meio isotrópico, as soluções fundamentais são:

- Para 3-D (TRIDIMENSIONAL): $u^* = \frac{1}{4\pi r}$ (II.10)

- Para 2-D (BIDIMENSIONAL): $u^* = \frac{1}{2\pi} \ell n \left(\frac{1}{r}\right)$

onde r é a distância do ponto campo x ao ponto fonte (ζ), onde é aplicada uma fonte concentrada.

A equação (II.8) permite obter a solução $u(\zeta)$ para um ponto ζ do domínio.

A expressão que permite calcular u para pontos do contorno pode ser obtida conforme mostrado na Ref. |1| e é dada por:

$$C(\zeta)\, u(\zeta) + \int_{\Gamma} u(x) q^*(\zeta;x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) u^*(\zeta;x) d\Gamma(x) \qquad (II.11)$$

onde $\zeta \in \Gamma$.

A função $C(\xi)$ é dependente da posição de ξ e, considerando pontos pertencentes ou não ao contorno, pode ser dada como se mostra a seguir.

. Para ζ pertencente a um contorno suave, $C(\zeta) = 1/2$;

. Para ζ interior ao domínio, $C(\zeta) = 1$, o que reproduz a equação (II.9);

. Para ζ exterior ao domínio, $C(\zeta) = 0$.

Com o objetivo de proceder à análise numérica, o contorno é dividido em elementos, interligados por nós onde se interpolam os valores do potencial u e do fluxo q.

De acordo com a função de interpolação utilizada, temos os nós funcionais coincidentes ou não com os nós geométricos, conforme se observa pelas figuras seguintes.

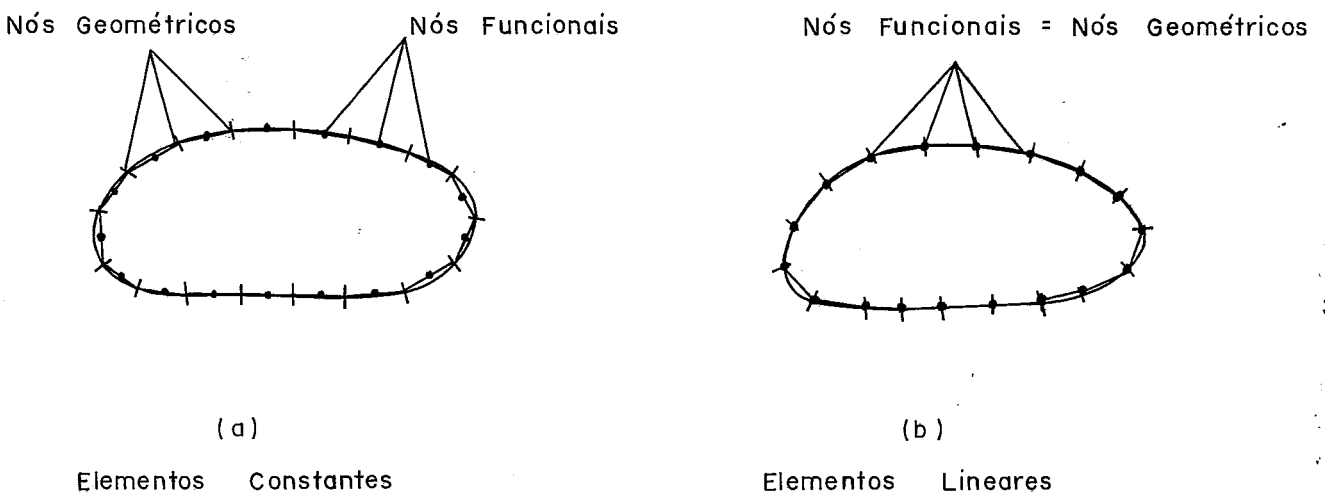


Fig. II.2 - Discretização do Contorno em Elementos Bi-Dimensionais

Passamos então a expressar as integrais indicadas na equação (II.11) em forma de somatórios da contribuição de cada elemento discreto:

$$C_i(\zeta)u_i(\zeta) + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} u_j(x)q^*(\zeta;x)d\Gamma(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} q_j(x)u^*(\zeta;x)d\Gamma(x) \tag{II.12}$$

sendo m o número de elementos nos quais o contorno é discretizado.

Os valores de $u_j(x)$ e $q_j(x)$ e as coordenadas cartesianas x_i^j no interior de um elemento j são aproximados através de funções de interpolação $N^k(x)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_j &= \underset{\sim}{N}(x)\ \underset{\sim}{u}_j(x) \\ q_j &= \underset{\sim}{N}(x)\ \underset{\sim}{q}_j(x) \\ x_i{}^j &= \underset{\sim}{N}(x)\ x_i^j(x) \end{aligned} \tag{II.13}$$

Escreve-se então a eq. (II.12) para ζ pertencente a um elemento i, da seguinte forma:

$$C_i(\zeta)\ \underset{\sim}{N}(\zeta)\ u_i + \sum_{j=1}^{m} u_j \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{N}(\zeta)q^*(\zeta;x)d\Gamma(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} q_j \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{N}(\zeta)u^*(\zeta;x)d\Gamma(x) \tag{II.14}$$

Convém que se opere uma mudança de variáveis, utilizando coordenadas intrínsecas ao elemento ao invés de cartesianas, conforme se acha esquematizado a seguir:

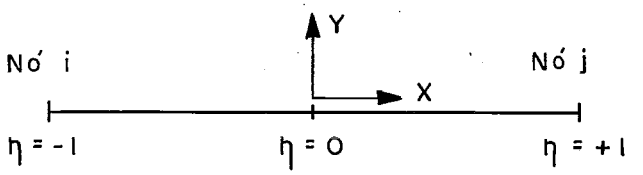


Fig. II.3 – Coordenadas Intrinsecas

Para isso, devemos fazer a transformação:

$$d\Gamma(x) = |\underset{\sim}{J}|\, d\eta \qquad (II.15)$$

onde $|\underset{\sim}{J}|$ é o jacobiano da transformação, ou seja:

$$|\underset{\sim}{J}| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \qquad (II.16)$$

Desta forma, a expressão (II.14) passa a se apresentar da forma abaixo:

$$C_i(\eta)\underset{\sim}{N}(\eta)u_i + \sum_{j=1}^{m} u_j \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{N}(\eta)q^*(\zeta;x)\,|J|\,d\eta =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} q_j \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{N}(\eta)u^*(\zeta;x)\,|J|\,d\eta \qquad (II.17)$$

Com o intuito de se formar um sistema de equações lineares, aplica-se o Método dos resíduos ponderados, utilizando a função de ponderação $W^{\ell}(\zeta)$, obtendo-se:

$$\int_{\Gamma(\zeta)} W^{\ell}(\zeta)\left[C_i(\eta)\underset{\sim}{N}(\eta)u_i\right]d\Gamma(\zeta) + \sum_{j=1}^{m} u_j \int_{\Gamma} W^{\ell}(\zeta)\left[\int_{-1}^{1} \underset{\sim}{N}(\eta)q^*(\zeta;x)|\underset{\sim}{J}|d\eta\right]d\Gamma(\zeta) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} q_j \int_{\Gamma} W^{\ell}(\zeta)\left[\int_{-1}^{1} \underset{\sim}{N}(\eta)u^*(\zeta;x)|\underset{\sim}{J}|d\eta\right]d\Gamma(\zeta) \qquad \text{(II.18)}$$

CAPÍTULO III

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A PROBLEMAS DE POTENCIAL

A expressão (II.2) pode ser escrita utilizando resíduos ponderados e adotando as simplificações a ela impostas em (II.3) conforme se apresenta à Ref. |3|, da forma abaixo:

$$\iint \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}(\delta u) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}(\delta u) \right\} dx\, dy = \int_{\Gamma_q} \overline{q}\, \delta u\, d\Gamma \qquad \text{(III.1)}$$

Se adotarmos uma discretização do domínio em elementos triangulares como mostra a figura III.1 de tal forma que possamos expressar o potencial pela expressão:

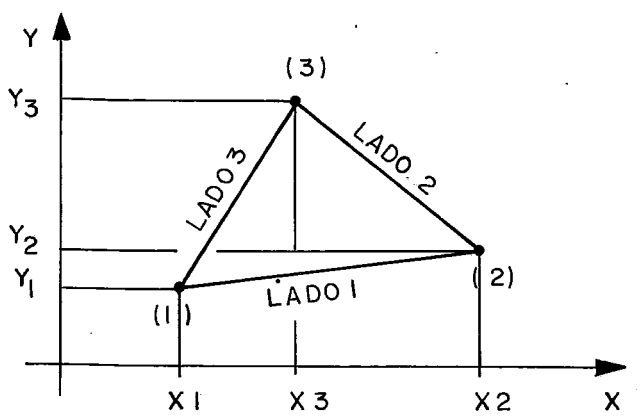


Fig. III.1 – Elementos Triangulares Simples

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \qquad \text{(III.2)}$$

(elemento triangular simples)

encontramos: $\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_3$, $\frac{\partial}{\partial x}(\delta u) = \delta \alpha_2$,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\delta u) = \delta \alpha_3$$

Passamos assim a ter, em forma matricial:

$$\iint \{\alpha_2 \ \delta\alpha_2 + \alpha_3 \ \delta\alpha_3\} dx \ dy = A \ \{\delta\alpha_1 \ \delta\alpha_2 \ \delta\alpha_3\} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\underset{\sim}{H}} \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(III.3)}$$

onde $\underline{A}$ é área do elemento discreto.

Como se procura calcular as incógnitas no interior do elemento, em função das obtidas nos nós do elemento, pode-se utilizar da exp. (III.4)

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(III.4)}$$

ou seja: $\underset{\sim}{U}^e = \underset{\sim}{C}' \ \underset{\sim}{\alpha}$

onde C' é a matriz contendo as coordenadas x e y dos nós que definem cada elemento.

A inversa da matriz C' nos fornece a relação entre $\underset{\sim}{\alpha}_i$ e $\underset{\sim}{U}^e$, como se mostra a seguir:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \underset{\sim}{U}^e = \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{U}^e \qquad \text{(III.5)}$$

onde:

$$C_{11} = (x_2y_3 - x_3y_2)/\Delta$$

$$C_{12} = (x_3y_1 - x_1y_3)/\Delta$$

$$C_{13} = (x_1y_2 - x_2y_1)/\Delta$$

$$C_{21} = (y_2y_3)/\Delta$$

$$C_{22} = (y_3 - y_1)/\Delta$$

$$C_{23} = (y_1 - y_2)/\Delta$$

$$C_{31} = (x_3 - x_2)/\Delta$$

$$C_{32} = (x_1 - x_3)/\Delta$$

$$C_{33} = (x_2 - x_1)/\Delta$$

$$\Delta = (x_2y_3 + x_1y_2 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_1y_3 + y_2x_3) = 2A$$

O termo da direita da equação (III.3) pode ser então escrito da forma:

$$\delta\underset{\sim}{\alpha}^T \underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{\alpha} = \delta(\underset{\sim}{U}^e)^T(\underset{\sim}{C}^T\ \underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{C})\underset{\sim}{U}^e = \delta(\underset{\sim}{U}^e)^T\ \underset{\sim}{k}^e\underset{\sim}{U}^e \qquad \text{(III.6)}$$

Desta forma fica expresso em termos matriciais o lado esquerdo da eq. (III.1). O lado direito da mesma se refere ao contorno Γ_q. Supondo um elemento em que o lado 2-3 tenha $\bar{q}$ prescrito

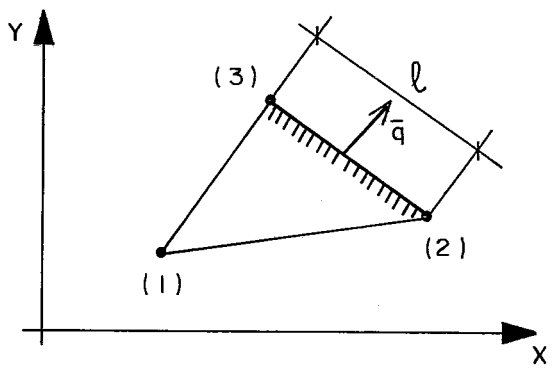


Fig. III.2 – Prescrição de Fluxo Distribuido ao Longo da Face 2 do Elemento

Podemos assim expressar a prescrição, da forma:

$$\int_{(2)}^{(3)} \bar{q}\ \delta u\ \delta\Gamma = \bar{q}\ \left(\frac{\ell}{2}\ \delta u_2 + \frac{\ell}{2}\ \delta u_3\right) = \delta(\underset{\sim}{U}^e)^T\ \underset{\sim}{P}^e \qquad \text{(III.3)}$$

onde $\underset{\sim}{P}^e$ é o fluxo equivalente nodal, ou seja,

$$\underset{\sim}{P}^e = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \frac{\ell}{2}\ \bar{q}$$

A expressão (III.1) fica matricialmente expressa por:

$$\delta \underset{\sim}{U}^{e,T} \underset{\approx}{k}^{e} \underset{\sim}{U}^{\ell} \quad ' \quad = \delta \underset{\sim}{U}^{e,T} \underset{}{p}^{e}$$

ou:

$$\underset{\sim}{k}^{e} \underset{\sim}{U}^{e} = \underset{\sim}{P}^{e} \qquad \text{(III.8)}$$

A fim de simplificar o cálculo das funções de interpolação, é conveniente expressá-las em coordenadas naturais ou triangulares, $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, dividindo o elemento em 3 triângulos de áreas A_1, A_2 e A_3 $(A_1 + A_2 + A_3 = A)$, tal que:

$$\zeta_1 = \frac{A_1}{A}, \quad \zeta_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \zeta_3 = \frac{A_3}{A}$$

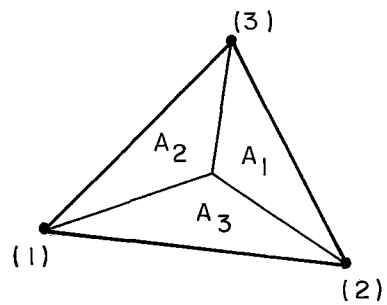


Fig. III.3 – Áreas Discretas para Cálculo das Coordenadas Intrinsecas

As relações das coordenadas intrínsecas com as cartesianas são as seguintes:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2A}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2A}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \zeta_3 = \frac{1}{2A}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

ou seja:

$$\zeta_1 = \frac{1}{2A}\Big|\overset{C_{11}}{(x_2y_3 - y_2x_3)} + \overset{C_{12}}{x(y_2 - y_3)} + \overset{C_{13}}{y(x_3 - x_2)}\Big|$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2A}\Big|\overset{C_{21}}{(x_3y_1 - x_1y_3)} + \overset{C_{22}}{x(y_3 - y_1)} + \overset{C_{23}}{y(x_1 - x_3)}\Big|$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{2A}\Big|\overset{C_{31}}{(x_1y_2 - x_2y_1)} + \overset{C_{32}}{x(y_1 - y_2)} + \overset{C_{33}}{y(x_2 - x_1)}\Big|$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ x \\ y \end{vmatrix}$$

Se invertermos a matriz anterior, obtemos as coordenadas cartesianas em função das triangulares:

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 \\ x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{vmatrix}$$

CAPÍTULO IV

ASPECTOS ESPECÍFICOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

IV.1 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

A expressão (II.18) apresenta a equação geral que permite calcular incógnitas nodais a partir da discretização do contorno em elementos.

Conforme fora colocado anteriormente, as incógnitas no interior do elemento são aproximadas a partir daquelas calculadas nos nós de extremidade por meio de funções de interpolação que são em geral polinômios.

Em particular, neste trabalho, serão desenvolvidos os elementos constantes e os lineares. Nos primeiros, considera-se variação constante de u e p no interior do elemento. Nos segundos, adota-se uma distribuição linear.

Por outro lado, a mesma expressão (II.18) indica a introdução da função de ponderação $W^{\ell}(\xi)$. A diferente escolha desta nos leva a uma aproximação tipo colocação ou uma aproximação tipo Galerkin.

No método da colocação, toma-se para função de ponderação a função 'Delta de Dirac', com as particularidades apresentadas a seguir:

$$W^{\ell}(\zeta) = \Delta(\zeta^{\ell}, \zeta) \ , \quad \ell = 1, \ldots , m \qquad (IV.1.1)$$

onde ζ^{ℓ} são pontos selecionados no contorno, habitualmente coincidentes com os pontos nodais.

Assim, pela definição desta função já apresentada a priori, temos:

$$. \int f(\zeta;x)\ \Delta(\zeta^{\ell}, x)d\zeta = f(\zeta^{\ell}; x) \ ; \quad \zeta \in \Gamma$$

No método de Galerkin, toma-se para função de ponderação a própria função de interpolação, i.e.,

$$W^{\ell}(\zeta) = N^{\ell}(\zeta) \qquad (IV.1.2)$$

onde $N^{\ell}(\zeta) = 0$ se ζ não pertence ao elemento ℓ.

IV.1.1 - Elementos Constantes

IV.1.1.1 - Elementos Constantes pelo Método da Colocação

Se considerarmos, conforme definições anteriores:

i) $N(\eta) = 1$ (função de interpolação constante unitária)

ii) $W^{\ell}(\xi) = \Delta(\zeta^{\ell}, \zeta)$ (expressão IV.1.1)

iii) $|\underset{\sim}{J}| = \frac{L}{2}$ para elementos retilíneos (expressão (II.15))

L - comprimento do elemento.

Podemos escrever a eq. (II.18) da forma abaixo:

$$C_{\ell}(\zeta)u_{\ell} + \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{L_j}{2}\int_{-1}^{1} q^*(\zeta^{\ell},x)d\eta\right]u_j = \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{L_j}{2}\int_{-1}^{1} u^*(\zeta^{\ell},x)d\eta\right]q_j \qquad (IV.1.3)$$

Esta é a expressão geral para elementos constantes no Método da Colocação.

Para fins de implementação, escreveremos a expressão acima em forma matricial (Ref. |1|):

$$C_{\ell}(\zeta)u_{\ell} + \sum_{j=1}^{m} \hat{h}_{\ell j}\, u_j = \sum_{j=1}^{m} g_{\ell j}\, q_j \qquad (IV.1.4)$$

onde:

$$\hat{h}_{\ell j} = \frac{L_j}{2}\int_{-1}^{1} q^*(\zeta^{\ell},x)d\eta \qquad x \notin \Gamma_j$$

$$g_{\ell j} = \frac{L_j}{2}\int_{-1}^{1} u^*(\zeta^{\ell},x)d\eta$$

Quando ℓ varia de 1 a m (número de elementos) o seguinte sistema é obtido:

$$\underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G}\ \underset{\sim}{q} \qquad (IV.1.5)$$

onde:

$$h_{\ell j} = \hat{h}_{\ell j} \qquad \text{se} \quad \ell \neq j$$

$$h_{\ell j} = \hat{h}_{\ell j} + C_{\ell}, \quad \text{se} \quad \ell = j$$

Deve-se observar que $C_{\ell} = \frac{1}{2}$ se o contorno for suave, o que é o caso dos elementos constantes.

IV.1.1.2 - Elementos Constantes pelo Método de Galerkin

Tomando agora os parâmetros:

i) $N(\eta) = 1$

ii) $W^{\ell}(\zeta) = N^{\ell}(\eta) = 1 \quad , \eta \in \Gamma_{\ell}$

$W^{\ell}(\xi) = 0 \quad , \eta \notin \Gamma_{\ell}$

iii) $|\underset{\sim}{J}| = \frac{L}{2}$

Podemos escrever a eq. (II.18) como se segue (de acordo com Ref. |5|).

$$\int_{\Gamma_{\ell}} C_{\ell}(\eta') u_{\ell} \, d\Gamma_{\ell} + \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{L_j}{2} \int_{\Gamma_{\ell}} \int_{-1}^{1} q^*(\zeta;x) d\eta(x) d\Gamma(\zeta) \right| u_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{L_j}{2} \int_{\Gamma_{\ell}} \int_{-1}^{1} u^*(\zeta;x) d\eta(x) d\Gamma(\zeta) \right| q_j \qquad \text{(IV.1.6)}$$

Aplicando a mesma nomenclatura utilizada no ítem IV.1.1.1, podemos escrever:

$$\hat{h}_{\ell j} = \frac{L_j}{2} \int_{\Gamma_\ell} \int_{-1}^{1} u^*(\zeta;x)\, d\eta(x)\, d\Gamma(\zeta)$$

$$g_{\ell j} = \frac{L_j}{2} \int_{\Gamma_\ell} \int_{-1}^{1} q^*(\zeta;x)\, d\eta(x)\, d\Gamma(\zeta)$$

IV.1.2 - Elementos Lineares

IV.1.2.1 - Elementos Lineares pelo Método da Colocação

Se as funções de interpolação são lineares, o potencial e o fluxo são aproximados sobre um elemento como se apresenta à fig. IV.1, i.e.:

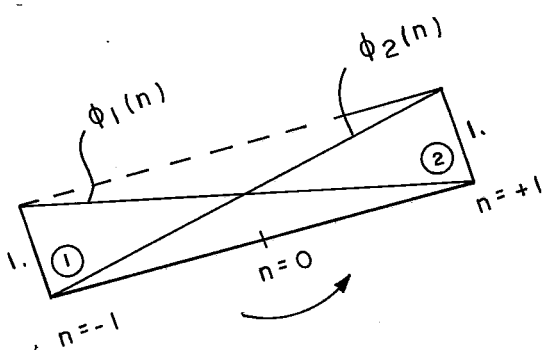


Fig. IV.1 - Funções de Interpolação Lineares

$$\underset{\sim}{N}(\eta) = |\phi_1(\eta) \quad \phi_2(\eta)|$$

ou seja:

$$u(\eta) = \phi_1(\eta)u_1 + \phi_2(\eta)u_2$$

$$q(\eta) = \phi_1(\eta)q_1 + \phi_2(\eta)q_2$$

sendo:

$$\phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

$$\phi_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

Aplicando estas funções de interpolação na exp. (II.8) e ainda considerando a função de ponderação $W(\zeta^{\ell}) = \Delta(\zeta^{\ell},\zeta)$ e o valor do Jacobiano $|\underset{\sim}{J}| = \frac{L}{2}$, obtêm-se:

$$C_{\ell}(\zeta)u_{\ell} + \sum_{j=1}^{m} \left| \int_{-1}^{1} \left| \phi_1(\eta) \quad \phi_2(\eta) \right| q^*(\zeta^{\ell},x)\,d\eta \right| \left| \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right|_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left| \int_{-1}^{1} \left| \phi_1(\eta) \quad \phi_2(\eta) \right| u^*(\zeta^{\ell},x)\,d\eta \right| \left| \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix} \right|_j \qquad \text{(IV.4.1.7)}$$

Utilizando a nomenclatura anterior, podemos escrever:

$$\tilde{h}_{\ell j} = \int_{-1}^{1} \phi_1(\eta) q_j^*(\zeta^\ell, x)\, d\eta$$

$$\tilde{h}_{\ell j+1} = \int_{-1}^{1} \phi_2(\eta) q_{j+1}^*(\zeta^\ell, x)\, d\eta$$

$$g_{ij} = \int_{-1}^{1} \phi_1(\eta) u_j^*(\zeta^\ell, x)\, d\eta$$

$$g_{ij+1} = \int_{-1}^{1} \phi_2(\eta) u_{j+1}^*(\zeta^\ell, x)\, d\eta$$

Da mesma forma, podemos escrever:

$$\underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G}\ \underset{\sim}{q}$$

Conforme já mostrado no ítem IV.1.1.1 (exp. IV.1.5).

IV.1.2.2 - Elementos Lineares pelo Método de Galerkin

Assumindo as funções:

$$- \underset{\sim}{N}(\eta) = \left| \phi_1(\eta) \quad \phi_2(\eta) \right|$$

$$- W^\ell(\zeta) = \underset{\sim}{N}^\ell(\zeta) = \left| \phi_1(\zeta) \quad \phi_2(\zeta) \right|, \quad \xi \in \Gamma_\ell$$

$$W^\ell(\xi) = 0 \qquad , \quad \xi \notin \Gamma_\ell$$

$$- |\underset{\sim}{J}| = \frac{L}{2}$$

Escrevemos a eq. (II.18) da forma abaixo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{L_\ell}{2}\, \underset{\sim}{N}_i(\eta)\, \{\frac{L_\ell}{2}\, \underset{\sim}{C}_\ell(\eta)\, \underset{\sim}{N}_\ell^T(\eta)\}\, d\eta\, u_\ell +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{-1}^{1} \frac{L_\ell}{2}\, \underset{\sim}{N}_\ell(\eta) \left| \int_{-1}^{1} \frac{L_j}{2}\, q^*(\zeta,x)\, \underset{\sim}{N}_j^T(\eta) d\eta \right| d\eta\, \underset{\sim}{u}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{-1}^{1} \frac{L_\ell}{2}\, \underset{\sim}{N}_\ell(\eta) \left| \int_{-1}^{1} \frac{L_j}{2}\, u^*(\zeta,x)\, \underset{\sim}{N}_j^T(\eta) d\eta \right| d\eta\, \underset{\sim}{q}_j$$

(IV.1.8)

Mais adiante (no ítem IV.2.2), esta expressão será tratada de forma mais explícita, sendo aí apresentado inclusive um enfoque matricial, voltado para implementação numérica.

IV.2 - PROBLEMAS MOTIVADOS POR DESCONTINUIDADES GEOMÉTRICAS E FÍSICAS

A idéia que se apresenta no Método dos Elementos Finitos é a de somar contribuições de cada elemento aos nós, tanto no que diz respeito à Matriz k, quanto ao fluxo q.

Portanto, não se sente de forma significativa o problema da descontinuidade geométrica ou física (de fluxo ou potencial), conforme se apresenta na figura IV.2.1.

A carga equivalente nodal na fig. IV.2.1 seria correspondente à soma das contribuições dos elementos 1 e 2.

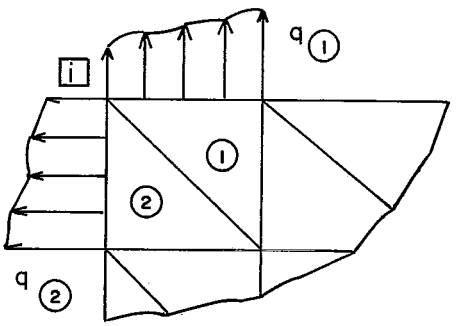


Fig. IV.2.1 – Fluxo Equivalente Nodal no M.E.F.

No Método dos Elementos de Contorno, os valores nodais são os assumidos por estas funções nos nós, ou seja, o valor nodal de $\underline{q}$ não representa (como no MEF) carga equivalente nodal. Desta forma, $\underline{q}$ pode assumir valores diferentes à esquerda e à direita de nós.

Estes valores tanto podem ser prescritos quanto causados por uma descontinuidade da normal ao contorno.

Conforme se observa à fig. IV.2.2, o fluxo é dependente do contorno na medida em que é obtido pela derivação do potencial com respeito à normal η

$$q = \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

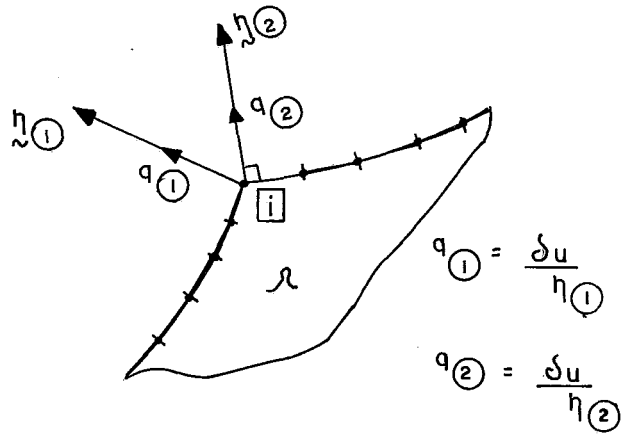


Fig. IV.2.2 – Fluxo Prescrito Nodal no M.E.C.

Se adotarmos uma malha com elementos de contorno constantes, o problema da descontinuidade não aparece, na medida em que o ponto fonte na verdade é colocado no ponto médio do elemento e, portanto, deslocado do canto ou da descontinuidade, conforme se observa à fig. IV.2.3.

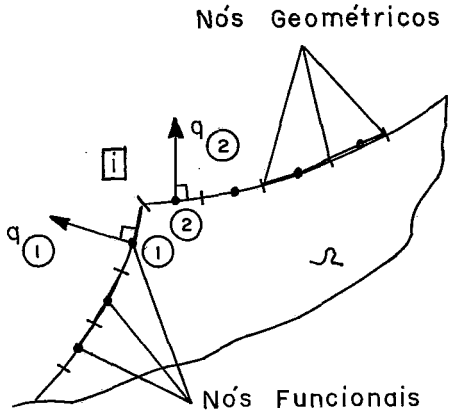


Fig. IV.2.3 – Fluxo em Nós Funcionais de Elementos Constantes

Para problemas de potencial envolvendo malhas apenas com elementos de contorno, os elementos constantes nos levam a bons resultados. No entanto, em se combinando estes com ele-

mentos finitos, os resultados se deterioram, na medida em que ocorre descontinuidade de fluxo na interface das 2 malhas, conforme se observa à fig. IV.2.4.

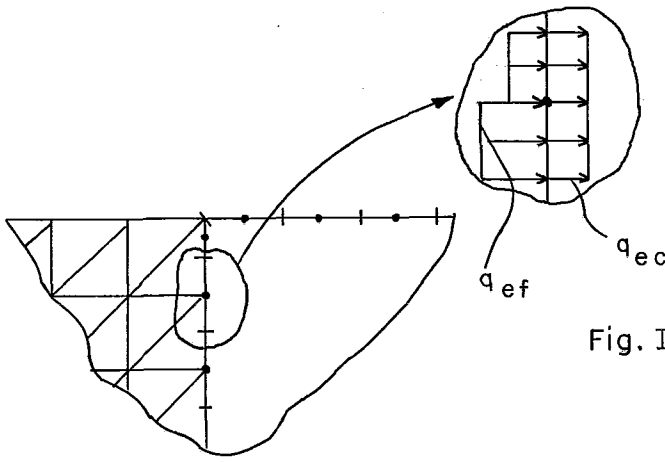


Fig. IV.2.4 – Combinação de Elementos de Contorno Constantes com Elementos Finitos Lineares

É fácil observar que a descontinuidade ocorre tanto pela não coincidência dos nós geométricos e funcionais, quanto das funções de interpolação.

Com a adoção, de elementos lineares, esta descontinuidade deixa de existir, criando-se entretanto o seguinte problema: qual o valor de fluxo a adotar no nó de descontinuidade?

A solução que mais claramente se apresentou foi a adoção do "nó duplo" (Ref. |9|), isto é, a criação de 2 nós com as mesmas coordenadas, conforme se observa na fig. IV.2.5.

No Método da Colocação, formam-se 2 linhas exatamente iguais na matriz $\underset{\sim}{G}$ especificada no ítem IV.1.

Cada termo H_{ki} e H_{kj} multiplica seu respectivo valor de potencial u_i e u_j.

Da mesma forma, cada G_{ki} e G_{kj} multiplica respectivamente q_i e q_j.

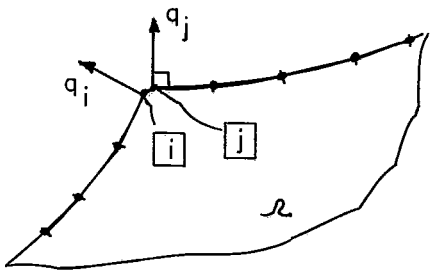


Fig. IV.2.5 – Descontinuidades Simuladas por Nó Duplo

Duas críticas surgem de imediato a esta solução:

- a primeira diz respeito ao aumento do número de graus de liberdade, em conseqüência, do aumento do número de linhas das matrizes.

Considerando, no entanto, o fato de serem estas descontinuidades encontradas em número reduzido, se comparado com o número total de equações, esta crítica não inviabiliza a solução.

- a segunda toca a hipótese muito provável de se ter $u_i = u_j$, o que leva à singularidade da solução, uma vez que as linhas i e j da matriz $\underset{\sim}{G}$ são iguais.

Além disso, independentemente das condições de contorno adotadas, na solução adotada para a formação de uma matriz

de potencial global (elementos finitos + contorno), conforme se observará no ítem V.1.2, há que se inverter a matriz $\underset{\sim}{G}$. Com 2 linhas iguais, esta matriz torna-se singular (não inversível).

Esta última crítica portanto, inviabiliza a solução com o nó duplo para o Método da Colocação.

Será observado, no entanto, que no Método de Galerkin, esta limitação é inexistente (Ref. |5|), na medida em que as linhas i e j das matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$ não são iguais.

Considerando, o fato do gasto maior em termos computacionais ao se adotar o Met. Galerkin já que há que se integrar 2 vezes no contorno (consulte expr. IV.1.6 e IV.1.8), novas soluções foram pesquisadas em termos do Método da Colocação.

A solução que se apresenta mais viável a priori é a do nó duplo modificado: desloca-se o ponto fonte do canto para o interior do elemento, modificando-se a função de interpolação (solução do elemento não conforme), de acordo com o que se apresenta no ítem IV.2.1.1. Esta solução faz com que se gerem equações diferentes para os 2 nós próximos ao canto.

Mais recentemente, apresentou-se a hipótese de se deslocar o ponto fonte do canto para o interior do elemento, não se modificando a função de interpolação, isto é, mantendo as incógnitas nos pontos extremos do elemento (solução do elemento interpolado), conforme se apresenta no ítem IV.2.1.2.

Uma outra hipótese também recente e analisada neste trabalho é se gerar apenas 1 nó na descontinuidade, expressando-se o valor de q numa face do contorno, proporcional ao da

outra face (solução por tratamento geométrico), a partir do que se especifica no ítem IV.2.1.3.

Ao final do ítem IV.2 será também analizada a solução pelo Método de Galerkin (ítem IV.2.2).

IV.2.1 - Soluções utilizando o Método da Colocação

IV.2.1.1 - Elemento Não Conforme

Conforme fora deduzido para a exp. IV.1.7, os termos das matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$ são dadas por:

$$\underset{\sim}{h}_{ij} = \int_j \left| \phi_1^j \quad \phi_2^j \right| q^*_{ij} \, d\Gamma_j$$

$$\underset{\sim}{g}_{ij} = \int_j \left| \phi_1^j \quad \phi_2^j \right| \bar{u}^*_{ij} \, d\Gamma_j$$

As funções de interpolação são dadas por:
(Veja figuras IV.2.6 e IV.2.7)

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2x}{\ell}\right) = \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2x}{\ell}\right) = \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

O elemento não conforme é formulado, de tal modo que o nó funcional é deslocado da extremidade do elemento, mudando-se a função de interpolação e a posição da incógnita nodal, como se mostra na figura IV.2.8.

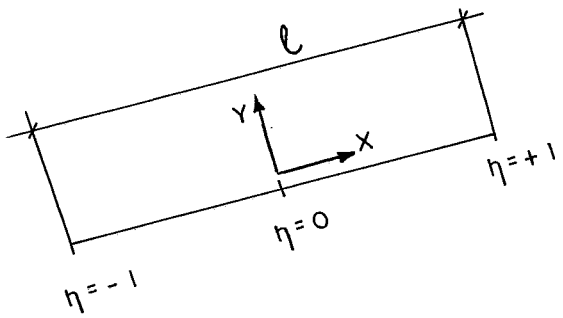


Fig. IV.2.6 – Coordenadas Intrinsecas

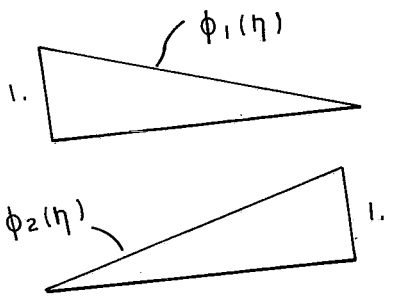
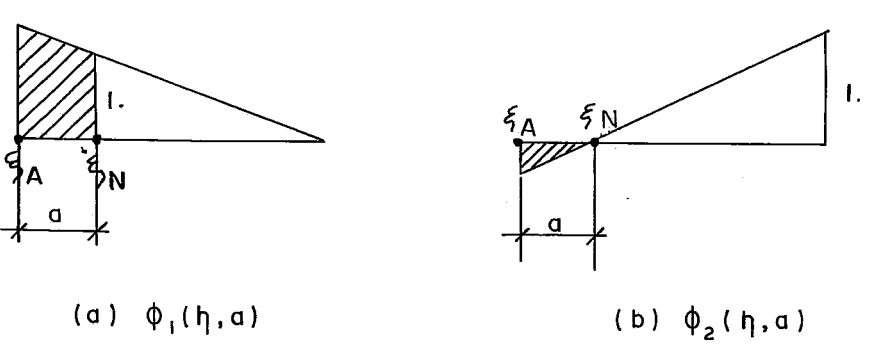


Fig. IV.2.7 – Funções de Interpolação



(a) $\phi_1(\eta, a)$ (b) $\phi_2(\eta, a)$

Fig. IV.2.8 – Funções de Interpolação no Elemento não Conforme para o Ponto Fonte Deslocado da Extremidade Esquerda

A parte hachurada representa a extrapolação da função

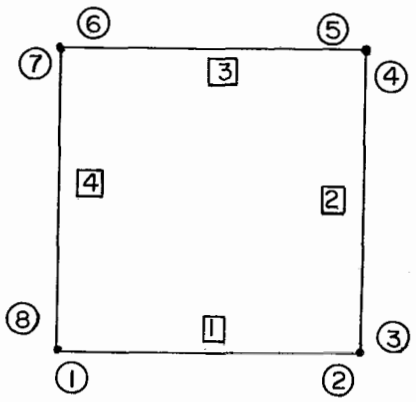


Fig. IV.2.9 – Exemplo de uma Malha para Utilização de Elementos não Conformes

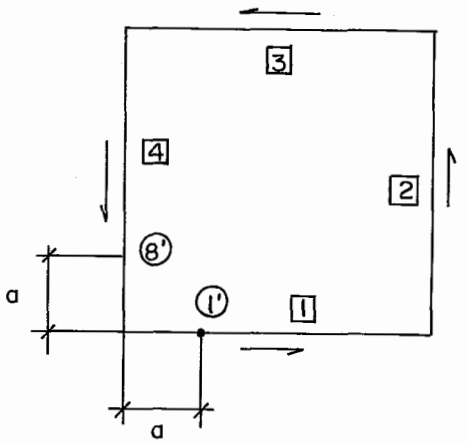


Fig. IV.2.10 – Deslocamento do Ponto Fonte e Sentido de Integração

camente com 4 pontos de Gauss. Eventualmente, em malhas pouco refinadas, pode-se precisar de 6 pontos.

- A integração sobre o 4 também se fará numericamente, porém com 20 pontos, visto que o ponto fonte fica muito perto da singularidade, à medida que se caminha para o extremo final do elemento 4. Isto pode ser observado com facilidade ao tomarmos a solução fundamental definida no ítem 2 para problemas bi-dimensionais.

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r}\right)$$

onde r = distância do ponto fonte ao ponto campo.

À medida que os pontos de integração se encaminham para o final do elemento 4, a distância r a 1' (considerando "a" pequeno) vai tendendo a um valor reduzido, levando a função acima

para um valor muito grande.

Apresenta-se, a seguir, o procedimento algébrico adotada para as integrações (de acordo com Ref. |4|):

i) Integração analítica no elemento contendo o ponto fonte

i.1) Considerando extremo inicial deslocado:

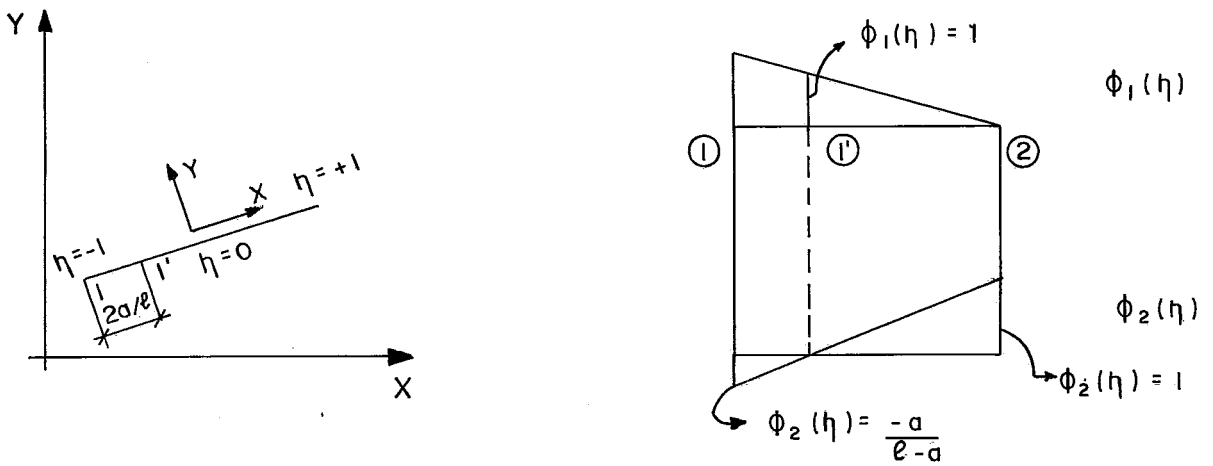


Fig.IV.2.11 – Funções de Interpolação para o Elemento não Conforme Contendo o Extremo Inicial Deslocado

- Novas Funções de Interpolação:

$$\phi_1 = \frac{\ell(1-\eta)}{2(\ell-a)} \qquad (IV.2.2)$$

$$\phi_2 = \frac{\ell(1+\eta)-2a}{2(\ell-a)}$$

- Distância r:

$$r = \left| \frac{\ell}{2} (1+\eta) - a \right| \qquad \text{(IV.2.3)}$$

- Matriz $\underset{\sim}{H}$:

$$h_{ii} = 0, \quad \text{pois} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{no elemento} \qquad \text{(IV.2.4)}$$

- Matriz $\underset{\sim}{G}$:

$$g_{11} = \int_{-1}^{1} \phi_1 \, u^*(\zeta;\eta) d\eta$$

$$\therefore g_{11} = 3C - \frac{2aC}{\ell} - \ln(\ell-a) \left(\frac{2(\ell-a)(C\ell-Ca)}{\ell^2}\right) - \frac{2a}{\ell^2} (2C\ell - Ca) \ell n_a$$

(IV.2.5)

onde: $$C = \frac{\ell^2}{4(\ell-a)}$$

$$g_{12} = \int_{-1}^{1} \phi_2 \, u^*(\zeta;\eta) d\eta$$

$$\therefore g_{12} = 2C_2 + C_1\left(\frac{2a}{\ell} - 1\right) - \left| \frac{2(\ell-a)}{\ell} \left(C_2 + \frac{aC_1}{\ell}\right) \right| \ell n(\ell-a) -$$

$$- \frac{2a}{\ell} \left| C_2 - \frac{C_1}{\ell} (\ell-a) \right| \ell n \, a \qquad \text{(IV.2.6)}$$

onde $C_1 = \dfrac{\ell^2}{4(\ell-a)}$

$C_2 = C_1 - a\ell/2(\ell-a)$

i.2) Considerando Extremo Final Deslocado:

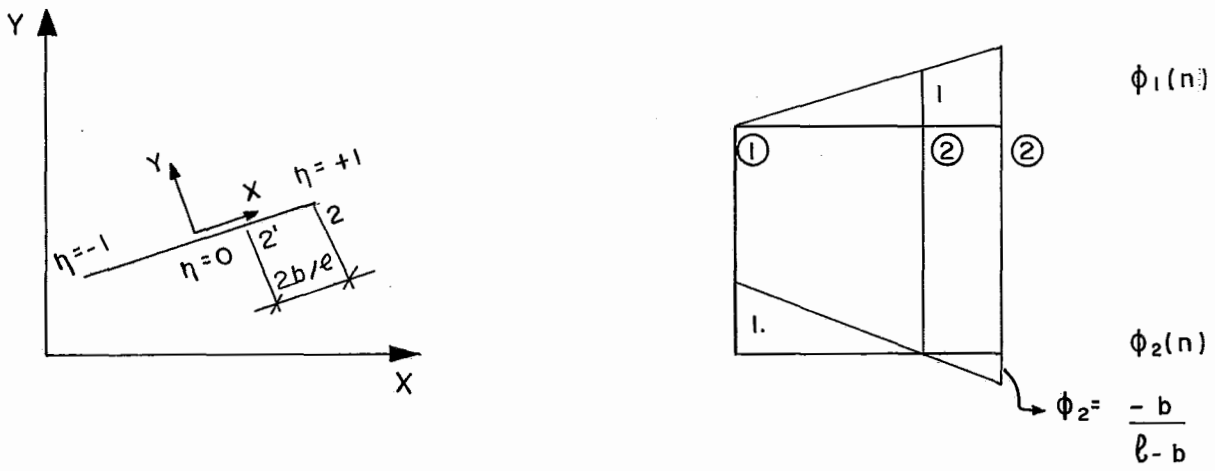


Fig.IV.2,12 Funções de Interpolação para o Elemento não Conforme Contendo o Extremo Final Deslocado

- Novas Funções de Interpolação:

$$\phi_1 = \frac{\ell(1-\eta)}{2(\ell-b)} \qquad (IV.2.7)$$

$$\phi_2 = \frac{\ell(1+\eta)-2b}{2(\ell-b)}$$

- Distância r:

$$r = \left| \frac{\ell}{2} (1-\eta) - b \right| \qquad \text{(IV.2.8)}$$

- Matriz G:

$$g_{21} = g_{12} \quad \text{do caso anterior (i.1)}$$
$$g_{22} = g_{11} \quad \text{do caso anterior (i.1)} \qquad \text{(IV.2.9)}$$

Este método, permite portanto que se gerem 2 linhas diferentes para os cantos com nós não coincidentes evitando a singularidade em caso de prescrição do mesmo potencial nos dois nós e permitindo que se prescrevam 2 valores diferentes de fluxo para os mesmos.

ii) Integração Numérica:

A integração numérica dos outros elementos se deu da forma usual (Ref. 1 e 2), apenas considerando o ponto fonte deslocado, com suas novas coordenadas.

IV.2.1.2 - Elemento Interpolado

No ítem anterior, foi apresentado um método em que se deslocava o ponto fonte, mudando-se as funções de interpolação.

Apresenta-se a seguir um procedimento em que ao invés de se deslocar o ponto ao qual se associam incógnitas nodais

(nõ funcional), passa-se a conservar este ponto no extremo do elemento deslocando-se apenas o ponto fonte para o interior. Para isso, a incõgnita no ponto deslocado ẽ expressa pela função de interpolação dada pela exp. IV.2.7 em função daquelas dos extremos, conforme se observa na fig. IV.2.13.

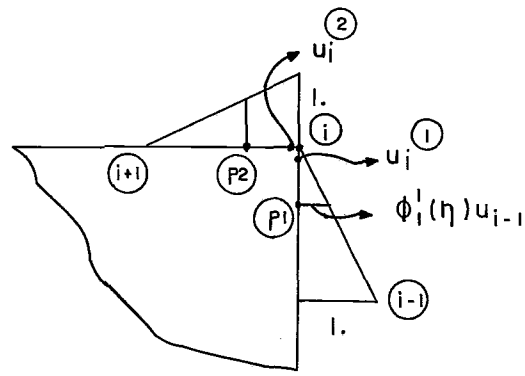


Fig. IV.2.13 - Função de Interpolação $\phi_1(\eta)$ para Elementos Interpolados

Observa-se que as funções de interpolação, bem como o nõ funcional não mudam, mas apenas se desloca o ponto fonte para p1 e p2, expressando suas incõgnitas em função de u_i, u_{i-1} e u_{i+1}.

$$u_{p1} = \phi_1^1(P_1)\, u_{i-1} + \phi_2^1(P_1) u_1$$

$$u_{p2} = \phi_1^2(P_2) u_{i2} + \phi_2(P_2) u_{i+1} \qquad \text{(IV.2.10)}$$

onde: $\phi_1^i(P_i)$ e $\phi_2(P_i)$ = valores das funções $\phi_1(\eta)$ e $\phi_2(\eta)$ no ponto fonte (p_1 e p_2).

As linhas do sistema $\underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G}\ \underset{\sim}{p}$ correspondentes aos pontos fonte p_1 e p_2 são escritas então pela exp. (IV.2.11):

$$C_1(\phi_1^1(\eta)u_{i-1} + \phi_2^1(\eta)u_i^1) + \sum_{j=1}^{m} h_{p1j}\ u_j = \sum_{j=1}^{m} g_{p1j}\ q_j$$

$$C_2(\phi_1^2(\eta)u_{i+1} + \phi_2^2(\eta)u_i^2) + \sum_{j=1}^{m} h_{p2j}\ u_j = \sum_{j=1}^{m} g_{p2j}\ q_j \qquad \text{(IV.2.11)}$$

Para $j=i^1$, toma-se

$$u_j^1 = \phi_1^1(\eta)u_{i-1} + \phi_2^1(\eta)u_{i1}$$

$$u_j^2 = \phi_1^2(\eta)u_{i2} + \phi_2^2(\eta)u_{i+1} \qquad \text{(IV.2.12)}$$

O anexo I apresenta um exemplo da montagem das matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$ para a formulação com o elemento interpolado.

Surgem portanto 2 questões importantes:

1) Qual a melhor distância de afastamento do ponto fonte | que não distorça os resultados mas que também não cause problemas de singularidade ou mal condicionamento?

Na análise do elemento não conforme, observou-se que quanto menor for esta distância, melhores seriam os resultados, na medida em que se reduziria a parte extrapolada da função de

interpolação.

Com o elemento interpolado, este problema não se torna tão sério pois não há extrapolação. A melhor distância depende portanto do tamanho do elemento, associado ao grau de refinamento da malha; parâmetros que serão analisados com mais cuidado no capítulo VII.

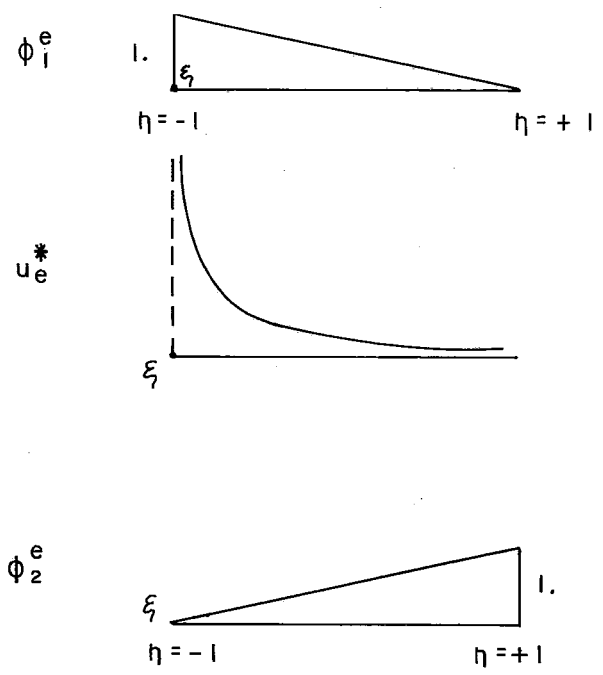
2) Como proceder à integração ao longo do elemento contendo o ponto fonte?

De forma análoga ao procedimento de integração utilizado no método do elemento não conforme, foi utilizada integração numérica para os elementos que não contêm o ponto fonte, aumentando-se o número de pontos de Gauss para o elemento adjacente ao mesmo.

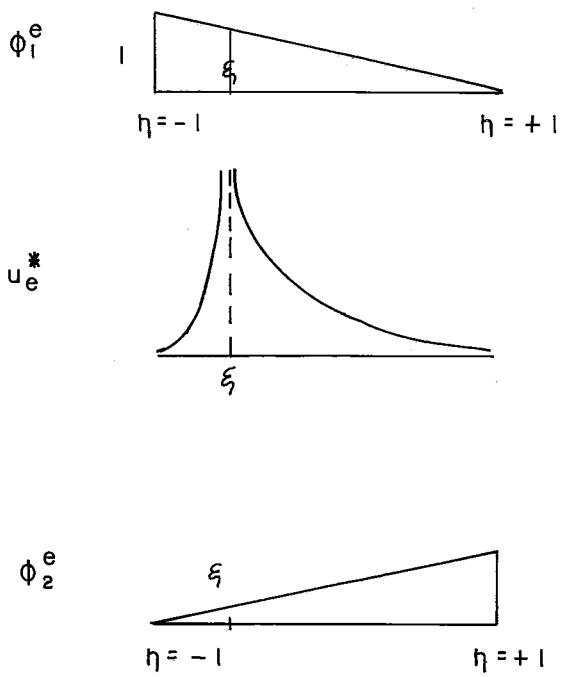
As integrais no elemento com o ponto fonte foram elaboradas analiticamente. Apresenta-se a seguir uma analogia gráfica do cálculo desta integral para o elemento com e sem o nó de extremidade deslocado. (Consulte Fig. IV.2.14).

Do ponto de vista algébrico, as integrais analíticas tomam a forma mostrada a seguir:

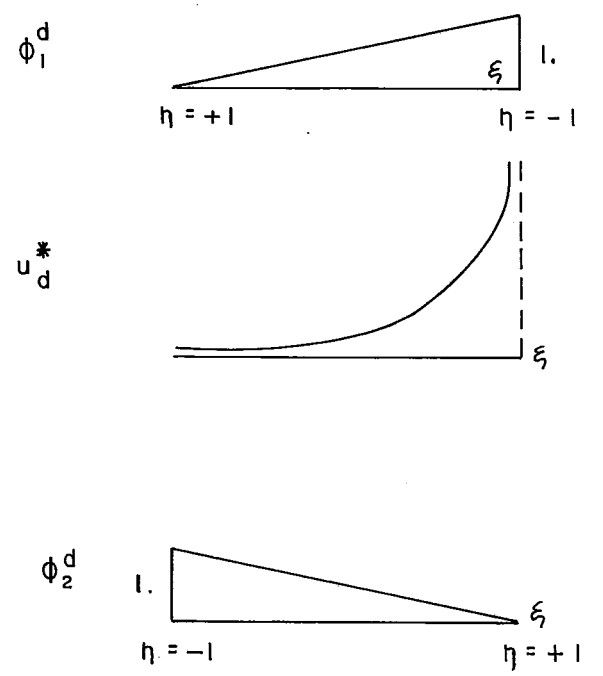
i) Integração analítica, considerando o ponto fonte deslocado da extremidade esquerda. (Veja Fig. IV.2.15).



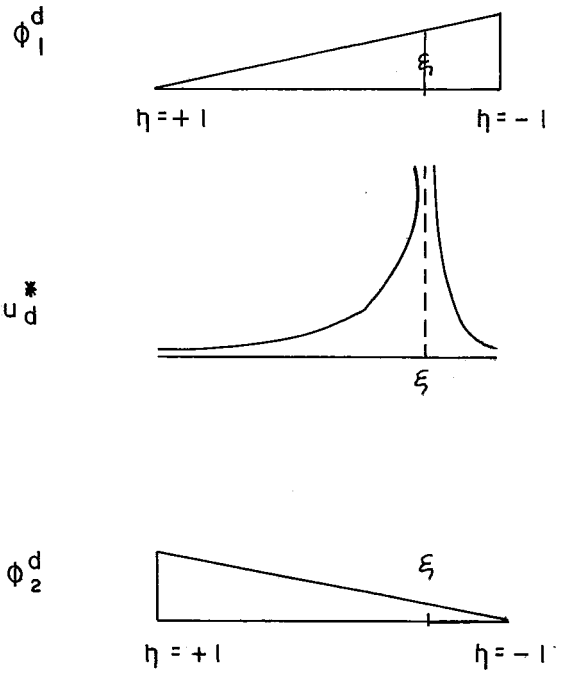
(a) Ponto Fonte no Extremo Esquerdo



(c) Ponto Fonte Deslocado do Extremo Esquerdo



(b) Ponto Fonte no Extremo Direito



(d) Ponto Fonte Deslocado do Extrem Direito

Fig. IV.2.14 – Analogia Gráfica do Cálculo das Integrais da Matriz G , com o Ponto Fonte no Extremo e com o Mesmo Deslocado , para o Método do Elemento Interpolado

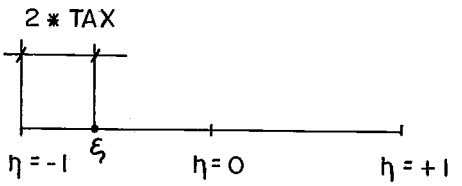


Fig. IV.2.15 – Definição da Variavel "TAX"

TAX = percentagem deslocada em relação ao comprimento total ao elemento.

- Distância r:

$$r = \left| \frac{\ell}{2} \cdot (n+|T1|) \right| \qquad \text{(IV.2.13)}$$

$$T1 = 1 - 2 * TAX$$

- Matriz $\underset{\sim}{H}$

$h_{11} = h_{12} = 0$, conforme deduzido na exp. (IV.2.4).

- Matriz $\underset{\sim}{G}$

$$g_{11} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{1} \ell n \left| \frac{2}{\ell(n+(T1))} \right| \frac{\ell}{2} (1-\eta) d\eta \qquad (IV.2.14)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$|\underset{\sim}{J}| \qquad\qquad u^* \qquad\qquad \phi_1(n)$$

Resolvendo a integral, ficamos com:

$$g_{11} = \frac{\ell}{4} \{2\ell n_2 - 2\ell n\ell - \left(\frac{|T_1|+1}{2}\right)^2 \ell n(1+|T_1|) - \left(\frac{(4-(|T_1|+1)^2}{2}\right) \ell n\,(|T_1|-1) -$$

$$- \frac{(3|T_1|^2+2|T_1|-5)}{4} + \frac{3}{4} (|T_1|+1)^2\} \qquad (IV.2.15)$$

O cálculo de g_{12} analogamente pode ser feito por:

$$g_{12} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{1} \ell n \left| \frac{2}{\ell(n+|T_1|)} \right| \frac{\ell}{2} (1+\eta) d\eta$$

$$\downarrow$$

$$|\underset{\sim}{J}| \qquad\qquad u^* \qquad\qquad \phi_1(n) \qquad\qquad (IV.2.16)$$

$$\therefore\ g_{12} = \frac{\ell}{4} \{2\ell n2 - 2\ell n\ell - \frac{1}{2}(1+|T_1|)(3-|T_1|)\ell n(1+|T_1|) -$$

$$- \frac{(|T_1|-1)^2}{2} \ell n(|T_1|-1) + 2 - |T_1| \qquad (IV.2.17)$$

ii) Integração analítica, considerando o ponto fonte deslocado da extremidade direita.

$$g_{21} = \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{1} \ell n \left| \frac{2}{\ell(\eta+|T_1|)} \right| (1+\eta)d\eta = g \quad \text{Da exp. IV.2.17.}$$

$$g_{22} = \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{1} \ell n \left| \frac{2}{\ell(\eta+|T_1|)} \right| (1-\eta)d\eta = g \quad \text{Da exp. IV.2.15.}$$

(IV.2.18)

Assim como no método do elemento não conforme, 2 linhas diferentes são formadas para nós coincidentes, permitindo que se prescrevam 2 valores de fluxo diferentes, e resolvendo o problema da descontinuidade física e geométrica. Deve-se observar que se tem neste caso a violação da condição de continuidade de potencial, porém isto não perturba a análise numérica, conforme se verá no Capítulo VII.

Convém ressaltar que este método apresenta grandes vantagens em relação ao do elemento não conforme (o que se verificará no ítem 7), especialmente ao se resolverem problemas com malhas conjugadas (Elementos Finitos + Elementos Contorno).

É fácil constatar este fato em termos teóricos, pois o elemento não conforme faz gerar uma descontinuidade de potencial na interface, como se apresenta graficamente a seguir:

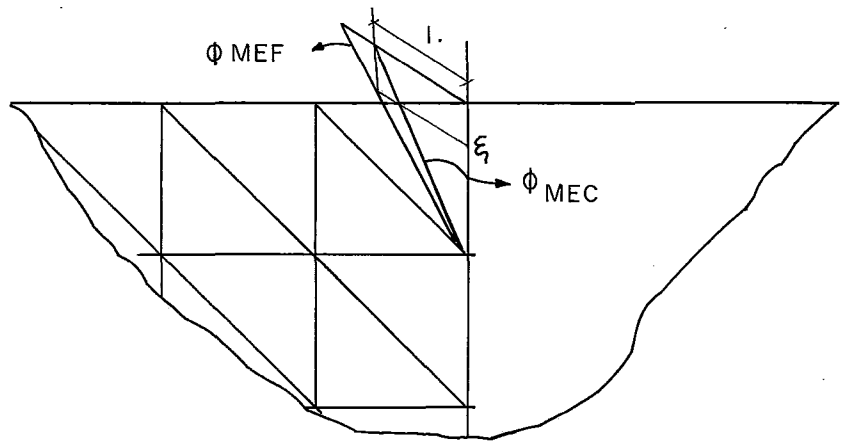


Fig.IV.2.16 - Descontinuidade Causada pela Combinação de Elementos não Conformes com Elementos Finitos Lineares

Uma forma de resolver este problema seria criar na interface um elemento finito não conforme que possuisse potencial coincidente com o de contorno.

Esta solução não é necessária, no entanto, em se dispondo do elemento interpolado.

IV.2.1.3 - Tratamento Geométrico

Com o intuito de se resolver o problema da descontinuidade física e geométrica sem que se aumente o número de graus de liberdade do sistema estrutural e, portanto, do número de equações, Rudolphi (Ref. 7) apresenta uma solução semelhante à apresentada por Chaudoneret (Ref. |5|) para elasticidade, na qual se faz adotar um valor para q na descontinuidade geométrica em função da própria geometria, valendo-se da relação:

$q = \frac{\partial u}{\partial \eta}$, onde η é a direção normal ao contorno.

A relação apresentada na Ref. |7| é dada por:

$$q_{(2)} = q_{(1)} + \left(\frac{\text{sen } \theta}{1+\cos \theta}\right) (P_{(2)} + P_{(1)}) \qquad \text{(IV.2.19)}$$

onde $P_{(1)}$ e $P_{(2)}$ são componentes do fluxo nas direções tangentes aos elementos no nó de canto, conforme mostrado à figura IV.2.17 e são dados por:

$$P_{(1)} = \frac{\partial u}{\partial s} \qquad \underset{\sim}{P}_{(2)} = \frac{\partial u}{\partial s}$$

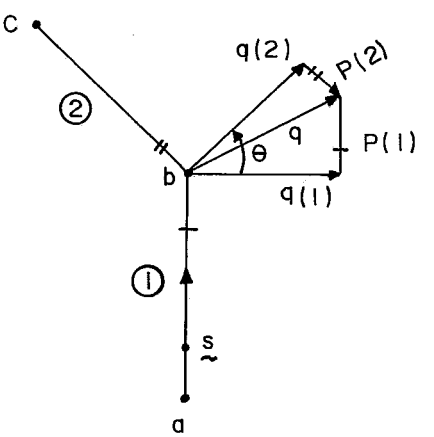


Fig.IV.2.17 – Fluxo e Derivadas Tangentes no Canto

Mas, como sabemos:

$$u = \underset{\sim}{N}(S) \cdot \underset{\sim}{u} \qquad \text{(IV.2.20)}$$

onde $\underset{\sim}{N}(s)$ é a função de interpolação

$$\therefore \; P_{(1)} = \frac{\partial \underset{\sim}{N}(1)}{\partial s} \underset{\sim}{u}(1) \qquad \text{(IV.2.21)}$$

$$P_{(2)} = \frac{\partial \underset{\sim}{N}(2)}{\partial s} \dot{\underset{\sim}{u}}(2)$$

Podemos portanto escrever a eq. (IV.2.19) da forma:

$$\underset{\sim}{q}(2) = \underset{\sim}{q}(1) + \underset{\sim}{D}(2)\, \underset{\sim}{u}(2) + \underset{\sim}{D}(1)\, \underset{\sim}{u}(1) \qquad \text{(IV.2.22)}$$

onde:

$$\underset{\sim}{D}(1) = \left(\frac{\text{sen } \theta}{1+\cos \theta}\right) \frac{\partial \underset{\sim}{N}(1)}{\partial s}$$

$$\underset{\sim}{D}(2) = \left(\frac{\text{sen } \theta}{1+\cos \theta}\right) \frac{\partial \underset{\sim}{N}(2)}{\partial s}$$

Em termos matriciais, temos:

$$q_{(2)} = q_{(1)} + \left\{ \left| \frac{\partial \phi_1}{\delta s} \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial s} \right|_{(2)} \begin{vmatrix} ub(2) \\ uc \end{vmatrix} + \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial s} \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial s} \right|_{(1)} \begin{vmatrix} ua \\ ub(1) \end{vmatrix} \right\} K$$

(IV.2.23)

onde:

$$K = \left(\frac{\text{sen } \theta}{1+\cos \theta}\right)$$

As derivadas da função de interpolação são mostradas na fig. IV.2.18 e calculadas pelas exp. (IV.2.24).

$$\phi_1^{(1)}(s) = 1 - \frac{s}{\ell_1} \rightarrow \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\delta s} = -\frac{1}{\ell(1)}$$

$$\phi_2^{(1)}(s) = 1 + \frac{s}{\ell_1} \rightarrow \frac{\delta \phi_2^{(1)}}{\partial} = \frac{1}{\ell(1)} \qquad \text{(IV.2.24)}$$

$$\phi_1^{(2)}(s) = 1 - \frac{s}{\ell_2} \rightarrow \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial s} = -\frac{1}{\ell(2)}$$

$$\phi_2^{(2)}(s) = 1 + \frac{s}{\ell_2} \rightarrow \frac{\delta \phi_2^{(2)}}{\partial s} = \frac{1}{\ell(2)}$$

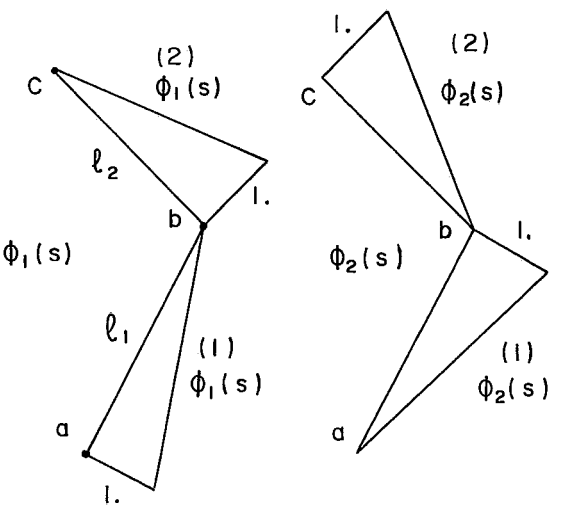


Fig. IV.2.18 – Funções de Interpolação para os Elementos Adjacentes ao Canto

A equação (IV.2.23) pode então ser escrita da forma:

$$q_{(2)} = q_{(1)} + \left\{ \begin{vmatrix} \frac{-1}{\ell 2} & \frac{1}{\ell 2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{b2} \\ u_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{\ell_1} & \frac{1}{\ell_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_a \\ u_{b1} \end{vmatrix} \right\} K \qquad \text{(IV.2.25)}$$

ou seja:

$$q_{(2)} = q_{(1)} + \left\{ \frac{u_c - u_{b(2)}}{\ell_2} + \frac{u_{b(1)} - u_a}{\ell_1} \right\} K \qquad \text{(IV.2.26)}$$

Se considerarmos que haja continuidade de potencial no contorno (caso geral), temos: $u_{b(2)} = u_{b(1)}$.

Desta forma, a eq. (IV.2.24) fica:

$$q_{(2)} = q_{(1)} + \left\{ \frac{1}{\ell_2} u_c - \frac{1}{\ell_1} u_a + \frac{(\ell_2 - \ell_1)}{\ell_1 \ell_2} u_b \right\} K \qquad \text{(IV.2.27)}$$

A expressão anterior nos indica que a correção do fluxo se dá na verdade pela correção do potencial, isto é, fazendo uma redistribuição dos termos da matriz $\underset{\sim}{H}$, pois, como sabemos da exp. (IV.1.5):

$$\underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G}\ \underset{\sim}{q}$$

Observa-se que os 3 termos modificadores da matriz $\underset{\sim}{H}$ nada somam a ela, mas apenas fazem uma redistribuição das contribuições na linha correspondente ao nó onde ocorre a descontinuidade.

Isto se torna claro, fazendo a soma:

$$\frac{1}{\ell_2} - \frac{1}{\ell_1} + \frac{(\ell_2 - \ell_1)}{\ell_1 \quad \ell_2} = 0 \qquad \text{(IV.2.28)}$$

De forma mais explícita, esta redistribuição se faz da seguinte forma, tomando como base a figura IV.2.16:

Para cada nó, verifica-se se o fluxo prescrito é o anterior ($q_{(1)}$) ou o posterior ($q_{(2)}$).

Se $q_{(1)}$ for prescrito, usamos a exp. (IV.2.27), isto é, adotamos $\underline{q_{(1)}}$ para a linha $\underline{b}$ do vetor $\underline{q}$, subtraimos $\{k(G_{ib}^{(1)} \frac{1}{\ell_2})\}$ a toda coluna $\underline{H_{ic}}$ correspondente a $\underline{u_c}$, somamos $\{k(G_{ib} \frac{1}{\ell_1})\}$ a toda coluna $\underline{H_{ia}}$ correspondente a $\underline{u_a}$ e subtraimos $\{k(G_{ib} \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2 \ \ell_1}\}$ a toda coluna $\underline{H_{ib}}$ correspondente a $\underline{u_b}$.

Se $q_{(2)}$ for prescrito, modifica-se a exp. (IV.2.27) para:

$$q_{(1)} = q_2 - \{\frac{1}{\ell_2} u_c - \frac{1}{\ell_1} u_a + (\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1 \ \ell_2}) u_b\} k \qquad \text{(IV.2.29)}$$

A seguir, faz-se uma conexão análoga à anterior para a matriz $\underset{\sim}{H}$.

O anexo II apresenta um exemplo da correção da matriz $\underset{\sim}{H}$, face a uma descontinuidade, tratada por este método.

Podemos, em termos teóricos, colocar uma importante limitação a este método, considerando-se que este exige continuidade física ($q_{(1)} = q_{(2)}$) em caso de continuidade geométrica ($\theta=0$), o que vem sempre é o caso em uma análise numérica.

IV.2.2 - Solução Utilizando o Método de Galerkin

A exp. (IV.1.8) nos apresenta a equação fundamental dos elementos de contorno utilizando como função de ponderação a própria função de interpolação $\underset{\sim}{N}(\eta)$, traduzindo portanto o Método de Galerkin.

A implementação deste método envolve a resolução de integrais duplas, algumas das quais com singularidades, quando o ponto fonte (ζ) coincide com o ponto campo (x).

O problema da singularidade já fora tratado anteriormente e, de forma análoga à implementação dos métodos anteriores, será seguido o procedimento abaixo para o cálculo das integrais.

Para elementos não contendo o ponto fonte, as duas integrais serão calculadas numericamente, por Pontos de Gauss (Ref. |5|),conforme se mostra graficamente à fig. IV.2.19.

Algebricamente, as integrais são obtidas por meio das exp. (IV.2.30) e (IV.2.32).

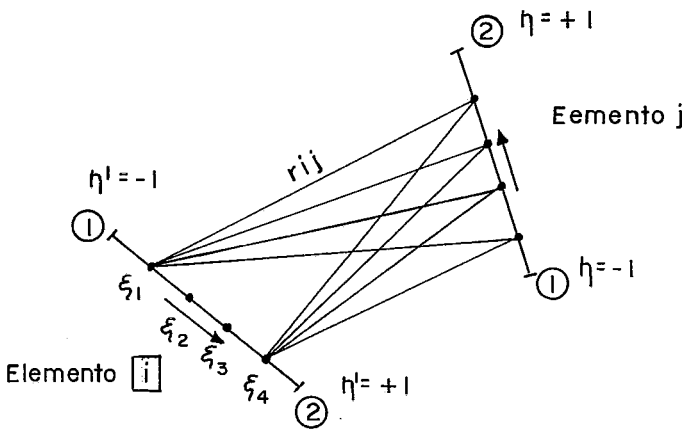


Fig. IV.2.19 – Integração Numérica com 4 Pontos de Gauss no Metodo de Galerkin

- Matriz H:

$$h_{ij} = \frac{\ell_i}{2} \cdot \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^{1} \left| \begin{matrix} 1/2(1-\eta') \\ 1/2(1+\eta') \end{matrix} \right| \int_{-1}^{1} \frac{d}{d\eta}\left(\ell n \frac{1}{r_{ij}}\right) \left| \frac{1}{2}(1-\eta) \quad \frac{1}{2}(1+\eta) \right| d\eta\, d\eta' \qquad (IV.2.30)$$

Numericamente, temos:

$$h_{ij}^{11} = \frac{\ell_i \ell_j}{16} \sum_{i=1}^{m'} w_i (1-\zeta_i) \sum_{j=1}^{m} w_j \frac{d}{d\eta}\left(\ell n \frac{1}{r_{ij}}\right)(1-\zeta_j)$$

$$h_{ij}^{12} = \frac{\ell_i \ell_j}{16} \sum_{i=1}^{m'} w_i (1-\zeta_i) \sum_{j=1}^{m} w_j \frac{d}{d\eta}\left(\ell n \frac{1}{r_{ij}}\right)(1+\zeta_j)$$

$$h_{ij}^{21} = \frac{\ell_i \ell_j}{16} \sum_{i=1}^{m'} w_i (1+\zeta_i) \sum_{j=1}^{m} w_j \frac{d}{d\eta}\left(\ell n \frac{1}{r_{ij}}\right)(1-\zeta_j)$$

$$h_{ij}^{22} = \frac{\ell_i \ell_j}{16} \sum_{i=1}^{m'} w_i(1+\zeta_i) \sum_{j=1}^{m} w_j \frac{d}{d\eta}\left(\ell n \frac{1}{r_{ij}}\right)(1+\zeta_j)$$

(IV.2.31)

onde: . w_i = valor da função peso em cada ponto de gauss.

. ζ_i = valor da coordenada de cada ponto de integração.

- Matriz $\underset{\sim}{G}$:

$$\underset{\sim}{G}_{ij} = \frac{\ell_i}{2} \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^{1} \left| \begin{matrix} 1/2(1-\eta') \\ 1/2(1+\eta') \end{matrix} \right| \left(\int_{-1}^{1} \ell n \frac{1}{r_{ij}} \left| \frac{1}{2}(1-\eta) \ \frac{1}{2}(1+\eta) \right| d\eta \right) d\eta'$$

(IV.2.32)

Numericamente, temos:

$$g_{ij}^{11} = \frac{\ell_i \ell_j}{16} \sum_{i=1}^{m'} w_i(1-\zeta_i) \sum_{j=1}^{m} w_j \ \ell n \frac{1}{r_{ij}} (1-\zeta_j)$$

$$g_{ij}^{12} = \frac{\ell_i \ell_j}{16} \sum_{i=1}^{m'} w_i(1-\zeta_i) \sum_{j=1}^{m} w_j \ \ell n \frac{1}{r_{ij}} (1+\zeta_j)$$

$$g_{ij}^{21} = \frac{\ell_i \ell_j}{16} \sum_{i=1}^{m'} w_i(1+\zeta_i) \sum_{j=1}^{m} w_j \ \ell n \frac{1}{r_{ij}} (1-\zeta_j)$$

$$g_{ij}^{22} = \frac{\ell_i \ell_j}{16} \sum_{i=1}^{m'} w_i(1+\zeta_i) \sum_{j=1}^{m} w_j \ \ell n \frac{1}{r_{ij}} (1+\zeta_j)$$

(IV.2.33)

Observa-se que, para cada elemento, forma-se uma matriz 2x2 ao invés de 2 termos, como ocorrera no Método da Colocação, ou seja, para cada integração entre elementos, temos:

$$\underset{\sim}{h}_{ij} = \begin{vmatrix} h_{ij}^{11} & h_{ij}^{12} \\ h_{ij}^{21} & h_{ij}^{22} \end{vmatrix} \qquad \underset{\sim}{g}_{ij} = \begin{vmatrix} g_{ij}^{11} & g_{ij}^{12} \\ g_{ij}^{21} & g_{ij}^{22} \end{vmatrix}$$

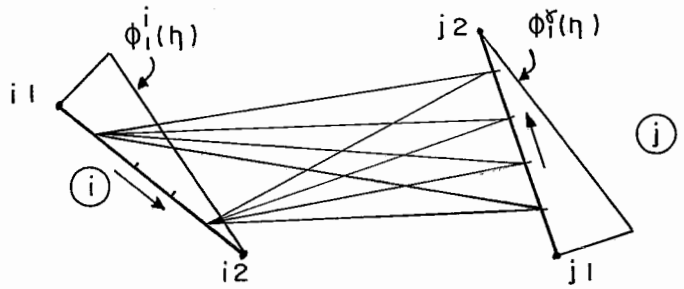
Estes termos podem ser melhor compreendidos, se associarmos de forma gráfica as funções de interpolação envolvidas para o cálculo de cada um, conforme se apresenta à fig. IV.2.20.

É importante ressaltar que, como os elementos adjacentes àquele contendo o ponto fonte estão sujeitos à singularidade, para estes será adotado número maior de pontos de Gauss.

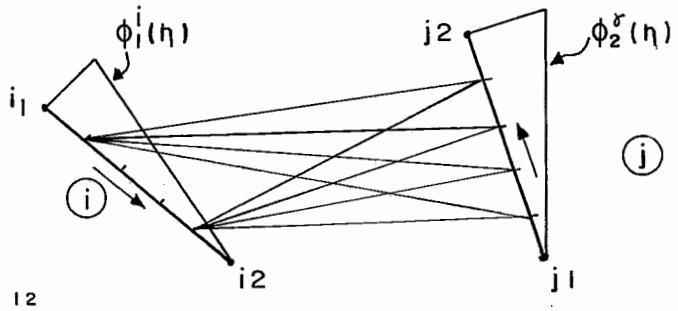
Resumidamente, podemos tabelar os números de pontos de Gauss utilizados nas integrações pela tab. IV.2.1. Estes números se apresentaram necessários e suficientes para se obterem bons resultados.

Elemento	Número de pontos "Fonte"	Número de pontos campo
Adjacentes àquele contendo o ponto fonte.	20	20
Demais	4	12

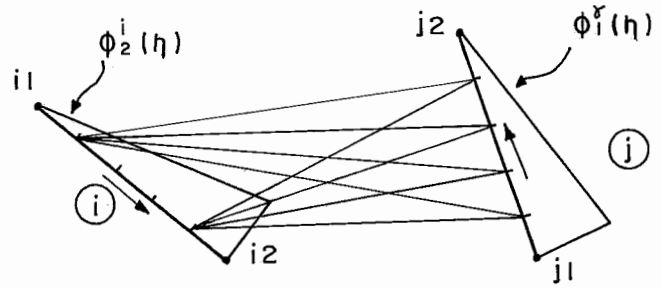
TAB. IV.2.1



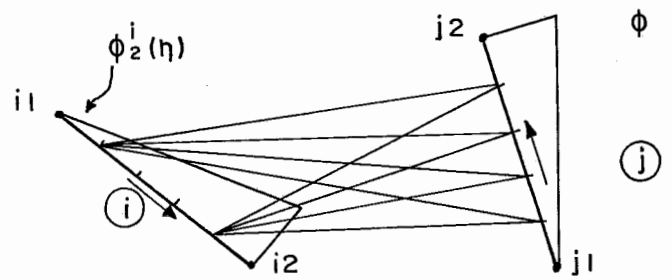
(a) h_{ij}^{11} , g_{ij}^{11} → Termos Associados à Linha (i1) e à Coluna (j1)



(b) h_{ij}^{12}, g_{ij}^{12} → Termos Associados à Linha (i1) e à Coluna (j2)



(c) h_{ij}^{21} , g_{ij}^{21} → Termos Associados à Linha (i2) e à Coluna (j1)



(d) h_{ij}^{22} , g_{ij}^{22} → Termos Associados à Linha (i2) e à Coluna (j2)

Fig.IV.2.20 - Representação Grafica dos Termos das Matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$ para o Metodo de Galerkin, por Associação às Funções de Interpolação

ii) Elemento contendo o ponto fonte

As integrais ao longo deste elemento traduzem as submatrizes da diagonal das matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$.

As submatrizes correspondentes à diagonal da matriz $\underset{\sim}{H}$ são resultantes da contribuição do primeiro termo à esquerda da exp. (IV.1.8), pois o segundo termo em nada contribui ($\frac{du}{d\eta} = 0$), como já fora colocado anteriormente.

A contribuição deste termo independente foi obtida analiticamente, conforme aponta o procedimento algébrico a seguir:

$$\underset{\sim}{C}_{ii} = \frac{\ell_i}{2} \int_0^{\ell_i} N(\eta') \{C(\eta')\, N^T(\eta')\} d\eta' =$$

$$= \frac{\pi \ell_i}{2} \int_{-1}^{1} \left| \begin{matrix} 1/2(1-\eta') \\ 1/2(1+\eta') \end{matrix} \right| \left| \frac{1}{2}(1-\eta') \;\; \frac{1}{2}(1+\eta') \right| d\eta' \qquad \text{(IV.2.34)}$$

$$\therefore \quad C_{ii}^{11} = \frac{\pi \ell_i}{8} \int_{-1}^{1} (1-\eta')(1-\eta') d\eta' = \frac{\pi \ell_i}{3}$$

$$C_{ii}^{12} = \frac{\pi \ell_i}{8} \int_{-1}^{1} (1-\eta')(1+\eta') d\eta' = \frac{\pi \ell_i}{6}$$

$$C_{ii}^{21} = \frac{\pi \ell_i}{8} \int_{-1}^{1} (1+\eta')(1-\eta')d\eta' = \frac{\pi \ell_i}{6}$$

$$C_{ii}^{22} = \frac{\pi \ell_i}{8} \int_{-1}^{1} (1+\eta')(1+\eta')d\eta' = \frac{\pi \ell_i}{3} \qquad \text{(IV.2.35)}$$

$$\therefore \underset{\sim}{C}_{ii} = \frac{\pi \ell_i}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{(IV.2.36)}$$

As submatrizes da diagonal da matriz $\underset{\sim}{G}$ serão obtidas analiticamente em η e numericamente em η'.

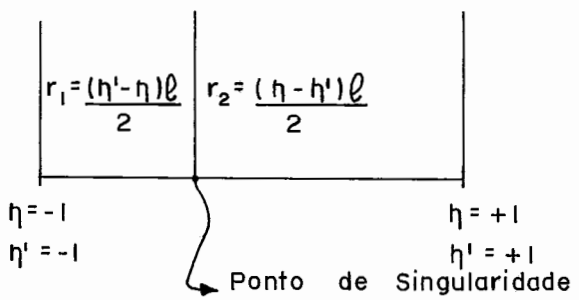


Fig. IV.2.21 – Distâncias do Ponto Campo em Relação a Singularidade para Integração Analítica

$$\underset{\sim}{G}_{ii} = \frac{\ell_i^2}{4} \int_{-1}^{1} \left| \begin{matrix} 1/2(1-\eta') \\ 1/2(1+\eta') \end{matrix} \right| \{ \int_{-1}^{\eta'} \ell n(\frac{1}{r_1}) \left| \frac{1}{2}(1-\eta) \quad \frac{1}{2}(1+\eta) \right| d\eta +$$

$$+ \int_{\eta'}^{1} \ell n \ (\frac{1}{r_2}) \left| \frac{1}{2}(1-\eta) \quad \frac{1}{2}(1+\eta) \right| d\eta \} d\eta' \qquad (IV.2.37)$$

onde $r_1 = \frac{(\eta'-\eta)\ell}{2}$

$$r_2 = \frac{(\eta-\eta')\ell}{2}$$

Resolvendo as integrais em η, ficamos com:

$$G_{ii}^{11} = \frac{\ell^2}{16} \int_{-1}^{1} \{(1-\eta')(\ell n^2 - 2\ell n\ell + 2 - \eta' - (\frac{3}{2} - \frac{\eta'^2}{2} + \eta')\ell n(\eta'+1) -$$

$$- (\frac{\eta'^2}{2} + \frac{1}{2} - \eta')\ell n(1-\eta')\} d\eta'$$

$$G_{ii}^{21} = \frac{\ell^2}{16} \int_{-1}^{1} \{(1+\eta')(\ell n^2 - 2\ell n\ell + 2 - \eta' - (\frac{3}{2} - \frac{\eta'^2}{2} + \eta')\ell n(\eta'+1) -$$

$$- (\frac{\eta'^2}{2} + \frac{1}{2} - \eta')\ell n(1-\eta')\} d\eta' \qquad (IV.2.38)$$

$$G_{ii}^{12} = G_{ii}^{21}$$

$$G_{ii}^{22} = G_{ii}^{11}$$

Observa-se que as integrais acima apresentam singularidade à medida em que se caminha para os extremos do elemento.

Para calculá-las com menor número de pontos de Gauss com máxima precisão, foi utilizada a mudança de variáveis proposta no Apêndice 2 da Ref. |5| de acordo com o que se mostra a seguir:

$$\int_{-1}^{1} f(\eta')d\eta' = \int_{-1}^{1} f\left|\frac{\bar{\eta}}{2}(1-\theta^2)+\theta\right|(1-\bar{\eta}\theta)d\theta \qquad \text{(IV.2.39)}$$

onde $\bar{\eta}$ = ponto de singularidade (-1 e 1)

CAPÍTULO V

COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS (MEC + MEF)

A exp. (IV.1.5) define matricialmente de modo simplificado o Método dos elementos de contorno, isto é:

$$\underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G}\ \underset{\sim}{q}$$

O Método dos Elementos Finitos se apresenta matricialmente pela exp. (III.8).

$$\underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{P}$$

Este capítulo se destina a mostrar a forma pela qual é possível combinar as duas expressões fundamentais, bem como colocar de forma resumida alguns aspectos decorrentes desta combinação.

V.1 - FORMAÇÃO DA MATRIZ DE POTENCIAL EQUIVALENTE

Primeiramente, torna-se necessário compatibilizar os vetores $\underset{\sim}{q}$ e $\underset{\sim}{p}$, uma vez que se definem de formas diversas:

$\underset{\sim}{q}$ = vetor que contém o valor do fluxo nos nós de contorno.

$\underset{\sim}{p}$ = vetor que contém o valor do fluxo equivalente nodal.

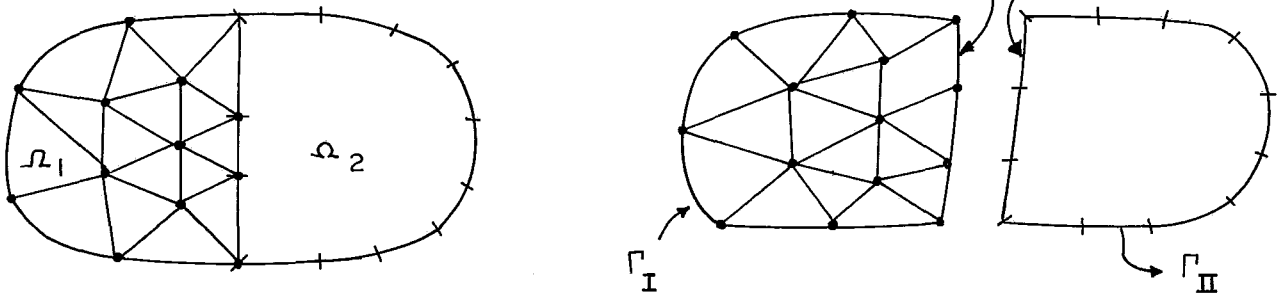
A relação existente entre estes é a Matriz de Interpolação $\underset{\sim}{M}$ que traduz o fluxo equivalente nodal em função do uniforme ao longo do elemento, por meio de uma aproximação linear.

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{M} \quad \underset{\sim}{q} \tag{V.1}$$

Os dois métodos de combinação apresentados a seguir se utilizam desta expressão fundamental.

V.1.1 - Condensação da Matriz de Potencial obtida com o Método dos Elementos Finitos.

Este método se baseia na técnica de sub-regiões utilizada no MEC e se define matematicamente da seguinte forma:



(a) Dominio Discretizado por Malha Conjugada

(b) Contorno Apresentando Região de Interface

Fig. V.1 – Dominio e Contorno em Malhas Conjugadas

A região 1 pode ser definida por:

$$\left|\underset{\sim}{k}_1 \quad \underset{\sim}{k}_I^i\right| \left|\begin{matrix}\underset{\sim}{u}_1 \\ u_I^i\end{matrix}\right| = \left|\underset{\sim}{M}_1 \quad \underset{\sim}{M}_I^i\right| \left|\begin{matrix}\underset{\sim}{q}_1 \\ \underset{\sim}{q}_I^i\end{matrix}\right| \tag{V.2}$$

A região 2:

$$\left|\underset{\sim}{H}_2 \quad \underset{\sim}{H}_2^i\right| \left|\begin{matrix}\underset{\sim}{u}_2 \\ \underset{\sim}{u}_{II}^i\end{matrix}\right| = \left|\underset{\sim}{G}_2 \quad \underset{\sim}{G}_2^i\right| \left|\begin{matrix}\underset{\sim}{q}_2 \\ \underset{\sim}{q}_{II}^i\end{matrix}\right| \tag{V.3}$$

Impondo nas eqs. (V.2) e (V.3) as condições da interface

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{q}^i &= \underset{\sim}{q}_I^i = - \underset{\sim}{q}_{II}^i \\ \underset{\sim}{u}^i &= \underset{\sim}{u}_I^i = \underset{\sim}{u}_{II}^i \end{aligned} \tag{V.4}$$

Ficamos com:

$$\left|\underset{\sim}{k}_1 \quad \underset{\sim}{k}_I^i \quad -\underset{\sim}{M}_I^i\right| \left|\begin{matrix}\underset{\sim}{u}_1 \\ \underset{\sim}{u}^i \\ \underset{\sim}{q}^i\end{matrix}\right| = \left|\underset{\sim}{M}_1\right| \left|\underset{\sim}{q}_1\right| \tag{V.5}$$

$$\left|\underset{\sim}{H}_2 \quad \underset{\sim}{H}_2^i \quad \underset{\sim}{G}_2^i\right| \left|\begin{matrix}\underset{\sim}{u}_2 \\ \underset{\sim}{u}^i \\ \underset{\sim}{q}^i\end{matrix}\right| = \left|\underset{\sim}{G}_2\right| \left|\underset{\sim}{q}_2\right| \tag{V.6}$$

ou, escrevendo as equações (V.5) e (V.6) em conjunto, temos:

$$\begin{vmatrix} \underset{\sim}{K}_1 & \underset{\sim}{K}_I^i & -\underset{\sim}{M}_I^i & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{H}_2^i & \underset{\sim}{G}_2^i & \underset{\sim}{H}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{\sim}{u}_1 \\ \underset{\sim}{u}^i \\ \underset{\sim}{q}^i \\ \underset{\sim}{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underset{\sim}{M}_1 & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{G}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{\sim}{q}_1 \\ \underset{\sim}{q}_2 \end{vmatrix} \qquad (V.7)$$

V.1.2 - Obtenção da Matriz Equivalente ao MEF a partir do MEC

A alternativa que se propõe neste ítem se baseia na transformação da exp. (IV.1.5) de forma a se obter uma matriz nos moldes da exp. (III.8).

O procedimento analítico utilizado para este fim é apresentado a seguir:

$$\underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G}\ \underset{\sim}{q}$$

$$\therefore\ \underset{\sim}{G}^{-1}(\underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{u}) = \underset{\sim}{q} \qquad (V.8)$$

$$\therefore\ (G^{-1}\ H)\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{q} \qquad (V.9)$$

Multiplicando os dois lados da expressão pela Matriz de Interpolação ($\underset{\sim}{M}$), temos:

$$(\underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{G}^{-1}\ \underset{\sim}{H})\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{q} \qquad (V.10)$$

A matriz de potencial equivalente a do Método dos ele-

mentos finitos fica portanto:

$$\underset{\sim}{k}_c^e = (\underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{G}^{-1}\ \underset{\sim}{H}) \qquad (V.11)$$

E o vetor de fluxo equivalente nodal,

$$\underset{\sim}{p}_c^e = \underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{q} \qquad (V.12)$$

O procedimento acima será utilizado para a combinação dos métodos em questão.

Observa-se com facilidade que a solução de problemas de descontinuidade por nó duplo no Método da Colocação não funciona para este procedimento, pois causa singularidade na inversão da Matriz $\underset{\sim}{G}^{-1}$, na medida em que gera 2 linhas iguais.

O mesmo não ocorre com os métodos de colocação em que se aplicam tratamentos de canto como os vistos no capítulo IV.

No Método de Galerkin, o nó duplo pode ser usado automaticamente, pois o método gera 2 linhas diferentes na matriz $\underset{\sim}{G}$ para os nós de mesma coordenada, conforme pode ser observado pelas exp. (IV.2.33).

V.2 - OBTENÇÃO PARA PONTOS INTERNOS AO DOMÍNIO

É comum que sejam requeridos os valores de potencial em pontos interiores ao domínio discretizado por elementos de contorno, conforme mostram os pontos A e B da fig. V.2.1. Para a solução deste problema, há que se obterem os valores do poten

cial e fluxo ao longo de todo o contorno.

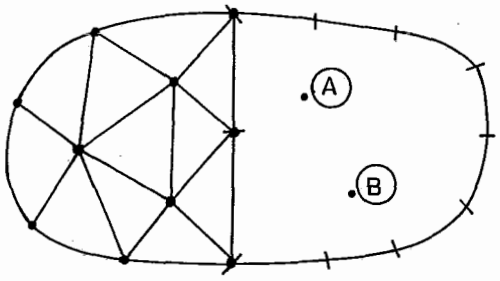


Fig. V.2.1 – Pontos Internos ao Dominio

Um dos métodos de se obterem estes valores na interface se baseia na condensação dos mesmos relativos à malha de elementos finitos, conforme mostra a fig. V.2.2.

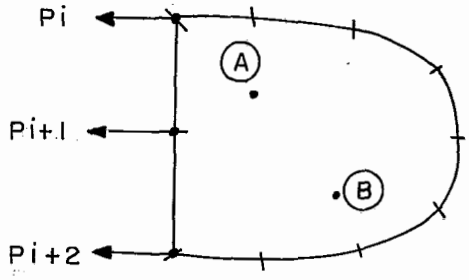


Fig. V.2.2 – Fluxo na Região de Interface

A condensação fornece os fluxos equivalentes nodais ($\underset{\sim}{p}^i$). Por isso, há que multiplicá-los pela inversa da Matriz de Interpolação ($\underset{\sim}{M}^{-1}$), obtendo o fluxo distribuído no contorno da interface ($\underset{\sim}{q}^i$).

Na implementação numérica empregada neste trabalho, ao invés de se proceder a esta multiplicação, optou-se por resolver o sistema mostrado na exp. (V.1), por exigir menor número de operações computacionais.

A partir da obtenção dos vetores $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{q}$ em todo o contorno, a solução ($\underset{\sim}{u}$) é calculada por meio da equação integral para pontos do interior, que é similar à exp. (IV.1.3) onde $C(\zeta) = 1$. Neste caso, deve-se observar que as integrais são regulares pois pontos campos e fontes não serão coincidentes em nenhuma situação.

V.3 - O PROBLEMA DOS "SOLVERS" ENVOLVIDOS E A SIMETRIZAÇÃO DA MATRIZ GLOBAL

A matriz $\underset{\sim}{k}^e_c$ apresentada na eq. (V.11) não possui as características de banda e simetria peculiares à matriz $\underset{\sim}{k}^e$ formada pelo Método dos Elementos Finitos (exp. (III.8)).

O que se observa inclusive é que quanto menos refinada for a malha de elementos de contorno, menos simétrica é a matriz equivalente $\underset{\sim}{k}^e_c$.

Observa-se também que a não-simetria está intimamente ligada ao tratamento que for dispensado ao problema de descontinuidades geométricas e físicas (ítem IV.2).

Estes aspectos estão analisados de forma comparativa e dedutiva no capítulo VII.

A fim de se procurar minimizar o "transtorno computacional" causado pela resolução de um sistema de equações (linear, para o problema em questão) não simétrica, propõe-se que seja introduzida uma condição externa de simetria dada pela média entre a matriz de potencial global e sua transposta, ou seja, (pela Ref. |10|).

$$\underset{\sim}{k}^{S} = \frac{1}{2} \left(\underset{\sim}{k}^{u} + \underset{\sim}{k}^{u,T} \right) \qquad (V.13)$$

Esta alternativa, apesar de levar em certos casos a bons resultados nada tem a ver com o problema físico causador da não simetria. No entanto, será testada no capítulo VII.

O problema da não simetria, associado ao custo computacional e agravado com o aumento do número de graus de liberdade do sistema estrutural não deve ser resolvido, no entender do autor, com uma condição externa meramente algébrica. Esta posição é reforçada, levando-se em consideração o atual desenvolvimento progressivo de recursos de Hardware e Software (métodos avançados em pesquisa para resolução de sistemas esparsos não simétricos).

A alternativa da simetria é sugerida apenas para o caso de se usarem algoritmos de resolução do sistema de equações já desenvolvidas para o método dos Elementos Finitos.

Deve-se ainda considerar que, em geral, o número de graus de liberdade associados a elementos de contorno é bem

menor que os mesmos associados a elementos finitos, o que sugere uma sistemática de resolução do sistema global em 4 passos, como segue abaixo:

1º Passo: Reordenação do sistema a fim de se dividir a parte simétrica em banda $\underset{\sim}{k}_{s,b}$ da não simétrica $\underset{\sim}{k}$ (fig. V. 2.3).

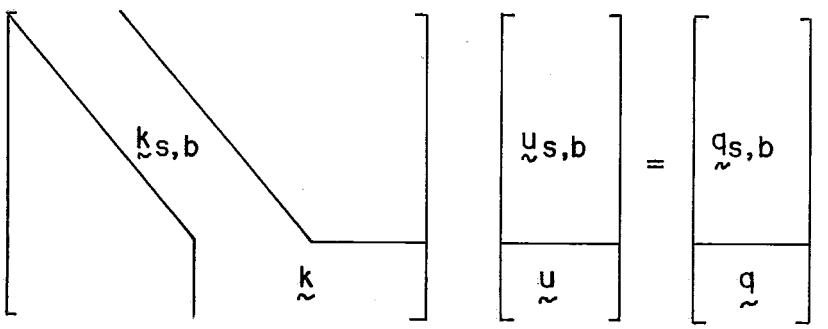


Fig.V.2.3 – Reordenação do Sistema

2º Passo: Condensação da matriz $\underset{\sim}{k}_{s,b}$ nos nós de interface (fig. V.2.4).

3º Passo: Resolução do sistema $\underset{\sim}{k}'\underset{\sim}{u}' = q'$ não simétrico.

4º Passo: Obtenção de $\underset{\sim}{u}_{s,b}$ por retro-substituição.

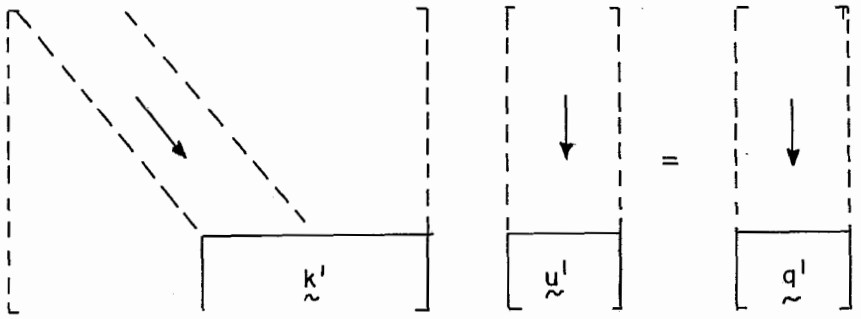


Fig. V.2.4 – Condensação do Matriz $\underset{\sim}{k}_{s,b}$

CAPÍTULO VI

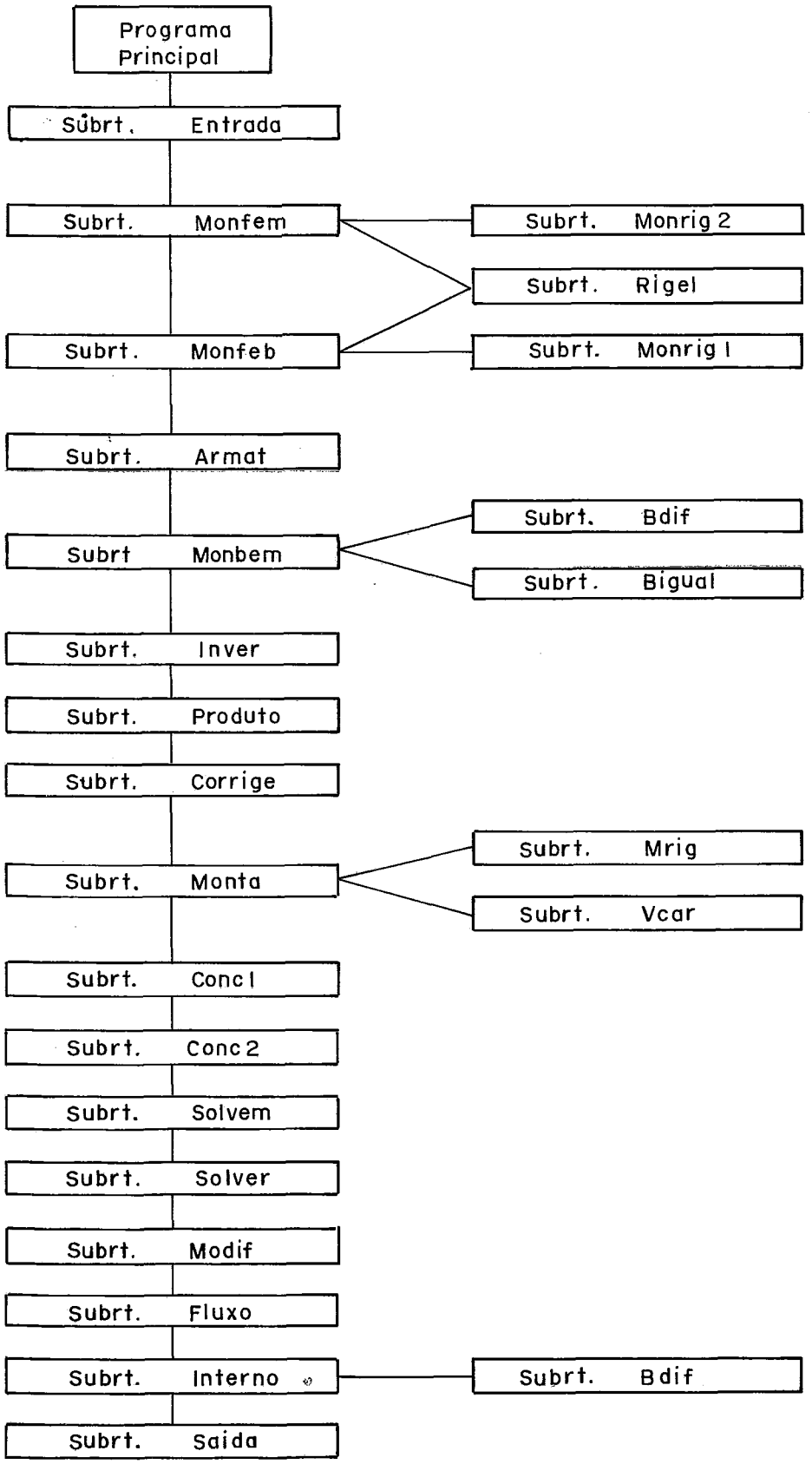
PROGRAMAS IMPLEMENTADOS

Foram implementados programas para resolução de malhas combinadas com os diversos métodos apresentados anteriormente, os quais se apresentam resumidamente abaixo:

PROGRAMA	OBJETIVO
FEB01	- Implementação de elementos de contorno constantes
FEB02A	- Implementação de elementos de contorno lineares sem tratamento de descontinuidades.
FEB02B	- Implementação do elemento de contorno interpolado.
FEB02C	- Implementação do elemento de contorno não conforme.
FEB02D	- Implementação do tratamento geométrico para o problema de descontinuidades.
FEB02G	- Implementação do Método de Galerkin.

A seguir apresenta-se um diagrama de blocos geral para todos os programas. Particularidades de cada um estão documentadas em sua própria listagem.

Diagrama de Blocos Típico dos Programas Implementados



- Subrotina ENTRADA

Destina-se à entrada de dados ao programa.

- Subrotina MONFEM

Destina-se a montar a matriz de rigidez global de estruturas contendo apenas elementos finitos.

Neste caso, é montada a matriz triangularizada, a fim de se utilizar 'a posteriori' um solver que se utilize das características de banda e de simetria (Subrotina 'Solvem').

Acessa as seguintes subrotinas:

- Subrotina RIGEL

Destina-se a calcular em coordenadas intrínsecas (conf. def. no capítulo III) a matriz de potencial de cada elemento finito.

- Subrotina MONRIG2

Destina-se a efetivamente montar a matriz global, a partir daquela de cada elemento, de acordo com procedimento apresentado na Ref. 3.

- Subrotina MONFEB

Destina-se também a montar a matriz de potencial para os elementos finitos, desta vez, sem levar em conta as características de banda e simetria.

Acessa as seguintes subrotinas:

- Subrotina RIGEL

- Subrotina MONRIG1

Destina-se a montar efetivamente a matriz global a partir dos resultados da RIGEL, considerando malha composta tanto de elementos finitos quanto de contorno.

- Subrotina ARMAT

Destina-se a armazenar os termos da matriz global correspondentes à contribuição da malha de elementos finitos nos nós da interface, a fim de posteriormente calcular o fluxo dos mesmo (por meio de $\underset{\sim}{k}_i \cdot \underset{\sim}{u}_i = \underset{\sim}{p}_i \rightarrow \underline{i}$ = interface).

Este fluxo é utilizado para cálculo do potencial em pontos internos, conf. colocado no ítem V.2.

- Subrotina MONBEM

Destina-se a calcular as matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$ relativas à malha de elementos de contorno e montar o vetor de fluxo ($\underset{\sim}{q}$).

Acessa as seguintes:

- Subrotina BDIF:

Calcula as integrais numéricas das matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$ para elementos não contendo o ponto fonte.

- Subrotina BIGUAL

Calcula as integrais analíticas das matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$ para elementos contendo o ponto fonte.

- Subrotina INVER

Destina-se a inverter a matriz $\underset{\sim}{G}$, calculada em MONBEM por Método da Eliminação de Gauss.

- Subrotina PRODUTO

Destina-se a proceder o produto $(G^{-1} * \underset{\sim}{H})$.

- Subrotina CORRIGE

Calcula a Matriz de interpolação ($\underset{\sim}{M}$), corrigindo o produto calculado em "PRODUTO" ($\underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{G}^{-1}\ \underset{\sim}{H}$) e o vetor de fluxo ($\underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{G}$). (A matriz $\underset{\sim}{M}$ está apresentada no anexo V).

- Subrotina MONTA

Destina-se a somar as contribuições da malha de elementos de contorno à matriz global já iniciada com a parte de elementos finitos (subrt. MONFEB).

Acessa as seguintes:

- Subrotina MRIG

Soma os termos da matriz ($\underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{G}^{-1}\ \underset{\sim}{H}$).

- Subrotina VCAR

Soma os termos do vetor de fluxo equivalente ($\underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{q}$).

- Subrotina CONC1

Destina-se a introduzir as condições de contorno para prescrição de potencial ($\underset{\sim}{u}$) na matriz de potencial criada pela Subrt. MONBEM (sem a característica de banda).

O critério utilizado nesta subrotina está apresentado num exemplo ao anexo VI.

- Subrotina CONC2

Destina-se a introduzir as condições de contorno para prescrição de potencial ($\underset{\sim}{u}$) na matriz armazenada em banda na Subr. MONFEM, conforme Ref. 3.

- Subrotina SOLVEM

Destina-se a resolver o sistema de equações com a matriz em banda (formada em "MONFEM"), conforme se apresenta na Ref. 3.

- Subrotina SOLVER

Destina-se a resolver o sistema de equações montado em "MONTA" pelo Método da Eliminação de Gauss.

Esta subrotina pode ser otimizada e uma proposta para esta otimização se apresenta no Ítem V.3.

- Subrotina MODIF

Destina-se a executar o 2º passo da prescrição de $\underline{u}$, conforme indicado no anexo VI.

Esta subrotina calcula também o valor do fluxo de nós de interface entre as malhas de elementos finitos e de contorno.

- Subrotina FORCE

Destina-se a calcular o valor do fluxo distribuído em cada elemento finito, tornando como base o seu centro de gravidade.

- Subrotina INTERNO

Destina-se a calcular o valor do potencial em pontos internos do domínio circundado pela malha de elementos de contorno, conforme indica o ítem V.2.

- Subrotina SAIDA

Destina-se à impressão de resultados.

CAPÍTULO VII

ANÁLISE DE RESULTADOS E COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS CONSIDERADOS PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DESCONTINUIDADES

Este capítulo tem o objetivo de avaliar de forma tão correta quanto possível não só a metodologia utilizada para a combinação dos Métodos dos Elementos Finitos e dos Elementos de Contorno, como também os procedimentos estudados para a resolução do problema de descontinuidades físicas e geométricas, inerentes ao Método da Colocação.

Conforme fora analisado no Capítulo IV (ítem IV.2), o Método de Galerkin não apresenta limitações à adoção da técnica do "nó duplo" para a resolução do problema de canto, uma vez que as linhas da Matriz $\underset{\sim}{G}$ formadas para dois nós que simulam descontinuidades são diferentes. Por esta razão e pelo fato de se adotar como função de ponderação a própria função de interpolação (conforme se observa no ítem IV.2.2), o Método de Galerkin leva, em geral, a resultados melhores com malhas menos refinadas, se comparado com o Método da Colocação.

Mas, se por um lado ganha-se em precisão, com o Método de Galerkin, por outro, perde-se no custo computacional, já que este exige maior tempo de execução (tempo de CPU) para a montagem das matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$, uma vez que há que se integrarem as soluções fundamentais 2 vezes ao longo da malha.

Analisando-se entretanto esta condição sob um outro prisma, observa-se que o Método da Colocação, ao exigir uma malha mais refinada para chegar a resultados melhores, faz aumentar o tempo gasto para a resolução do sistema de equações.

Portanto, a maior viabilidade deste último método é diretamente proporcional à maior eficiência do "solver" empregado.

Considerando-se o cada vez maior número de pesquisas na área de resolução de sistemas envolvendo matrizes cheias e não simétricas e ainda, levando-se em conta o fato de, em geral para grandes estruturas, o número de graus de liberdade associado à malha de elementos de contorno ser reduzido, em relação ao número total de deslocabilidades da estrutura, o Método da Colocação tende a se impor. Daí o interesse de se resolver de forma definitiva o problema de canto.

Sendo assim, para se proceder à verificação de resultados, são elaborados 4 níveis de análises, a saber:

- Comparação dos 3 métodos de colocação, tomando malhas formadas apenas por elementos de contorno e resolvendo o sistema formado pelo procedimento apresentado no ítem V.1.2 ($\underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{G}^{-1}\ \underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{q}$).

- Comparação dos 3 métodos de colocação, tomando malhas compostas por elementos finitos e de contorno.

- Análise das malhas da análise anterior, impondo-se a simetrização da matriz de Potencial Global apresentada no ítem V.3.

- Comparação do Método da Colocação que melhor se apresenta nos exemplos utilizados nos passos anteriores, com o Método de Galerkin. Nesta fase, proceder-se-ão refinamentos sucessivos das malhas analisadas anteriormente, até que se alcancem resultados tão satisfatórios quanto aqueles obtidos com Galerkin. Estes refinamentos se destinam à avaliação dos parâmetros eficiência dos resultados vs. tempo de CPU.

A seguir são mostrados os problemas analisados, as malhas elaboradas e os resultados obtidos para cada método envolvido.

VII.1 - COMPARAÇÃO DOS 3 MÉTODOS DA COLOCAÇÃO, TOMANDO MALHAS FORMADAS APENAS POR ELEMENTOS DE CONTORNO.

Exemplo VII.1.1 - Fluxo de Calor

- Solução Analítica

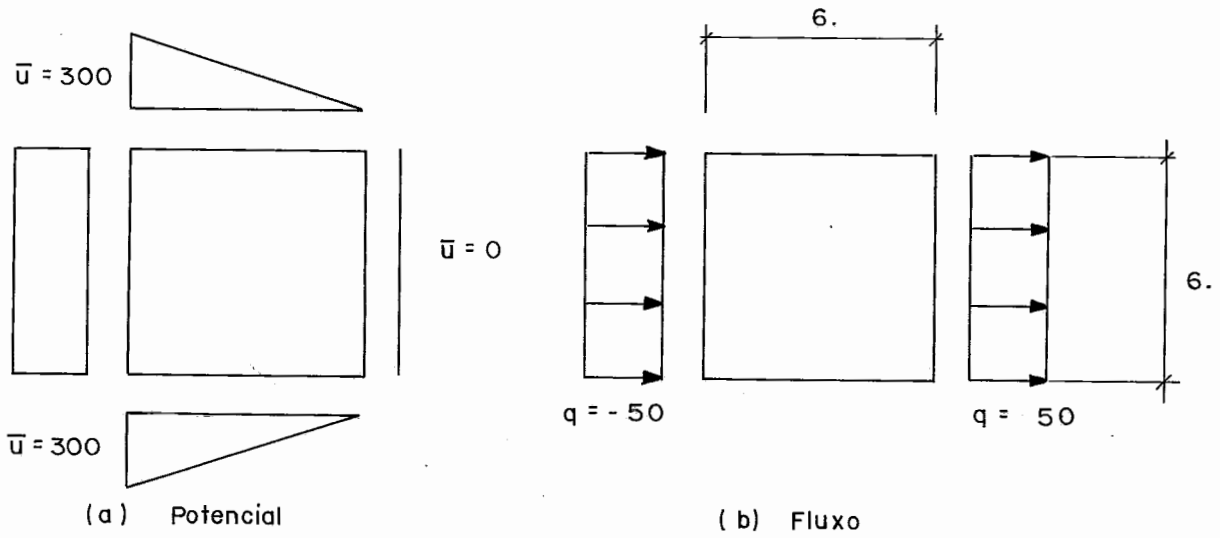


Fig.VII.1 – Exemplo VII.1.1 – Solução Analítica

- Condições de contorno introduzidas

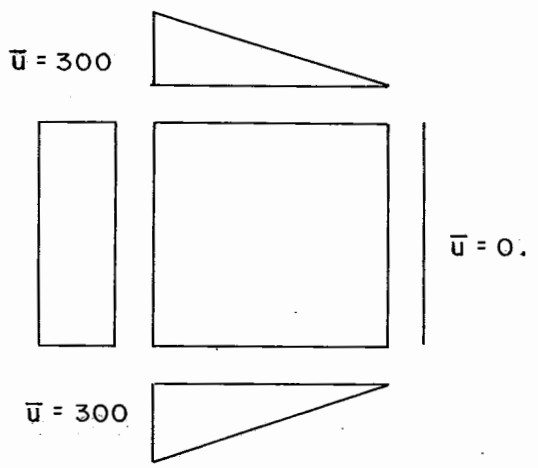


Fig.VII.2 – Exemplo VII.1.1 Modelos A/B Condições de Contorno

- Modelo A (usado para a solução por tratamento geométrico).

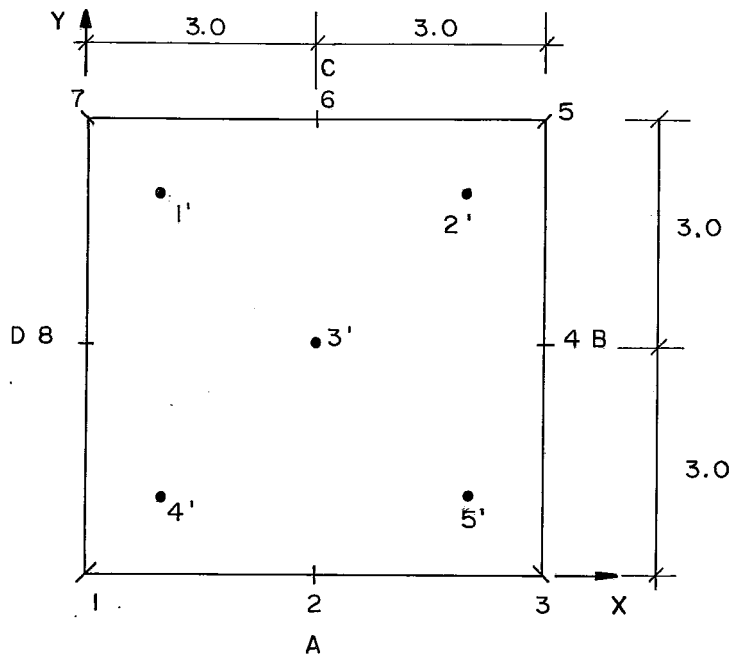


Fig. VII. 3 — Exemplo VII. 1.1 Modelo A

- Modelo B (usado para a solução por elemento não conforme e elemento interpolado).

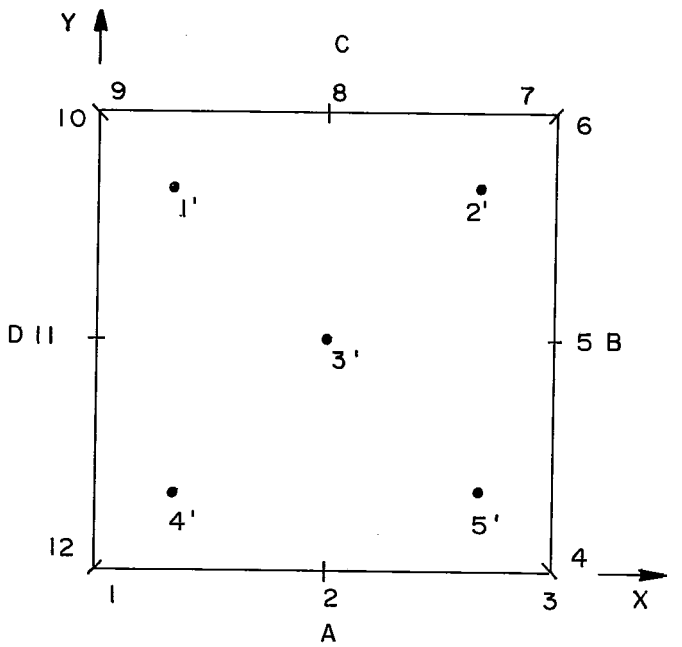


Fig. VII. 4 — Exemplo VII. 1.1 Modelo B

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(b)
Elemento Interpolado	. 408
Elemento Não Conforme	. 397
Tratamento Geométrico	. 397

TAB. VII.1

ii) Resultados para Potencial

TAX=.100

Ponto	Solução Analítica	Elemento Interpolado	Elemento Não Conforme	Tratamento Geométrico
1'	250.000	251.375	247.344	252.326
2'	50.000	50.009	52.656	49.059
3'	150.000	150.001	150.000	150.001
4'	250.000	251.375	247.344	252.326
5'	50.000	50.009	52.656	49.059

TAB. VII.2

iii) Resultados para Fluxo Equivalente Nodal

Ponto	Solução Analítica	Elemento Interpolado	Elemento Não Conforme	Tratamento Geométrico
A	. 000	.000	.000	.000
B	- 150	- 150.000	- 133.489	- 150.000
C	. 000	.000	.000	.000
D	150	150.000	133.489	150.000

TAB. VII.3

O problema que se apresenta neste exemplo é de grande simplicidade, uma vez que a variação de potencial e fluxo é expressa por funções constantes ou lineares.

Como a função de interpolação utilizada na formulação dos procedimentos é linear, os resultados devem ser teoricamente exatos.

A tabela VII.3 nos indica a exatidão dos resultados obtidos para fluxo equivalente nodal no contorno para os procedimentos do elemento interpolado e do tratamento geométrico.

Os resultados calculados com o elemento não conforme estão praticamente exatos, uma vez que a solução analítica para o fluxo é diferente, devido ao afastamento do nó funcional do canto (neste caso, tomado como 10% do comprimento do elemento). Se tomarmos, a matriz de interpolação $\underset{\sim}{M}$, calculada para o elemento não conforme pelo Apêndice V, e pré-multiplicarmos pelo vetor de fluxo distribuído no elemento de acordo com a figura VII.1(b), obteremos para os pontos A, B, C, D respectivamente os valores: 0., -133.31, 0, 133.31.

Pode-se dizer que os valores de potencial calculados para os pontos internos apresentaram uma incerteza maior que aqueles encontrados para fluxo.

Este fato se dá fundamentalmente por 2 razões: primeiramente, pelo escasso refinamento da malha e em segundo lugar, a causa mais influente é o fato de a distância ao contorno dos pontos internos ser reduzida, se comparada com o comprimento dos elementos. Sabe-se que, do ponto de vista prático, o ideal

é que esta distância seja igual ou superior ao comprimento dos elementos mais próximos ao ponto interno, a fim de obter maior precisão com a integração no contorno, mormente nos cantos. Esta característica foi introduzida propositalmente no modelo, a fim de se observar qual dos 3 procedimentos utilizados estaria menos sujeito a esta imprecisão e, em princípio, para este exemplo, o processo do elemento não conforme se mostrou mais eficiente.

Interessante é notar que para o ponto interno central, os resultados são os mesmos para os 3 processos. Isso se faz sentir também ao longo de todos os exemplos seguintes e se dá basicamente pela simetria da malha em relação ao ponto que faz reduzir os efeitos das integrações nos cantos. Além disso, este ponto é o mais distante do contorno.

Exemplo VII.1.2 - Fluxo de Calor

- Solução Analítica

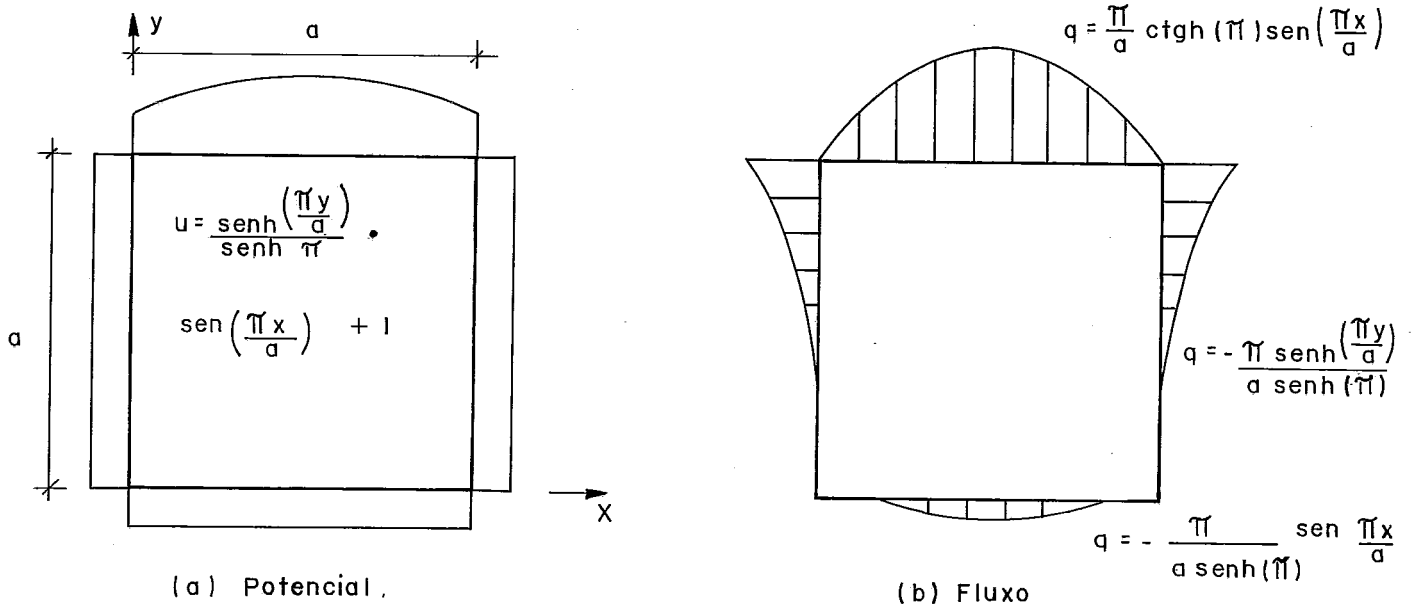


Fig. VII.5 – Exemplo VII.1.2 - Solução Analítica

- Condições de Contorno Introduzidas

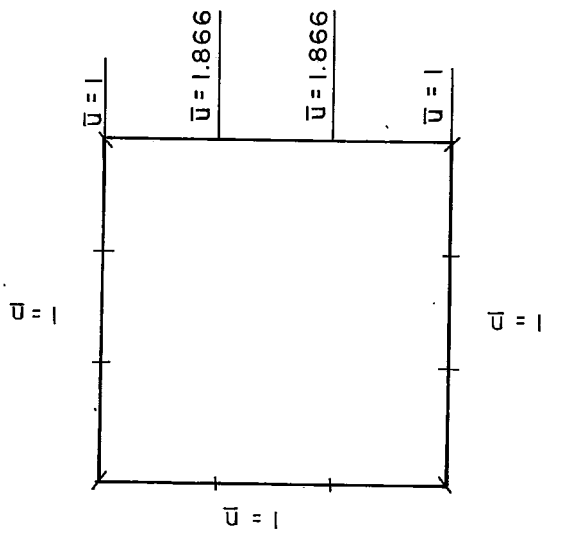


Fig VII.6 – Exemplo VII.1.2 Modelos A/B
Condições de Contorno

- Modelo A (usado para a solução por tratamento geométrico).

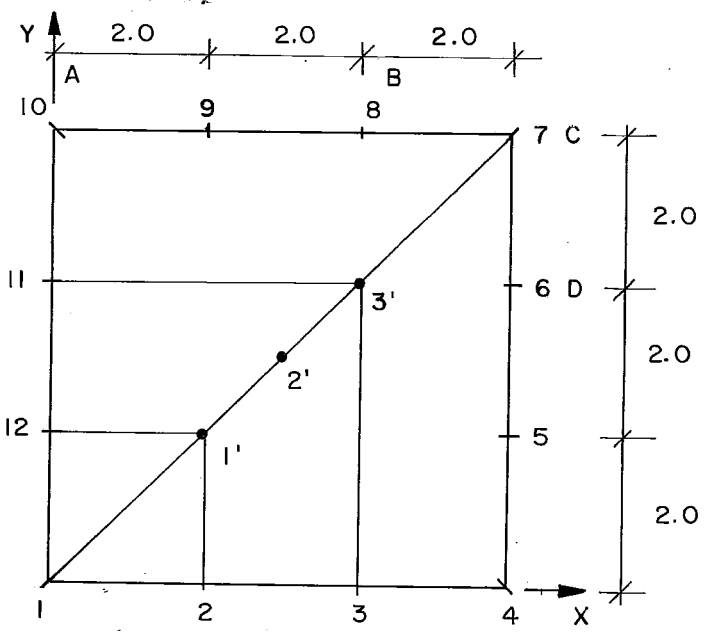


Fig.VII.7 — Exemplo VII.1.2 Modelo A

- Modelo B (usado para a solução por elemento não conforme e elemento interpolado).

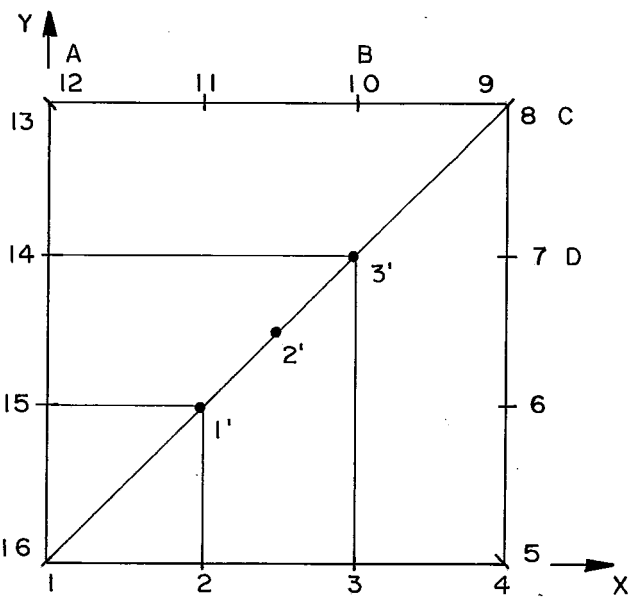


Fig.VII.8 – Exemplo VII.1.2 Modelo B

- Resultados da análise

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(b)
Elemento Interpolado	. 556
Elemento Não Conforme	. 542
Tratamento Geométrico	. 444

TAB. VII.4

ii) Resultados para Potencial
TAX=.10

Ponto	Solução Analítica	Elemento Interpolado	Elemento Não Conforme	Tratamento Geométrico
1'	1.094	1.088	1.057	1.088
2'	1.199	1.188	1.163	1.188
3'	1.300	1.284	1.266	1.284

TAB. VII.5

iii) Resultados para Fluxo Equivalente Nodal

Ponto	Solução Analítica	Elemento Interpolado	Elemento Não Conforme	Tratamento Geométrico
A	. 1517	. 132	. 185	- . 219
B	. 758	. 811	. 798	. 813
C	- . 4095	- . 352	- . 423	- . 219
D	- . 4351	- . 378	- . 346	- . 381

TAB. VII.6

Ex. VII.1.2 - Mod. B

- Análise da variação dos resultados do programa FEB02B (Elemento Interpolado) com a distância do ponto fonte ao extremo do elemento, em relação ao seu comprimento.

Ponto	TAX				Solução Analítica	Potencial/ Fluxo
	.250	.100	.05	.005		
1'	1.088	1.088	=	=	1.094	Potencial
2'	1.187	1.188	=	=	1.199	"
3'	1.280	1.283	=	1.284	1.300	"
A	.022	.095	.113	.132	. 1517	Fluxo
B	.826	.814	.811	.811	. 7580	"
C	-.299	-.329	-.339	-.352	- 4095	"
D	-.343	-.367	-.373	-.378	- 4351	"

TAB. VII.7

Não se esperam do exemplo VII.1.2 resultados tão precisos quanto aqueles obtidos no problema anterior, para uma malha pouco refinada, uma vez que a variação do potencial e do fluxo não se dá de forma linear, como o são as funções de interpolação implementadas.

Para potencial, os resultados se mostraram praticamente iguais nos 3 procedimentos.

O fluxo equivalente nodal obtido com o elemento interpolado apresenta erros relativamente baixos, levando-se em conta a malha "pobre" utilizada.

Em se tomando o processo do elemento não conforme, ob-

serva-se que a solução analítica deste fluxo para os pontos A, B, C, D; se calculada pela Matriz $\underset{\sim}{M}$ modificada é dada respectivamente pelos valores .131, .779, -.484, -.425, indicando que para esta malha, o elemento interpolado leva a erros relativos menores que o elemento não conforme.

Interessante é ressaltar que os resultados obtidos para fluxo nos pontos A e C utilizando o tratamento geométrico são os mesmos, pois correspondem ao valor equivalente nodal tanto do contorno horizontal superior quanto do vertical. Desse modo, o fluxo esperado nestes pontos é a soma daqueles encontrados em A e C, ou seja, q = .1517 -. 4095 = -. 2578.

Se somarmos os fluxos nos pontos A e C encontrados com o elemento interpolado, chegamos a p = - . 220 (praticamente o mesmo obtido pelo tratamento geométrico).

Em virtude das observações feitas, o que se pode afirmar sobre a eficiência dos 3 processos para estas malhas é que o elemento interpolado e o tratamento geométrico levaram praticamente aos mesmos resultados, melhores que aqueles calculados pelo elemento não conforme.

Uma análise em separado se faz observar pela tabela VII.7, que traduz a variação dos resultados de potencial e fluxo em função da taxa de afastamento do ponto fonte ao nó funcional do canto, em relação ao comprimento do elemento onde se situa.

A priori, o que se pode concluir é que esta variação

se faz sentir de forma bem menos significativa nos pontos do domínio (1', 2', 3') que nos de contorno (A, B, C, D), o que é esperado em virtude de o afastamento ocorrer no contorno.

Considerando o fato de as malhas A e B apresentadas nas figuras VII.7 e VII.8 respectivamente se mostrarem pouco refinadas para o problema envolvido, neste exemplo, foram elaborado 2 modelos adicionais que simulam a solução analítica delineada na fig. VII.5 e que se colocam a seguir:

- Condições de Contorno Introduzidas

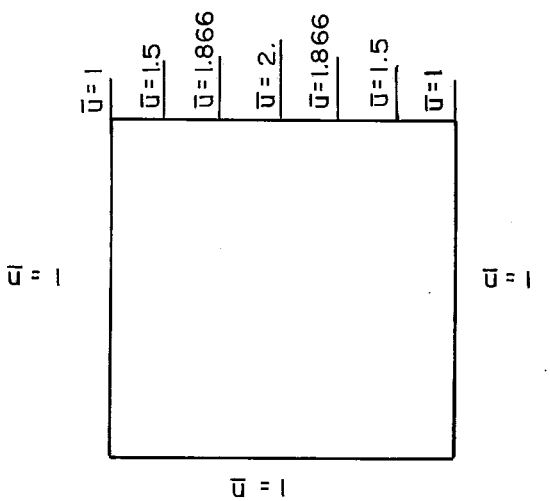


Fig VII.9 – Exemplo VII.2 Modelos C/D
Condições de Contorno

- Modelo C (usado para a solução por tratamento geométrico).

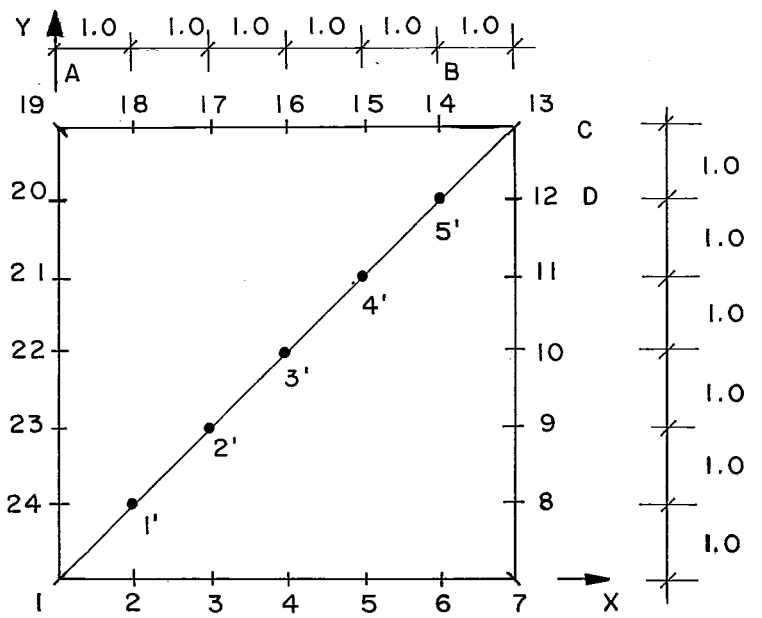


Fig.VII.10 — Exemplo VII.1.2 Modelo C

- Modelo D (usado para a solução por elemento não conforme e por elemento interpolado).

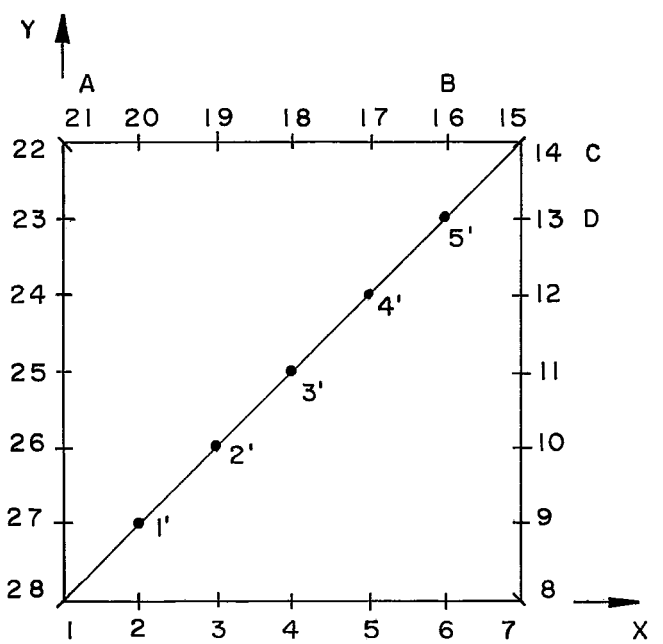


Fig.VII.11 — Exemplo VII.1.2 Modelo D

- Resultados da análise

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento Interpolado	1.476
Elemento Não Conforme	1.435
Tratamento Geométrico	1.203

TAB. VII.8

ii) Resultados para Potencial

TAX=.100

Ponto	Solução Analítica	Elemento Interpolado	Elemento Não Conforme	Tratamento Geométrico
1'	1.024	1.023	1.015	1.023
2'	1.094	1.092	1.085	1.092
3'	1.199	1.197	1.191	1.197
4'	1.300	1.296	1.292	1.296
5'	1.295	1.291	1.292	1.291

TAB. VII.9

iii) Resultados para Fluxo Equivalente Nodal

Ponto	Solução Analítica	Elemento Interpolado	Elemento Não Conforme	Tratamento Geométrico
A	. 0438	. 040	. 047	- .179
B	. 2510	. 254	. 250	.255
C	-. 2261	-. 219	-. 246	- .179
D	-. 3236	-. 313	-. 290	- .314

TAB. VII.10

- Análise da variação dos resultados do programa FEB02B (elemento interpolado) com a distância do ponto fonte ao extremo do elemento, em relação ao seu comprimento

PONTO	TAX				SOLUÇÃO ANALÍTICA	POTENCIAL/ FLUXO
	.25	.10	.05	.005		
1'	1.024	1.023		=	1.024	Potencial
2'	1.092	=	=	=	1.094	Potencial
3'	1.197	=	=	=	1.199	Potencial
4'	1.296	=	=	=	1.300	Potencial
5'	1.290	1.291	=	=	1.295	Potencial
A	.000	.028	.034	.040	.0438	Fluxo
B	.257	.255	.254	=	.2510	Fluxo
C	-.207	-.214	-.216	-.219	-.2261	Fluxo
D	-.300	-.310	-.312	-.313	-. 343	Fluxo

TAB. VII.11

Analogamente ao que ocorreu nos modelos A e B, os valores de potencial obtidos para os pontos internos se mostraram exatamente iguais para os 3 processos e, conforme o esperado, de forma bem mais precisa.

Em se tratando de fluxo equivalente nodal junto aos cantos, o elemento interpolado levou a resultados um pouco melhores que o elemento não conforme, uma vez que a solução analítica para este último nos pontos A, B, C, D é dada respectivamente pelos valores .038, .223, -.260, -.287.

Se somarmos os resultados de fluxo nos pontos A e C obtidos com o processo do elemento interpolado, obtemos exatamente o valor dos mesmos calculados com o tratamento geométrico, (p = = -.179), o que os faz ter comportamentos praticamente iguais pa

ra esta análise, conforme ocorreu também nos modelos A e B.

Cumpre salientar que os fluxos nos pontos A e C obtidos com o elemento não conforme também somam praticamente o mesmo valor (p = -.181). Ocorre no entanto, que os valores de per si em A e C não se mostram tão corretos quanto aqueles encontrados pelo elemento interpolado. Este fato ocorreu também na análise dos modelos A e B.

De forma conclusiva, podemos afirmar do ponto de vista global da estrutura, os 3 processos se mostram igualmente eficientes. Localmente, no entanto, isto é, na região de descontinuidade, o elemento interpolado tem um comportamento melhor que o não conforme.

A tabela VII.11 mostra a variação dos resultados calculados pelo processo do elemento interpolado com o afastamento do ponto fonte do canto.

Observa-se primeiramente em analogia ao que ocorreu com os modelos A e B, que esta variação se faz sentir de forma mais significativa nos pontos do contorno, e menos nos do domínio.

Mais importante que esta observação é o fato de que à medida que mais se refina a malha, menor é a influência deste afastamento sobre os resultados, o que pode ser observado pela comparação das tabelas VII.7 e VII.11.

Convém ressaltar que para o exemplo VII.1.1, a influência deste afastamento não se faz sentir, de tal modo que não se procedeu a uma análise comparativa com as elaboradas nas tabelas supra citadas.

Teoricamente esta propriedade pode ser facilmente explicada pelo fato de se ter utilizado uma função linear para expressar os valores do fluxo e potencial do ponto fonte deslocado em função dos nós extremos do elemento onde se situa (conforme se observa no item 4.2.1.2).

Se a variação do fluxo e potencial impostos for também linear, a distância do ponto fonte aos nós funcionais é praticamente irrelevante.

Se, por outro lado isso não ocorre, o erro motivado por esta distância é tanto menor quanto mais discretizada for a malha, uma vez que os valores dos nós funcionais se aproximam mais dos reais.

VII.2 - COMPARAÇÃO DOS 3 MÉTODOS DE COLOCAÇÃO, TOMANDO MALHAS COMPOSTAS POR ELEMENTOS FINITOS E DE CONTORNO

Foram analisados os exemplos anteriores e um novo exemplo, considerando malhas combinadas (MEC+MEF) no intuíto de se avaliar de forma mais precisa a eficiência dos 3 métodos de colocação apresentados anteriormente.

Neste ítem é ainda considerada a simetrização da matriz de potencial conforme configura o ítem V.3.

Exemplo VII.2.1 - Fluxo de Calor

- Solução Analítica

O problema é exatamente igual ao do Exemplo VII.1.1 e a solução analítica está apresentada na figura VII.1.

- Condições de Contorno Introduzidas

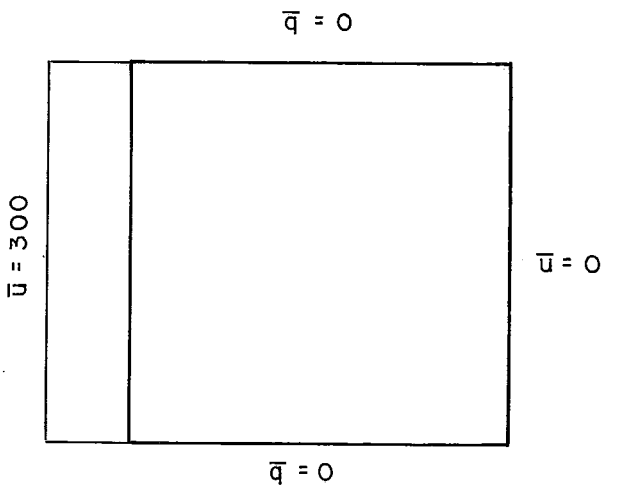


Fig. VII.12 – Exemplo VII.2.1 Modelos A/B
Condições de Contorno

- Modelo A (usado para solução por tratamento geométrico)

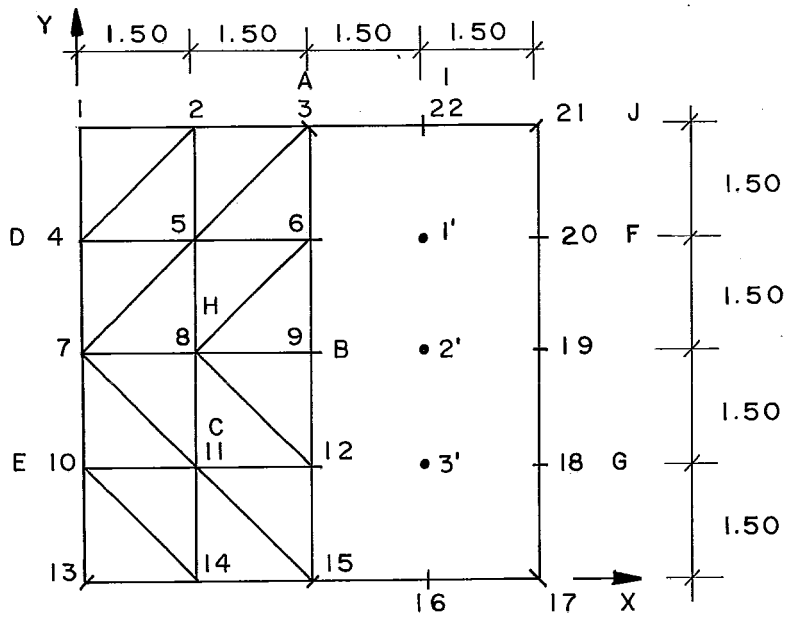


Fig.VII.13 – Exemplo VII.2.1 Modelo A

- Modelo B (usado para solução por elemento não conforme e por elemento interpolado)

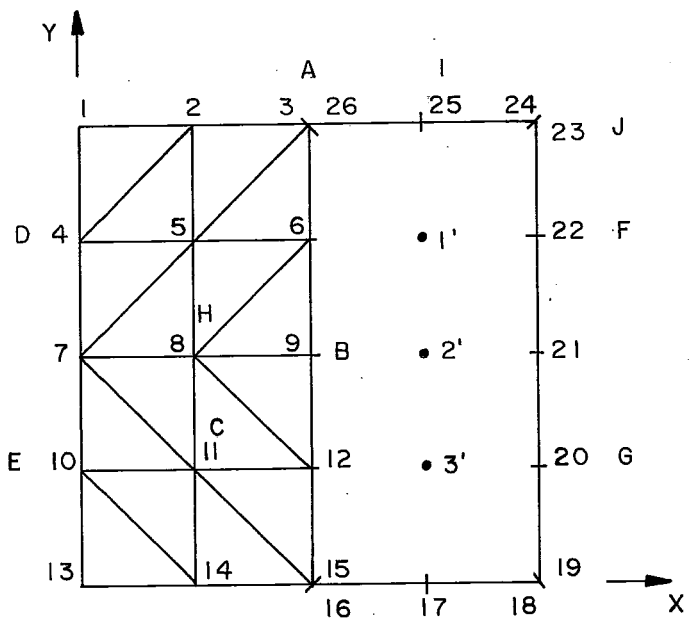


Fig.VII.14 – Exemplo VII.2.1 Modelo B

- Resultados da análise sem consideração de simetria da matriz de potencial.

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento interpolado	.671
Elemento não conforme	.669
Tratamento geométrico	.573

TAB. VII.12

ii) Resultados para potencial

TAX=.100

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
A	150.000	150.000	147.756	150.000
B	150.000	150.000	150.327	150.000
C	225.000	225.000	225.163	225.000
1'	75.000	75.000	74.872	75.000
2'	75.000	75.000	75.033	75.000
3'	75.000	75.000	74.872	75.000

TAB. VII.13

iii) Resultados para fluxo equivalente nodal.

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
D	75.000	75.000	74.837	75.000
E	75.000	75.000	74.837	75.000
F	-75.000	-75.000	- 70.893	-75.000
G	-75.000	-75.000	- 70.893	-75.000

TAB. VII.14

- Resultados da análise impondo-se simetria da matriz de potencial

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento interpolado	.675
Elemento não conforme	.675
Tratamento geométrico	.594

TAB. VII.15

ii) Resultados para potencial

TAX=.100

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
A	150.000	149.738	147,901	122.559
B	150.000	149.939	150.364	143.025
C	225.000	225.099	225.187	232.619
1'	75.000	74.985	75.125	58.243
2'	75.000	74.904	75.154	62.261
3'	75.000	74.985	75.125	62.953

TAB. VII.16

iii) Resultados para fluxo equivalente nodal.

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
D	75.000	74.901	74.813	168.778
E	75.000	74.901	74.813	142.381
F	-75.000	-74.260	- 72.859	- 52.115
G	-75.000	-74.260	- 72.859	- 69.544

TAB. VII.17

Como era esperado, os resultados obtidos com os 3 procedimentos e definidos nas tabelas VII.13 e VII.14 para este problema foram praticamente exatos, ressalva feita aqueles calculados com o elemento não conforme.

As causas deste quadro de resultados são as mesmas que as especificadas quando da análise do exemplo VII.1.1, ou seja, como a função de interpolação é de grau igual ou superior à função que define a variação de fluxo e potencial no contorno, os resultados deveriam ser exatos.

Considerando o fato do ponto fonte e do nó funcional estarem ambos deslocados do extremo do elemento não conforme na região de descontinuidades, supunha-se a priori que os resultados não fossem exatos para este procedimento.

Interessante é observar que o maior erro apresentado por este processo se situa na descontinuidade sobre a região de interface com a malha de elementos finitos (Ponto A) conforme preconizava o ítem IV.2.1.1.

Mas, se por um lado, sem a imposição de simetrização da Matriz de Potencial (nos moldes da configuração apresentada no ítem V.3) o processo do Elemento não conforme levou a valores menos eficazes que os demais métodos de colocação, ao impô-la, este se mostrou eficiente, conforme se pode observar pelas tabelas VII.16 e VII.17.

A simetrização praticamente inviabiliza o Tratamento Geométrico para este exemplo.

Observa-se ainda que o processo do elemento interpola-

do levou a resultados muito satisfatórios com a simetrização, no entanto, uma análise comparativa mostra que ao impô-la, não se pode utilizar um afastamento do ponto fonte ao nó funcional muito reduzido. A simetrização majora os problemas de mal condicionamento da matriz de potencial formada por este processo.

A fim de melhor estudar o comportamento dos resultados ao se impor a simetrização, foram elaborados para este exemplo malhas mais refinadas, com as condições de contorno delineadas na figura VII.12, as quais se apresentam a seguir.

- Modelo C (usado para a solução por tratamento geométrico).

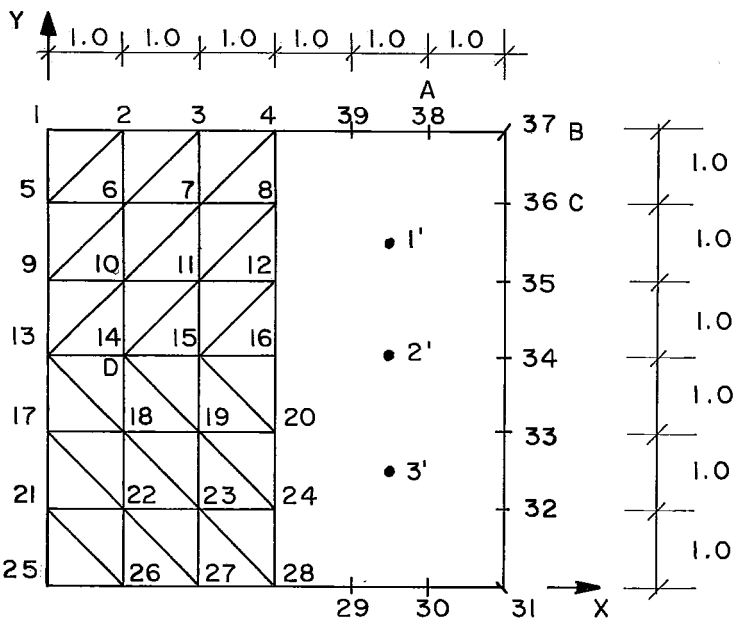


Fig. VII.15 — Exemplo VII.2.1 Modelo C

- Modelo D (usado para a solução por elemento não conforme e por elemento interpolado).

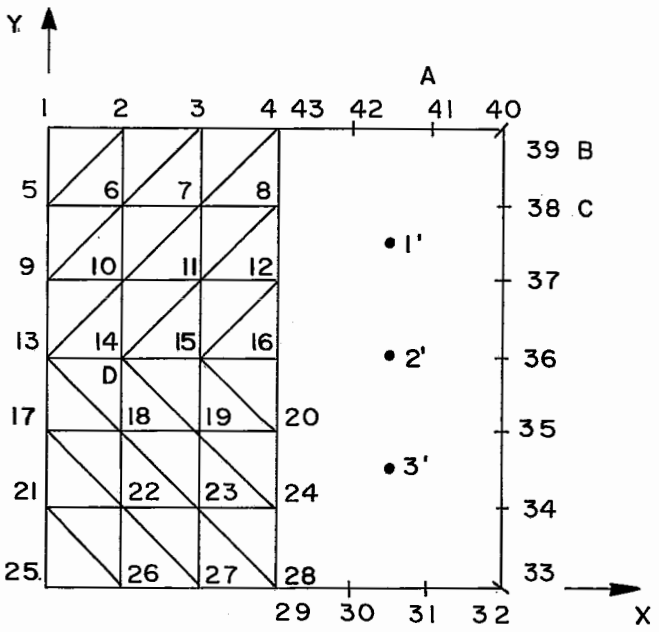


Fig. VII.16 — Exemplo VII.2.1 Modelo D

- Resultados da análise impondo-se simetria da matriz de potencial

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento interpolado	1.287
Elemento não conforme	1.291
Tratamento geométrico	1.129

TAB. VII.18

ii) Resultados para potencial

TAX=.100

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
1'	75.000	76.579	75.092	242.790
2'	75.000	76.632	75.081	237.339
3'	75.000	76.579	75.092	275.032
D	250.000	249.977	250.038	204.142

TAB. VII.19

iii) Resultados para fluxo equivalente nodal.

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
A	0	.218	- 0.000	- 0.000
B	- 25.0	- 28.912	- 25.948	-63.063
C	- 50.00	- 49.821	- 48.881	-49.634

TAB. VII.20

Os valores apresentados nas tabelas VII.19 e VII.20 são extremamente inesperados para a análise da eficiência do processo do elemento interpolado.

Ao se refinar a malha B anterior, elaborando a malha D, mantendo a mesma taxa de afastamento do nó funcional do canto (10%), os resultados se deterioraram.

Foram ainda utilizadas taxas de 25%, 5% e .5%, para este procedimento e estas rodadas confirmam as conclusões elaboradas quando da análise da malha B: a simetrização faz aumentar os problemas de mal condicionamento da matriz de potencial, à medida que se aproxima o nó funcional do canto.

O processo do Tratamento Geométrico continuou inviável com a simetrização.

Por outro lado, pode-se sentir uma minoração de erros (especialmente para fluxo) apresentados pelo processo do elemento não conforme para a malha D, em relação aqueles obtidos com a malha menos refinada (B).

É importante observar que para este exemplo, o elemento não conforme foi tomado com afastamentos do nó funcional do canto de 5% e 10%, em relação ao comprimento do elemento. Os melhores resultados, como era de se esperar, foram os obtidos com 5% de afastamento e são os apresentados nas tabelas VII.13, VII.14, VII.16, VII.17, VII.19 e VII.30.

A fim de melhor avaliar a eficiência deste processo, nos exemplos seguintes será considerado um afastamento de 5% nas regiões de interface com elementos finitos e de 10% nos can

tos fora desta região.

Exemplo VII.2.2 - Fluxo de Calor

- Solução Analítica

O problema é exatamente igual ao do Exemplo VII.1.2 e a solução analítica está apresentada na figura VII.5.

- Condições de contorno introduzidas.

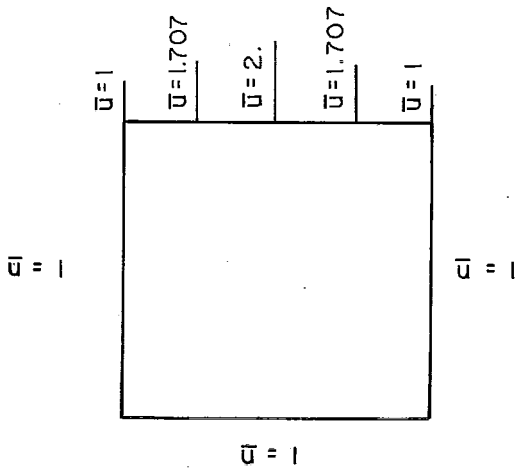


Fig.VII.17 – Exemplo VII.2,2 Modelos A/B
Condições de Contorno

- Modelo A (usado para a solução por tratamento geométrico).

Geometricamente, o modelo é igual aquele apresentado à fig. VII.13.

- Modelo B (usado para a solução por elemento não conforme e por elemento interpolado).

Geometricamente é igual ao apresentado à fig. VII.14.

- Resultados da análise sem consideração de simetria da matriz de potencial

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento interpolado	.672
Elemento não conforme	.662
Tratamento geométrico	.577

TAB. VII.21

ii) Resultados para potencial

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
1'	1.320	1.369	1.367	1.392
2'	1.141	1.238	1.230	1.282
3'	1.053	1.181	1.170	1.243
H	1.141	1.146	1.146 *	1.146

TAB. VII.22

iii) Resultados para fluxo Equivalente Nodal

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
I	.503	.493	. 458	.496
J	-.321	-.296	-. 343	-.209
F	-.394	-.369	-. 341	-.371

TAB. VII.23

* TAX=.05 na interface com a malha de elem. finitos
TAX=.10 nos demais elementos de canto.

- Resultados da análise impondo-se simetria da matriz de potencial

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento interpolado	.679
Elemento não conforme	.679
Tratamento geométrico	.591

TAB. VII.24

ii) Resultados para potencial
TAX=.100

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
1'	1.320	1.370	1.369	1.351
2'	1.141	1.237	1.228	1.195
3'	1.053	1.179	1.163	1.112
H	1.141	1.146	1.146	1.165

TAB. VII.25

iii) Resultados para fluxo

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
I	.503	.486	.444	.759
J	-.321	-.358	- .373	-.154
F	-.394	-.365	- .358	-.228

TAB. VII.26

- Análise da variação dos resultados do programa FEBO2B (elemento interpolado) com a distância do ponto fonte ao extremo do elemento, em relação ao seu comprimento, sem consideração de simetria da matriz de potencial

PONTO	TAX				SOLUÇÃO ANALÍTICA	POTENCIAL/ FLUXO
	.25	.10	.05	.005		
1'	1.381	1.373	1.371	1.369	1.320	Potencial
2'	1.261	1.245	1.241	1.238	1.141	Potencial
3'	1.212	1.189	1.185	1.181	1.053	Potencial
H	1.144	1.145	1.146	1.146	1.199	Potencial
I	.473	.486	.489	.493	.503	Fluxo
J	-.247	-.281	-.287	-.296	-.321	Fluxo
F	-.337	-.361	-.365	-.369	-.394	Fluxo

TAB. VII.27

Os resultados das tabelas VII.22 e VII.23 mostram uma melhor eficiência dos processos do elemento interpolado e do elemento não conforme em relação ao tratamento geométrico.

Convém ressaltar que os erros obtidos para o potencial em pontos internos são extremamente elevados para uma análise numérica deste tipo, o que exige malhas mais refinadas.

O mesmo não se observa com os valores de fluxo, os quais apresentaram erros bem inferiores àqueles encontrados para potencial.

Importante é observar que junto à região dos cantos, o elemento interpolado se comportou melhor que o não conforme (ponto J), embora mais distante desta, os resultados tenham sido

praticamente coincidentes (pontos I e F).

Ao analisarmos pragmaticamente as tabelas VII.25 e VII.26 que expressam os resultados da análise ao se impor simetrização da matriz de potencial, podemos concluir:

. Para potencial em pontos internos, os resultados do tratamento geométrico melhoraram sensivelmente, com excessão do ponto H. Os correspondentes ao elemento não conforme mostraram leve deterioração e os do elemento interpolado praticamente se mantiveram imutáveis.

. Os resultados de fluxo se deterioraram no tratamento geométrico.

. Para o elemento não conforme, a simetria fez se deteriorarem os resultados de fluxo fora do canto, uma vez que os valores da solução analítica para os pontos I, J, F são respectivamente .510,-.288,-.389.

. Os valores de fluxo para o elemento interpolado se mantiveram praticamente iguais com e sem imposição de simetria, exceção feita ao ponto J (no canto), embora neste ponto, o erro em relação à solução analítica tenha se mantido praticamente constante.

De uma forma geral podemos afirmar que o procedimento envolvendo o elemento interpolado se mostrou mais eficaz para esta análise.

Com o intuito de melhor analisar os resultados para este problema, foram elaboradas malhas mais refinadas, as quais se apresentam a seguir.

- Condições de contorno introduzidas
  As condições de contorno são as mesmas apresentadas na figura VII.9.

- Modelo C (usado para a solução por tratamento geométrico)
  Geometricamente o modelo é igual àquele apresentado na figura VII.15.

- Modelo D (usado para a solução por elemento não conforme e por elemento interpolado)
  Geometricamente o modelo é igual ao da figura VII.16.

- Resultados da análise sem imposição de simetria.

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento interpolado	1.282
Elemento não conforme	1.274
Tratamento geométrico	1.088

TAB. VII.28

ii) Resultados para potencial

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
1'	1.320	1.352	1.352	1.371
2'	1.141	1.200	1.199	1.235
3'	1.053	1.131	1.131	1.179
D	1.100	1.101	1.101 *	1.101

TAB. VII.29

iii) Resultados para fluxo equivalente nodal.

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
A	.2510	.256	.252	.255
B	-.2261	-.218	-.245	-.178
C	-.3236	-.315	-.291	-.314

TAB. VII.30

* TAX=.05 na interface com elem. finitos

TAX=.10 nos demais elementos.

- Resultados da análise impondo-se simetrização da matriz de potencial

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento interpolado	1.290
Elemento não conforme	1.291
Tratamento geométrico	1.129

TAB. VII.31

ii) Resultados para potencial

TAX=.100

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
1'	1.3200	1.350	1.351	1.659
2'	1.1410	1.195	1.195	1.682
3'	1.0530	1.125	1.123	1.854
D	1.0997	1.101	1.101	.877

TAB. VII.32

iii) Resultados para fluxo equivalente nodal.

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
A	.2510	.259	.235	.224
B	-.2261	-.264	-.259	-.403
C	-.3236	-.310	-.306	-.236

TAB. VII.33

- Análise da variação dos resultados do programa FEB02B (elemento interpolado) com a distância do ponto fonte ao extremo do elemento, em relação ao seu comprimento, sem consideração de simetria da matriz de potencial.

Ponto	TAX				Solução Analítica	Potencial/ Fluxo
	.25	.10	.05	.005		
1'	1.362	1.355	1.353	1.352	1.320	Potencial
2'	1.216	1.204	1.202	1.200	1.141	Potencial
3'	1.152	1.137	1.134	1.131	1.053	Potencial
D	1.101	1.101	1.101	1.101	1.0997	Potencial
A	.262	.257	.256	.256	.251	Fluxo
B	-.209	-.214	-.215	-.218	-.2261	Fluxo
C	-.302	-.310	-.312	-.315	-.324	Fluxo

TAB. VII.34

Considerando que a solução analítica nos pontos A, B, C para comparação pela resolução pelo elemento não conforme é dada respectivamente pelos valores .223, -.260, -.287, podemos afirmar que tanto em termos de potencial quanto de fluxo, o processo do elemento interpolado se mostrou mais eficiente que os demais (de acordo com as tabelas VII.29 e VII.30).

Os erros encontrados para potencial em pontos internos das malhas A e B (anteriores) se reduziram substancialmente para as C e D.

Ainda com a imposição de simetria da Matriz de Potencial, os resultados obtidos com o elemento interpolado se mos-

traram melhores que os demais (tabelas VII.32 e VII.33).

A comparação das tabelas VII.27 e VII.34 nos levam às conclusões já assinaladas quando da análise do exemplo VII.1.2 (malhas C e D): os resultados obtidos com o processo do elemento interpolado são tão mais independentes do deslocamento do ponto fonte ao nó funcional de canto, quanto mais refinada for a malha.

Exemplo VII.2.3 - Fluxo de Calor

- Solução Analítica

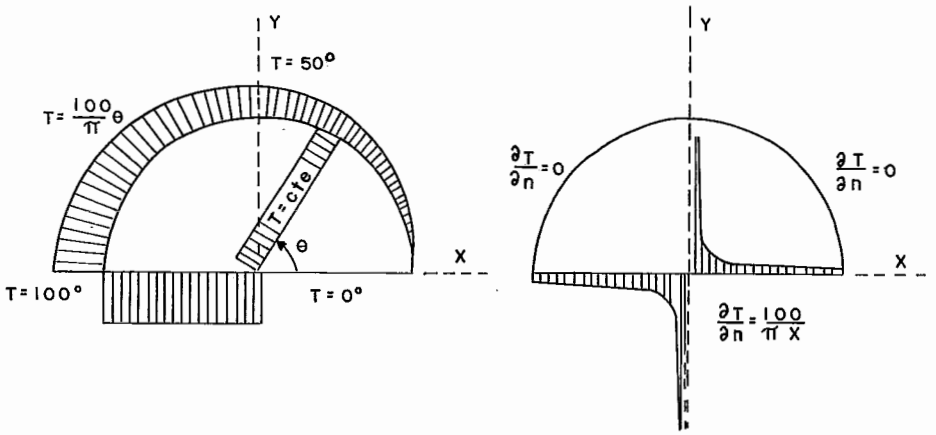


Fig.VII.18 – Exemplo VII.2.3 Solução Analítica

- Condições de Contorno Introduzidas

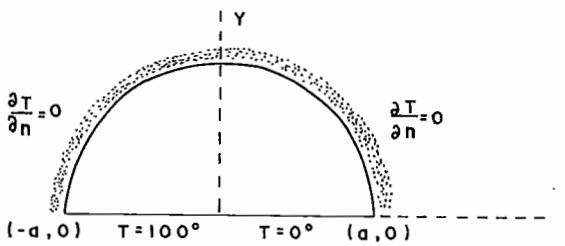


Fig.VII.19 - Exemplo VII.2.3 Modelos A/B/C/D
Condições de Contorno

- Modelo A (usado para a solução por tratamento geométrico)

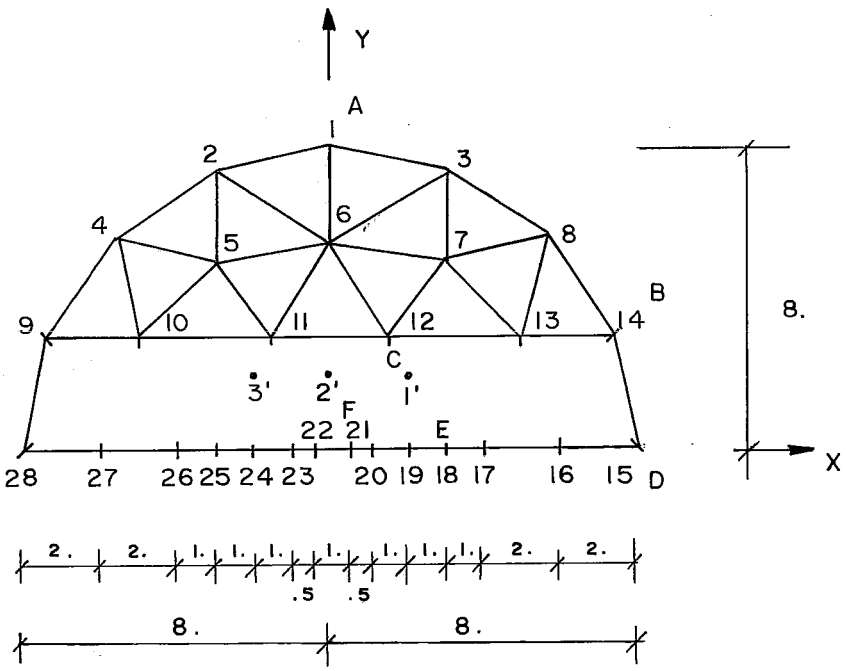


Fig.VII.20 — Exemplo VII.2.3 Modelo A

- Modelo B (usado para a solução por elemento não conforme e por elemento interpolado)

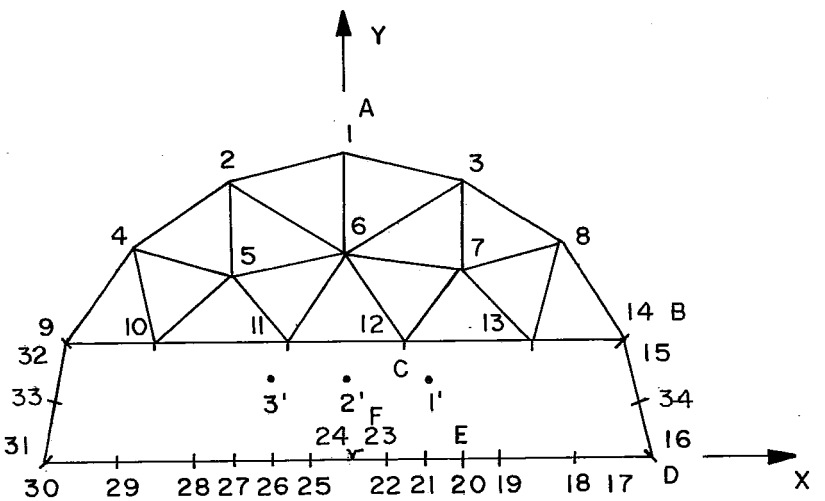


Fig. VII.21 — Exemplo VII.2.3 Modelo B

- Resultados da análise impondo-se simetrização da matriz de potencial

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento interpolado	1.200
Elemento não conforme	1.196
Tratamento geométrico	1.069

TAB. VII.38

ii) Resultados para potencial

TAX=.25

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
1'	25.0	25.670	25.943	36.510
2'	50.0	49.857	50.078	60.608
3'	75.0	74.151	74.175	84.157
A	50.0	50.041	50.026	30.565
B	12.5	13.783	10.914	13.178
C	35.5	36.006	35.652	22.256

TAB. VII.39

iii) Resultados para fluxo equivalente nodal.

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
D	- 4.421	- 4.211	- 3.431	- 3.597
E	-11.052	- 9.450	-10.392	- 8.339
F	- ∞	- 128.555	-124.190	-25.672

TAB. VII.40

- Resultados da análise sem imposição de simetria.

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento interpolado	1.188
Elemento não conforme	1.186
Tratamento geométrico	1.051

TAB. VII.35

ii) Resultados para potencial

TAX=.10 e 0.5

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
1'	25.0	25.167	25.818	25.632
2'	50.0	49.871	50.000	49.871
3'	75.0	74.693	74.182	74.228
A	50.0	50.000	50.000	50.000
B	12.5	12.215	11.593	12.010
C	35.5	35.895	35.952	36.141

TAB. VII.36

iii) Resultados para fluxo

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
D	- 4.421	- 3.837	- 4.304	- 3.993
E	-11.052	-11.237	- 11.197	-11.163
F	- ∞	-144.696	- 122.989	-37.733
			*	

TAB. VII.37

* Solução Analítica: $P_D = -4.803$, $P_E = -10.987$ $P_F = -\infty$

- Análise da variação dos resultados do programa FEB02B (elemento interpolado) com a distância do ponto fonte ao extremo do elemento, em relação ao seu comprimento, sem consideração de simetria da matriz de potencial

PONTO	TAX				SOLUÇÃO ANALÍTICA	POTENCIAL/ FLUXO
	.25	.10	.05	.005		
1'	25.276	25.167	24.934	21.836	25.0	Potencial
2'	49.871	49.871	49.871	49.871	50.0	Potencial
3'	74.584	74.693	74.926	78.024	75.0	Potencial
A	50.000	=	=	=	50.0	Potencial
B	12.466	12.215	12.059	11.247	12.5	Potencial
C	35.955	35.895	35.771	34.143	35.5	Potencial
D	-3.787	-3.837	-3.803	-3.249	-4.421	Fluxo
E	-11.197	-11.237	-11.328	-12.530	-11.052	Fluxo
F	-116.018	-144.696	-207.183	-1034.806	$-\infty$	Fluxo

TAB. VII.41

O exemplo vislumbra um problema um pouco mais complexo que os apresentados até então, uma vez que apresenta uma singularidade na solução de fluxo, motivada por uma descontinuidade de potencial.

Seu objetivo é exatamente o de avaliar o comportamento dos 3 procedimentos em vista destas propriedades.

Particularmente, cria-se uma limitação no processo do Tratamento Geométrico, uma vez que este não permite uma descontinuidade pontual de fluxo ou potencial, conforme a apresentada no nó 23/24 do modelo B. A solução que se apresenta é a criação de um elemento muito curto, de tal forma que os seus nós extremos simulem a descontinuidade, conforme foi feito no modelo A, por meio do elemento 21-22.

Os procedimentos do elemento não conforme e interpolação podem representar de forma exata esta singularidade e assim o fizeram no modelo B.

A análise das tabelas VII.36 e VII.37 indica a maior eficiência do elemento interpolado e do elemento não conforme sobre o tratamento geométrico.

Ao se impor a simetria da Matriz de Interpolação, os resultados de potencial (que se apresentam na tabela VII.39) obtidos com o elemento interpolado se mostram de forma geral mais próximos da solução analítica que os calculados com os demais processos.

Ainda, analisando os valores de fluxo, de forma geral, podemos dizer que o elemento interpolado foi mais eficiente, com a imposição da simetria.

A tabela VII.41 nos leva a colocar que para o elemento interpolado, nem sempre a menor distância entre o ponto fonte e o nó de canto é a que leva a melhores resultados. A singularidade das condições de contorno conforme se pode concluir, obriga o ponto fonte a se afastar do ponto de descontinuidade.

A fim de se chegar a melhores resultados, foram elaboradas malhas mais refinadas para representar o problema, conforme se mostram a seguir.

- Condições de Contorno Introduzidas

As condições de contorno são as mesmas apresentadas na fig. VII.19.

- Modelo C (usado para a solução por tratamento geométrico).

- Modelo D (usado para a solução por elemento não conforme e por tratamento geométrico).

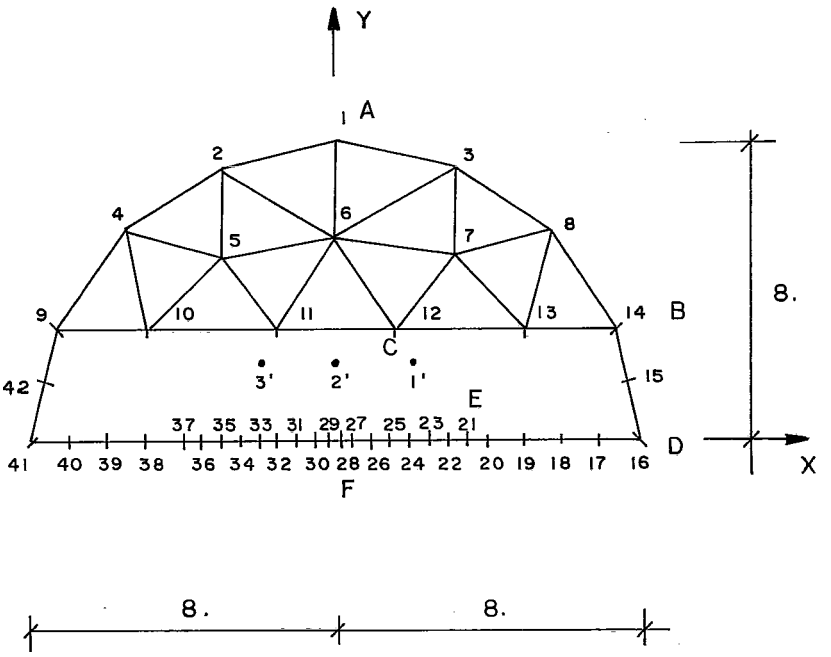


Fig.VII.22 — Exemplo VII.2.3 Modelo C

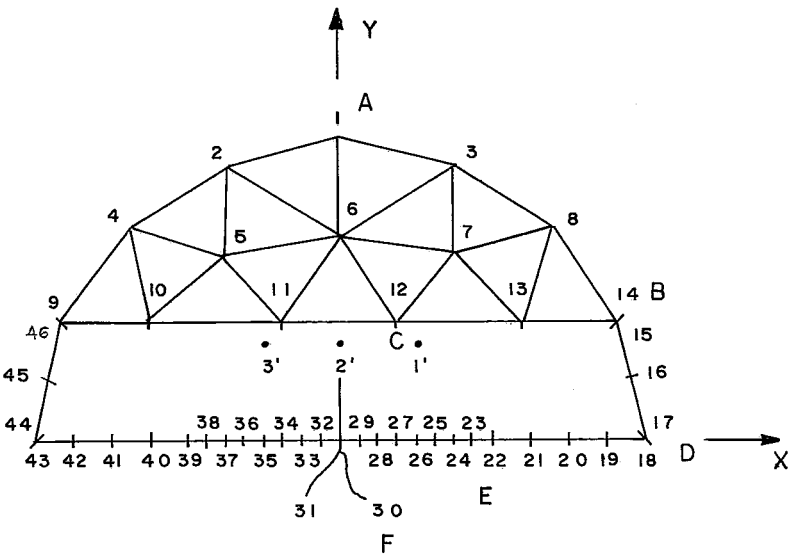


Fig.VII.23 — Exemplo VII.2.3 Modelo D

- Resultados da análise

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento interpolado	3.043
Elemento não conforme	3.051
Tratamento geométrico	2.673

TAB. VII.42

ii) Resultados para potencial

TAX=.100 TAX=.10 e .05

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
1'	25.000	25.346	25.671	25.537
2'	50.000	49.873	50.001	49.870
3'	75.000	74.517	74.332	74.320
A	50.000	50.000	50.000	50.000
B	12.500	12.144	11.617	11.938
C	35.500	35.990	36.008	36.094

TAB. VII.43

iii) Resultados para fluxo

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
D	-2.084	-1.704	-1.907	-1.624
E	-6.284	-5.855	-5.878	-4.682
F	$-\infty$	-226.134	-180.431	-37.709
			*	

TAB. VII.44

* Solução Analítica: Ponto D → -2.295, Ponto E → -5.161, Ponto F → $-\infty$

- Resultados da análise, impondo-se simetrização da matriz de potencial

i) Tempo de CPU

PROCEDIMENTO	TEMPO(s)
Elemento interpolado	3.049
Elemento não conforme	3.055
Tratamento geométrico	2.674

TAB. VII.45

ii) Resultados para potencial

TAX=.25

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
1'	25.0	25.592	25.788	18.198
2'	50.0	49.851	50.073	41.819
3'	75.0	74.223	74.323	64.925
A	50.0	50.031	50.022	-15.919
B	12.5	11.958	10.921	3.834
C	35.5	35.904	35.676	15.762

TAB. VII.46

iii) Resultados para fluxo

PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO	ELEMENTO NÃO CONFORME	TRATAMENTO GEOMÉTRICO
D	-2.084	- 2.907	- 1.106	-.419
E	-6.2843	- 6.238	- 6.131	-2.175
F	- ∞	- 199.047	-184.032	-25.878

TAB. VII.47

A tabela VII.43 indica maior eficiência do elemento não conforme para cálculo de potencial no Ponto 2'. Observa-se porém que os demais processos levaram também a bons resultados para estes pontos, especialmente o elemento interpolado (cujo maior erro relativo médio apresentado foi de 1.6%).

Os resultados de potencial para pontos de contorno se apresentaram igualmente satisfatórios para os três processos, com maior eficiência do elemento interpolado no nó de canto (ponto B).

Os valores de fluxo calculados nos pontos D, E e F permitem concluir que a malha de elementos de contorno está ainda pouco refinada, especialmente na região situada entre os pontos D e F, embora apresentem melhor resultado no ponto de descontinuidade geométrica (ponto D) pelo cálculo por elemento não conforme.

A simetrização da Matriz de potencial (cujos resultados estão resumidos nas tabelas VII.46 e VII.47) inviabilizou o Tratamento Geométrico.

Por estas mesmas tabelas, podemos observar que a simetrização levou a resultados semelhantes aos anteriores (das tabelas VII.43 e VII.44) pelo cálculo por elemento interpolado e elemento não conforme.

VII.3 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DOS MÉTODOS DA COLOCAÇÃO COM AQUELES OBTIDOS COM O MÉTODO DE GALERKIN

Considerando as observações feitas nos ítens VII.1 e VII.2, pode-se assumir que, de uma forma geral, com ou sem imposição de simetria da Matriz de Potencial, o processo utilizando o elemento interpolado se mostrou mais eficiente, para os exemplos estudados.

Conforme fora colocado no ítem IV.2.2, o Método de Galerkin habitualmente leva a resultados melhores que os de colocação, embora exija maior tempo de CPU e, portanto, maior custo computacional.

Neste ítem, procurar-se-á comparar a precisão e o tempo de execução do Método da Colocação utilizando o elemento interpolado com o Método de Galerkin. Primeiramente serão analisados exemplos sem imposição da simetria na Matriz de Potencial, a qual será considerada a posteriori.

VII.3.1 - Análise dos exemplos propostos sem imposição de simetria na Matriz de Potencial

Apresentam-se a seguir tabelados os resultados calculados pelo processo do elemento interpolado em analogia aqueles obtidos pelo Método de Galerkin, associados a uma análise de erros relativos à solução analítica dos exemplos apresentados nos ítens VII.1 e VII.2.

Como, no método de Galerkin, adota-se a solução do nó

duplo para problemas de descontinuidades físicas e geométricas, os modelos utilizados para este método são os mesmos que os utilizados anteriormente para a solução por elemento interpolado.

- Exemplo VII.1.1 - Modelo B

TEMPO DE CPU		. 408 seg		. 480 seg		
PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO		MÉTODO DE GALERKIN		POTENCIAL/ FLUXO
		SOLUÇÃO	ERRO (%)	SOLUÇÃO	ERRO (%)	
1'	250.000	251.375	.55	251.389	.56	Potencial
2'	50.000	50.009	.00	49.996	.01	Potencial
3'	150.000	150.001	.00	150.001	.00	Potencial
4'	250.000	251.375	.55	251.389	.56	Potencial
5'	50.000	50.009	.00	49.996	.01	Potencial
A	.000	.000	.00	.000	.00	Fluxo
B	-150.000	-150.000	.00	-150.070	.05	Fluxo
C	.000	.000	.00	.000	.00	Fluxo
D	150.000	150.000	.00	150.070	.05	Fluxo

TAB. VII.48

- Exemplo VII.1.2 - Modelo B

TEMPO DE CPU		. 556 seg		. 705 seg		
PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO		MÉTODO DE GALERKIN		POTENCIAL/ FLUXO
		SOLUÇÃO	ERRO (%)	SOLUÇÃO	ERRO (%)	
1'	1.094	1.088	.55	1.086	.73	Potencial
2'	1.199	1.188	.92	1.182	1.42	Potencial
3'	1.300	1.284	1.23	1.274	2.00	Potencial
A	.1517	.132	12.00	.128	15.62	Fluxo
B	.758	.811	6.99	.761	.40	Fluxo
C	-.4095	-.352	14.04	-.325	20.63	Fluxo
D	-.4351	-.378	13.12	-.356	18.18	Fluxo

TAB. VII.49

- Exemplo VII.1.2 - Modelo D

TEMPO DE CPU		1.476 seg		2.045 seg		
PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO		MÉTODO DE GALERKIN		POTENCIAL/ FLUXO
		SOLUÇÃO	ERRO (%)	SOLUÇÃO	ERRO (%)	
1'	1.024	1.023	.10	1.023	.10	Potencial
2'	1.094	1.092	.18	1.092	.18	Potencial
3'	1.199	1.197	.17	1.195	.33	Potencial
4'	1.300	1.296	.31	1.293	.54	Potencial
5'	1.295	1.291	.31	1.288	.23	Potencial
A	.0438	.0400	8.68	.0440	.45	Fluxo
B	.2510	.2540	1.19	.2510	.00	Fluxo
C	-.2261	-.2190	3.14	-.2160	4.47	Fluxo
D	-.3236	-.3130	3.28	-.3090	4.51	Fluxo

TAB. VII.50

- Exemplo VII.2.1 - Modelo B

TEMPO DE CPU		. 671 seg		. 840 seg		
PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO		MÉTODO DE GALERKIN		POTENCIAL/ FLUXO
		SOLUÇÃO	ERRO (%)	SOLUÇÃO	ERRO (%)	
A	150.000	150.000	.00	149.997	.00	Potencial
B	150.000	150.000	.00	149.979	.01	Potencial
C	225.000	225.000	.00	224.989	.01	Potencial
1'	75.000	75.000	.00	74.989	.02	Potencial
2'	75.000	75.000	.00	74.990	.01	Potencial
3'	75.000	75.000	.00	74.989	.02	Potencial
D	75.000	75.000	.00	75.011	.02	Fluxo
E	75.000	75.000	.00	75.011	.02	Fluxo
F	-75.000	-75.000	.00	-75.010	.02	Fluxo
G	-75.000	-75.000	.00	-75.010	.02	Fluxo

TAB. VII.51

- Exemplo VII.2.2 - Modelo B

TEMPO DE CPU		. 674 seg		. 839 seg		
PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO		MÉTODO DE GALERKIN		POTENCIAL/ FLUXO
		SOLUÇÃO	ERRO (%)	SOLUÇÃO	ERRO (%)	
1'	1.320	1.369	3.71	1.370	3.79	Potencial
2'	1.141	1.238	8.50	1.242	8.85	Potencial
3'	1.053	1.181	12.16	1.186	12.63	Potencial
H	1.141	1.146	.44	1.143	.18	Potencial
I	.503	.493	1.99	.466	7.36	Fluxo
J	-.321	-.296	7.79	-.282	12.15	Fluxo
F	-.394	-.369	6.35	-.361	8.38	Fluxo

TAB. VII.52

- Exemplo VII.2.2 - Modelo D

TEMPO DE CPU		1.282 seg		1.625 seg		
PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO		MÉTODO DE GALERKIN		POTENCIAL/ FLUXO
		SOLUÇÃO	ERRO (%)	SOLUÇÃO	ERRO (%)	
1'	1.320	1.352	2.42	1.352	2.42	Potencial
2'	1.141	1.200	5.18	1.201	5.26	Potencial
3'	1.053	1.131	7.41	1.133	7.60	Potencial
D	1.100	1.101	.09	1.101	.09	Potencial
A	.2510	.2560	1.95	.2470	1.60	Fluxo
B	-.2261	-.2180	3.58	-.2150	4.91	Fluxo
C	-.3236	-.3150	2.66	-.3100	4.20	Fluxo

TAB. VII.53

- Exemplo VII.2.3 - Modelo B

TEMPO DE CPU		1.188 seg		1.551 seg		
PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO		MÉTODO DE GALERKIN		POTENCIAL/ FLUXO
		SOLUÇÃO	ERRO (%)	SOLUÇÃO	ERRO (%)	
1'	25.000	25.167	.68	25.552	2.21	Potencial
2'	50.000	49.871	.26	49.871	.26	Potencial
3'	75.000	74.693	.41	74.308	.93	Potencial
A	50.000	50.000	.00	50.000	.00	Potencial
B	12.500	12.215	2.28	12.420	.64	Potencial
C	35.500	35.895	1.12	35.360	.39	Potencial
D	-4.421	-3.837	13.21	-4.007	9.36	Fluxo
E	-11.052	-11.237	1.67	-10.602	4.07	Fluxo
F	- ∞	-144.696	-	-79.717	-	Fluxo

TAB. VII.54

- Exemplo VII.2.3 - Modelo D

TEMPO DE CPU		3.043 seg		4.090 seg		
PONTO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEMENTO INTERPOLADO		MÉTODO DE GALERKIN		POTENCIAL/ FLUXO
		SOLUÇÃO	ERRO (%)	SOLUÇÃO	ERRO (%)	
1'	25.000	25.346	1.34	25.549	2.20	Potencial
2'	50.000	49.873	.25	49.873	.25	Potencial
3'	75.000	74.517	.64	74.314	.91	Potencial
A	50.000	50.000	.00	50.000	.00	Potencial
B	12.500	12.144	2.85	12.330	1.36	Potencial
C	35.500	35.990	1.38	35.361	.39	Potencial
D	-2.084	-1.704	18.23	-1.743	16.36	Fluxo
E	-5.793	-5.855	1.07	-4.684	19.14	Fluxo
F	- ∞	-226.134	-	-79.708	-	Fluxo

TAB. VII.55

A análise das tabelas VII.48 a VII.55 permite concluir que de uma forma geral, o método da colocação utilizando o elemento interpolado leva a resultados tão precisos quanto o método de Galerkin.

Como o segundo exige em média 20 a 30 por cento a mais de tempo de processamento que o primeiro pode-se concluir que, com base nos exemplos propostos e não se impondo à simetria da matriz de potencial, o processo do elemento interpolado se mostra mais eficiente que o Método de Galerkin.

VII.3.2 - Análise dos exemplos propostos com imposição de simetria na matriz de potencial

Assim como procedido para a comparação dos processos do Método da Colocação, foram analisados os exemplos do ítem VII.2 com o Método de Galerkin, impondo-se a simetria da matriz de potencial total, nos moldes daquilo que se preconiza no ítem V.3.

Os resultados desta análise estão resumidos nas tabelas VII.56 apresentada a seguir.

t = .843 seg

PONTO	SOLUÇÃO	P/F
A	149.902	P
B	149.972	P
C	224.997	P
1'	74.990	P
2'	74.988	P
3'	74.990	P
D	75.003	F
E	75.003	F
F	-74.710	F
G	-74.710	F

(a) Exemplo VII.2.1
Modelo B

t = .840 seg

PONTO	SOLUÇÃO	P/F
1'	1.371	P
2'	1.243	P
3'	1.187	P
H	1.143	P
I	.467	F
J	-.284	F
F	-.360	F

(b) Exemplo VII.2.2
Modelo B

t = 1.627 seg

PONTO	SOLUÇÃO	P/F
1'	1.351	P
2'	1.201	P
3'	1.133	P
D	1.101	P
A	.249	F
B	-.216	F
C	-.309	F

(c) Exemplo VII.2.2
Modelo D

t = 1.554 seg

PONTO	SOLUÇÃO	P/F
1'	25.554	P
2'	49.873	P
3'	74.312	P
A	50.013	P
B	12.285	P
C	35.381	P
D	-4.231	F
E	-10.561	F
F	-79.723	F

(d) Exemplo VII.2.3
Modelo B

t = 4.092 seg

PONTO	SOLUÇÃO	P/F
1'	25.548	P
2'	49.875	P
3'	74.317	P
A	50.004	P
B	12.556	P
C	35.385	P
D	-1.872	F
E	-4.682	F
F	-79.714	F

(e) Exemplo VII.2.3
Modelo D

TAB. VII.56 - Resultados de exemplos propostos, analisados pelo método de Galerkin com imposição da simetria da matriz de potencial

Ao se compararem os resultados das tabelas VII.56 (a, b, c, d, e) com aqueles das tabelas VII.51, VII.52, VII.53, VII.54, VII.55, respectivamente, correspondentes à resolução pelo Método de Galerkin, observa-se que o erro causado pela simetrização da Matriz de Potencial formada por este método é praticamente nulo em todos os exemplos.

Este fato não ocorreu com o processo do Elemento Interpolado, conforme pode ser observado no ítem VII.2, embora os erros oriundos da simetrização para este processo tenham sido em geral baixos.

A análise que ora se faz necessária portanto, é a comparação dos resultados obtidos por meio do Método de Galerkin, com aqueles calculados para o mesmo problema com malhas mais refinadas, pelo processo do Elemento Interpolado. Este último processo só pode ser considerado mais eficiente se, com um menor tempo de CPU, malhas mais refinadas levarem a resultados tão ou mais precisos que os obtidos pelo Método de Galerkin.

Para proceder a esta análise, são comparados os modelos tipo D resolvidos pelo elemento interpolado com os modelos tipo B analisados por Galerkin, nos exemplos VII.2.1, VII.2.2 e VII.2.3. Portanto, há que se compararem as tabelas VII.18 a VII.20, VII.31 a VII.33 e VII.45 a VII.47 respectivamente com as VII.56(a), VII.56(b) e VII.56(d).

A comparação entre as tabelas VII.18 a VII.20 e VII.56(a) leva a concluir que, com a simetrização, o uso do elemento interpolado exigiu mais tempo de CPU e não chegou a obter resultados tão precisos quanto aqueles calculados com malha

menos refinada pelo método de Galerkin.

O mesmo não ocorreu com a comparação das tabelas VII. 31 a VII.33 com VII.56(b). Neste caso, os resultados se mostraram mais precisos para o elemento interpolado, no entanto, o tempo de CPU exigido por este processo foi maior 50% em relação ao mesmo exigido pelo Método de Galerkin.

Comparadas as tabelas VII.45 a VII.47 com a (VII.56(E) conclui-se que o processo do elemento interpolado para a malha mais refinada levou a resultados tão eficazes quanto os obtidos com o Método de Galerkin, porém exigindo praticamente 2 vezes o tempo de CPU gasto por este último.

O que se pode afirmar de forma conclusiva é que sem dúvida, ao se impor a simetria da Matriz de Potencial, o Método de Galerkin se torna mais eficaz que os métodos de colocação ora estudados, considerando os exemplos propostos.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES

Neste trabalho, analisou-se o desempenho de 4 técnicas diferentes para se proceder à junção do MEC com o MEF em problemas governados pela Equação de Laplace.

Inicialmente, estudaram-se 3 técnicas diferentes para resolver problemas nos quais se têm descontinuidades de fluxo, usando o Método da Colocação. As técnicas analisadas estão descritas no Capítulo IV e estão referidas como:

. Técnica do Elemento Não Conforme
. Técnica do Elemento Interpolado
. Técnica do Tratamento Geométrico

Várias análises foram feitas no Capítulo VII e se pode dizer que, dentro do contexto envolvendo apenas elementos de contorno, os resultados foram equivalentes. Neste caso, devido à maior facilidade de se estabelecerem algoritmos numéricos, especialmente no que tange à técnica de subregiões, o uso da técnica do elemento interpolado se mostra mais vantajoso.

A eficiência das três técnicas foi também estudada em análises envolvendo malhas compostas por elementos finitos e por elementos de contorno.

Observa-se que, em não se forçando a simetria da Matriz

de potencial, novamente a precisão dos resultados obtidos nas três foi semelhante. Cumpre salientar, no entanto, que quando se usa o elemento não conforme, na região de interface com elementos finitos, há que se proceder a uma análise cuidadosa do deslocamento do nó funcional da extremidade do elemento, pois afastamentos grandes criam incompatibilidades entre valores de elementos finitos e de contorno. Por outro lado, afastamentos pequenos levam a linhas semelhantes na matriz $\underset{\sim}{G}$, causando problemas de mal condicionamento.

Portanto, a técnica do elemento interpolado permite uma flexibilidade maior no sentido de se fixar o afastamento do nó funcional, pois, embora haja também o perigo do mal condicionamento da matriz $\underset{\sim}{G}$, afastamentos maiores não impõem restrição alguma à junção com os elementos finitos.

Inclusive, análises comparativas do elemento interpolado mostraram que pode-se, em malhas medianamente refinadas, sem imposição de simetria da Matriz de Potencial, adotar um afastamento do nó funcional de 25% do comprimento do elemento, sem causar grandes imprecisões.

Cabe ressaltar ainda que a técnica do Tratamento Geométrico implicou em resultados cuja precisão foi ligeiramente inferior à das outras duas, não sendo possível portanto com os exemplos analisados descartar a princípio nenhum dos três procedimentos baseados no Método da Colocação.

Impondo-se a simetria da Matriz de Potencial, pode-se dizer que os resultados obtidos com a técnica do tratamento geométrico inviabilizaram a sua utilização.

Por outro lado, a imposição da simetria gerou resultados, em alguns casos, equivalentes em termos de precisão para o elemento interpolado e o não conforme. Em outros, porém, aquele se mostrou mais eficiente que este.

Finalmente, a técnica do elemento interpolado foi comparada com o Método de Galerkin. Esta análise mostrou que simetrizar a Matriz de Potencial obtida com o método de Galerkin leva a resultados praticamente iguais aos obtidos sem simetrização.

Além disso, a comparação nos permite concluir que, se não for imposta a condição de simetria da Matriz de Potencial, o Método da Colocação com o uso do elemento interpolado leva a resultados tão satisfatórios quanto os obtidos com o Método de Galerkin, exigindo cerca de 25% menos tempo de processamento, para a montagem das matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$ o que torna o primeiro mais eficiente que o segundo.

Ao se impor a simetrização, no entanto, o Método de Galerkin se apresenta mais eficiente que os Métodos de Colocação, no que diz respeito à eficácia de resultados, uma vez que com malhas menos refinadas leva a menores erros em relação à solução analítica.

No que tange à análise de maior economia em termos de tempo de CPU, há que se observar a sua dependência do desenvolvimento de "solvers" apropriados à matriz simétrica parcialmente em banda formada no Método de Galerkin, o que não foi objeto deste trabalho.

Desta forma, pode-se efetivamente comparar se a maior economia de custo computacional está associada ao Método de Galerkin com simetrização ou ao Método da Colocação sem simetrização.

Torna-se importante salientar no entanto, que a simetrização proposta tem características meramente matemáticas, nada possuindo em comum com o problema físico que se apresenta.

APÊNDICE I

MONTAGEM DAS MATRIZES $\underset{\sim}{H}$ E $\underset{\sim}{G}$ NO MÉTODO DO ELEMENTO INTERPOLADO - EXEMPLO

Suponhamos a malha hipotética e didática apresentada na figura (I.1).

- P1 representa o nó 2 deslocado.

  P2 representa o nó 3 deslocado.

- nós 2 e 3 coincidentes, refletindo descontinuidade geométrica e física ($q_2 \neq q_3$).

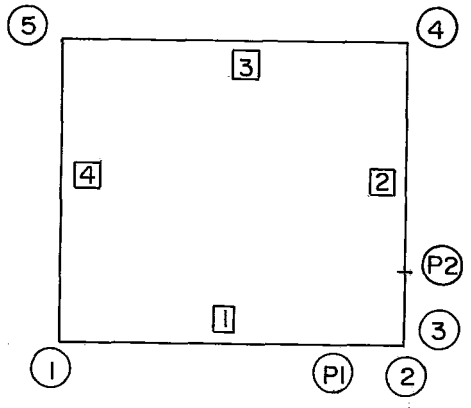


Fig. I. 1 – Exemplo de Aplicação do Método do Elemento Interpolado

De acordo com o ítem IV.2.1.2, temos:

$$u_{p1} = \phi_1^1\, u_1^i + \phi_2^1\, u_1^f \qquad q_{p1} = \phi_1^1\, q_1^i + \phi_2^1\, q_1^f$$

$$u_{p2} = \phi_1^2\, u_2^i + \phi_2^2\, u_2^f \qquad q_{p2} = \phi_1^2\, q_2^i + \phi_2^2\, q_2^f \qquad \text{I.1}$$

onde: ϕ_1^1, ϕ_2^1 → valores das funções de interpolação ϕ_1 e ϕ_2 relativas ao elemento 1, no ponto p_1.

ϕ_1^2, ϕ_2^2 → valores das funções de interpolação ϕ_1 e ϕ_2 relativas ao elemento 2 no ponto p_2.

u_k^i → potencial no início do elemento k.

u_k^f → potencial no final do elemento k.

A linha da eq. $\underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G}\ \underset{\sim}{q}$ correspondente ao ponto P_1 é dada por:

$$C_{p1}u_{p1}+(H^i_{p1,1}u^i_1+H^f_{p1,1}u_{p1}) + (H^i_{p1,2}u^i_2+H^f_{p1,2}u^f_2) + (H^i_{p1,3}u^i_3+H^f_{p1,3}u^f_3) +$$

$$+ (H^i_{p1,4}u^i_4+H^f_{p1,4}u^f_4) = (G^i_{p1,1}q^i_1+G^f_{p1,1}q_{p1}) + (G^i_{p1,2}q^i_2+G^f_{p1,2}q^f_2) +$$

$$+ (G^i_{p1,3}q^i_3+G^f_{p1,3}q^f_3) + (G^i_{p1,4}q^i_4+G^f_{p1,4}q^f_4) \qquad \text{(I.2)}$$

onde: . $H^i_{p1,1}$ = termo de $\underset{\sim}{H}$ no início do elemento 1, com o ponto fonte em p1.

. $H^f_{p1,1}$ = termo de $\underset{\sim}{H}$ no final do elemento 1, com o ponto fonte em p1.

. u_1^i = potencial no início do elemento 1.

. $C_{p1} = 2\pi \cdot (.5) = \pi$

Introduzindo a exp. (I.1) em (I.2), ficamos com:

$$C_{p1}(\phi_1^1 u_1^i + \phi_2^1 u_1^f) + (H_{p1,1}^i u_1^i + H_{p1,1}^f(\phi_1^1 u_1^i + \phi_2^1 u_i^f)) +$$

$$+ (H_{p1,2}^i u_2^i + H_{p1,2}^f u_2^f) + (H_{p1,3}^i u_3^i + H_{p1,3}^f u_3^f) + (H_{p1,4}^i u_4^i + H_{p1,4}^f u_4^f) =$$

$$= (G_{p1,1}^1 q_1^i + G_{p1,1}^f(\phi_1^1 q_1^i + \phi_2^1 q_1^f)) + (G_{p1,2}^i q_2^i + G_{p1,2}^f q_2^f) +$$

$$+ (G_{p1,3}^i q_3^i + G_{p1,3}^f q_3^f) + (G_{p1,4}^i q_4^i + G_{p1,4}^f q_4^f). \qquad (I.3)$$

Rearranjando os termos da equação e considerando:

. $u_1^i = u_4^f = u_1$. $q_1^i = q_4^f = q_1$

. $u_2^f = u_3^i = u_4$. $q_2^f = q_3^i = q_4$

. $u_3^f = u_4^i = u_5$. $q_3^f = q_4^i = q_5$

. $u_1^f = u_2$. $q_1^f = q_2$

. $u_2^i = u_3$. $q_2^i = q_3$

Temos:

$$(C_{p1}\phi_1^1+H_{p1,1}+H_{p1,1}^f\phi_1^1+H_{p1,4}^f)u_1 + (C_{p1}\phi_2^1+H_{p1,1}^f\phi_2^1)u_2 +$$

$$+ H_{p1,2}^i u_3+(H_{p1,2}^f+H_{p1,3}^i)u_4 + (H_{p1,3}^f+H_{p1,4}^i)u_5 =$$

$$= (G_{p1,1}^i+G_{p1,1}^f\phi_1^1+G_{p1,4}^f)q_1 + (G_{p1,1}^f\phi_2^1)q_2 + G_{p1,2}^i q_3 +$$

$$+ (G_{p1,2}^f+ G_{p1,3}^i)q_4 + (G_{p1,3}^f+G_{p1,4}^i)u_5. \qquad (I.4)$$

A exp. (I.4) pode ser facilmente traduzida em termos matriciais.

APÊNDICE II

CORREÇÃO DA MATRIZ $\underset{\sim}{H}$ DEVIDO A DESCONTINUIDADE GEOMÉTRICA E DE FLUXO, USANDO O TRATAMENTO GEOMÉTRICO - EXEMPLO

Tomemos a malha simples da fig. II.1.

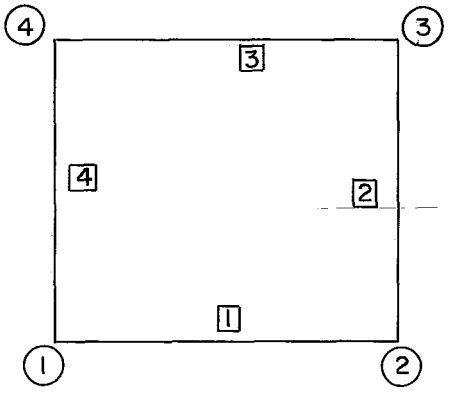


Fig. II.1 – Exemplo de Aplicação do Método do Tratamento Geométrico

Matricialmente, a equação $\underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G}\ \underset{\sim}{p}$ é expressa da seguinte forma (sem consideração de tratamento de canto):

$$\begin{vmatrix} H^f_{14}+H^i_{11} & H^f_{11}+H^i_{12} & H^f_{12}+H^i_{13} & H^f_{13}+H^i_{14} \\ H^f_{24}+H^i_{21} & H^f_{21}+H^i_{22} & H^f_{22}+H^i_{23} & H^f_{23}+H^i_{24} \\ H^f_{34}+H^i_{31} & H^f_{31}+H^i_{32} & H^f_{32}+H^i_{33} & H^f_{33}+H^i_{34} \\ H^f_{44}+H^i_{41} & H^f_{41}+H^i_{42} & H^f_{42}+H^i_{43} & H^f_{43}+H^i_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G^f_{14}+G^i_{11} & G^f_{11}+G^i_{12} & G^f_{12}+G^i_{13} & G^f_{13}+G^i_{14} \\ G^f_{24}+G^i_{21} & G^f_{21}+G^i_{22} & G^f_{22}+G^i_{23} & G^f_{23}+G^i_{24} \\ G^f_{34}+G^i_{31} & G^f_{31}+G^i_{32} & G^f_{32}+G^i_{33} & G^f_{33}+G^i_{34} \\ G^f_{44}+G^i_{41} & G^f_{41}+G^i_{42} & G^f_{42}+G^i_{43} & G^f_{43}+G^i_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{vmatrix} \qquad (II.1)$$

Suponhamos que o valor do fluxo no nõ 2, na direção perpendicular ao membro 2 seja prescrito e igual a $q_2^{(2)}$.

De acordo com o ítem IV.2.1.3, o valor de $q_2^{(1)}$ é dado por:

$$q_2^{(1)} = q_2^{(2)} - \{\frac{1}{\ell_2} u_3 - \frac{1}{\ell_1} u_1 + \frac{(\ell_2-\ell_1)}{\ell_2\ \ell_1} u_2\}K \qquad (II.2)$$

O lado direito da equação, com respeito ao nõ 2 passa a ser escrito da forma:

- linha 1:

$$G_{11}^f * \{q_2^{(2)} - \{\frac{1}{\ell_2} u_3 - \frac{1}{\ell_1} u_1 + \frac{(\ell_2-\ell_1)}{\ell_2\ \ell_1} u_2\}K\} + G_{12}^i\ q_2^{(2)} \qquad (II.3)$$

- linha 2:

$$G_{21}^f * \{q_2^{(2)} - \{\frac{1}{\ell_2} u_3 - \frac{1}{\ell_1} u_1 + \frac{(\ell_2-\ell_1)}{\ell_2\ \ell_1} u_2\}K\} + G_{22}^i\ q_2^{(2)}$$

- linha 3 e linha 4 → de forma análoga.

Adotando o valor de $q_2^{(2)}$ para o lado direito e fazendo as devidas correções na matriz $\underset{\sim}{H}$, passamos a ter a exp. (II.1) escrita da seguinte forma:

$$
\begin{vmatrix}
H^f_{14}+H^i_{11}-1/\ell 1 & H^f_{11}+H^i_{12}+\left(\frac{\ell_2-\ell_1}{\ell_2\ \ell_1}\right) & H^f_{12}+H^i_{13}+1/\ell 2 & H^f_{13}+H^i_{14} \\
H^f_{24}+H^i_{21}-1/\ell 1 & H^f_{21}+H^i_{22}+\left(\frac{\ell_2-\ell_1}{\ell_2\ \ell_1}\right) & H^f_{22}+H^i_{23}+1/\ell 2 & H^f_{23}+H^i_{24} \\
H^f_{34}+H^f_{31}-1/\ell 1 & H^f_{31}+H^i_{32}+\left(\frac{\ell_2-\ell_1}{\ell_2\ \ell_1}\right) & H^f_{32}+H^i_{33}+1/\ell 2 & H^f_{33}+H^i_{34} \\
H^f_{44}+H^i_{41}-1/\ell 1 & H^f_{41}+H^i_{42}+\left(\frac{\ell_2-\ell_1}{\ell_2\ \ell_1}\right) & H^f_{42}+H^i_{43}+1/\ell 2 & H^f_{43}+H^i_{44}
\end{vmatrix}
*
\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} \text{Matriz } G \\ \text{Anterior} \\ (\text{Exp. II.1}) \end{vmatrix}
*
\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2^{(2)} \\ q_3 \\ q_4 \end{vmatrix}
$$

APÊNDICE III

MATRIZES DE INTERPOLAÇÃO ($\underset{\sim}{M}$)

Para o caso de problemas de potencial, a matriz de interpolação ($\underset{\sim}{M}$) para cada elemento é dada por:

i) Para Elementos Constantes

$$\underset{\sim}{M} = |L|; \quad L = \text{comprimento do elemento.}$$

ii) Para Elementos Lineares

$$\underset{\sim}{M} = \frac{L}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

iii) Para Elementos Quadráticos

$$\underset{\sim}{M} = \frac{L}{15} \begin{vmatrix} 2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

ANEXO IV

IMPLEMENTAÇÃO DA PRESCRIÇÃO DE POTENCIAL - EXEMPLO

O critério utilizado para a prescrição de $\underset{\sim}{u}$, permitindo o cálculo direto de $\underset{\sim}{P}$ na direção prescrita pode ser exemplificado como se mostra abaixo:

- Passo 1 (na Subrotina CONC1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ \overline{u}_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2+\Delta_2 \\ \overline{P}_3 \end{vmatrix} \qquad (VI.1)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & \phi & a_{13} \\ a_{21} & \phi & a_{23} \\ a_{31} & \phi & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ \Delta_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{p}_1 - a_{12}\,\overline{u}_2 \\ \overline{p}_2 - a_{22}\,\overline{u}_2 \\ \overline{p}_3 - a_{32}\,\overline{u}_2 \end{vmatrix} \qquad (VI.2)$$

A incógnita passa a ser Δ_2.

- Passo 2 (na Subrotina MODIF)

Após a resolução do sistema de equações, basta formar os vetores $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{p}$ da forma:

$$\underset{\sim}{u} = \begin{vmatrix} u_1 \text{ CALCULADO} \\ \overline{u}_2 \\ u_3 \text{ CALCULADO} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{p} = \begin{vmatrix} \overline{p}_1 \\ \overline{p}_2 - \Delta_{2\text{CALCULADO}} \\ \overline{p}_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(VI.3)}$$

APÊNDICE V

CÁLCULO DA MATRIZ DE INTERPOLAÇÃO M PARA O ELEMENTO NÃO CONFORME

A matriz $\underset{\sim}{M}$ apresentada no apêndice III para o caso da função de interpolação linear não é válida para o elemento não conforme, uma vez que para este há que se modificar a função de interpolação (conforme se observa no ítem IV.2.1.1).

A expressão (V.1) nos possibilita calcular esta matriz.

$$\underset{\sim}{M} = \int_{\Gamma_\ell} \underset{\sim}{\phi}\ \underset{\sim}{\psi}^T\, d\Gamma \qquad (V.1)$$

onde: . $\underset{\sim}{\phi}$ = matriz de interpolação associado ao potencial.

. $\underset{\sim}{\psi}$ = função de interpolação associado ao fluxo.

No caso do elemento não conforme implementado, as duas funções de interpolação são iguais e lineares, e dependem basicamente da posição do afastamento do nó funcional: se da extremidade esquerda ou direita do elemento.

Serão considerados a seguir os 2 casos.

V.1 - NÓ FUNCIONAL AFASTADO DA EXTREMIDADE ESQUERDA DO ELEMENTO

De acordo com o ítem IV.2.1.1, as funções de interpolação para este caso são dadas por:

$$\underset{\sim}{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1(\eta) \\ \phi_2(\eta) \end{Bmatrix}$$

onde: $\cdot\ \phi_1(\eta) = \frac{\ell}{2}\ \frac{(1-\eta)}{(\ell-a)}$ (V.2)

$\cdot\ \phi_2(\eta) = \frac{\ell(1+\eta)-2a}{2(\ell-a)}$

-a = distância do nõ funcional à extremidade esquerda.

Com o uso das expressões (V.2), podemos calcular os termos da matriz $\underset{\sim}{M}$, conforme se observa a seguir:

$$\underset{\sim}{M} = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} \qquad (V.3)$$

$$\cdot\ M_{11} = \int_{-1}^{1} \phi_1(\eta)\ \phi_1(\eta)\,|J|\ d\eta \qquad (V.4)$$

$$\therefore\ M_{11} = \frac{\ell}{2}\ \{\frac{\ell^2}{(\ell-a)^2}\ .\ \frac{2}{3}\} \qquad (V.5)$$

onde ℓ = comprimento do elemento

$$\cdot\ M_{12} = M_{21} = \int_{-1}^{1} \phi_1(\eta)\ \phi_2(\eta)\ |J|d\eta$$

$$\therefore\ M_{12} = M_{21} = \frac{\ell}{2}\ \{\frac{\ell^2}{(\ell-a)^2}(\frac{1}{3} - \frac{a}{\ell})\} \qquad (V.6)$$

$$\cdot\ M_{22} = \int_{-1}^{1} \phi_2(\eta)\ \phi_2(\eta)\ |J|\,d\eta$$

$$\therefore\ M_{22} = \frac{\ell}{2}\left\{\frac{\ell^2}{(\ell-a)^2}\left(\frac{2}{3} - \frac{2a}{\ell} + \frac{2a^2}{\ell^2}\right)\right\} \qquad (V.7)$$

V.2 - NÓ FUNCIONAL AFASTADO DA EXTREMIDADE DIREITA DO ELEMENTO

As funções de interpolação para este caso são dadas por:

$$\underset{\sim}{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1(\eta) \\ \phi_2(\eta) \end{Bmatrix} \qquad (V.8)$$

onde: $\phi_1(\eta) = \phi_2(\eta)$ da expressão V.2

$\phi_2(\eta) = \phi_1(\eta)$ da expressão V.2

(neste caso a é a distância do nó funcional à extremidade direita).

Desse modo, os termos da matriz $\underset{\sim}{M}$ são obtidos a partir dos calculados no caso anterior, conforme se observa a seguir:

$$\cdot\ M_{11} = M_{22} \quad \text{(expressão V.7)} \qquad (V.9)$$

$$\cdot\ (M_{12}=M_{21}) = (M_{12}=M_{21}) \quad \text{(expressão V.6)} \qquad (V.10)$$

$$:\ M_{22} = M_{11} \quad \text{(expressão V.5)} \qquad (V.11)$$

REFERÊNCIAS

|1| BREBBIA, C.A. - The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London - 1978.

|2| BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. e WROBEL, L.C. - Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering; Springer-Verlag - 1984.

|3| BREBBIA, C.A. e FERRANTE, A.J. - Computational Methods for the Solution of Engineering Problems. Pentech Press, London - 1978.

|4| SANTIAGO, J.A. FONTES - Tese de Mestrado a ser apresentada COPPE/UFRJ - 1982.

|5| PAULA, F. AMORIM - Obtenção de Matriz de Rigidez Utilizando o Método dos Elementos de Contorno, Tese M.Sc. - COPPE/UFRJ - 1986.

|6| MUSTOE, G.G.W., VOLAIT, F. e ZIENKIEWICZ, O.C. - A Symmetric Direct Boundary Integral Equation Method for Two Dimensional Elastostatics. RES Mechanica - 0143-0084/82/0004-0057 - 1982.

|7| RUDOLPHI, T.J. - Nonhomogeneous Potential and Elasticity Problems by Combined Boundary and Finite Elements (Advanced Topics in Boundary Element Analysis - AMD - V.72).

|8| PATTERSON, C. e SHEIKH, M.A. - Non-Conforming Elements for Stress Analysis.

|9| HALBRITTER, A.L., TELLES, J.C.F. e MANSUR, W.J. - Aplicações dos Elementos de Contorno a Problemas de Campo, conferência sobre análise, projeto e construção de estruturas de centrais nucleares, Porto Alegre, RS, Abril de 1978.

|10| GIORGIOU, PANOS - The Coupling of the Direct Boundary Element Method with the Finite Element Displacement Technique in Elastostatics. (Thesis - D.Ph. - University of Southampton - Faculty of Engineering and applied Science - May/1981).