ESTUDO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DO
CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

Marta de Souza Lima Velasco

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Yosiaki Nagato, D. Sc.
(Presidente)

Prof. Luiz Eloy Vaz, Dr.-Ing.

Prof. Libânio Miranda Pinheiro, Dr.

Prof. Ibrahim Abd-El-Malik Shehata, Ph.D.

Prof. Paulo Chaves de R. Martins, Dr. ECP.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
AGOSTO DE 1994

VELASCO, MARTA DE SOUZA LIMA

Estudo Numérico-Experimental do Critério de Resistência em Lajes de Concreto Armado [Rio de Janeiro] 1994.

XI, 133 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D. Sc., Engenharia Civil, 1994)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Concreto Armado

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

A Sylla, Mariana e Suzana

A meus pais

AGRADECIMENTOS

- Aos professores Yosiaki Nagato e Luiz Eloy Vaz pela consciente orientação, apoio e incentivo.

- À equipe do Laboratório de Estruturas do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro pela participação no trabalho.

- A Carlos Gustavo de Souza Lima Werner pela eficiente colaboração.

- A CAPES, CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY ON THE STRENGTH CRITERION OF REINFORCED CONCRETE SLABS.

Marta de Souza Lima Velasco

AUGUST, 1994

Thesis Supervisors: Prof. Yosiaki Nagato and Prof. Luiz Eloy Vaz
Department: Civil Engineering

Ultimate strength design of reinforced concrete slabs is usually based on the so-called normal moment yield criterion developed by Johansen. According to recent research, the surface obtained from Johansen's yield criterion overestimates the strength of slabs subjected to pure torsional moments. There are experimental results published in the researched literature only of slabs subjected to pure torsion.

The objective of this study is the numerical and experimental investigation of orthogonally reinforced concrete slabs yield surfaces.

The experimental research comprises a series of eight orthogonally reinforced concrete slabs loaded to failure and subjected to pure torsional moments. Five of them simulated combinations of flexural and torsional moments using the equivalent slab concept introduced in this work. The slabs dimensions are 1,6 m x 1,6 m x 0,13 m and the geometrical reinforcement ratios range from 0,38% to 0,73%.

In the numerical study, a methodology and a computacional program were developed in order to obtain points of reinforced concrete slabs yield surface. The computacional program results were validated by comparision with experimental results.

The numerical and experimental results were compared with the predictions

obtained from Johansen's yield line theory. The yield surface proposed by Johansen overestimates the ultimate torsional resistance of slabs with moderate or high reinforcement ratios and subjected to significant torsional moments.

The Johansen yield surface in the region where there are only ultimate flexural moments acting in two orthogonal directions was also studied with the computacional program developed.

A new yield surface is proposed based on the numerical and experimental results. The equations of this surface are presented.

An analysis is made on how the proposed yield surface will affect the design of reinforced concrete slabs, usually based on the Johansen's yield surface.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

ESTUDO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DO CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

Marta de Souza Lima Velasco

AGOSTO, 1994

Orientadores: Prof. Yosiaki Nagato e Prof. Luiz Eloy Vaz
Programa: Engenharia Civil

Usualmente, a resistência última para projeto de lajes de concreto armado é baseada no critério de escoamento desenvolvido por Johansen. Segundo pesquisas recentes, a clássica superfície obtida a partir do critério de colapso de Johansen superestima a resistência à torção pura dos elementos de laje. Na literatura pesquisada só há resultados experimentais na região de torção pura.

O objetivo deste trabalho é a verificação experimental e numérica da superfície de colapso de lajes de concreto armado com armaduras ortogonais.

No trabalho experimental, oito lajes de concreto armado com armaduras ortogonais e dimensões de 1,6 m x 1,6 m x 0,13 m e taxas de armadura variando entre 0,38% e 0,73% foram ensaiadas até a ruptura solicitadas a torção pura. Cinco delas simularam solicitação de flexo-torção através do conceito de laje equivalente, introduzido neste trabalho.

No estudo numérico, foram desenvolvidos uma formulação e um programa computacional que permite obter pontos da superfície de colapso de lajes de concreto armado. Os resultados obtidos utilizando o programa foram validados através de uma comparação com resultados experimentais. Foi possível estudar um grande número de combinações de esforços.

Os resultados numéricos e experimentais foram comparados com os resultados obtidos utilizando o critério de Johansen. A superfície de colapso proposta por Johansen conduz a resultados contra a segurança, principalmente na região onde o momento torsor atuante possui valores significativos em relação aos momentos fletores e quando a taxa de armadura é alta ou média.

Com o programa computacional desenvolvido foi pesquisada também a região da superfície de Johansen correspondente a momento torsor nulo e momentos fletores de plastificação atuando em duas direções ortogonais.

As análises experimental e numérica realizadas permitem visualizar as correções necessárias na superfície de Johansen de modo a melhor representar a superfície de colapso em lajes nas diversas regiões (torção pura, flexo-torção e flexão pura). Uma nova superfície de colapso é proposta. A dedução das equações desta superfície é apresentada.

A superfície de colapso de Johansen é utilizada correntemente no dimensionamento de lajes. Com base neste fato, analisa-se as modificações que a nova superfície produz no dimensionamento e como tratar matematicamente o problema.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II - CONCEITOS FUNDAMENTAIS 5

2.1. A superfície de colapso de Johansen 5

2.1.1. O critério de Johansen

2.1.2. Superfície de colapso obtida através do critério de escoamento de Johansen

2.1.3. Desenvolvimento analítico da superfície de Johansen

2.2. Os ensaios apresentados no trabalho de Marti, Leesti e Khalifa 25

CAPÍTULO III - ESTUDO EXPERIMENTAL 27

3.1. O conceito de laje equivalente 27

3.2. Modelos ensaiados 27

3.2.1. Dimensionamento dos modelos

3.2.2. Denominação e dimensões das lajes

3.2.2.1. Definição das lajes equivalentes do grupo 1

3.2.2.2. Definição das lajes equivalentes do grupo 2

3.2.3. Armadura das lajes

3.3. Materiais utilizados 42

3.3.1. Concreto

3.3.2. Aço

3.4. Fabricação dos modelos 43

3..5. Descrição dos ensaios 47

3.5.1. Instrumentação

3.5.1.1. Deslocamentos verticais

3.5.1.2. Deformações específicas na armadura

3.5.1.3. Deformações específicas no concreto

3.5.2. Montagem dos ensaios

3.5.3. Fissuração

3.6. Resultados obtidos 55

3.6.1. Resultados experimentais

3.6.2. Resultados obtidos utilizando a superfície de colapso proposta por Johansen

CAPÍTULO IV - ESTUDO NUMÉRICO 60

4.1. Conceitos gerais 60

4.2. Metodologia proposta 61

4.3. Solução numérica 83

4.4. Procedimento adotado na análise numérica 85

CAPÍTULO V - ANÁLISE DOS RESULTADOS 87

5.1. Comparação de resultados numéricos e experimentais 87

5.2. Interpretação dos resultados 93

CAPÍTULO VI - PROPOSTA PARA CORREÇÃO DA SUPERFÍCIE DE COLAPSO DE JOHANSEN 105

CAPÍTULO VII - DIMENSIONAMENTO DE LAJES 114

7.1. Método de Wood 114

7.2. Dimensionamento via programação matemática 121

7.3. Influência do critério proposto no dimensionamento 123

CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES E SUGESTÕES 124

BIBLIOGRAFIA 127

CAPÍTULO I
INTRODUÇÃO

A verificação e o dimensionamento de lajes de concreto armado são problemas que ocorrem normalmente no cálculo estrutural. Uma estrutura é projetada e dimensionada com os objetivos de afastar a possibilidade de colapso e de atender às condições de utilização para cargas em serviço.

O dimensionamento e a verificação a solicitações normais de elementos estruturais lineares de concreto armado (vigas, pilares, ...) parte dos esforços seccionais fornecidos por modelos já consagrados de análise, e se apoia em recomendações bem definidas nas normas. No caso de lajes de concreto armado ainda há controvérsias no que concerne ao dimensionamento das armaduras ortogonais, uma vez que existem inúmeros modelos disponíveis para a análise e o dimensionamento deve ser consistente com o modelo adotado.

O dimensionamento de lajes geralmente é baseado no teorema do limite inferior, sendo necessário encontrar uma distribuição de momentos tal que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas e a resistência não seja excedida em nenhum ponto da laje. Se estas condições são satisfeitas e a ductilidade é garantida, a carga de colapso da laje é maior ou pelo menos igual à carga de projeto, e a segurança está garantida.

Com base no teorema do limite inferior, vários modelos simplificados são utilizados para calcular os esforços nas lajes e, a partir dos mesmos, dimensioná-las. Por exemplo, processos baseados no método das faixas de Hillerborg, como o de Marcus, não fornecem momentos torsores nas lajes e os momentos fletores têm valores maiores que aqueles obtidos por uma análise mais exata. O dimensionamento, a favor da segurança, recai num problema de flexão simples nas direções ortogonais, podendo ser muito antieconômico.

Há uma tendência crescente para a utilização de programas de elementos finitos na análise dos esforços internos em lajes, principalmente quando são utilizadas lajes lisas. Estes programas fornecem em cada ponto os momentos fletores e os torsores que devem ser levados em conta no dimensionamento, sob pena de comprometer a segurança. O dimensionamento de lajes com consideração de momentos torsores está pouco difundido no meio profissional e é questionado no meio acadêmico e científico. Falta, inclusive, literatura sobre o assunto.

O objetivo deste trabalho é o estudo experimental e numérico das superfícies de colapso, no espaço dos esforços seccionais, de lajes de concreto armado com armaduras ortogonais. Estas superfícies são utilizadas para dimensionamento, verificação da segurança ponto a ponto, análise elasto-plástica e análise limite de placas e cascas de concreto armado. O dimensionamento ótimo consiste em determinar qual a superfície que possui volume mínimo e envolve todos os pontos correspondentes às tensões ou resultante de tensões solicitantes.

Superfície de colapso ou superfície de escoamento é definida como o lugar geométrico das combinações independentes das componentes do tensor das tensões ou das resultantes das tensões que provocam a plastificação do material. Matematicamente, a superfície de escoamento é definida por uma relação funcional entre as componentes do estado de tensões num ponto. A resistência do concreto submetido a um estado multiaxial de tensões é uma função do estado de tensões e deve ser determinada levando em conta a interação de todas as componentes do estado de tensões. De acordo com os postulados da plasticidade, a superfície de escoamento deve ser contínua e convexa, podendo ser regular ou não-regular.

Para materiais heterogêneos, como o concreto armado, a determinação dessas superfícies é complexa, apesar delas existirem em uma grande variedade para os materiais homogêneos.

Nos métodos de análise limite, pelo teorema do limite inferior, as superfícies de colapso representam as restrições de um problema de programação matemática [MENE90].

Uma superfície de colapso a nível de esforços seccionais é também a informação básica da análise elasto-plástica de um material plástico em elementos estruturais onde o conceito de resultante de tensões é mais útil do que o de tensões como em vigas, lajes, cascas etc...

Um critério de escoamento define a resistência de um dado elemento de laje submetido a um campo geral de momentos. Usualmente, a resistência última para projetos de lajes de concreto armado é baseada no critério de escoamento introduzido por Johansen [JOHA43] e posteriormente desenvolvido por Nielsen [NIEL63], Massonet e Save [MASS63], Wolfensberger [WOLF64], Kemp [KEMP65], Morley [MORL66], Lenschow e Sozen [LENS67], [MASS72], [Park80] e [NIEL82]. Johansen desenvolveu uma metodologia para obtenção de superfícies de colapso para lajes de concreto armado. A teoria das charneiras plásticas utiliza esta superfície, não

diretamente, mas usando todos os conceitos que levam à obtenção da mesma. O método de Wood, que é o método mais conhecido para o dimensionamento de placas solicitadas por esforços de flexão e torção, é baseado no critério de escoamento de Johansen.

Segundo pesquisas recentes [MART87a,b], [AFON89], a clássica superfície obtida através do critério de Johansen superestima a resistência à torção pura dos elementos de laje. Na literatura pesquisada só há resultados experimentais na região de torção pura. Portanto, o método de Wood que é baseado nesta superfície, pode conduzir a resultados contra a segurança.

O trabalho está organizado em oito capítulos, sendo esta introdução o primeiro deles.

No capítulo II estão resumidos os conceitos fundamentais da teoria de Johansen, a superfície obtida através deste critério e o desenvolvimento analítico desta superfície.

No capítulo III, o trabalho experimental é descrito. Inicialmente coloca-se o conceito de laje equivalente e a escolha dos modelos. Os materiais utilizados, a fabricação dos modelos, a montagem, a instrumentação dos ensaios e os resultados obtidos são apresentados.

O capítulo IV aborda o trabalho numérico. Apresenta-se a metodologia proposta, cuja primeira versão foi desenvolvida em [AFON89], o modelo implementado e a solução das equações não-lineares utilizando o método de Newton-Raphson convencional.

No capítulo V, os resultados numéricos e experimentais são comparados e analisados. Estes resultados são comparados também com os resultados obtidos utilizando a teoria de Johansen. Uma nova superfície de colapso é proposta.

No capítulo VI, as equações da superfície de colapso proposta são deduzidas.

No capítulo VII, o método de Wood, para dimensionamento de lajes solicitadas por flexo-torção, que utiliza de forma indireta a superfície de Johansen é discutido. Analisa-se como a nova superfície de colapso influencia no dimensionamento e como implementá-la quando a ferramenta utilizada é a programação matemática.

No capítulo VIII são apresentadas as conclusões deste trabalho e algumas sugestões para pesquisas posteriores.

CAPÍTULO II
CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1. A Superfície de Colapso de Johansen

2.1.1. O Critério de Johansen

Um critério de escoamento define a resistência de um dado elemento de laje, no caso, submetido a um campo geral de momentos. Usualmente, a resistência última para projetos de lajes de concreto armado é baseada no critério de escoamento desenvolvido por Johansen [JOHA43] e posteriormente por [NIEL63], [MASS63], [WOLF64], [KEMP65], [MORL66], [LENS67], [MASS72], [PARK80] e [NIEL82].

A condição de escoamento de Johansen é baseada no seguinte critério físico: "O escoamento ocorre quando o momento fletor atuante em uma seção transversal de inclinação θ em relação ao eixo x (fig.2.1) atinge um certo valor que depende apenas do ângulo θ e dos momentos resistentes nas direções das armaduras" [MASS72]. Isto significa que, na condição de escoamento da laje, este critério considera que a resistência de uma seção depende apenas do momento normal de flexão, sendo por esta razão também conhecido como o critério de escoamento do momento normal [NIEL82].

Com relação ao comportamento plástico do material, o critério de Johansen assume as seguintes hipóteses básicas :

1. A taxa de armadura existente é suficientemente baixa para impedir que a laje entre em colapso pelo esmagamento do concreto comprimido antes do mecanismo de colapso ter sido formado.

2. As forças cisalhantes não possuem efeito apreciável na ruptura da laje.

3. Os esforços de membrana têm influência negligenciável no colapso da laje.

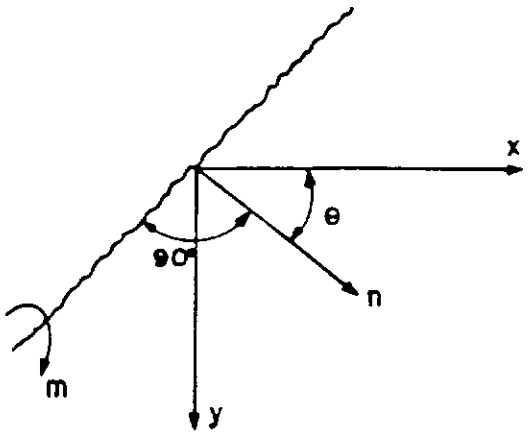


Figura 2.1 - Parâmetros básicos do critério de Johansen

Descrição do Critério

No critério de Johansen, a linha de escoamento real, ou a linha de plastificação, é definida como a linha no plano da laje onde as rotações plásticas ocorrem e através da qual as barras estão escoando.

O momento resistente último, por unidade de comprimento, que atua numa linha de ruptura que faz um ângulo qualquer com uma das direções das armaduras é obtido a partir dos momentos resistentes últimos nas direções das armaduras. A figura 2.2 mostra uma linha de ruptura real que, por simplificação, pode ser substituída por uma linha fictícia "escalonada" correspondente a uma série de pequenos degraus ortogonais a cada uma das direções da armadura.

O momento último que atua numa linha de ruptura genérica é obtido por considerações de equilíbrio em um elemento infinitesimal, de acordo com a figura 2.3.

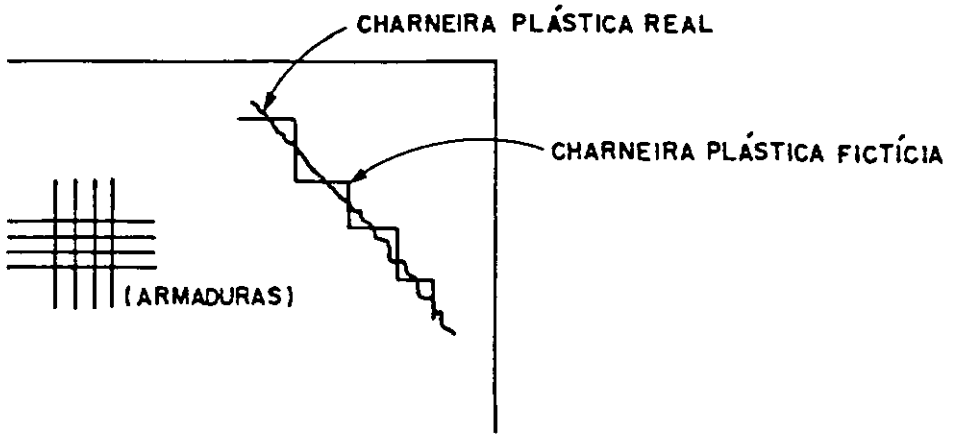


Figura 2.2 - Linhas de plastificação real e fictícia numa laje de concreto armado.

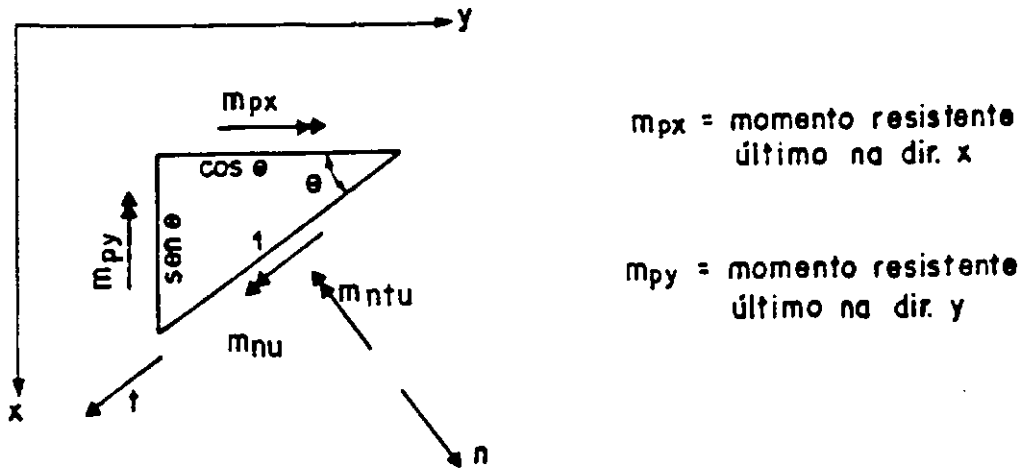


Figura 2.3 - Diagrama de momentos resistentes num elemento de laje.

Fazendo-se o equilíbrio nas direções "n" e "t", chega-se a:

$$m_{ku} = m_{px}\cos^2\theta + m_{py}sen^2\theta \qquad (2.1)$$

$$m_{ntu} = (m_{px} - m_{py})sen\theta\cos\theta \qquad (2.2)$$

Apesar do critério de Johansen ser estabelecido apenas para momentos normais à linha de escoamento, o único caso em que o momento torsor resistente é nulo é quando $m_{px} = m_{py}$. Neste caso, a laje é dita estar armada isotropicamente.

A determinação do momento solicitante na direção normal à linha de ruptura (m_n) para um campo de momentos atuantes generalizado (m_x, m_y, m_{xy}), se dá também por considerações de equilíbrio para um elemento infinitesimal, como mostra a figura 2.4.

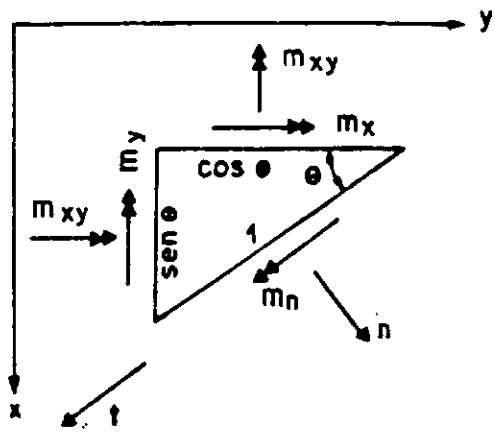


Figura 2.4 - Diagrama de momentos solicitantes em um elemento de laje.

Fazendo-se as considerações de equilíbrio no elemento indicado na figura 2.4, chega-se a:

$$m_n = m_x \cos^2\theta + m_y sen^2\theta + m_{xy} sen\ 2\theta \qquad (2.3)$$

A condição de escoamento fica, então, estabelecida quando o momento normal solicitante (m_n), torna-se igual ao momento normal resistente último (m_{nu}), ou seja:

$$m_n = m_{nu} \qquad (2.4)$$

Para lajes armadas em ambas as faces, superior e inferior, consideram-se os momentos normais resistentes últimos de forma independente um do outro, ou seja :

m_{nu}^{+} - momento normal resistente último obtido a partir dos momentos resistentes últimos nas direções das armaduras inferiores (m_{px}^{+} e m_{py}^{+}). A linha de ruptura correspondente é chamada de charneira positiva.

$$m_{nu}^{+} = m_{px}^{+} \cos^2 \theta + m_{py}^{+} sen^2 \theta \tag{2.5}$$

m_{nu}^{-} - momento normal resistente último obtido a partir dos momentos resistentes últimos nas direções das armaduras superiores (m_{px}^{-} e m_{py}^{-}). A linha de ruptura correspondente é chamada de charneira negativa.

$$m_{nu}^{-} = m_{px}^{-} \cos^2 \theta + m_{py}^{-} sen^2 \theta \tag{2.6}$$

Segundo o critério de Johansen, a condição de escoamento fica estabelecida quando o momento normal solicitante (m_n) torna-se igual ao momento normal resistente último (m_{nu}), ou seja, o critério de resistência na sua forma geral é dado por :

$$m_{nu}^{-} \leq m_n \leq m_{nu}^{+} \tag{2.7}$$

2.1.2. Superfície de Colapso Obtida Através do Critério de Escoamento de Johansen

De acordo com o critério de escoamento de Johansen, o lugar geométrico dos pontos de ruptura é dado por $m_{nu} = m_n$. Considerando o seguinte caso:

$$m_{nu}^{+} = m_n \tag{2.8}$$

a utilização das equações (2.3) e (2.5) em (2.8) resulta em:

$$m_{px}^{+} \cos^2 \theta + m_{py}^{+} \operatorname{sen}^2 \theta - m_x \cos^2 \theta - m_y \operatorname{sen}^2 \theta - m_{xy} \operatorname{sen} 2\theta = 0 \tag{2.9}$$

onde:

m_x, m_y, m_{xy} = momentos solicitantes

m_{px}^{+}, m_{py}^{+} = momentos resistentes últimos positivos nas direções x e y, respectivamente

θ = direção de formação da charneira plástica com relação ao eixo x.

Esta condição de igualdade representa, para um dado θ, um plano no espaço dos momentos m_x, m_y, m_{xy} [MASS 72].

Dividindo-se a equação (2.9) por $cos^2\theta$:

$$m_{px}^{+} + m_{py}^{+} \tan^2\theta - m_x - m_y \tan^2\theta - 2m_{xy}\tan\theta = 0 \tag{2.10}$$

ou ainda:

$$\frac{m_{px}^{+} - m_x}{2\tan\theta} + \frac{m_{py}^{+} - m_y}{2}\tan\theta - m_{xy} = 0 \tag{2.11}$$

A expressão (2.11) estabelece o critério de resistência como função do ângulo θ ou seja:

$$f(\theta) = 0 \tag{2.12}$$

A condição de minimização do excesso de resistência é obtida da seguinte forma:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = 0 \tag{2.13}$$

Derivando-se a expressão (2.11) com relação a θ, chega-se a:

$$-\left[\frac{m_{px}^{+} - m_x}{\text{sen}^2\theta}\right] + \left[\frac{m_{py}^{+} - m_y}{\cos^2\theta}\right] = 0 \tag{2.14}$$

ou ainda:

$$\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{m_{px}^{+} - m_x}{m_{py}^{+} - m_y} \tag{2.15}$$

Portanto, o valor de θ que minimiza o excesso de resistência e pode conduzir à formação da charneira plástica é dado por:

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{m_{px}^{+} - m_x}{m_{py}^{+} - m_y}} \tag{2.16}$$

Considerando-se agora que a direção θ de minimização do excesso de resistência corresponde à condição de escoamento ou de formação da charneira plástica, a substituição da expressão (2.16) na expressão (2.11) conduz a:

$$\frac{m_{px}^{+}-m_x}{2}\sqrt{\frac{m_{py}^{+}-m_y}{m_{px}^{+}-m_x}}+\frac{m_{py}^{+}-m_y}{2}\sqrt{\frac{m_{px}^{+}-m_x}{m_{py}^{+}-m_y}}-m_{xy}=0 \tag{2.17}$$

Multiplicando-se ambos os lados da expressão por

$$\sqrt{m_{px}^{+}-m_x}\sqrt{m_{py}^{+}-m_y}$$

obtem-se:

$$\frac{1}{2}\left(m_{px}^{+}-m_x\right)\left(m_{py}^{+}-m_y\right)+\frac{1}{2}\left(m_{py}^{+}-m_y\right)\left(m_{px}^{+}-m_x\right)=m_{xy}\sqrt{m_{px}^{+}-m_x}\sqrt{m_{py}^{+}-m_y} \tag{2.18}$$

ou ainda:

$$\left(m_{px}^{+}-m_x\right)\left(m_{py}^{+}-m_y\right)=m_{xy}\sqrt{m_{px}^{+}-m_x}\sqrt{m_{py}^{+}-m_y} \tag{2.19}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da expressão (2.19):

$$\left(m_{px}^{+}-m_x\right)\left(m_{py}^{+}-m_y\right)=m_{xy}^{2} \tag{2.20}$$

Procedendo-se de forma análoga para as charneiras plásticas negativas, chega-se a:

$$\left(m_{px}^{-}+m_x\right)\left(m_{py}^{-}+m_y\right)=m_{xy}^{2} \tag{2.21}$$

onde m_{px}^{-} e m_{py}^{-} são os momentos resistentes últimos negativos nas direções x e y, respectivamente.

As expressões (2.20) e (2.21) representam duas superfícies cônicas. A união dessas duas superfícies dá origem à Superfície de Escoamento de Johansen, que é uma superfície de ruptura bicônica, representada pelas equações (2.20) e (2.21), ilustrada na figura 2.5.

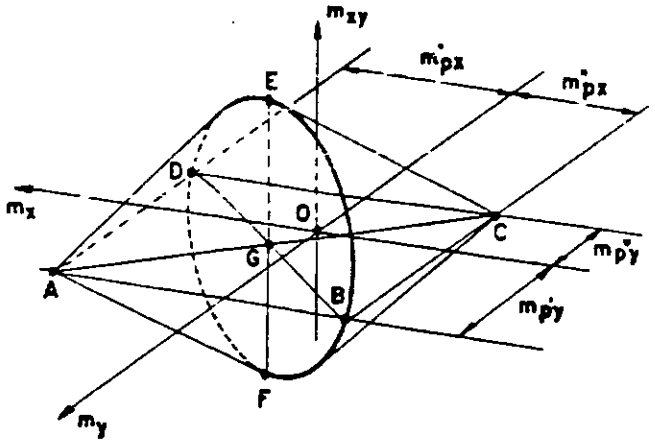


Figura 2.5 - Superfície de ruptura obtida a partir do critério de escoamento de Johansen

2.1.3. Desenvolvimento Analítico da Superfície de Johansen

As equações (2.20) e (2.21) representam a superfície de Johansen:

$$\left(m_{px}^{+} - m_x\right)\left(m_{py}^{+} - m_y\right) = m_{xy}^2 \tag{2.20}$$

$$\left(m_{px}^{-} + m_x\right)\left(m_{py}^{-} + m_y\right) = m_{xy}^2 \tag{2.21}$$

Desenvolvendo-se a expressão (2.20):

$$m_{px}^{+} m_y + m_{py}^{+} m_x - m_x m_y + m_{xy}^2 = m_{px}^{+} m_{py}^{+} \tag{2.22}$$

a equação (2.22) pode ser escrita matricialmente da seguinte forma:

$$\left\langle m_x m_y m_{xy} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} + \left\langle m_{py}^{+} m_{px}^{+} 0 \right\rangle \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = m_{px}^{+} m_{py}^{+} \tag{2.23}$$

ou ainda: $$M^t A M + b^t M = c \tag{2.24}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{Bmatrix} m_{py}^{+} \\ m_{px}^{+} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad c=m_{px}^{+}m_{py}^{+}$$

Para se determinar a expressão da superfície cônica numa forma reduzida, na qual os termos cruzados $m_x m_y$ desapareçam, é necessário encontrar um novo sistema de eixos $\overline{m}_x \overline{m}_y \overline{m}_{xy}$, de tal forma que a matriz $\boldsymbol{A}$ seja diagonal. Isto será possível a partir do cálculo dos autovalores e autovetores da matriz $\boldsymbol{A}$.

Equação característica de $\boldsymbol{A}$:

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\, \boldsymbol{I})=0 \tag{2.25}$$

logo:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -0,5 & 0 \\ -0,5 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix}=0$$

ou ainda:

$$\lambda^2(1-\lambda)-0,25(1-\lambda)=0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-0,25)=0$$

Portanto, os autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$ são:
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0,5 \\ \lambda_2 &= 0,5 \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Cálculo dos autovetores de $\boldsymbol{A}$:

$$\lambda_1 = -0,5 \qquad — \qquad \boldsymbol{AM}=\lambda_1 \boldsymbol{M}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}=-0,5\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$-\ 0{,}5\, m_y = -\ 0{,}5\, m_x$$
$$-\ 0{,}5\, m_x = -\ 0{,}5\, m_y$$
$$m_{xy} = -\ 0{,}5\, m_{xy}$$

Portanto, o primeiro autovetor normalizado é:

$$\left(\bar{M}_x\right)^t = \langle 0.707;\ 0{,}707;\ 0\rangle \tag{2.27}$$

$$\lambda_2 = 0{,}5 \qquad \text{—} \qquad \boldsymbol{AM} = \lambda_2 \boldsymbol{M}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = 0{,}5 \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$-\ 0{,}5\, m_y = 0{,}5\, m_x$$
$$-\ 0{,}5\, m_x = 0{,}5\, m_y$$
$$m_{xy} = 0{,}5\, m_{xy}$$

Portanto o segundo autovetor normalizado é:

$$\left(\bar{M}_y\right)^t = \langle -0{,}707;\ 0{,}707;\ 0\rangle \tag{2.28}$$

$$\lambda_3 = 1 \qquad \text{—} \qquad \boldsymbol{AM} = \lambda_3 \boldsymbol{M}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$-\ 0{,}5\, m_y = m_x$$
$$-\ 0{,}5\, m_x = m_y$$
$$m_{xy} = m_{xy}$$

Portanto, o terceiro autovetor normalizado é:

$$\left(\bar{M}_{xy}\right)^t = \langle 0;0;1 \rangle \tag{2.29}$$

O novo sistema de coordenadas $(\overline{m}_x, \overline{m}_y, \overline{m}_{xy})$ apresenta o eixo $\overline{m}_{xy}$ paralelo ao eixo m_{xy} e os demais eixos $\overline{m}_x$ e $\overline{m}_y$, fazendo um ângulo de 45° no sentido anti-horário em relação aos eixos m_x e m_y, respectivamente, tal como indicado na figura 2.6.

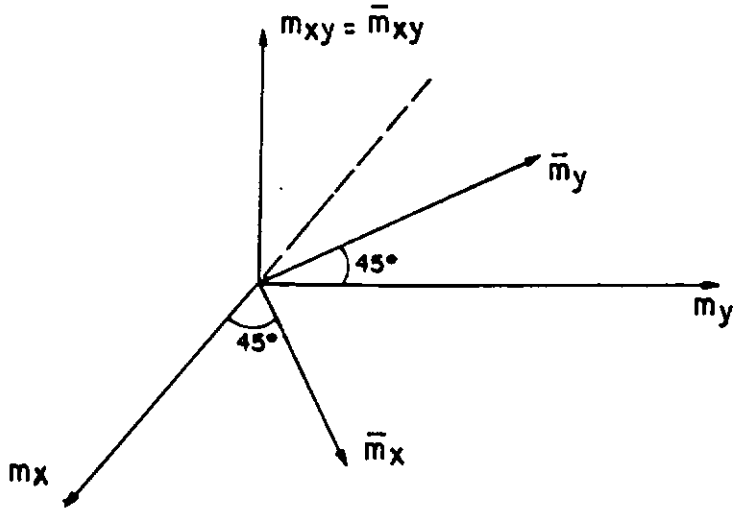


Figura 2.6 - Sistema de eixos $\overline{m}_x$, $\overline{m}_y$ e $\overline{m}_{xy}$ em relação ao sistema m_x, m_y e m_{xy}

A base de autovetores $\boldsymbol{B}$ fica, então, definida por:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0{,}707 & -0{,}707 & 0 \\ 0{,}707 & 0{,}707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

A relação entre os sistemas de eixos m e $\overline{m}$, expressos respectivamente na base canônica e na base de autovetores, é dada por:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{M}} \tag{2.31}$$

Substituindo-se a expressão (2.31) na expressão (2.24), chega-se a:

$$\overline{\boldsymbol{M}}^t \boldsymbol{B}^t \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{M}} = c \tag{2.32}$$

Desenvolvendo-se a expressão (2.32):

$$\begin{aligned} &\left\langle \overline{m}_x \overline{m}_y \overline{m}_{xy} \right\rangle \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{m}_x \\ \overline{m}_y \\ \overline{m}_{xy} \end{Bmatrix} + \\ &\left\langle m_{py}^{+} m_{px}^{+} 0 \right\rangle \begin{bmatrix} 0,707 & -0,707 & 0 \\ 0,707 & 0,707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{m}_x \\ \overline{m}_y \\ \overline{m}_{xy} \end{Bmatrix} = m_{px}^{+}\, m_{py}^{+} \end{aligned} \tag{2.33}$$

ou:

$$-\left[\overline{m}_x - 0,707\left(m_{px}^{+} + m_{py}^{+}\right)\right]^2 + \left[\overline{m}_y + 0,707\left(m_{px}^{+} - m_{py}^{+}\right)\right]^2 + 2\left(\overline{m}_{xy}\right)^2 = 0 \tag{2.34}$$

A expressão (2.34) representa a equação geral de um cone elíptico, como se pode observar fazendo-se $\overline{m}_x = constante$, o que fornece a equação de uma elipse no plano $\overline{m}_y \overline{m}_{xy}$.

O vértice V desse cone é dado por:

$$V = \left\langle 0,707\left(m_{px}^{+} + m_{py}^{+}\right);\ -0,707\left(m_{px}^{+} - m_{py}^{+}\right);\ 0 \right\rangle \tag{2.35}$$

A figura 2.7 ilustra o gráfico do cone representado pela expressão (2.34), no sistema de eixos $\overline{m}_x$, $\overline{m}_y$ e $\overline{m}_{xy}$.

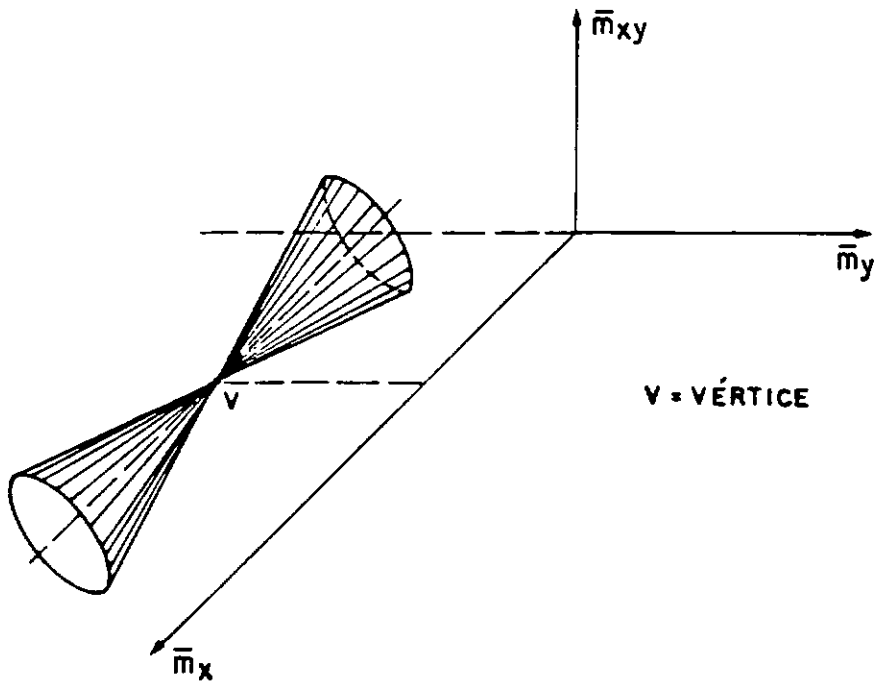


Figura 2.7 - Representação da superfície cônica a partir das charneiras positivas (equação 2.34)

Analogamente, partindo-se da equação (2.21) deduzida aplicando-se a condição de escoamento nas charneiras negativas, chega-se à expressão de uma superfície cônica no sistema $\overline{m}_x$, $\overline{m}_y$ e $\overline{m}_{xy}$, dada por:

$$-\left[\overline{m}_x + 0{,}707\left(m^-_{px} + m^-_{py}\right)\right]^2 + \left[\overline{m}_y - 0{,}707\left(m^-_{px} - m^-_{py}\right)\right]^2 + 2\left(\overline{m}_{xy}\right)^2 = 0 \qquad (2.36)$$

A expressão (2.36) representa a equação geral de um cone elíptico cujo vértice V é dado por:

$$V = \left\langle -0{,}707\left(m^-_{px} + m^-_{py}\right);\ \ +0{,}707\left(m^-_{px} - m^-_{py}\right);\ \ 0\right\rangle \qquad (2.37)$$

A figura 2.8 ilustra o gráfico do cone representado pela expressão (2.36), no sistema de eixos $\overline{m}_x$, $\overline{m}_y$ e $\overline{m}_{xy}$.

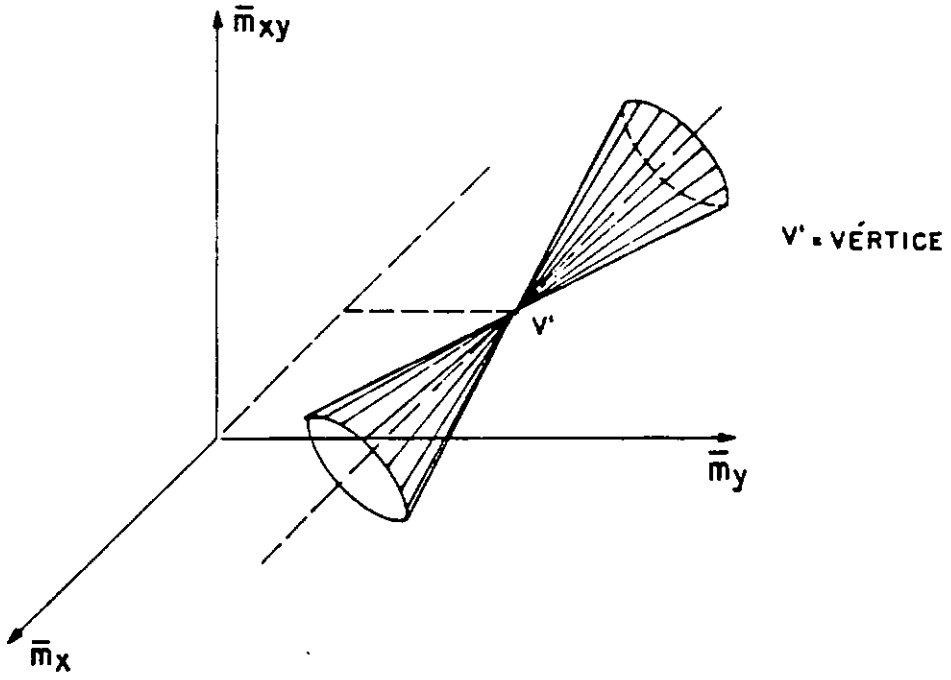


Figura 2.8 - Representação da superfície cônica a partir das charneiras negativas (equação 2.36)

Interseção com o plano $\overline{m}_x \overline{m}_y$

Considerando-se $\overline{m}_{xy} = 0$ nas equações (2.34) e (2.36), obtém-se:

$$\left[\overline{m}_x - 0,707\left(m_{px}^{+} + m_{py}^{+}\right)\right]^2 = \left[\overline{m}_y + 0,707\left(m_{px}^{+} - m_{py}^{+}\right)\right]^2 \tag{2.38}$$

$$\left[\overline{m}_x + 0,707\left(m_{px}^{-} + m_{py}^{-}\right)\right]^2 = \left[\overline{m}_y - 0,707\left(m_{px}^{-} - m_{py}^{-}\right)\right]^2 \tag{2.39}$$

Desenvolvendo-se as expressões (2.38) e (2.39), chega-se a:

$$\begin{cases} \overline{m}_x = \overline{m}_y + 1{,}414\, m_{px}^{+} \\ \overline{m}_x = -\overline{m}_y + 1{,}414\, m_{py}^{+} \end{cases} \tag{2.40}$$

$$\begin{cases} \overline{m}_x = \overline{m}_y - 1{,}414\, m_{px}^{-} \\ \overline{m}_x = -\overline{m}_y - 1{,}414\, m_{py}^{-} \end{cases} \tag{2.41}$$

As equações (2.40) e (2.41) representam quatro planos que delimitam a região de interseção das duas superfícies cônicas, descritas pelas equações (2.34) e (2.36), com o plano $\overline{m}_x \overline{m}_y$, tal como ilustrado na figura 2.9.

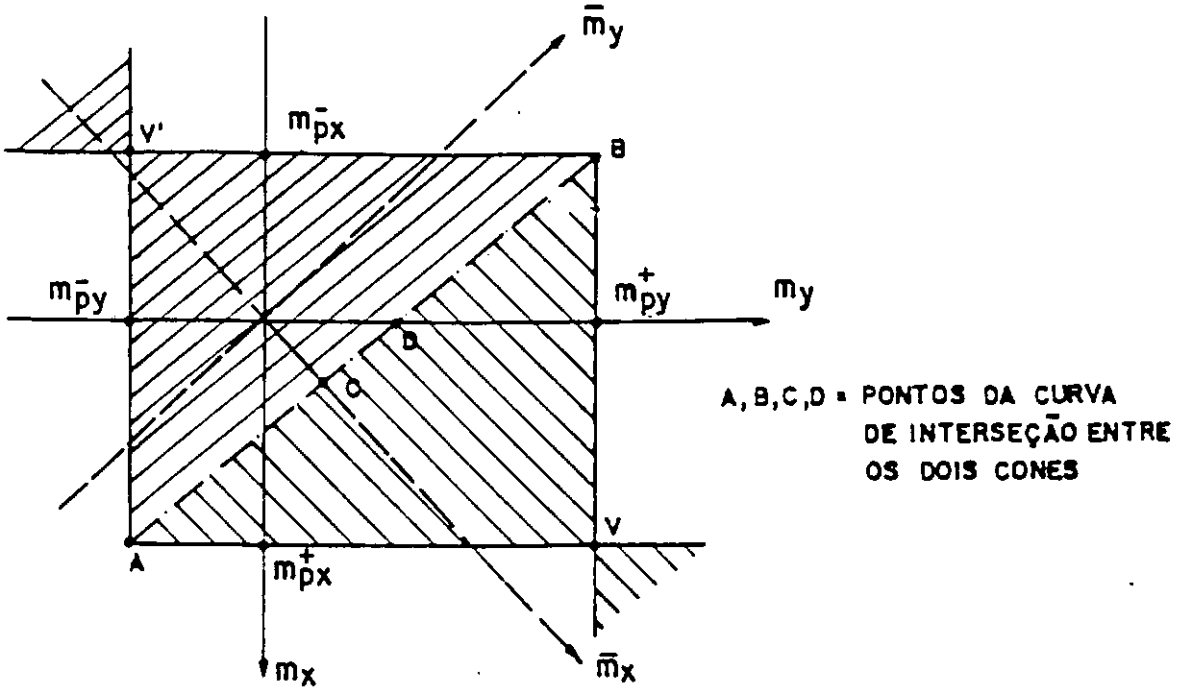


Figura 2.9 - Projeção da superfície de Johansen com o plano $\overline{m}_x \overline{m}_y$, admitindo-se

$$m_{px}^{+} \neq m_{px}^{-} \neq m_{py}^{+} \neq m_{py}^{-}$$

Estudo de um caso particular

Seja, por exemplo, um caso particular em que as armaduras positivas da laje sejam iguais nas duas direções (x e y) e as armaduras negativas também sejam iguais nas duas direções (x e y). Admitindo-se, ainda, que as armaduras positivas e negativas sejam diferentes, tem-se a seguinte relação entre os momentos resistentes últimos:

$$\left(m_{px}^{+} = m_{py}^{+}\right) \neq \left(m_{px}^{-} = m_{py}^{-}\right)$$

Para este caso particular, a interseção da superfície de Johansen com o plano $\overline{m}_x \overline{m}_y$ é ilustrada na figura 2.10.

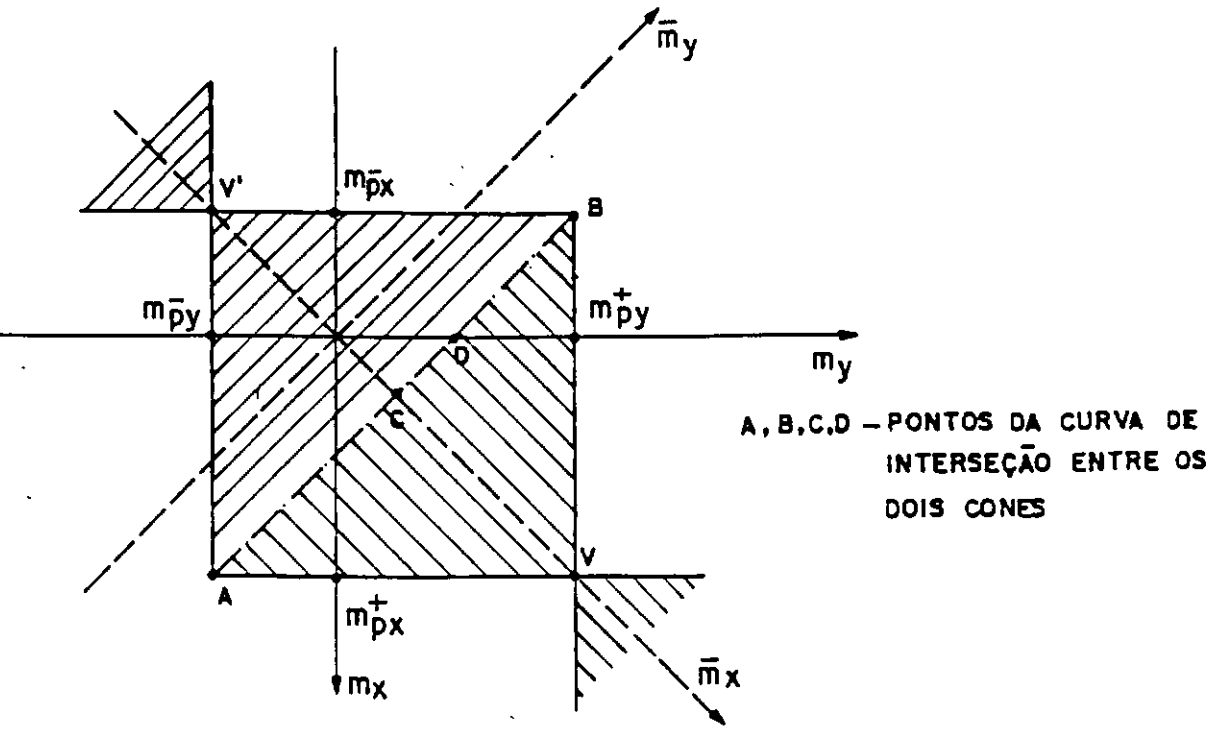


Figura 2.10 - Projeção da superfície de Johansen com o plano $\overline{m}_x \overline{m}_y$, admitindo-se

$$\left(m_{px}^{+} = m_{py}^{+}\right) \neq \left(m_{px}^{-} = m_{py}^{-}\right)$$

Substituindo-se a expressão (2.42) nas expressões (2.34) e (2.36), respectivamente, chega-se a:

$$-\left(\overline{m}_x - 1{,}414 m_{px}^{+}\right)^2 + \left(\overline{m}_y\right)^2 + 2\left(\overline{m}_{xy}\right)^2 = 0 \tag{2.43}$$

$$-\left(\overline{m}_x + 1{,}414 m_{px}^{-}\right)^2 + \left(\overline{m}_y\right)^2 + 2\left(\overline{m}_{xy}\right)^2 = 0 \tag{2.44}$$

A interseção das duas superfícies é obtida igualando-se as expressões (2.43) e (2.44), ou seja:

$$-\left(\overline{m}_x - 1{,}414\, m_{px}^{+}\right)^2 = -\left(\overline{m}_x + 1{,}414\, m_{px}^{-}\right)^2 \tag{2.45}$$

Desenvolvendo-se a expressão (2.45), chega-se a:

$$\overline{m}_x = 0{,}707\left(m_{px}^{+} - m_{px}^{-}\right) \tag{2.46}$$

que representa a equação de um plano paralelo ao eixo m_{xy} passando pelo ponto C indicado na figura 2.10.

Substituindo-se a expressão (2.46) em qualquer das duas expressões (2.43) ou (2.44), obtem-se:

$$\left(\overline{m}_y\right)^2 + 2\left(\overline{m}_{xy}\right)^2 = \left[0{,}707\left(m_{px}^{+} - m_{px}^{-}\right) - 1{,}414\, m_{px}^{+}\right]^2 \tag{2.47}$$

ou ainda:

$$\frac{\left(\overline{m}_y\right)^2}{\frac{\left(m_{px}^{+} + m_{px}^{-}\right)^2}{2}} + \frac{\left(\overline{m}_{xy}\right)^2}{\frac{\left(m_{px}^{+} + m_{px}^{-}\right)^2}{4}} = 1 \tag{2.48}$$

A expressão (2.48) representa uma elipse cujos eixos são dados por:

$$\begin{cases} a = 0{,}707\left(m_{px}^{+} + m_{px}^{-}\right) \\ b = 0{,}500\left(m_{px}^{+} + m_{px}^{-}\right) \end{cases} \tag{2.49}$$

A figura 2.11 ilustra a curva de interseção entre as duas superfícies cônicas representadas pelas expressões (2.43) e (2.44).

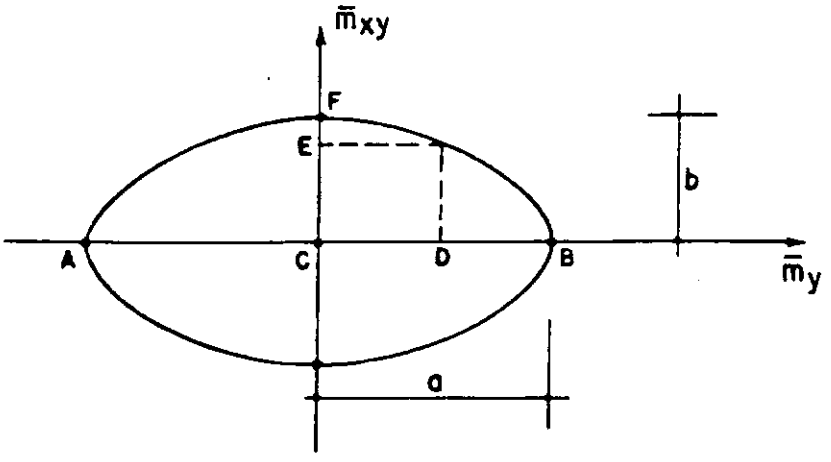


Figura 2.11 - Curva de interseção entre as superfícies cônicas representadas pelas expressões (2.43) e (2.44)

De acordo com as expressões (2.46) e (2.48) e com a figura 2.11, conclui-se que:

- A interseção entre as duas superfícies cônicas (expressões 2.43 e 2.44) se dá segundo uma elipse situada num plano paralelo ao plano definido pelos eixos $\overline{m}_y$ e $\overline{m}_{xy}$.

- O ponto D (figuras 2.10 e 2.11) representa a interseção da elipse (figura 2.11) com o eixo m_y

- As coordenadas dos pontos A, B, C, D, E e F (figuras 2.10 e 2.11) no sistema $\overline{m}_x \overline{m}_y \overline{m}_{xy}$ são dadas por:

$$A = \left\langle 0,707\left(m_{px}^{+} - m_{px}^{-}\right);\quad -0,707\left(m_{px}^{+} + m_{px}^{-}\right);\quad 0 \right\rangle$$

$$B = \left\langle 0,707\left(m_{px}^{+} - m_{px}^{-}\right);\quad 0,707\left(m_{px}^{+} + m_{px}^{-}\right);\quad 0 \right\rangle$$

$$C = \left\langle 0,707\left(m_{px}^{+} - m_{px}^{-}\right);\quad 0;\quad 0 \right\rangle$$

$$D = \left\langle 0,707\left(m_{px}^{+} - m_{px}^{-}\right);\quad 0,707\left(m_{px}^{+} - m_{px}^{-}\right);\quad 0 \right\rangle$$

$$E = \left\langle 0,707\left(m_{px}^{+} - m_{px}^{-}\right);\quad 0;\quad \sqrt{m_{px}^{+} m_{px}^{-}} \right\rangle$$

$$F = \left\langle 0,707\left(m_{px}^{+} - m_{px}^{-}\right);\quad 0;\quad 0,5\left(m_{px}^{+} + m_{px}^{-}\right) \right\rangle$$

Interseção da superfície com o plano $m_y\, m_{xy}$

O traço do plano de interseção dos dois cones (equações 2.20 e 2.21), que é a reta BD, é representado analiticamente por:

$$m_y = -m_{py}^{-} - \left[\frac{m_{py}^{+} + m_{py}^{-}}{m_{px}^{+} + m_{px}^{-}}\right]\left[m_x - m_{px}^{+}\right] \tag{2.50}$$

A interseção da superfície de Johansen com o plano $m_y\ m_{xy}$ constitui a região delimitada pelas parábolas de equação:

$$m_{px}^{+}\left[m_{py}^{+} - m_y\right] = m_{xy}^2 \tag{2.51}$$

$$m_{px}^{-}\left(m_{py}^{-} + m_y\right) = m_{xy}^2 \tag{2.52}$$

A reta $\overline{DB}$ é, neste caso, degenerada no ponto H que determina o ponto de transição das equações acima, como mostra a figura 2.12.

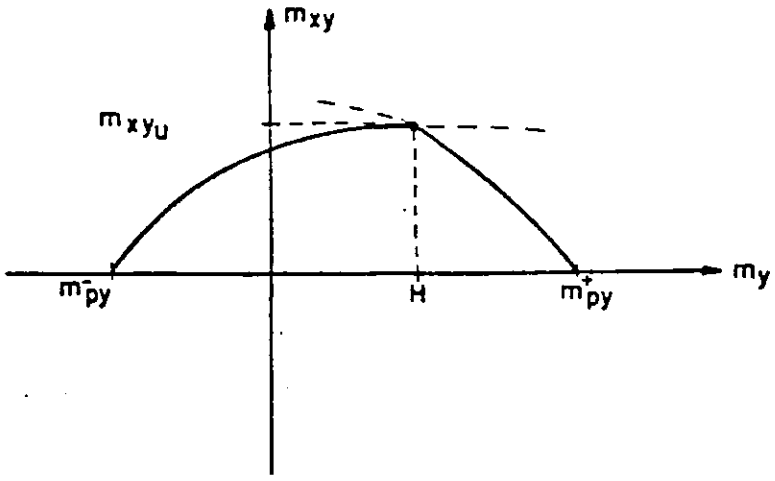


Figura 2.12 - Interseção da superfície com o plano $m_y\, m_{xy}$

No caso geral, o ponto H se encontra fora da origem. Para o plano em questão $(m_x = 0)$, o ponto H é obtido utilizando esta particularização em (2.50).

$$m_y = H = -m_{py}^{-} + \frac{m_{py}^{+} + m_{py}^{-}}{m_{px}^{+} + m_{px}^{-}}\, m_{px}^{+} \tag{2.53}$$

e o correspondente valor de m_{xy} obtido a partir de (2.51) ou (2.52):

$$m_{xy_{(H)}} = \sqrt{m_{px}^{+} m_{px}^{-}\left[\frac{m_{py}^{+} + m_{py}^{-}}{m_{px}^{+} + m_{px}^{-}}\right]} \tag{2.54}$$

A equação (2.54), para o caso particular $m_{px}^{+} = m_{px}^{-}$ e $m_{py}^{+} = m_{py}^{-}$, é:

$$m_{xy_{(II)}} = \sqrt{m_{px}^{+} m_{py}^{+}} = \sqrt{m_{px}^{-} m_{py}^{-}} \tag{2.55}$$

que é o resultado obtido nas equações (2.20) e (2.21) para o caso em que $m_x=m_y=0$. Já no caso $m_{px}^{+} = m_{py}^{+}$ e $m_{px}^{-} = m_{py}^{-}$, a equação (2.54) resulta em:

$$m_{xy_{(II)}} = \sqrt{m_{px}^{+} m_{px}^{-}} = \sqrt{m_{py}^{+} m_{py}^{-}} \tag{2.56}$$

Para o estudo da interseção da superfície com o plano $m_x m_{xy}$ procede-se analogamente ao realizado para o plano $m_y m_{xy}$.

2.2. Os Ensaios Apresentados no Trabalho de Marti, Leesti e Khalifa

O trabalho apresentado em 1987 por Peter Marti, Peter Leesti e Waseen U. Khalifa [MART87a] descreve os ensaios, realizados por Leesti (1985) e Khalifa (1985), de nove lajes de concreto armado com armaduras ortogonais, submetidas à torção pura. Os resultados são comparados com métodos propostos por vários pesquisadores e com as recomendações dos códigos Americano (1983) e Canadense (1984) para estruturas de concreto armado. Leesti realizou seis ensaios, sendo que em cinco deles houve ruptura local no canto das lajes. As lajes têm dimensões de 1,7m x 1,7m x 0,2m e taxas geométricas de armadura variando entre 0,25% e 1,0%. Em cada modelo, as armaduras positiva e negativa na mesma direção são iguais. As taxas geométricas de armadura nas duas direções (ρ_x e ρ_y) são as seguintes: $\rho_x = \rho_y = 0{,}25\%$; $\rho_x = \rho_y = 0{,}5\%$; $\rho_x = \rho_y = 1{,}0\%$; $\rho_x = 2\rho_y = 0{,}5\%$; $\rho_x = 4\rho_y = 1{,}0\%$; $\rho_x = 2\rho_y = 1{,}0\%$. Khalifa repetiu três destes ensaios, utilizando sempre uma armadura vertical suplementar ao longo dos bordos das lajes para evitar a ruptura nos cantos. Foram ensaiadas as lajes com as taxas de armadura: $\rho_x = \rho_y = 0{,}25\%$; $\rho_x = \rho_y = 1{,}0\%$ e $\rho_x = 4\rho_y = 1{,}0\%$.

O uso da mesma armadura para se obter lajes com o mesmo momento de plastificação nas duas direções é criticável porque a armadura nestas direções não poderia ser a mesma, uma vez que elas estão necessariamente em camadas diferentes; conseqüentemente, os braços de alavanca para o cálculo dos momentos não são iguais. O mesmo raciocínio é válido quande se pretende outras relações entre os momentos: não é correto simplesmente multiplicar a armadura pelo fator desejado.

A comparação entre a carga última experimental e a obtida utilizando a teoria de Johansen para as lajes ensaiadas mostrou que os valores obtidos nos ensaios são

menores, entre 5% e 46%. As recomendações apresentadas pelos códigos Americano (1983) e Canadense (1984) são a favor da segurança quando comparadas com os ensaios, sendo os valores das resistências últimas experimentais entre 3% e 41% maiores que os previstos pelo código Canadense (1984) e entre 8% e 117% maiores que os previstos pelo primeiro. No entanto, os dois códigos permitem que o projetista utilize o critério de Johansen, que é comprovadamente contra a segurança no caso de torção pura e significativa taxa geométrica de armadura.

A determinação do momento torsor último, utilizando a análise limite pelo limite inferior, deduzida por Nielsen (1963) e apresentada em Marti et al. [MARTI 87b], tem boa aproximação quando comparada com os resultados experimentais. É utilizada uma resistência à compressão reduzida para o concreto, igual a 0,45 da resistência obtida no ensaio à compressão, para levar em conta o efeito da tração transversal.

O trabalho experimental descrito mostra claramente que a teoria de Johansen conduz a resultados contra a segurança para lajes com armaduras positivas e negativas iguais e taxa de armadura alta, submetidas à torção pura. Há necessidade de se pesquisar o comportamento de lajes submetidas à flexo-torção e de se propor uma correção para a superfície de colapso.

CAPÍTULO III
ESTUDO EXPERIMENTAL

3.1. O Conceito de Laje Equivalente

O comportamento de lajes submetidas à torção pura ou à flexão pura é relativamente bem conhecido. Há verificações experimentais mostrando que as hipóteses de Johansen superestimam a resistência da laje sujeita à torção pura [MART87a]. Na literatura pesquisada não foram encontrados resultados experimentais levando em conta o efeito flexão x torção. Com base neste fato, surgiu o interesse em determinar experimentalmente alguns pontos da superfície de colapso na região de interação flexão x torção. Um estudo da superfície de colapso de Johansen mostrou que, para estudar um ponto de uma laje submetido a flexo-torção, é possível realizar uma translação desta superfície, determinando uma laje auxiliar que foi denominada de laje equivalente. O ponto de torção pura da superfície de colapso da laje equivalente reproduz o ponto de flexo-torção da superfície de colapso da laje original. Portanto, é possível realizar um ensaio com a laje equivalente submetida à torção pura, em vez de realizar um ensaio com a laje original submetida à flexo-torção, para a verificação da superfície de colapso.

3.2. Modelos Ensaiados

3.2.1. Dimensionamento dos Modelos

Para o dimensionamento dos modelos foi utilizado um programa que dimensiona e verifica estruturas de concreto armado segundo os critérios de estado limite da NBR6118. Foram utilizados conceitos básicos sobre a configuração deformada de uma seção de concreto armado em geral e no estado limite de ruptura, de acordo com a norma brasileira. Os esforços resistentes correspondem a uma dada configuração deformada da seção, e podem ser obtidos quando são conhecidas as características mecânicas do concreto e do aço da armadura. Foram estabelecidas relações momento fletor versus curvatura e esforço normal versus deformação normal de uma seção. Com a utilização destes conceitos foram estabelecidos algoritmos, respectivamente, de dimensionamento e verificação.

3.2.2. Denominação e Dimensões das Lajes

Após a revisão bibliográfica, levando em conta as condições de ensaio do Laboratório de Estruturas do CT/UFRJ, utilizando o programa de dimensionamento e verificação e o conceito de laje equivalente acima citados, foram definidas oito lajes, todas

com 1,60 m x 1,60 m x 0,13 m e taxas de armadura variando de 0,38% a 0,73%. As lajes foram ensaiadas à torção pura, divididas em três grupos. Grupo 1: Laje L1, com momentos de plastificação positivos e negativos iguais entre si e iguais nas duas direções, e três lajes equivalentes, L1A, L1A2 e L1B, simulando solicitações de flexo-torção. Grupo 2: Laje L2, com momentos de plastificação positivos e negativos iguais entre si, sendo o momento numa direção o dobro do momento na outra direção, e duas lajes equivalentes, L2A e L2B, simulando situações de flexo-torção. Grupo 3: Laje L3, com características semelhantes às da laje L1, apenas com uma taxa de armadura menor.

3.2.2.1. Definição das Lajes Equivalentes do Grupo 1

A laje L1 possui momentos de plastificação positivos e negativos iguais entre si e iguais nas duas direções, ou seja:

$$m_{px}^{+} = m_{px}^{-} = m_{py}^{+} = m_{py}^{-} = m$$

Serão analisados a seguir alguns pontos da superfície de colapso de Johansen, representada pelas equações (2.20) e (2.21), para a laje L1.

Ponto O na laje L1, referente à figura 3.1, solicitação de torção pura, $m_x = m_y = 0$

$$(m-0)(m-0) = m_{xy}^2$$

$$m_{xy} = m$$

Ponto A_1 na laje L1, referente à figura 3.1, solicitação de flexo-torção, $m_x = m_y = \frac{m}{2}$

$$\left(m - \frac{m}{2}\right)\left(m - \frac{m}{2}\right) = m_{xy}^2$$

$$m_{xy} = \frac{m}{2}$$

A laje equivalente deve ter uma superfície de colapso tal que ao ponto A_1 da superfície de colapso da laje original L1 (flexo-torção) corresponda o ponto O da superfície de colapso da laje equivalente L1A (torção pura), conforme mostra a figura 3.1. Os momentos de plastificação da laje equivalente L1A dependem dos momentos de plastificação da laje original L1, e valem:

$$m'^{+}_{px} = \frac{m^{+}_{px}}{2} = \frac{m}{2}$$

$$m'^{-}_{px} = m^{-}_{px} + \frac{m^{-}_{px}}{2} = m + \frac{m}{2} = \frac{3}{2}m$$

$$m'^{+}_{py} = \frac{m^{+}_{py}}{2} = \frac{m}{2}$$

$$m'^{-}_{py} = m^{-}_{py} + \frac{m^{-}_{py}}{2} = m + \frac{m}{2} = \frac{3}{2}m$$

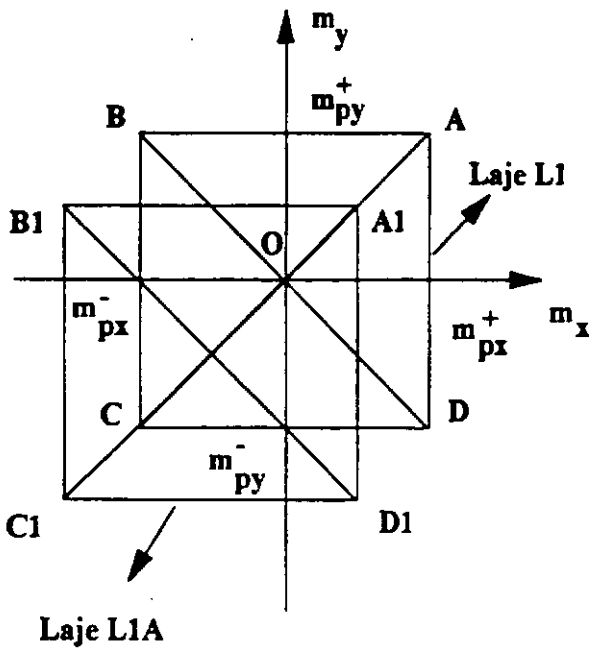


Figura 3.1 - Projeção da superfície de colapso de Johansen no plano m_x m_y, para a laje L1 e laje equivalente L1A

Ponto O na laje equivalente L1A, solicitação de torção pura, $m_x = m_y = 0$

$$\left(\frac{m}{2} - 0\right)\left(\frac{m}{2} - 0\right) = m_{xy}^2$$

$$m_{xy} = \frac{m}{2}$$

Então, ao ponto A_1, submetido à flexo-torção $\left(m_x = m_y = m_{xy} = \frac{m}{2}\right)$, pertencente à laje L1 com $m_{px}^+ = m_{px}^- = m_{py}^+ = m_{py}^- = m$, corresponde o ponto O $\left(m_x = m_y = 0 \quad m_{xy} = \frac{m}{2}\right)$ pertencente à laje equivalente L1A com:

$$m'^{+}_{px} = m'^{+}_{py} = \frac{m}{2}$$

$$m'^{-}_{px} = m'^{-}_{py} = \frac{3m}{2}$$

Ponto D_2 na laje L1, referente à figura 3.2, solicitação de flexo-torção, $m_x = -m_y = \frac{m}{2}$

$$\left(m - \frac{m}{2}\right)\left(m + \frac{m}{2}\right) = m_{xy}^2$$

$$m_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{2} m$$

A laje equivalente L1B que simula em um ensaio de torção pura a situação de flexo-torção representada pelo ponto D_2 referente à laje L1, tem os seguintes momentos de plastificação:

$$m'^{+}_{px} = \frac{m^{+}_{px}}{2} = \frac{m}{2}$$

$$m'^{-}_{px} = m^{-}_{px} + \frac{m^{-}_{px}}{2} = \frac{3}{2} m^{-}_{px} = \frac{3}{2} m$$

$$m'^{+}_{py} = m^{+}_{py} + \frac{m^{+}_{py}}{2} = \frac{3}{2} m^{+}_{py} = \frac{3}{2} m$$

$$m'^{-}_{py} = \frac{m^{-}_{py}}{2} = \frac{m}{2}$$

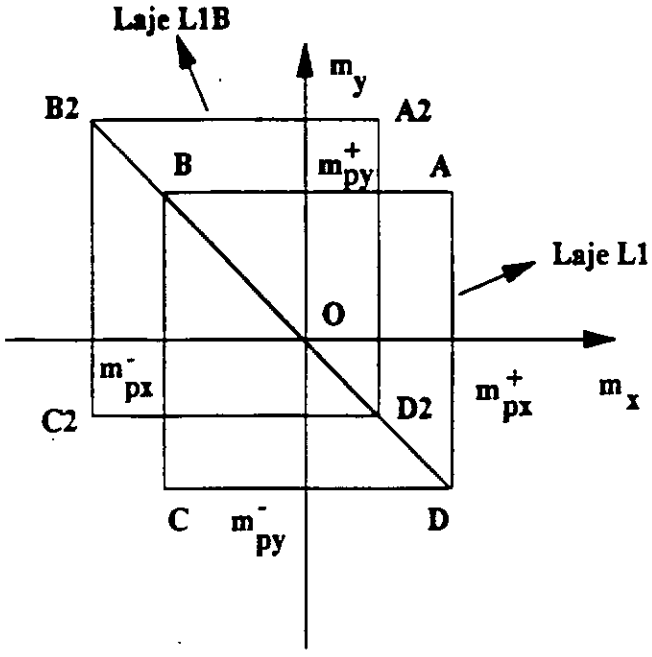


Figura 3.2 - Projeção da superfície de colapso de Johansen no plano m_x m_y , para a laje L1 e laje equivalente L1B

Ponto O na laje equivalente L1B, solicitação de torção pura, $m_x = m_y = 0$

$$\left(\frac{m}{2} - 0\right)\left(\frac{3}{2}m - 0\right) = m_{xy}^2$$

$$m_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{2}m$$

Então, ao ponto D_2 submetido à flexo-torção $\left(m_x = -m_y = \frac{m}{2} \text{ e } m_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{2}m\right)$, pertencente à laje L1 com $m_{px}^+ = m_{px}^- = m_{py}^+ = m_{py}^- = m$, corresponde o ponto O $\left(m_x = m_y = 0 \text{ e } m_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{2}m\right)$ pertencente à laje equivalente L1B com

$$m'^{+}_{px} = \frac{m}{2}$$

$$m'^{-}_{px} = \frac{3}{2}m$$

$$m'^{+}_{py} = \frac{3}{2}m$$

$$m'^{-}_{py} = \frac{m}{2}$$

3.2.2.2. Definição das Lajes Equivalentes do Grupo 2

A laje L2 possui momentos de plastificação positivos e negativos iguais, sendo que o momento em uma direção é o dobro do momento na outra direção.

$$m_{py}^+ = m_{py}^- = m$$

$$m_{px}^+ = m_{px}^- = 2m_{py}^+ = 2m_{py}^- = 2m$$

Serão analisados a seguir alguns pontos da superfície de colapso de Johansen, representada pelas equações (2.20) e (2.21), para a laje L2.

Ponto O na laje L2, referente à figura 3.3, solicitação de torção pura, $m_x = m_y = 0$

$$(2m-0)(m-0)=m_{xy}^2$$

$$m_{xy}=\sqrt{2}\,m$$

Ponto M na laje L2, referente à figura 3.3, solicitação de flexo-torção, $m_x=\frac{2}{3}m$ e $m_y=-\frac{1}{3}m$

(O ponto M é a interseção das retas $\overline{BD}$ e $\overline{AM}$)

$$\left(2m-\frac{2}{3}m\right)\left(m+\frac{1}{3}m\right)=m_{xy}^2$$

$$m_{xy}=\frac{4}{3}m$$

A laje equivalente deve ter uma superfície de colapso tal que ao ponto M da superfície de colapso da laje original L2 (flexo-torção) corresponda o ponto O da superfície de colapso da laje equivalente L2A (torção pura), conforme mostra a figura 3.3. Os momentos de plastificação da laje equivalente L2A dependem dos momentos de plastificação da laje original L2, e valem:

$$m'^{+}_{px}=2m-\frac{2}{3}m=\frac{4}{3}m$$

$$m'^{-}_{px}=2m+\frac{2}{3}m=\frac{8}{3}m$$

$$m'^{+}_{py}=m+\frac{1}{3}m=\frac{4}{3}m$$

$$m'^{-}_{py}=m-\frac{1}{3}m=\frac{2}{3}m$$

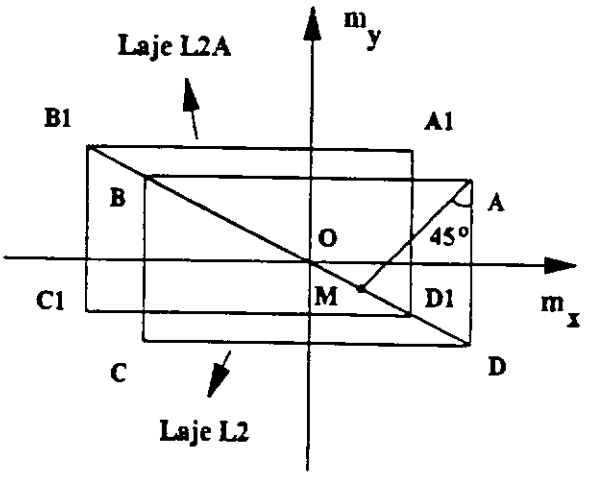


Figura 3.3 - Projeção da superfície de colapso de Johansen no plano m_x m_y, para a laje L2 e laje equivalente L2A

Ponto *O* na laje equivalente L2A, solicitação de torção pura $m_x = m_y = 0$

$$\left(\frac{4}{3}m - 0\right)\left(\frac{4}{3}m - 0\right) = m_{xy}^2$$

$$m_{xy} = \frac{4}{3}m$$

Então, ao ponto *M* $\left(m_x = \frac{2}{3}m \quad m_y = -\frac{1}{3}m \quad m_{xy} = \frac{4}{3}m\right)$ pertencente à laje L2, com $m_{px}^+ = m_{px}^- = 2m$ e $m_{py}^+ = m_{py}^- = m$, corresponde o ponto *O* $\left(m_x = m_y = 0 \text{ e } m_{xy} = \frac{4}{3}m\right)$ pertencente à laje L2A com:

$$m'^{+}_{px} = \frac{4}{3}m$$

$$m'^{-}_{px} = \frac{8}{3}m$$

$$m'^{+}_{py} = \frac{4}{3}m$$

$$m'^{-}_{py} = \frac{2}{3}m$$

Ponto *P* na laje L2, referente à figura 3.4, solicitação de flexo-torção, $m_x = \frac{4}{3}m$ e $m_y = \frac{1}{3}m$

(O ponto *P* divide a reta $\overline{AM}$ ao meio)

$$\left(2m - \frac{4}{3}m\right)\left(m - \frac{1}{3}m\right) = m_{xy}^2$$

$$m_{xy} = \frac{2}{3}m$$

A laje equivalente L2B que simula em um ensaio de torção pura a situação de flexo-torção representada pelo ponto P referente à laje L2, tem os seguintes momentos de plastificação:

$$m'^{+}_{px} = 2m - \frac{4}{3}m = \frac{2}{3}m$$

$$m'^{-}_{px} = 2m + \frac{4}{3}m = \frac{10}{3}m$$

$$m'^{+}_{py} = m - \frac{1}{3}m = \frac{2}{3}m$$

$$m'^{-}_{py} = m + \frac{1}{3}m = \frac{4}{3}m$$

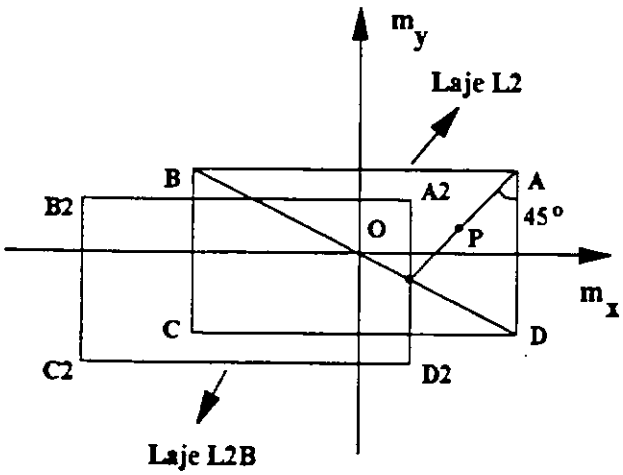


Figura 3.4 - Projeção da superfície de colapso de Johansen no plano m_x m_y, para a laje L2 e laje equivalente L2B

Ponto *O* na laje equivalente L2B, solicitação de torção pura, $m_x = m_y = 0$

$$\left(\frac{2}{3}m - 0\right)\left(\frac{2}{3}m - 0\right) = m_{xy}^2$$

$$m_{xy} = \frac{2}{3}m$$

Então, ao ponto *P* $\left(m_x = \frac{4}{3}m \quad m_y = \frac{1}{3}m \quad m_{xy} = \frac{2}{3}m\right)$ pertencente à laje L2 com $(m_{px}^+ = m_{px}^- = 2m \quad \text{e} \quad m_{py}^+ = m_{py}^- = m)$, corresponde o ponto *O* $(m_x = m_y = 0 \quad \text{e} \quad m_{xy} = \frac{2}{3}m)$ pertencente à laje L2B com:

$$m'^{+}_{px} = \frac{2}{3}m$$

$$m'^{-}_{px} = \frac{10}{3}m$$

$$m'^{+}_{py} = \frac{2}{3}m$$

$$m'^{-}_{py} = \frac{4}{3}m$$

A partir destes resultados, todos os ensaios foram realizados com as lajes submetidas à torção pura. As lajes L1A, L1A2, L1B, L2A e L2B reproduziram o comportamento flexão x torção e as lajes L1, L2 e L3, torção pura.

3.2.3. Armadura das Lajes

A armadura das lajes é constituída por barras de aço horizontais retas que se estendem ao longo de toda laje, sendo a ancoragem feita com ganchos, de acordo com as recomendações da norma brasileira.

Para evitar a ruptura das lajes nos cantos, onde há cargas concentradas, foi colocada uma armadura vertical de reforço, constituída por barras retas de aço de diâmetro de 6,3 mm com ganchos nas duas extremidades, com a forma de um [ou de um S dependendo da situação.

Nas lajes L1 e L3 como se deseja momentos de plastificação iguais nas duas direções, a armadura interna é um pouco maior, porque o braço de alavanca é menor.

As figuras 3.5 a 3.12 mostram detalhes da armação das lajes.

As figuras 3.13 e 3.14 mostram detalhes da montagem da armação, do reforço e a armação colocada na forma.

As taxas de armação das lajes L1, L2 e L3 foram escolhidas e das lajes L1A, L1A2, L1B, L2A, L2B, foram determinadas em função da equivalência desejada. A tabela 1 resume as armaduras das lajes e suas características geométricas, sendo:

$$\rho = \frac{A_s}{bh}$$

ρ = taxa de armadura

A_s = área da armadura positiva ou negativa na direção x ou na direção y

b = largura da seção transversal = 1,60 m

h = altura da seção transversal = 0,13 m

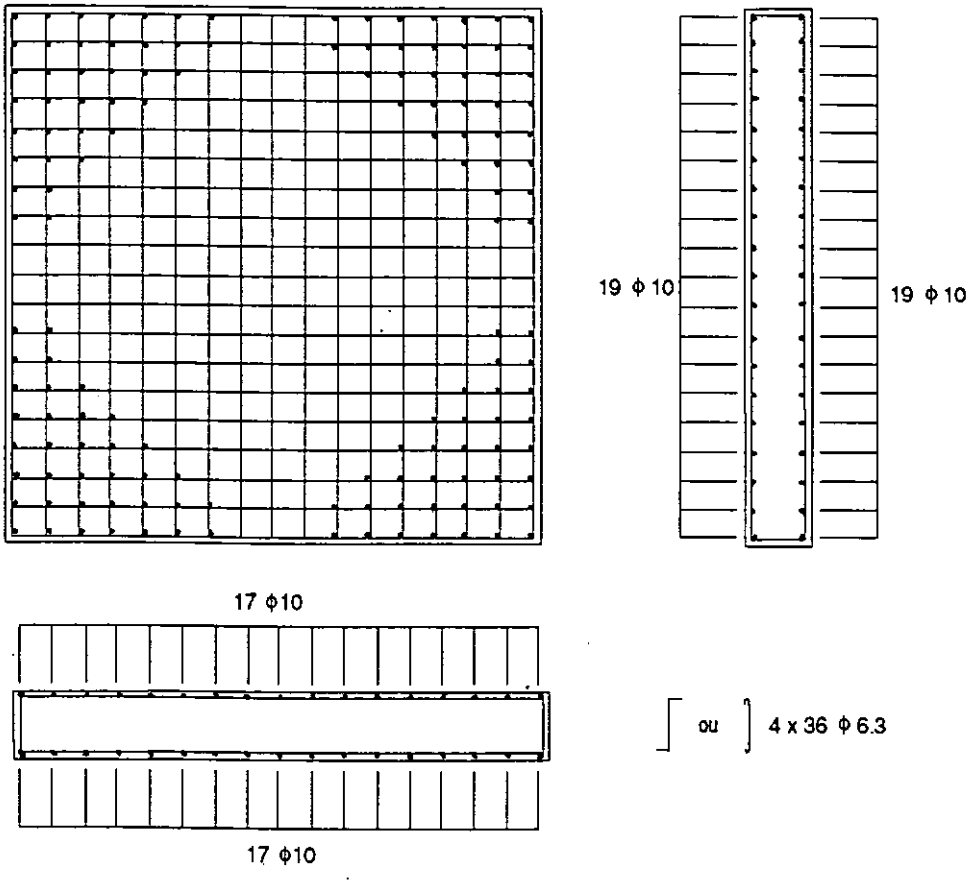


Figura 3.5 - Armadura da Laje L1

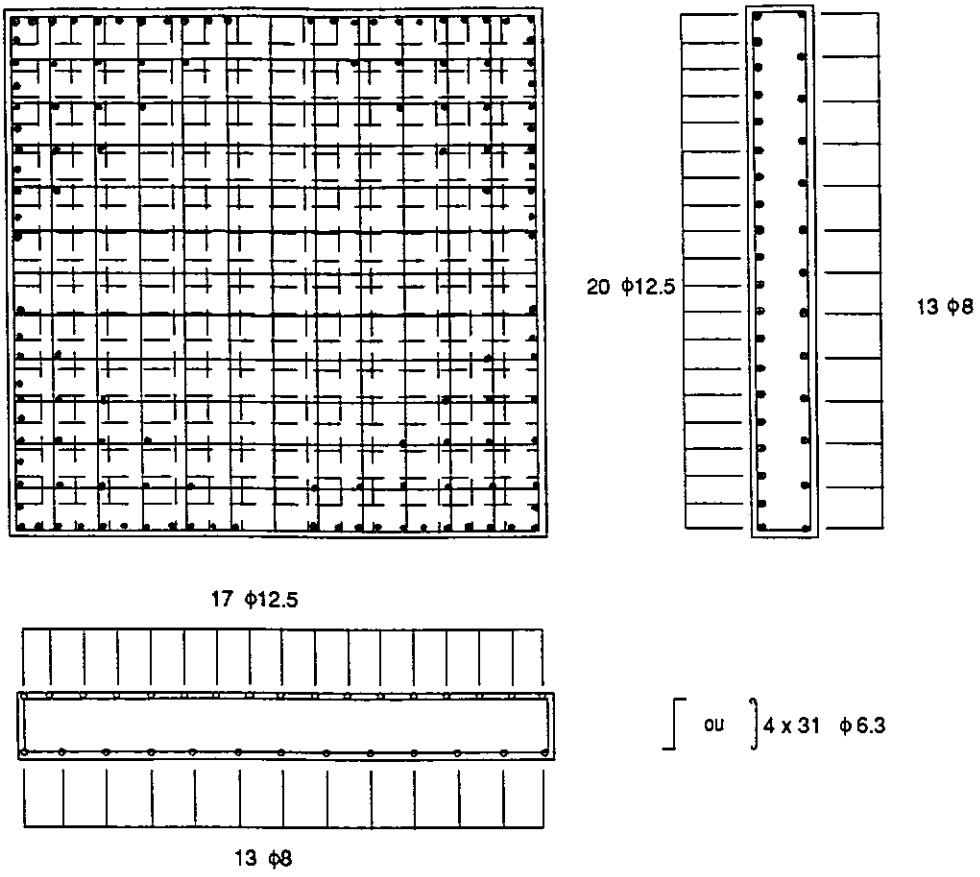


Figura 3.6 - Armadura da Laje L1A

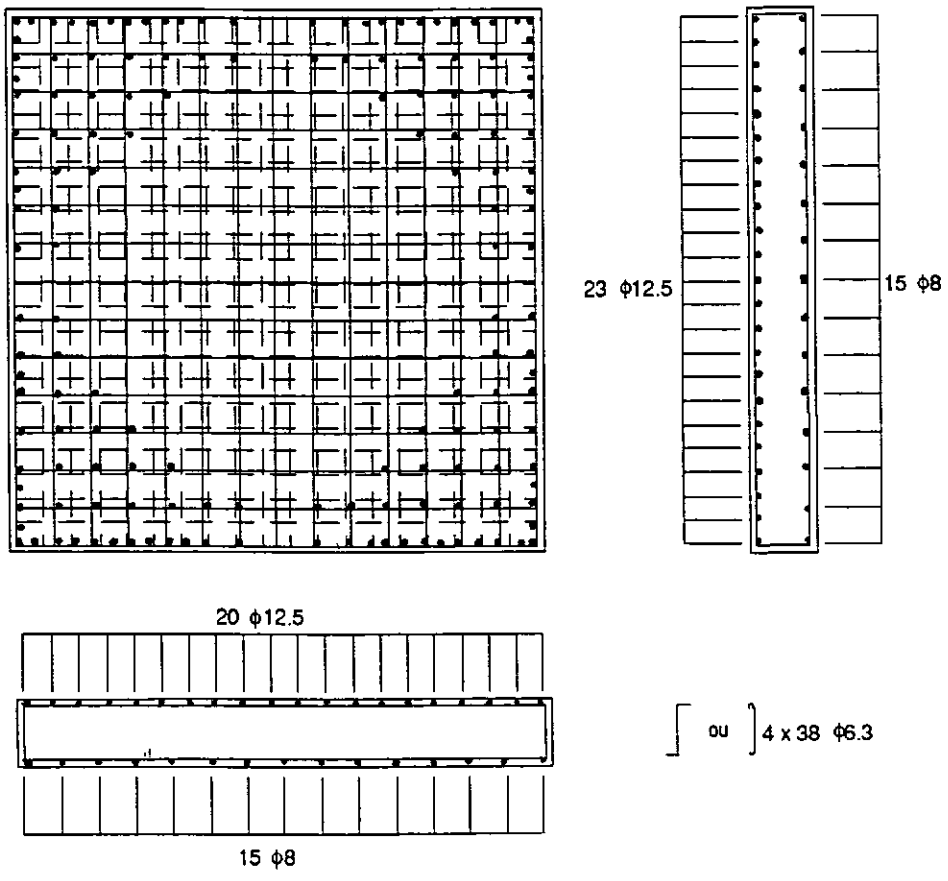


Figura 3.7 - Armadura da Laje L1A2

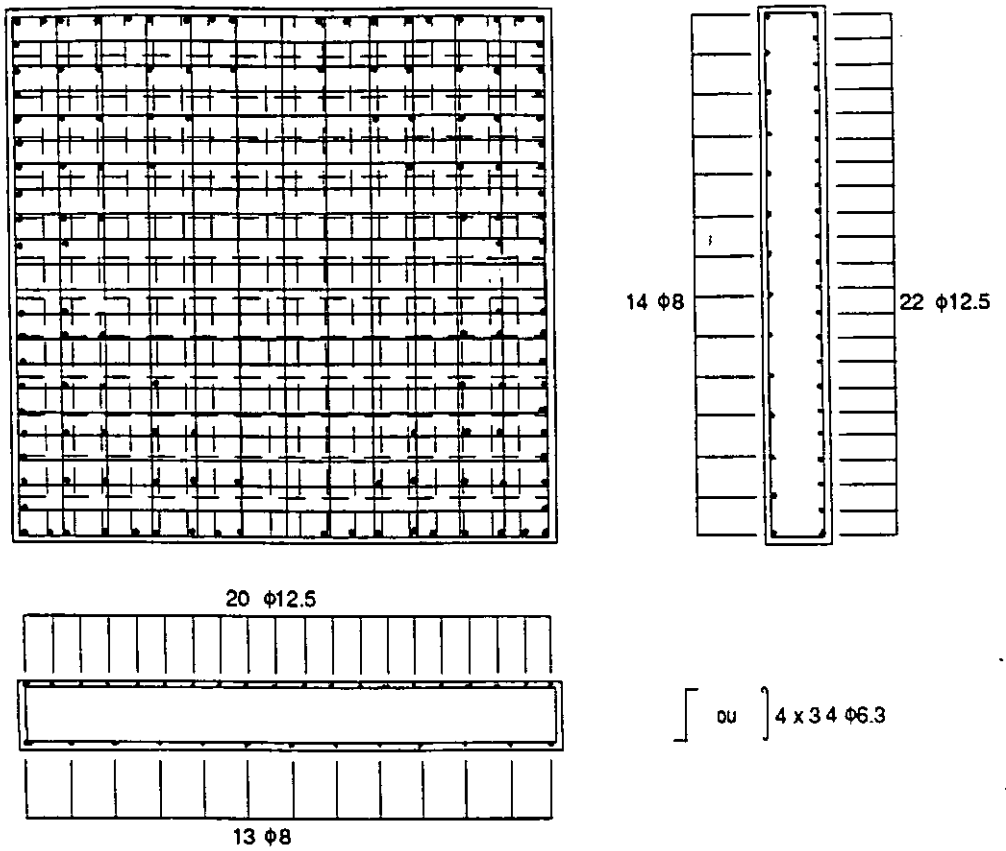


Figura 3.8 - Armadura da Laje L1B

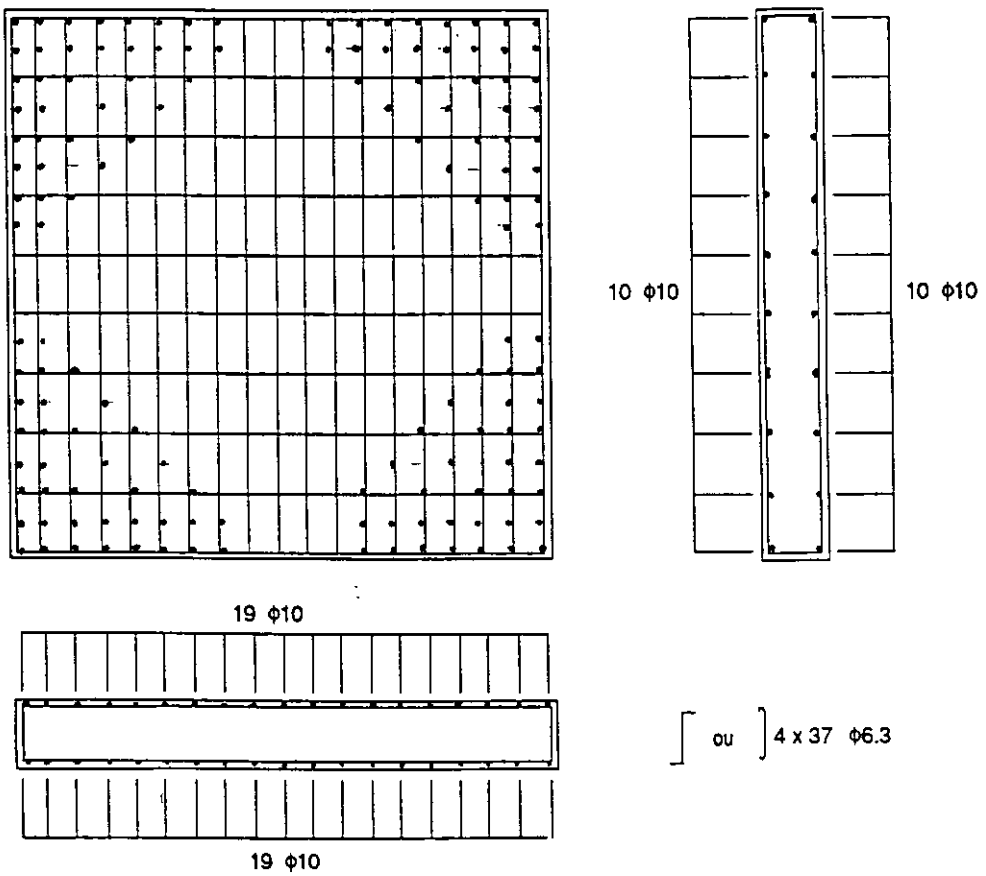


Figura 3.9 - Armadura da Laje L2

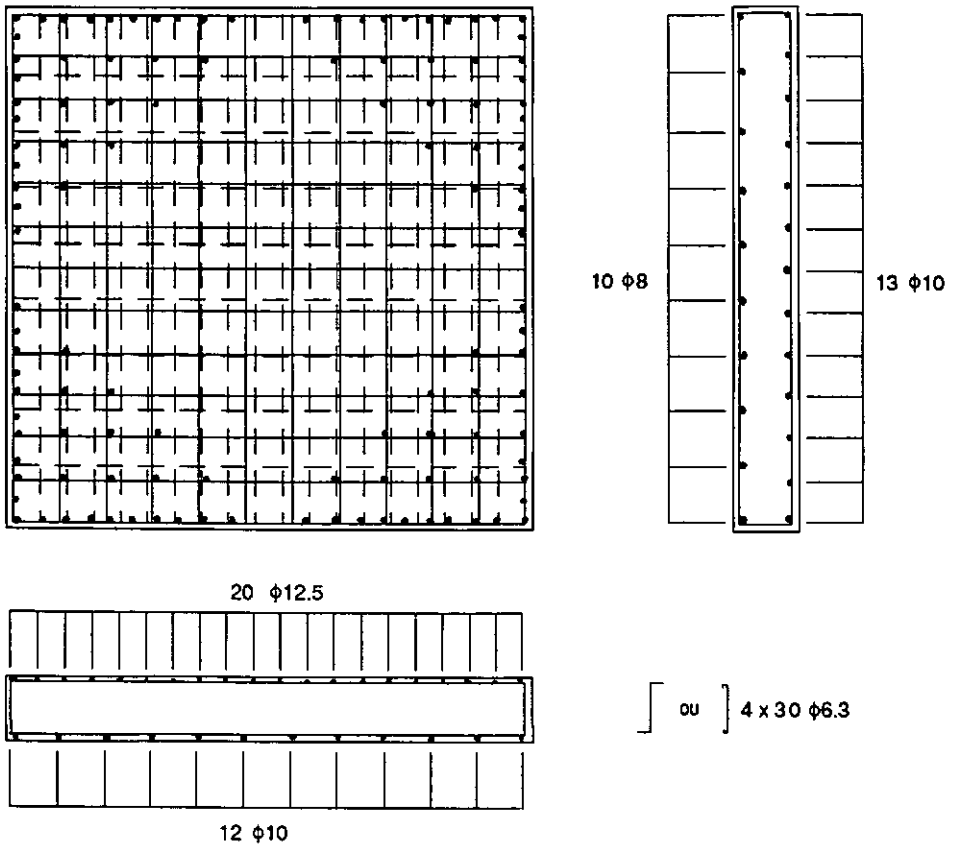


Figura 3.10 - Armadura da Laje L2A

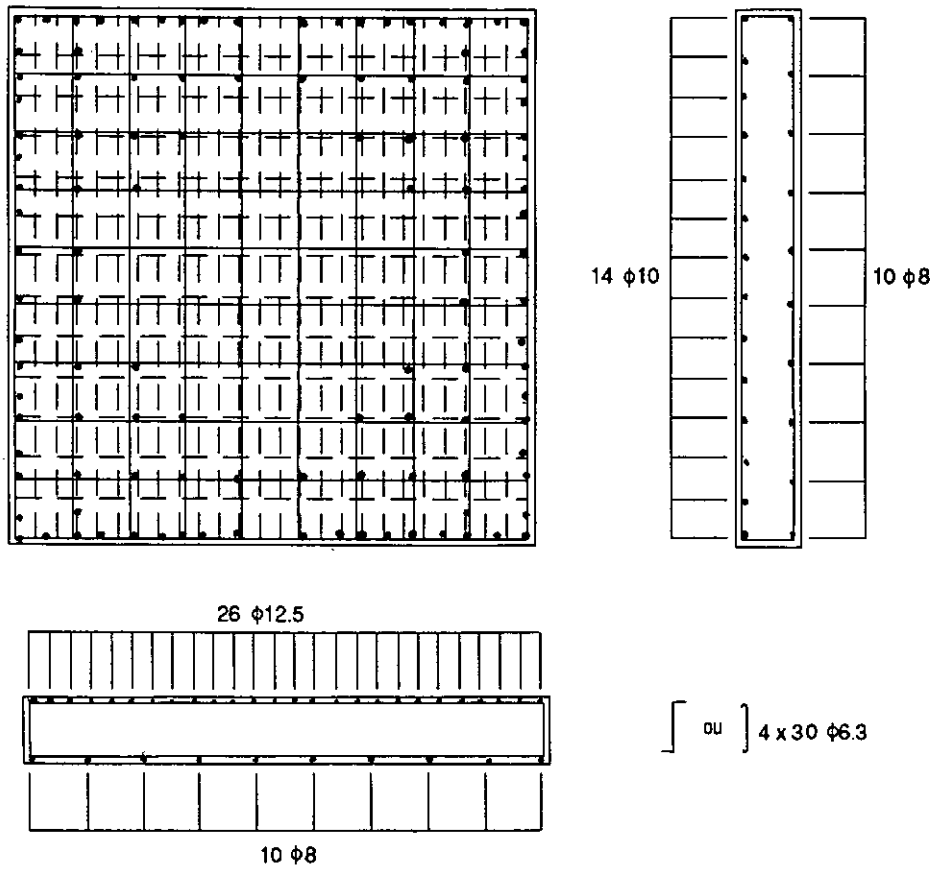


Figura 3.11 - Armadura da Laje L2B

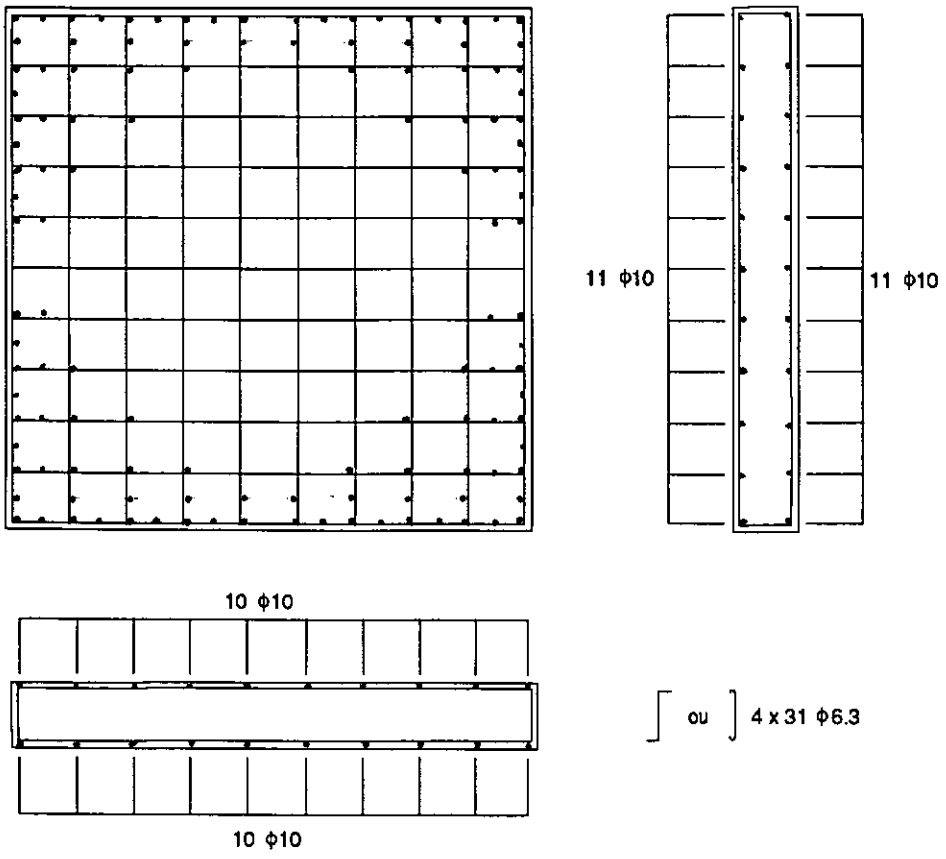


Figura 3.12 - Armadura da Laje L3

3.3. Materiais Utilizados

3.3.1. Concreto

O traço em peso do concreto utilizado foi 1: 1,8: 2,6 e a relação água/cimento de 0,54. Em sua confecção foi utilizada areia lavada e peneirada, pedra britada número 1 (dmax = 19 mm), de gnaisse, e cimento Portland, CPE32, da marca Mauá para todas as lajes, exceto para as lajes L1A, para a qual foi utilizado cimento Portland da marca Nassau e L1A2, para a qual foi utilizado cimento Portland, CPIIF32, da marca Mauá, que está substituindo o CPE32.

Em cada sessão de concretagem foi moldada uma laje. Para cada laje foram moldados dezesseis corpos de prova cilíndricos com diâmetro de 150,0 mm e altura de 300,0 mm para controle da resistência à compressão, à tração e do módulo de elasticidade do concreto. Os corpos de prova foram mantidos durante sete dias imersos em água e depois expostos ao meio ambiente do laboratório até a data do ensaio.

O valor da resistência à compressão de cada laje, f_c , é o resultado médio de três ensaios por compressão simples e o da resistência à tração por fendilhamento, f_{ct} é o valor

médio dos resultados de três ensaios de tração por compressão diametral, realizados no mesmo dia em que a laje foi testada. Na tabela 3.2 estão apresentados estes resultados.

3.3.2 Aço

A armadura principal das lajes foi constituída por barras de aço nervuradas, com diâmetros nominais de 8 mm, 10 mm e 12,5 mm dependendo do modelo. Para o reforço dos cantos foram utilizadas barras de aço com diâmetro nominal de 6,3 mm. O recobrimento utilizado foi de 0,5 cm.

Foram retiradas amostras das barras para determinação das curvas tensão x deformação do aço. As deformações nas amostras foram medidas com os extensômetros desenvolvidos na COPPE/UFRJ e também com extensômetros elétricos de resistência.

Foi encomendado aço CA50A, no entanto, os ensaios mostraram que o aço da primeira partida, para as barras com diâmetro de 12,5 mm era A, e para os demais diâmetros o aço era B, e o aço da segunda partida tinha um comportamento intermediário entre A e B.

A armadura foi preparada a partir dos dois lotes distintos de barras com diâmetros reais e resistências diferentes, mas com características uniformes em cada lote. A armadura de cada laje foi constituída por barras do mesmo lote.

A tabela 3.3 apresenta as características geométricas e mecânicas médias dos aços utilizados. As figuras 3.15 e 3.16 mostram alguns exemplos de curvas tensão x deformação obtidas.

3.4. Fabricação dos Modelos

As lajes foram moldadas em formas de madeira, na posição horizontal, e vibradas com um vibrador de imersão de agulha fina. Antes de cada concretagem foi passado óleo na forma para facilitar a desmoldagem da laje.

Para conseguir o cobrimento desejado do concreto foram usadas "pastilhas" pré-fabricadas de argamassa de cimento e areia, com um arame para amarração.

As lajes foram curadas com a utilização de sacos molhados sobre a área exposta, durante sete dias, quando foram desmoldadas e expostas ao meio ambiente do laboratório até a data do ensaio.

Antes da realização dos ensaios, as peças foram pintadas de branco, com cal, para facilitar a observação do desenvolvimento das fissuras.

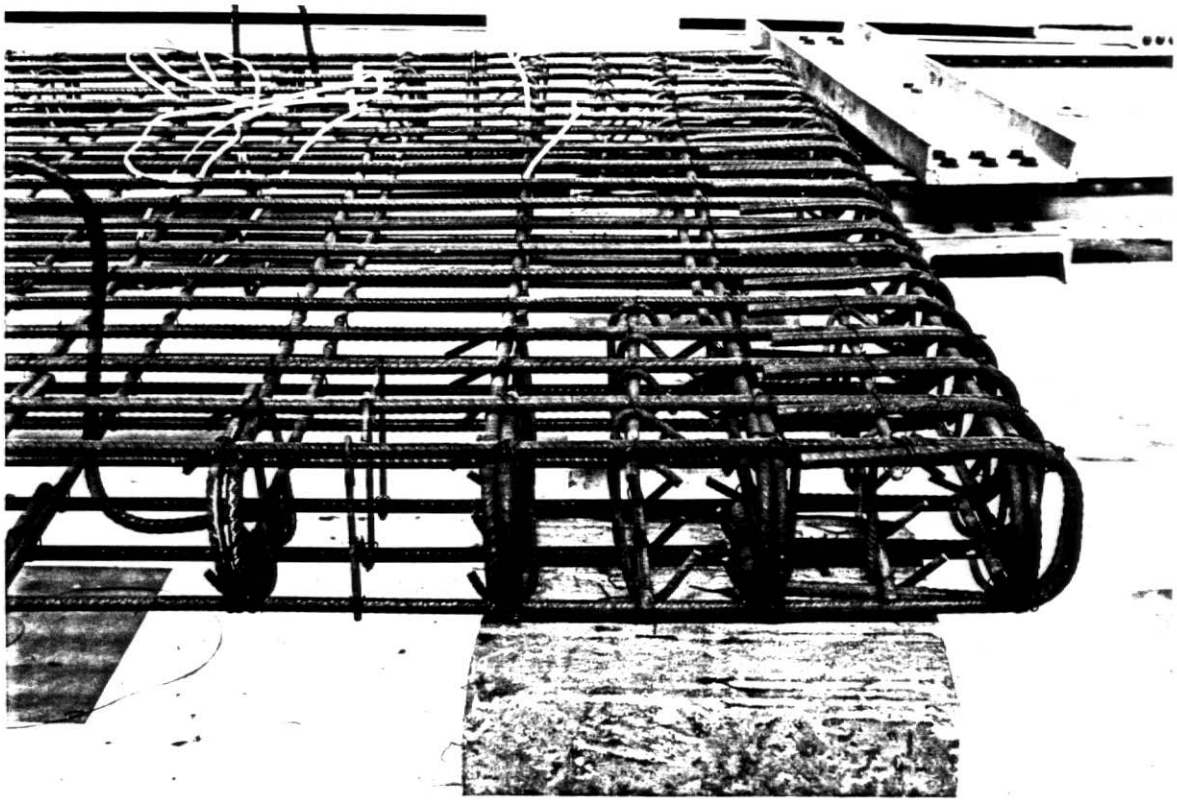


Figura 3.13 - Detalhe da armação das lajes - Reforço dos cantos

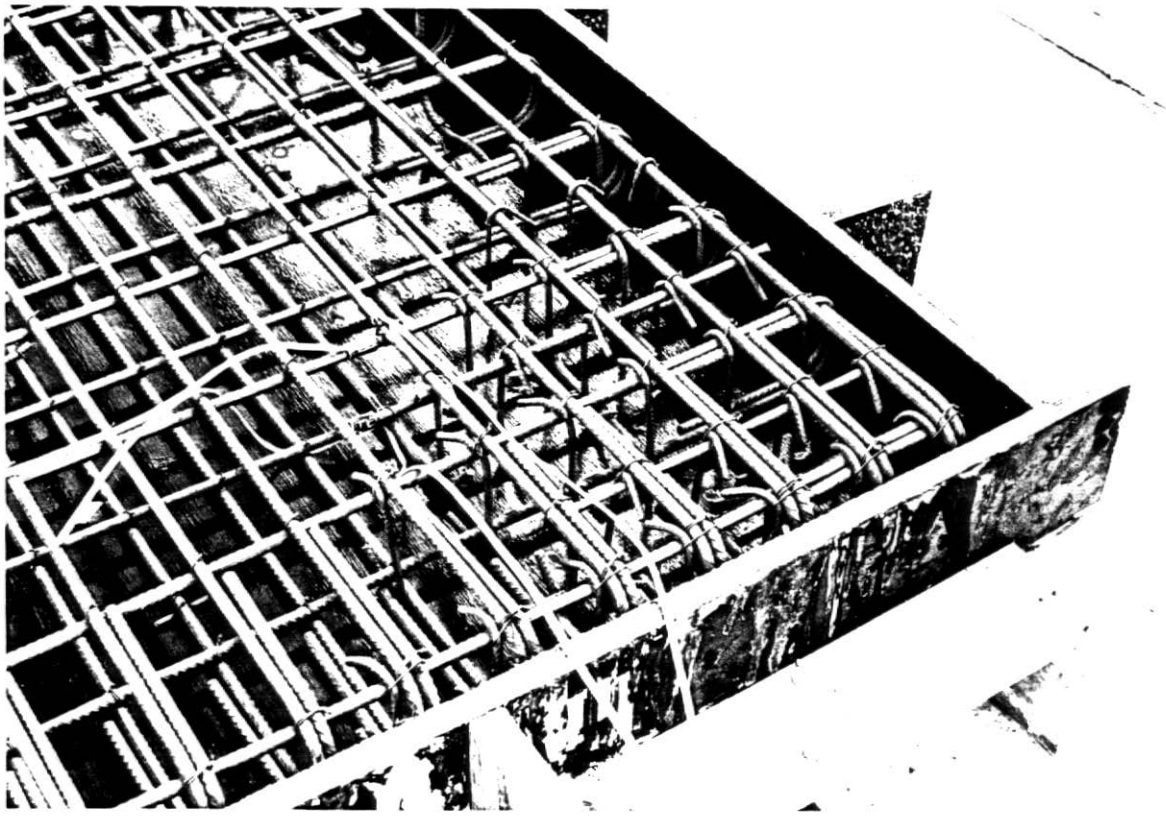
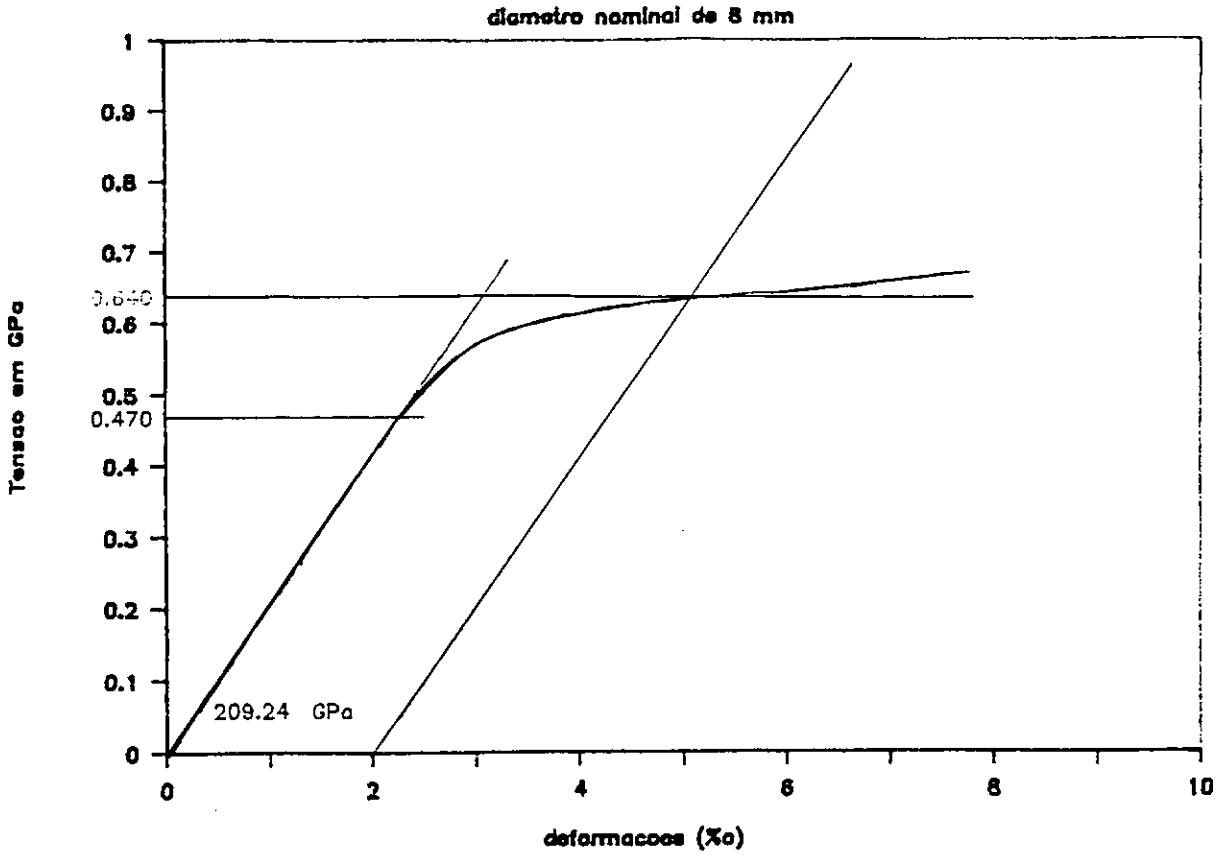


Figura 3.14 - Armação da laje colocada na forma



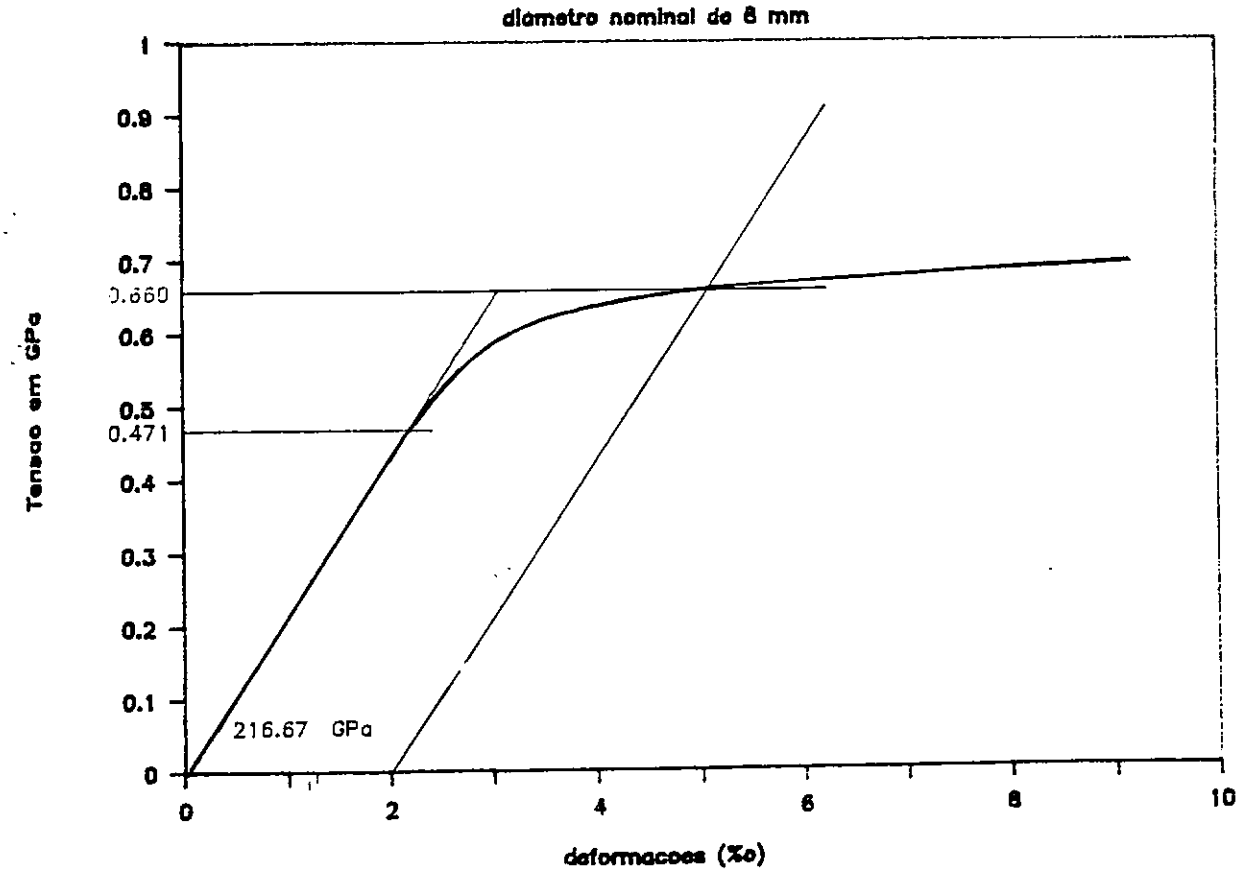
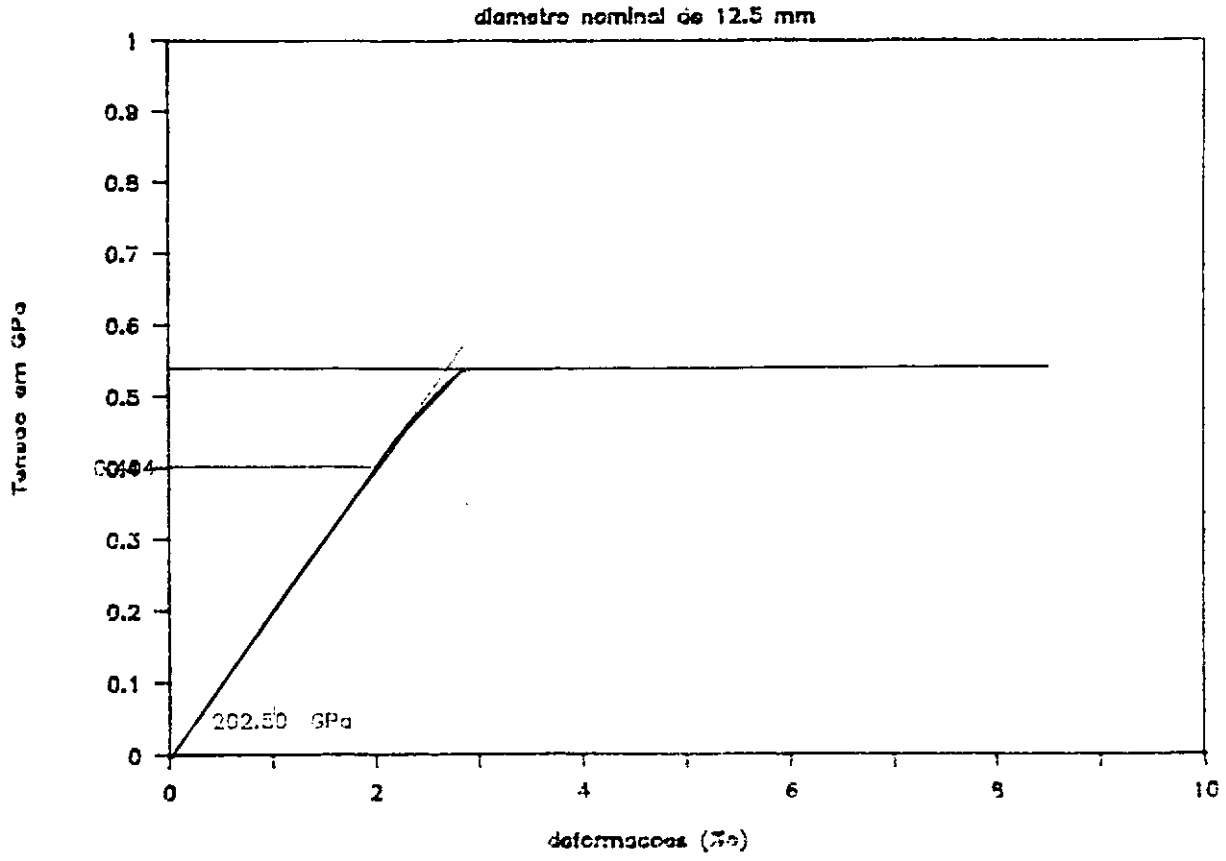


Figura 3.15 - Curva tensão x deformação do aço



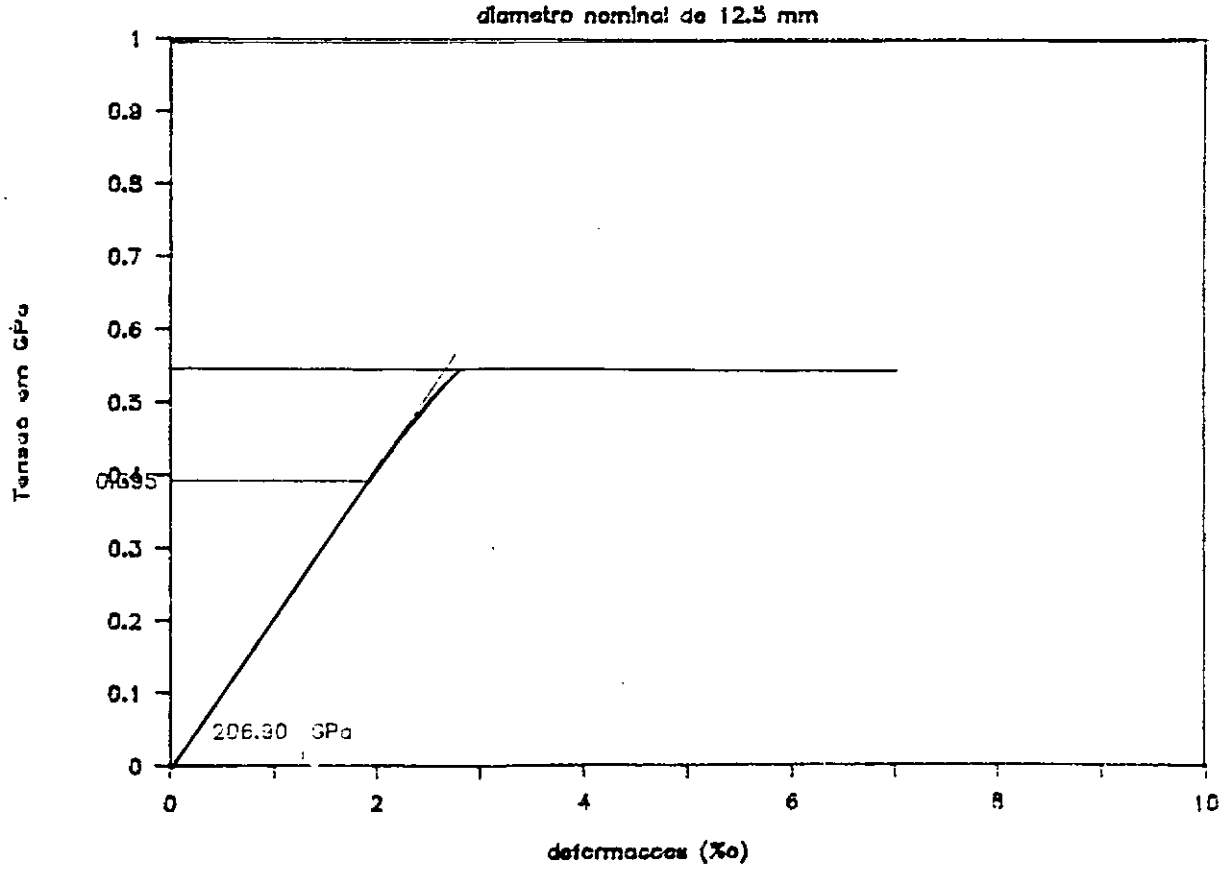


Figura 3.16 - Curva tensão x deformação

3.5. Descrição dos Ensaios

3.5.1. Instrumentação

A instrumentação constou de extensômetros elétricos de resistência, deformetro, que é um extensômetro mecânico, defletômetros e catetômetro.

3.5.1.1. Deslocamentos Verticais

Foram medidos os deslocamentos verticais de vinte e cinco pontos da laje que formaram a malha indicada na figura 3.17. Nos quatro cantos da laje, a leitura foi realizada com defletômetros elétricos da marca KYOWA. Nos outros pontos foi utilizado o catetômetro porque, como permite a leitura a distância, possibilitou o acesso às faces superior e inferior das lajes para medir as deformações e acompanhar a fissuração. Foi fabricada uma mira, dotada de um pêndulo, que foi colocada em cada ponto da malha para permitir a leitura.

3.5.1.2. Deformações Específicas na Armadura

As deformações específicas nas barras de aço foram medidas com extensômetros elétricos de resistência (EER), da marca KYOWA que foram colados nas barras da armadura. Foram utilizados EER tipo KFC-5-C1-11.

A cola usada foi do tipo cianoacrilática, e a proteção foi feita com uma resina epóxica flexível.

Em cada laje foram colados dez extensômetros na armadura negativa e dez na armadura positiva, segundo o esquema geral apresentado na figura 3.18. As pequenas variações foram função da armadura de cada modelo, tendo sido instrumentado sempre o mesmo trecho da laje.

3.5.1.3. Deformações Específicas no Concreto

As deformações específicas superficiais no concreto foram medidas com extensômetros mecânicos tipo DEFORMETRO, com menor divisão de escala igual a 0,001 mm.

As medições foram feitas sobre pastilhas de cobre coladas na superfície do concreto, na face superior e na face inferior das lajes, com base de medição de 250,0 mm. As pastilhas

foram coladas formando rosetas, com o objetivo de realizar leituras nas quatro direções das mesmas. A partir dessas deformações é possível conhecer as deformações, as tensões e as direções principais. Em todas as lajes foi instrumentado um quadrante, conforme o esquema da figura 3.19.

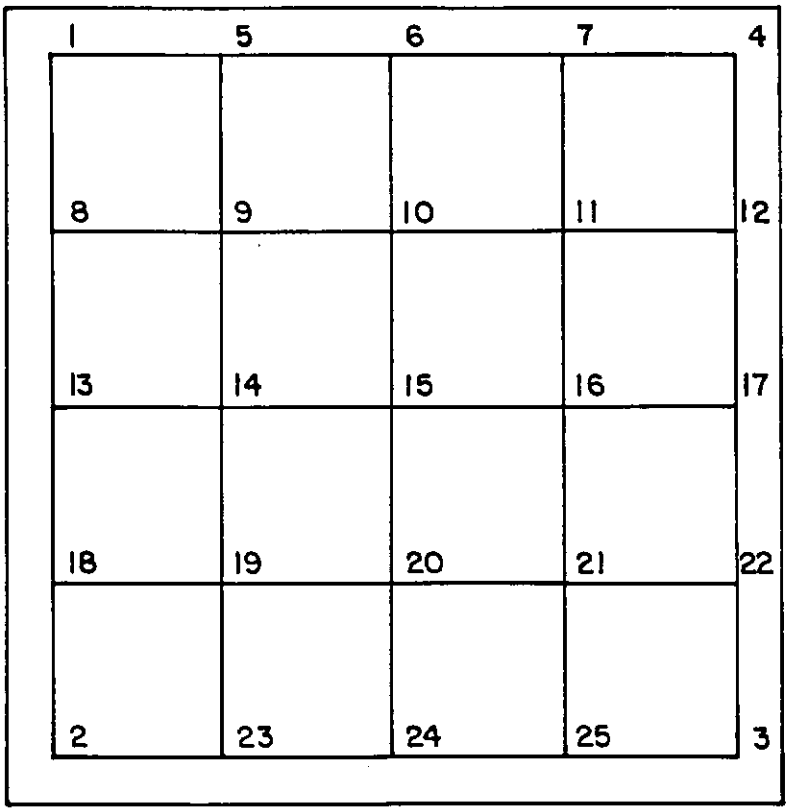


Figura 3.17 - Pontos de medição dos deslocamentos verticais

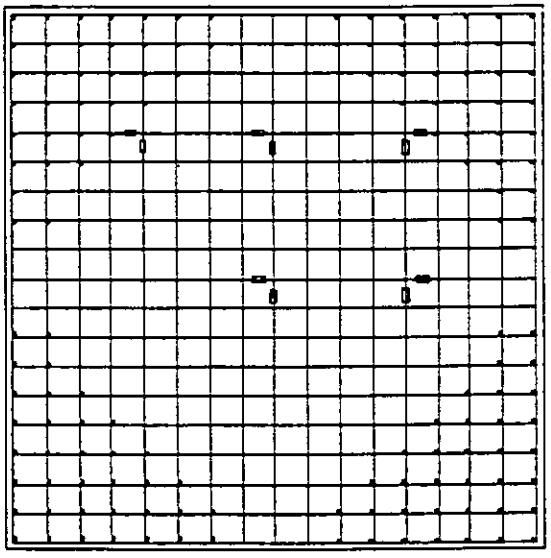


Figura 3.18 - Esquema geral da posição dos EER

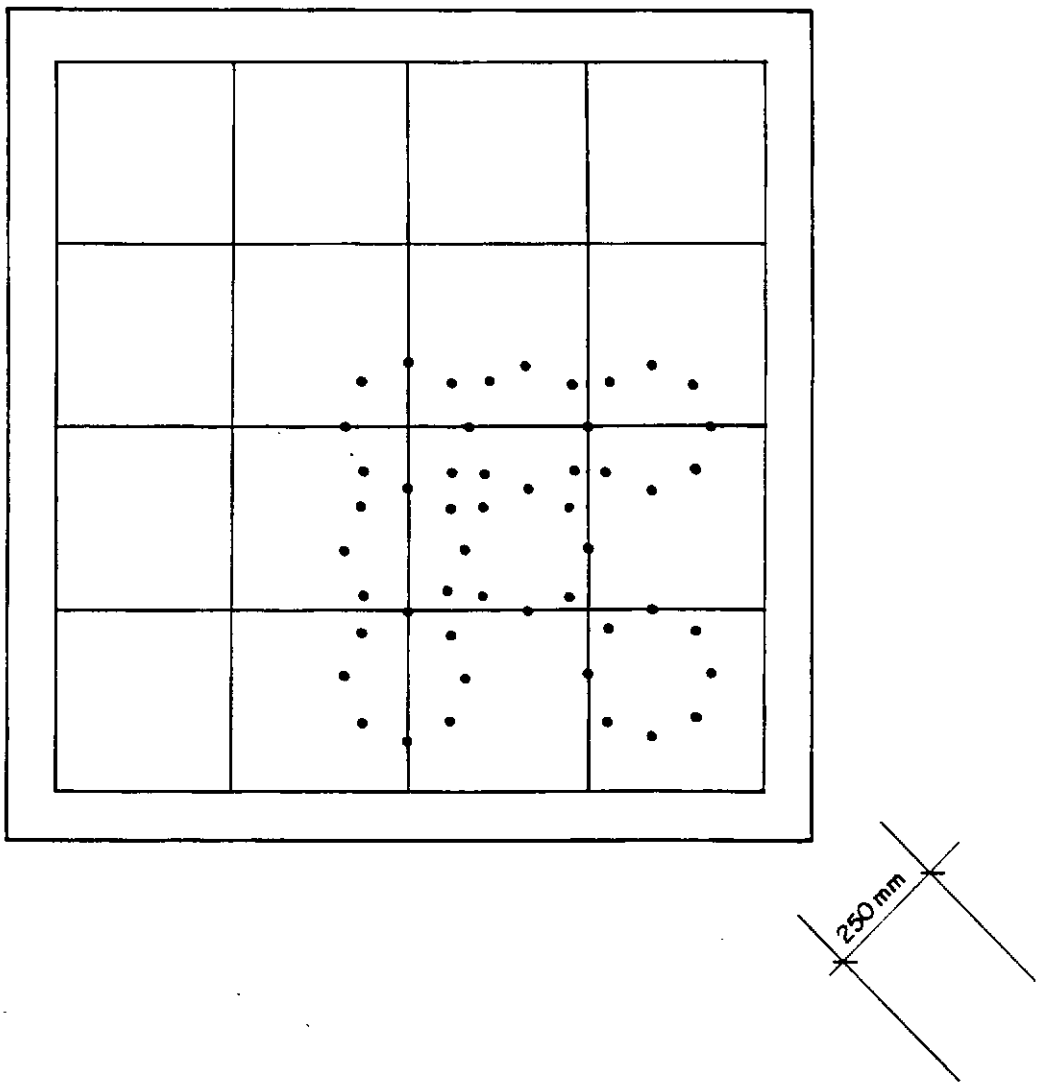


Figura 3.19 - Pontos de leitura das deformações específicas no concreto

3.5.2. Montagem dos Ensaios

Os ensaios foram realizados na placa de reação do Laboratório de estruturas do Centro de Tecnologia da UFRJ.

Cada laje foi colocada sob o quadro, centrada e nivelada, com dois cantos opostos apoiados em rótulas metálicas que foram colocadas sobre dois blocos de concreto armado, nivelados com camadas de areia.

As cargas foram aplicadas através do Sistema de Ensaio de Estruturas MTS, utilizando o sistema de deformação controlada.

Nos dois primeiros ensaios foi aplicada uma carga concentrada em um dos cantos através do Sistema de Ensaio de Estruturas MTS e no canto oposto uma escora ajustável transmitia a carga, como mostra a figura 3.20. A flecha sob a carga concentrada foi excessiva, causando preocupação e trabalho adicional na execução do ensaio. A montagem foi modificada para os demais ensaios. Foram aplicadas duas cargas concentradas iguais e aplicadas nos cantos opostos das lajes, através do Sistema de Ensaio de Estruturas MTS, de acordo com a figura 3.21. O ensaio da laje L1A foi repetido com a nova montagem, a laje foi denominada L1A2, e os resultados foram iguais aos obtidos com a primeira montagem.

Durante os testes, a carga foi aplicada progressivamente utilizando o sistema de deformação controlada. As leituras dos extensômetros elétricos e dos defletômetros foram feitas a cada incremento de carga de 5 kN. As leituras do deformetro, do catetômetro, a verificação do surgimento e do desenvolvimento das fissuras, e a abertura das mesmas foram realizadas a cada 10 kN ou 15 kN dependendo da carga última e da carga de fissuração de cada laje. Os incrementos de carga eram menores quando a carga aplicada se aproximava da carga prevista para o aparecimento das primeiras fissuras e da carga de colapso, para a determinação mais precisa dos valores destas cargas e, também, para possibilitar uma melhor observação do comportamento da laje.

3.5.3. Fissuração

Nas duas faces das lajes, as fissuras foram marcadas com lápis cera e as aberturas foram medidas com uma lente especial associada a uma escala com menor divisão igual a 0,1mm, ou com uma régua de fissuras da marca LNEC. A direção e a distribuição das fissuras podem ser observadas nas figuras 3.22 e 3.23.

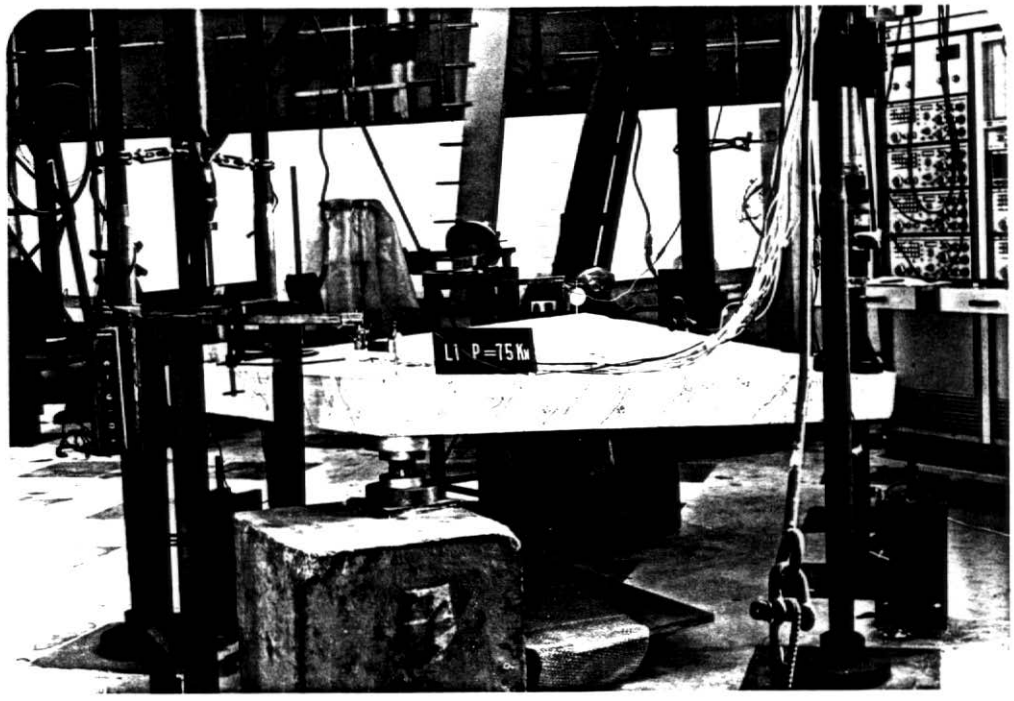


Figura 3.20 - Primeira montagem

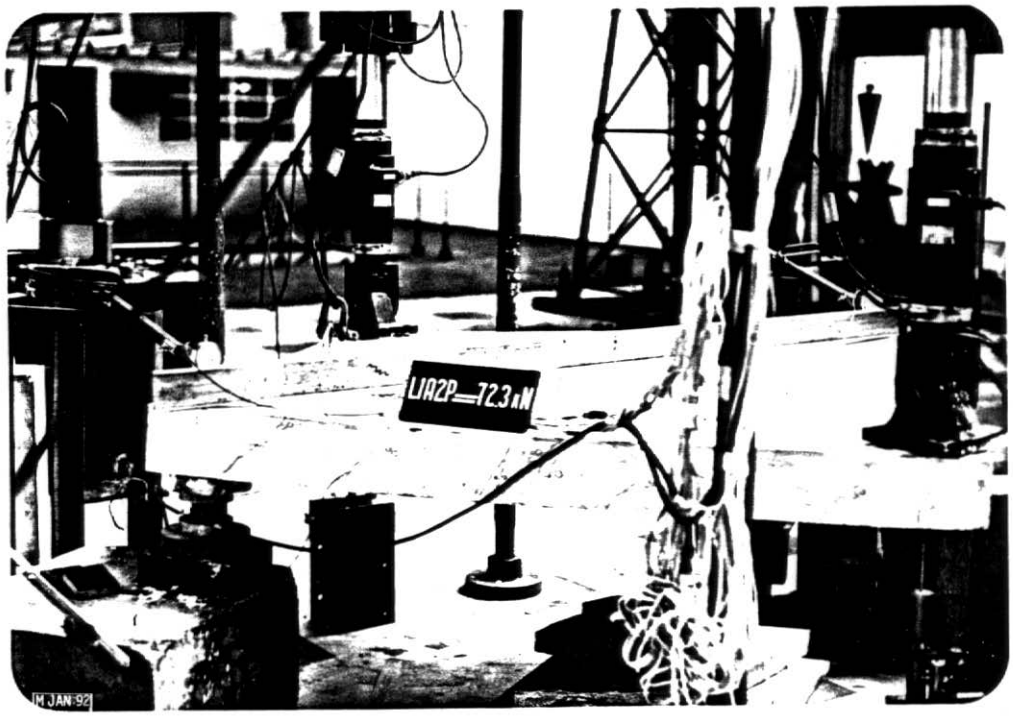
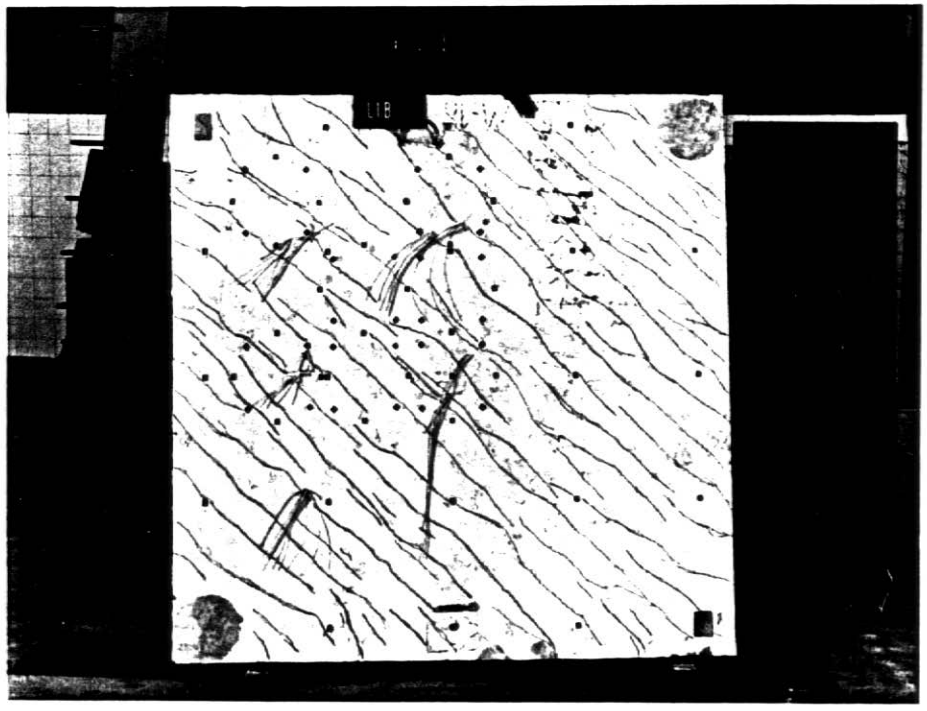
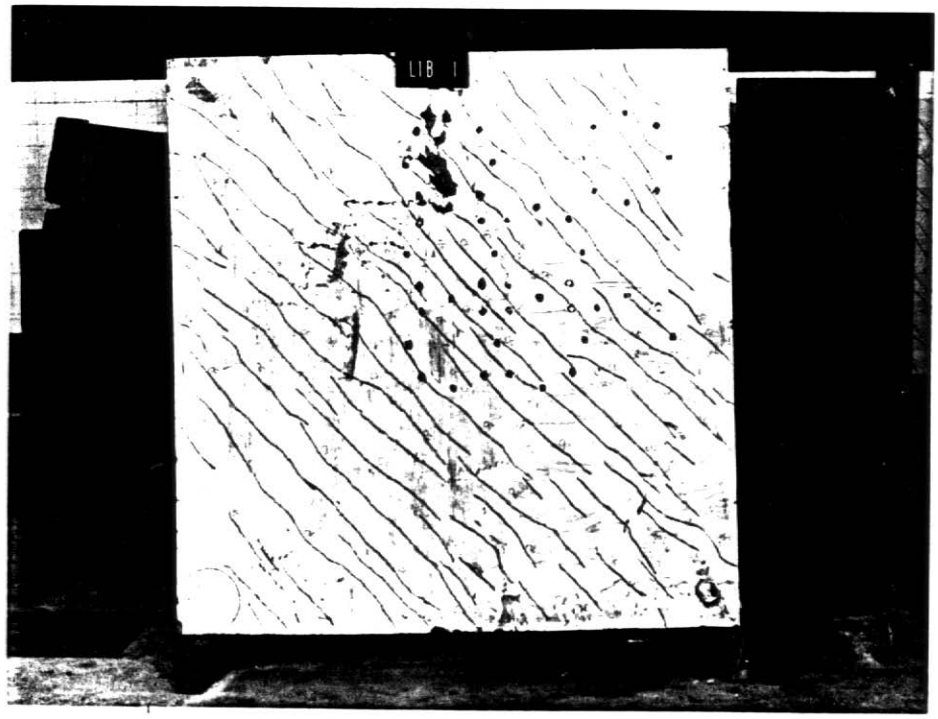


Figura 3.21 - Segunda montagem

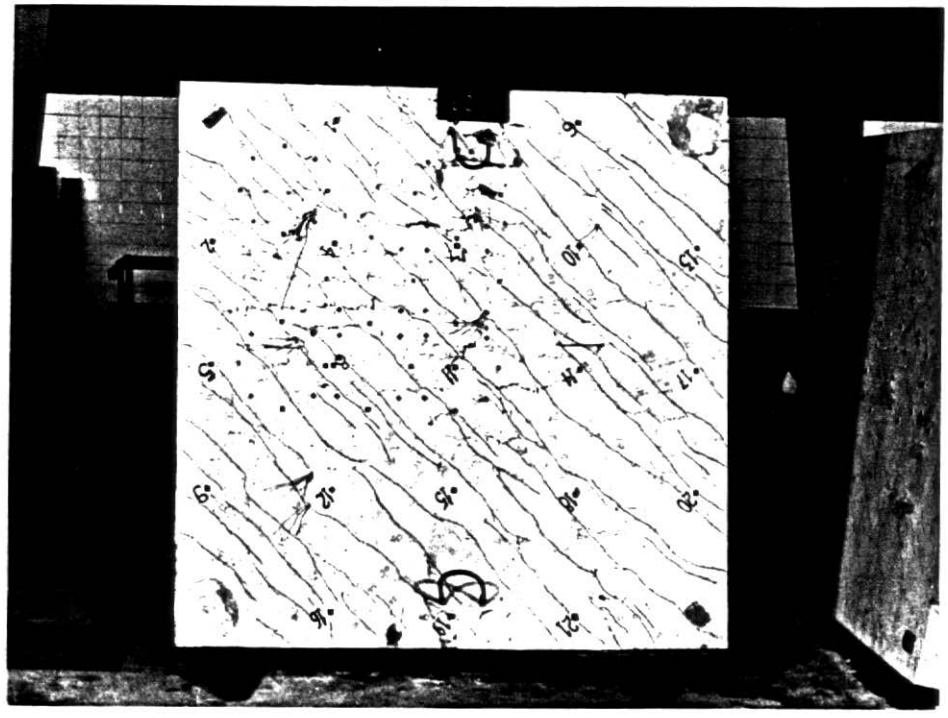


face superior

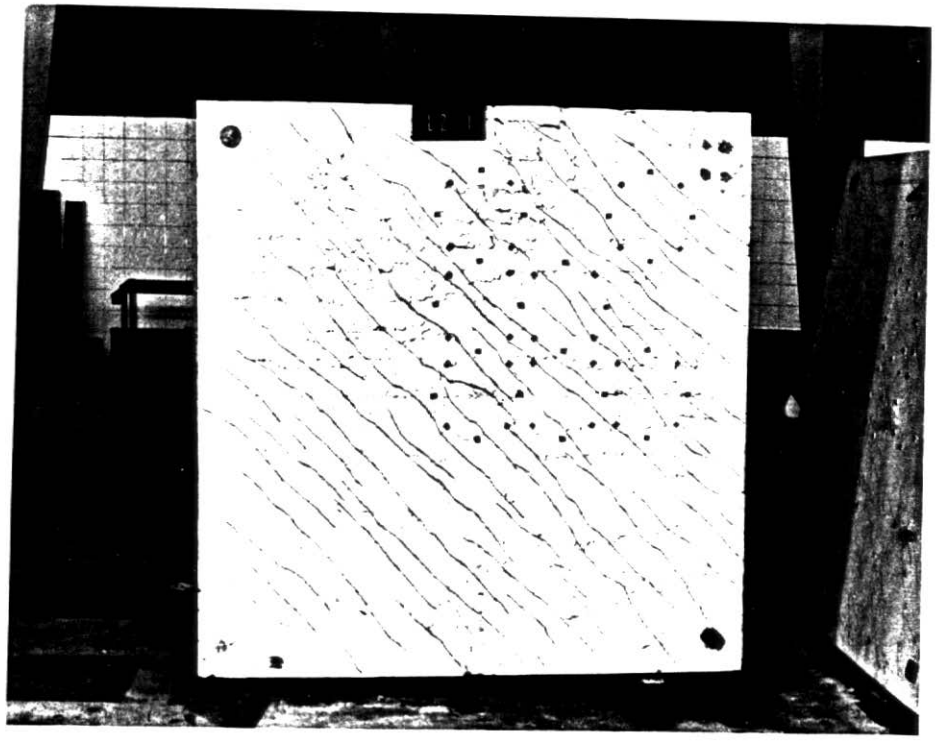


face inferior

Figura 3.22 - Fissuração da laje L1B



face superior



face inferior

Figura 3.23 - Fissuração da laje L2

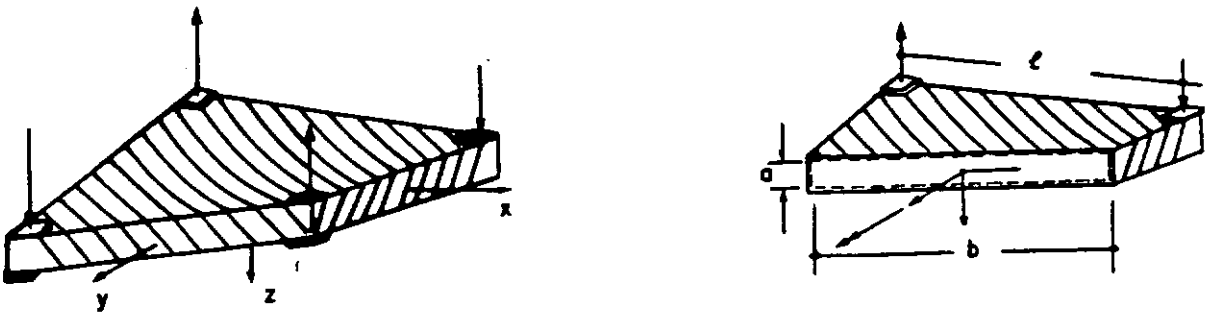


Figura 3.24 - Esquema do carregamento das lajes ensaiadas

3.6. Resultados Obtidos

3.6.1. Resultados Experimentais

Para análise da superfície de colapso só interessa a carga de ruptura da laje, que nos permite determinar o momento torsor último.

A resultante do momento torsor (T) em qualquer seção paralela aos lados do modelo (ver figura 3.24)

$T = (P + W/4) l$

onde:

P = carga aplicada

W = peso próprio da laje = 8,3 kN

l = braço de alavanca das forças aplicadas = $\sqrt{2}$ metros

Considerando o fluxo cisalhante (S)

$S = T/2ab$

O momento torsor médio por unidade de comprimento:

$m = aS = (P/2 + W/8) l/b$

a = altura da seção onde atua o fluxo

b = largura da seção onde atua o fluxo

A tabela 3.4 fornece as cargas de ruptura de cada laje, obtidas nos ensaios. A partir destas cargas e dos dados acima são calculados os momentos torsores últimos, que estão resumidos na tabela 3.4.

3.6.2. Resultados Obtidos Utilizando a Superfície de Colapso Proposta por Johansen

A superfície de colapso proposta por Johansen é uma superfície bicônica representada pelas equações:

Para as charneiras plásticas positivas:

$$\left(m_{px}^{+} - m_x\right)\left(m_{py}^{+} - m_y\right) = m_{xy}^2 \tag{2.20}$$

onde :

m_{px}^{+} e m_{py}^{+} são os momentos resistentes últimos positivos nas direções "x" e "y", respectivamente

m_x e m_y são os momentos fletores solicitantes nas direções "x" e "y", respectivamente

m_{xy} é o momento torsor solicitante

Para as charneiras plásticas negativas :

$$\left(m_{px}^{-} + m_x\right)\left(m_{py}^{-} + m_y\right) = m_{xy}^2 \tag{2.21}$$

onde :

m_{px}^{-} e m_{py}^{-} são os momentos resistentes últimos negativos nas direções "x" e "y", respectivamente

m_x e m_y são os momentos fletores solicitantes nas direções "x" e "y", respectivamente

m_{xy} é o momento torsor solicitante

Para todas as lajes foram calculados os momentos resistentes últimos positivos e negativos, nas direções "x" e "y", utilizando um programa, como já foi mostrado anteriormente. Os ensaios realizados foram de torção pura, alguns equivalentes a flexo-torção, portanto, os momentos fletores são nulos e podemos calcular o momento torsor último de acordo com a teoria de Johansen.

LAJE	A_{sx}^{+}	A_{sx}^{-}	A_{sy}^{+}	A_{sy}^{-}	ρ_x^{+} (%)	ρ_x^{-} (%)	ρ_y^{+} (%)	ρ_y^{-} (%)
L1	17φ10	17φ10	19φ10	19φ10	0,66	0,66	0,73	0,73
L1A	13φ8	17φ12,5	13φ8	20φ12,5	0,31	1,05	0,31	1,23
L1A2	15φ8	20φ12,5	15φ8	23φ12,5	0,36	1,20	0,36	1,38
L1B	13φ8	20φ12,5	22φ12,5	14φ8	0,31	1,23	1,35	0,34
L2	19φ10	19φ10	10φ10	10φ10	0,73	0,73	0,39	0,39
L2A	12φ10	20φ12,5	13φ10	10φ8	0,46	1,23	0,50	0,24
L2B	10φ8	26φ12,5	10φ8	14φ10	0,24	1,60	0,24	0,54
L3	10φ10	10φ10	11φ10	11φ10	0,38	0,38	0,42	0,42

Tabela 3.1 - Armadura principal das lajes e suas taxas geométricas

LAJE	*fc* (MPa)	*fct* (MPa)
L1	36,2	3,5
L1A	42,0	3,0
L1A2	35,1	3,9
L1B	39,1	3,7
L2	39,0	3,7
L2A	34,4	3,1
L2B	37,1	3,4
L3	36,5	3,2

Tabela 3.2 - Resistências médias dos corpos de prova à compressão e à tração

ϕ (mm)	Partida	ϕ Real (mm)	*As* Real (mm^2)	εy (‰)	*fy* (MPa)	*fsu* (MPa)	*Es* (MPa)	Tipo de Aço
6,3	1ª	6,4	32,0	5,2	673,5	890,6	$2,07 \times 10^5$	B
8	1ª	8	50,0	5,1	654,0	853,3	$2,09 \times 10^5$	B
8	2ª	8	49,9	4,9	602,0	845,9	$2,09 \times 10^5$	B
10	1ª	10,1	80,4	4,8	655,0	873,2	$2,1 \times 10^5$	B
10	2ª	10,1	80,2	5,1	631,5	838,8	$2,05 \times 10^5$	B
12,5	1ª	12,9	128,0	2,6	538,9	830,0	$2,02 \times 10^5$	A
12,5	2ª	12,5	124,0	4,3	558,3	820,4	$2,15 \times 10^5$	B

Tabela 3.3 - Características do aço

LAJE	m_{px}^{+} kNm/m	m_{px}^{-} kNm/m	m_{py}^{+} kNm/m	m_{py}^{-} kNm/m	Pu_E kN	$m_{xy_{uE}}$ kNm/m	Pu_J kN	$m_{xy_{uJ}}$ kNm/m	$\frac{m_{xy_{uE}}}{m_{xy_{uJ}}}$
L1	64,5	64,5	64,5	64,5	81,0	37,9	139,3	64,5	0,59
L1A	32,6	83,5	33,6	85,5	71,0	33,3	70,3	33,0	1,01
L1A2	33,2	96,5	33,8	96,5	72,3	33,9	71,4	33,5	1,01
L1B	31,6	96,5	96,5	31,6	74,0	34,7	118,9	55,2	0,63
L2	72,5	72,5	36,2	36,2	73,0	34,2	110,2	51,2	0,67
L2A	46,5	96,5	45,5	22,8	66,2	31,1	100,7	46,9	0,66
L2B	24,2	122,5	24,2	47,5	57,0	26,9	51,0	24,2	1,11
L3	36,8	36,8	37,9	37,9	60,1	28,4	79,7	37,3	0,76

Tabela 3.4 - Valores da carga de ruptura e do momento torsor último, obtidos experimentalmente e usando a teoria de Johansen

CAPÍTULO IV
ESTUDO NUMÉRICO

4.1. Conceitos Gerais

O objetivo da formulação apresentada e do programa computacional desenvolvido é determinar pontos da superfície de colapso, no espaço dos esforços seccionais, de lajes de concreto armado, uma vez definidas as características geométricas e mecânicas dos materiais utilizados em um dado ponto da laje.

O colapso é caracterizado quando a estrutura atinge o estado limite último. Este é alcançado se houver esmagamento do concreto, ou seja, quando o encurtamento na fibra mais comprimida do concreto atingir o valor estabelecido como deformação última, ou se houver deformação plástica excessiva da armadura, isto é, quando o alongamento das barras da armadura for igual ao valor último convencional de 10‰. Para ser alcançado o estado limite último, necessariamente deverá estar satisfeita pelo menos uma das duas condições últimas.

Uma superfície de colapso, a nível de esforços seccionais, é desejável para se analisar e se dimensionar lajes de concreto armado. A determinação de pontos da superfície de colapso pode ser feita aumentando, proporcionalmente, um conjunto de valores iniciais para os esforços até que uma configuração de colapso seja obtida. Neste instante, o vetor dos esforços está sobre a superfície de colapso. É possível obter tantos pontos desta superfície quantos forem desejados, variando a direção do vetor dos esforços. Como o colapso é caracterizado quando as deformações atingem valores estabelecidos como deformações últimas, é necessário que as deformações possam ser obtidas a partir de esforços seccionais conhecidos.

O modelo utilizado na implementação computacional leva em consideração os efeitos de fissuração e esmagamento do concreto, além do efeito secundário do engrenamento do agregado após a fissuração. Apenas as não linearidades independentes do tempo são consideradas. O aço é tratado como material linear elástico perfeitamente plástico e suposto em aderência perfeita com o concreto.

Na modelagem do concreto armado são utilizadas as relações constitutivas apropriadas para cada material isoladamente: concreto e aço.

As lajes de concreto armado são supostas delgadas. Para representar o comportamento do concreto segundo a espessura e para modelar a armadura é realizada uma discretização por camadas ao longo da altura.

O comportamento do concreto é caracterizado a partir das relações constitutivas bidimensionais propostas por Liu [LIU 72 a,b].

Na solução das equações não lineares utiliza-se o método de Newton-Raphson convencional, a partir de uma relação incremental estabelecida entre esforços aplicados e deformações no plano médio da laje.

4.2. Metodologia Proposta

A formulação é restrita aos casos de cascas e lajes ortótropas de concreto armado com armaduras ortogonais, cujas direções coincidam com as direções de ortotropia.

As hipóteses básicas são as seguintes:

1. O estudo da estrutura laminar é feito pela teoria de Kirchoff, ou seja, as seções planas permanecem planas após a deformação (hipótese de Bernoulli) e são desprezadas as deformações por esforço cortante. A formulação é, portanto, mais apropriada para o caso de cascas e lajes delgadas.

2. A deformação das armaduras é igual à deformação do concreto numa mesma direção. Não são verificados deslizamentos relativos entre o concreto e a armadura.

3. O concreto possui resistência à tração.

4. Considera-se o efeito secundário de engrenamento dos agregados entre as fissuras.

5. As áreas de concreto ocupadas pelas armaduras não são descontadas.

Para representar o comportamento do concreto ao longo da altura, o elemento laminar é dividido em um número finito de camadas ou lamelas de concreto (figura 4.1).

As camadas que constituem as armaduras são consideradas discretas ao longo da altura, podendo inclusive não existir. As posições das armaduras nas direções x e y não são necessariamente as mesmas.

As deformações das lamelas estão ligadas entre si através da hipótese de Bernoulli e satisfazem às condições de compatibilidade:

$$u = u_0 + \varphi_y z$$

$$v = v_0 - \varphi_x z \tag{4.1}$$

onde u_0 e v_0 são os deslocamentos na elevação zero da laje, φ_x e φ_y são as rotações em torno dos eixos x e y, respectivamente, e z é a posição do centro da lamela em relação ao plano médio da laje (figuras 4.1 e 4.2).

As deformações são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{4.2}$$

$$\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

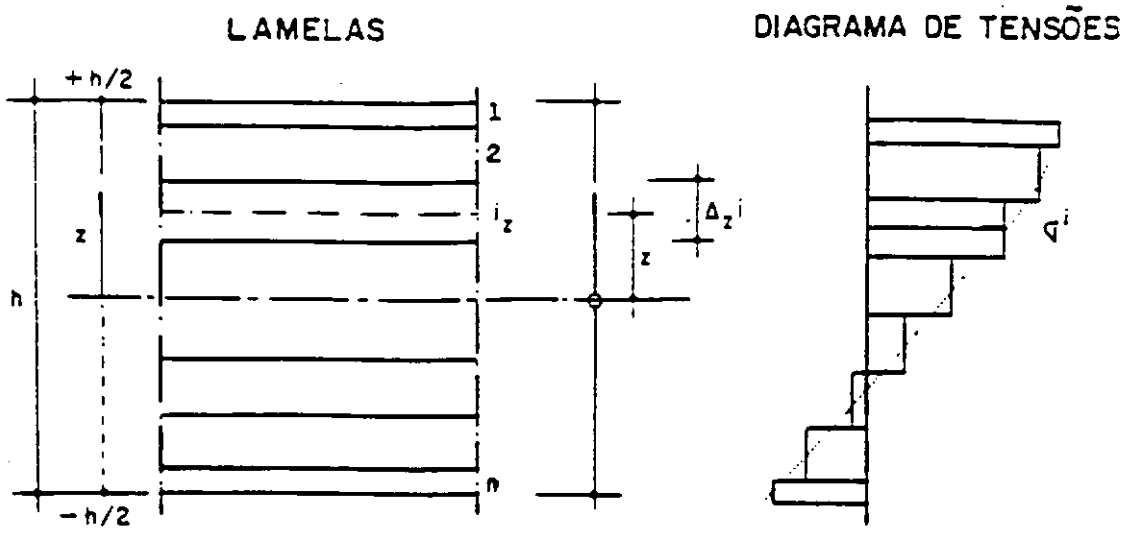


Figura 4.1 - Modelo da discretização da laje ao longo da altura com a respectiva distribuição das tensões

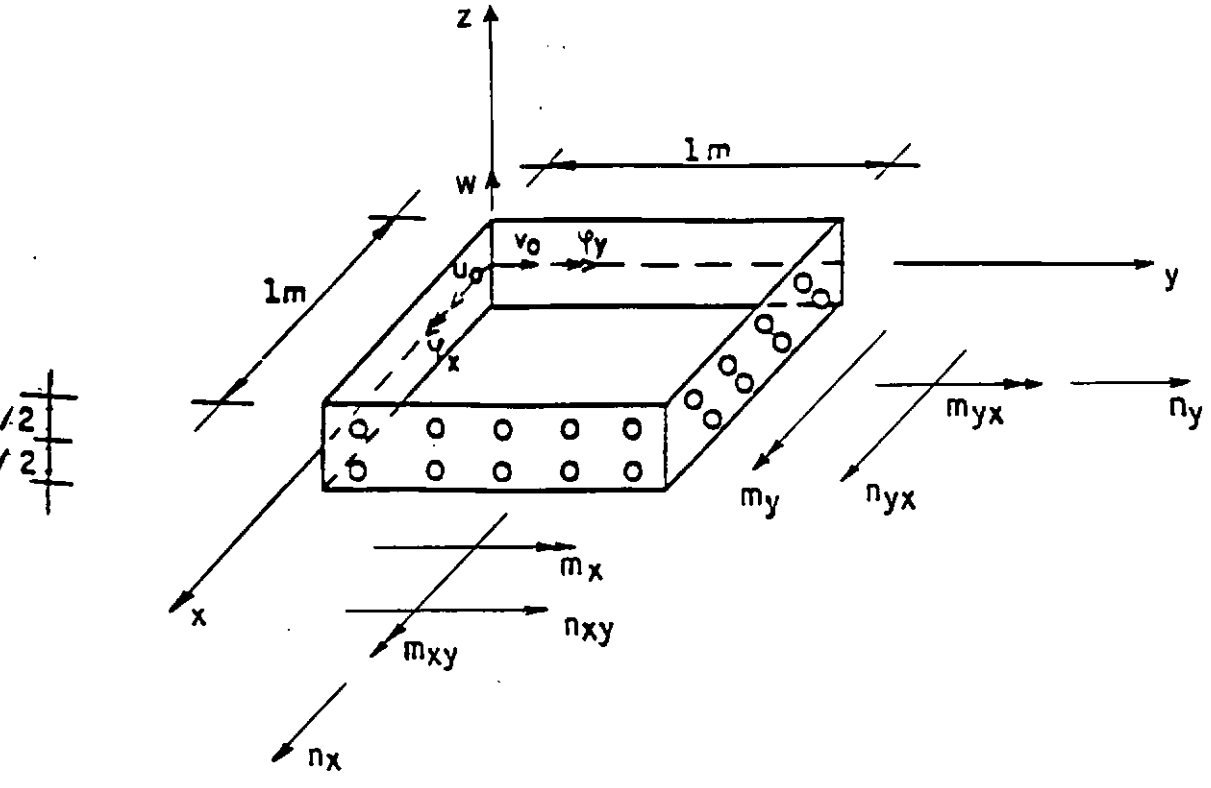


Figura 4.2 - Esforços seccionais num elemento de casca

Substituindo-se (4.1) em (4.2):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} z \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} z \\
\varepsilon_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} z + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} z \right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

as deformações no plano médio podem ser definidas por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x_0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
\varepsilon_{y_0} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
\varepsilon_{xy_0} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

e as curvaturas associadas aos momentos m_x, m_y e m_{xy}, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}
\kappa_{x_0} &= -\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\
\kappa_{y_0} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\
\kappa_{xy_0} &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

As equações (4.3) podem ser expressas como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_{x_0} - k_{x_0} z \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_{y_0} - k_{y_0} z \\
\varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy_0} + k_{xy_0} z
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Como foi adotada a hipótese de que a deformação das armaduras é igual à deformação do concreto numa mesma direção, são válidas as equações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^s &= \varepsilon_x^c \\ \varepsilon_y^s &= \varepsilon_y^c \end{aligned} \tag{4.7}$$

sendo ε_x^s e ε_y^s as deformações nas armaduras para as direções x e y respectivamente.

Os esforços seccionais que atuam por metro linear em uma casca de concreto armado estão indicados na figura (4.2), atuando no sentido positivo. Para satisfazer o equilíbrio global, as integrais das tensões no concreto e na armadura, ao longo da altura, são iguais aos esforços aplicados no elemento:

$$\begin{aligned} n_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^c dz + \sum_{j=1}^{n} a_{xj}^s \sigma_{xj}^s \\ n_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y^c dz + \sum_{j=1}^{n} a_{yj}^s \sigma_{yj}^s \\ n_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}^c dz \\ m_x &= -\left(\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^c z dz + \sum_{j=1}^{n} a_{xj}^s \sigma_{xj}^s z_j \right) \\ m_y &= -\left(\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y^c z dz + \sum_{j=1}^{n} a_{yj}^s \sigma_{yj}^s z_j \right) \\ m_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}^c z dz \end{aligned} \tag{4.8}$$

Os índices c e s dizem respeito, respectivamente, ao concreto e ao aço e o índice j designa as camadas de armadura.

Idealizando o elemento subdividido em lamelas, ao longo da altura, a integral pode ser representada por um somatório e as equações (4.8) podem ser representadas matricialmente por:

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{T}_i^c \sigma_i^c dz_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{T}_j^s f_j^s \tag{4.9}$$

onde:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{T}_i^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$\sigma_i^c = \begin{Bmatrix} \sigma_{x_i}^c \\ \sigma_{y_i}^c \\ \sigma_{xy_i}^c \end{Bmatrix} \tag{4.12}$$

$$\mathbf{T}_j^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -z & 0 \\ 0 & -z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$f_j^s = \begin{bmatrix} a_x^s & 0 \\ 0 & a_y^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x_j}^s \\ \sigma_{y_j}^s \end{Bmatrix} \tag{4.14}$$

sendo m o número de lamelas de concreto e n o número de camadas de armadura.

A relação esforço seccional versus deformações generalizadas no plano médio da casca pode ser obtida. Por equilíbrio, os esforços estão relacionados às tensões, existindo uma relação constitutiva entre tensões e deformações e uma relação de compatibilidade entre as deformações na lamela i e as deformações no plano médio da placa (equações 4.6).

A partir das equações de equilíbrio (4.8), é possível dizer que sendo

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}\left(\sigma_i^c, \sigma_j^s\right) \tag{4.15}$$

os esforços seccionais $\mathbf{N}$ estão relacionados às tensões nas lamelas de concreto σ_i^c e às tensões nas camadas de armadura σ_j^s. Levando em consideração que há uma lei constitutiva que relaciona tensões e deformações,

$$\begin{aligned} \sigma_i^c &= \sigma_i^c\left(\varepsilon_i^c\right) \\ \sigma_j^s &= \sigma_j^s\left(\varepsilon_j^s\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

as tensões no concreto e no aço estão ligadas, respectivamente, às deformações das lamelas de concreto ε_i^c e às deformações das camadas da armadura ε_j^s. As equações de

compatibilidade (4.6) e (4.7) que relacionam as deformações das lamelas de concreto e das camadas da armadura com as deformações no plano médio da laje conduzem a:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^c &= \mathbf{T}_i^{c^t} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_j^s &= \mathbf{T}_j^{s^t} \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

sendo:

$$\varepsilon_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \varepsilon_{xy_0} \\ \kappa_{x_0} \\ \kappa_{y_0} \\ \kappa_{xy_0} \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

Portanto, é possível escrever, em última análise, o vetor dos esforços em função do vetor das deformações no plano médio da laje.

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(\varepsilon_0) \tag{4.19}$$

Como o objetivo deste trabalho é determinar pontos da superfície de colapso, é necessário obter ε_0 a partir do vetor $\mathbf{N}$ para caracterizar que o estado limite último foi atingido. Para determinar o vetor de deformações no plano médio da casca, ε_0, correspondente aos esforços solicitantes, $\mathbf{N}$, utiliza-se o método de Newton-Raphson convencional para resolver a relação incremental que pode ser estabelecida entre esforços seccionais e deformações generalizadas.

$$d\mathbf{N} = \left[\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varepsilon_0}\right] d\varepsilon_0 \tag{4.20}$$

Se:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varepsilon_0} = \mathbf{K}_t(\varepsilon_0) \tag{4.21}$$

$$d\varepsilon_0 = \mathbf{K}_t^{-1}(\varepsilon_0) d\mathbf{N} \tag{4.22}$$

usando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varepsilon_0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \sigma_i^c} \frac{\partial \sigma_i^c}{\partial \varepsilon_i^c} \frac{\partial \varepsilon_i^c}{\partial \varepsilon_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \sigma_j^s} \frac{\partial \sigma_j^s}{\partial \varepsilon_j^s} \frac{\partial \varepsilon_j^s}{\partial \varepsilon_0} \tag{4.23}$$

Por sua vez:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \sigma_i^c} &= \mathbf{T}_i^c dz_i \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \sigma_j^s} &= \mathbf{T}_j^s a^s \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i^c}{\partial \varepsilon_i^c} &= \mathbf{E}_{t_i}^c \\ \frac{\partial \sigma_j^s}{\partial \varepsilon_j^s} &= \mathbf{E}_{t_j}^s \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_i^c}{\partial \varepsilon_0} &= \mathbf{T}_i^{c'} \\ \frac{\partial \varepsilon_j^s}{\partial \varepsilon_0} &= \mathbf{T}_j^{s'} \end{aligned} \tag{4.26}$$

ou melhor:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varepsilon_0} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{T}_i^c \mathbf{E}_{t_i}^c \mathbf{T}_i^{c'} dz_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{T}_j^s a^s \mathbf{E}_{t_j}^s \mathbf{T}_j^{s'} \tag{4.27}$$

É necessário, então, determinar a matriz $\mathbf{E}_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, para o concreto e para o aço, que representa uma matriz de elasticidade tangente.

CONCRETO

O concreto está submetido a um estado biaxial de tensões.

A relação tensão-deformação para um material elástico, homogêneo e isótropo pode ser expressa como:

$$\sigma = \frac{\varepsilon E}{1 - \nu\alpha} \tag{4.28}$$

na qual:

σ = tensão na direção considerada

ε = deformação na direção considerada

α = razão entre a tensão principal na direção ortogonal e a tensão principal na direção considerada

E = módulo de elasticidade tangente inicial no carregamento uniaxial

ν = coeficiente de Poisson no carregamento uniaxial.

Liu [LIU 72 a,b] propôs uma relação para o concreto sob compressão biaxial semelhante à equação (4.28), modificada para levar em conta o comportamento não linear

$$\sigma = \frac{A + B\varepsilon E}{(1 - \nu\alpha)(1 + C\varepsilon + D\varepsilon^2)} \tag{4.29}$$

na qual os parâmetros A,B,C,D devem ser determinados. A equação (4.29) deve obedecer às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0 & \sigma &= 0 \\ \varepsilon &= 0 & \frac{d\sigma}{d\varepsilon} &= \frac{E}{1 - \nu\alpha} \\ \varepsilon &= \varepsilon_p & \sigma &= \sigma_p \\ \varepsilon &= \varepsilon_p & \frac{d\sigma}{d\varepsilon} &= 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde σ_p e ε_p são, respectivamente, a tensão de plastificação na compressão biaxial e a correspondente deformação.

Utilizando as condições de contorno, são determinados os parâmetros:

$$A = 0$$

$$B = 1$$

$$C = \frac{E}{\sigma_p(1 - \nu\alpha)} - \frac{2}{\varepsilon_p} \tag{4.31}$$

$$D = \frac{1}{\varepsilon_p^2}$$

Substituindo na equação (4.29) e levando em conta que $E_s = \sigma_p/\varepsilon_p$:

$$\sigma = \frac{\varepsilon E}{(1-\nu\alpha)\left[1+\left(\frac{1}{1-\nu\alpha}\frac{E}{E_s}-2\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)^2\right]} \tag{4.32}$$

Derivando-se a equação (4.32) em relação a ε:

$$E_b = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)^2\right]}{(1-\nu\alpha)\left[1+\left(\frac{1}{1-\nu\alpha}\frac{E}{E_s}-2\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)^2\right]^2} \tag{4.33}$$

onde:

E = módulo de elasticidade do concreto sob carregamento uniaxial, que pode ser obtido em ensaios de laboratório, havendo propostas para a determinação de seu valor nas diversas normas (NBR 6118, CEB, ACI);

ν = coeficiente de Poisson, que para o concreto tem um valor próximo a 0,20, verificado em ensaios;

σ_p = tensão de plastificação para o concreto submetido a um estado biaxial de tensões.

Nos estados multiaxiais de tensão, a resistência é limitada a uma envoltória de falha do concreto, que é função do estado de tensões. Vários pesquisadores [KUPF 69, MILL 70, LIU 72, KUPF 73, CHEN 75], com base em resultados experimentais, propuseram curvas de resistência (figura 4.3). Neste trabalho é utilizada a envoltória de resistência biaxial representada na figura (4.4), obtida a partir da proposta de Liu et al [LIU 72 a,b], levando em conta a queda de resistência à compressão na presença de esforços de tração.

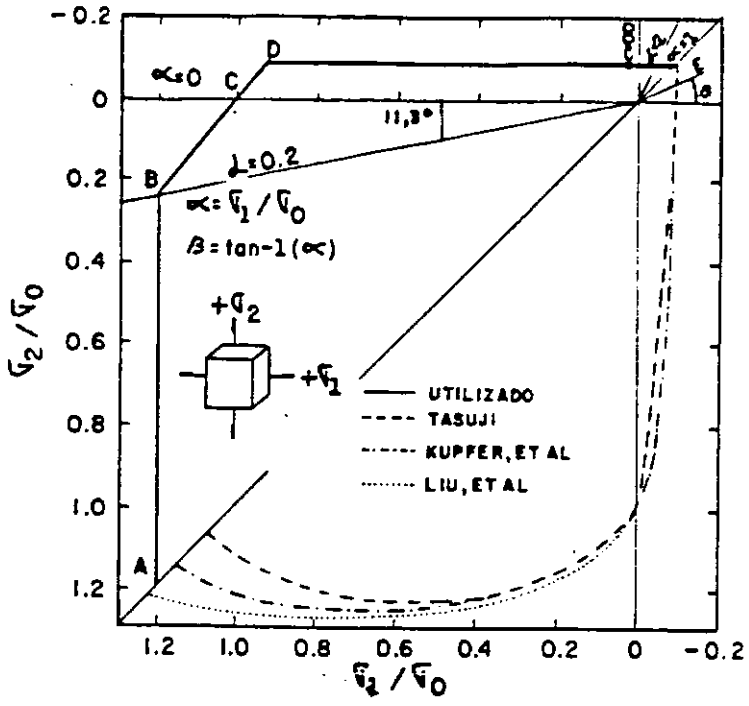


Figura 4.3 - Critério de plastificação. Envoltórias verificadas em trabalhos experimentais.

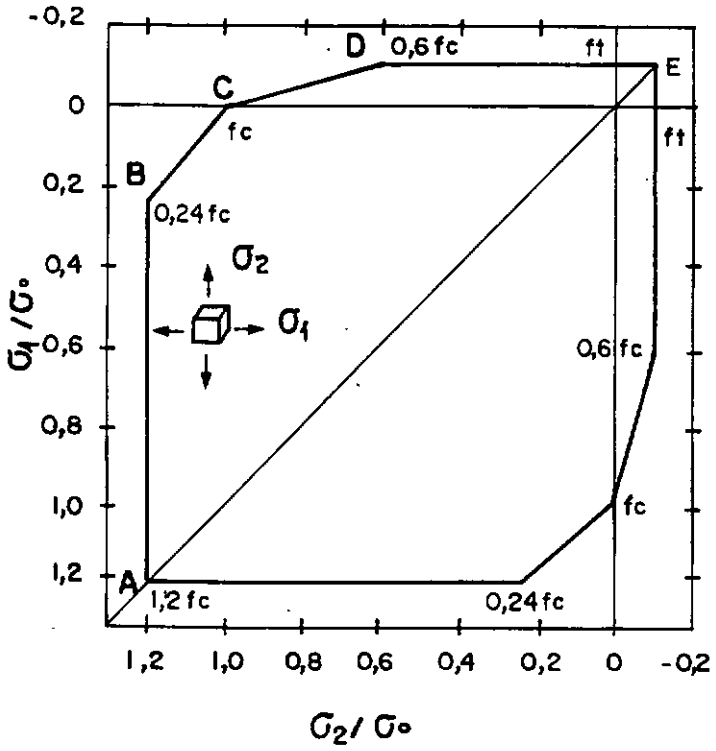


Figura 4.4 - Critério de plastificação utilizado

ε_p = deformação de plastificação para o concreto sob estado biaxial de compressão, correspondente à tensão de plastificação.

Os ensaios realizados por Liu [LIU 72a] mostraram que sob compressão biaxial:

$$\alpha \leq 1 \qquad \varepsilon_p = 0{,}0025$$

A relação entre a deformação na menor direção principal e a tensão última na maior direção principal pode ser aproximada por:

$$\alpha > 1 \qquad \varepsilon_p = (-500 + 0{,}55\,\sigma_p) \times 10^{-6}$$

Para materiais isótropos, é conhecida a relação constitutiva apresentada na equação (4.34):

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.34}$$

O concreto com carregamento biaxial pode ser considerado como material ortótropo, com propriedades diferentes nas duas direções principais, mas com simetria em relação às duas direções principais.

Para materiais elásticos ortótropos submetidos a um estado biaxial de tensões, Liu [LIU 72a] demonstra que a matriz constitutiva a nível tangente é:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \dfrac{E_1}{E_2} & \lambda\nu_1 & 0 \\ \lambda\nu_1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{E_1 E_2}{E_1 + E_2 + 2E_2\nu_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.35}$$

na qual:

E_1, E_2 = módulos uniaxiais tangentes nas direções 1 e 2, respectivamente, sendo 1 e 2 as direções principais relativas ao estado de deformação

ν = coeficiente de Poisson

$$\lambda = \frac{E_1}{\left(\frac{E_1}{E_2} - \nu_1^2\right)} \tag{4.36}$$

A equação (4.35) é deduzida na suposição de que o aumento da rigidez efetiva em qualquer direção, na presença de tensões normais de compressão, é devido apenas ao efeito de Poisson. Entretanto, os resultados experimentais mostram que o aumento da rigidez é muito maior que o aumento explicável pelo efeito de Poisson. O confinamento de microfissuras em potencial na presença de tensões biaxiais parece ser a principal causa deste aumento da rigidez.

Para levar em conta o confinamento das microfissuras, assim como o efeito de Poisson, a relação constitutiva pode ser escrita em uma forma desacoplada, como:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1_b} & 0 & 0 \\ 0 & E_{2_b} & 0 \\ 0 & 0 & G_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.37}$$

na qual E_{1_b} e E_{2_b} são os módulos de elasticidade tangente efetivos nas direções 1 e 2 e podem ser obtidos pela equação (4.33) para o concreto submetido à compressão biaxial.

Há, ainda, a dificuldade de se determinar o módulo cisalhante G_b. O módulo cisalhante utilizado na equação (4.35) não está correto, uma vez que só leva em conta o efeito de Poisson e esquece o enrijecimento adicional provocado pelo confinamento das microfissuras. Por outro lado, não é possível substituir E_1 e E_2 por E_{1_b} e E_{2_b} no termo do módulo de cisalhamento da equação (4.35), pois E_{1_b} e E_{2_b} já incluem o efeito de Poisson e do confinamento das microfissuras. Uma solução é separar os efeitos de Poisson e do confinamento das microfissuras na equação (4.33):

$$E_b^{'} = \frac{E\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{1}{1-\nu\alpha}\frac{E}{E_s} - 2\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)^2\right]^2} \tag{4.38}$$

A equação (4.33) pode ser escrita:

$$E_b = \frac{E_b^{'}}{1-\nu\alpha} \tag{4.39}$$

A equação (4.37) pode agora ser escrita na forma acoplada da equação (4.35), pois o efeito de Poisson foi retirado do módulo de elasticidade tangente efetivo em cada direção. O módulo de cisalhamento pode, assim, ser escrito em função do coeficiente de Poisson e dos módulos de elasticidade efetivos $E^{'}_{1b}$ e $E^{'}_{2b}$:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} \lambda^{'}\frac{E^{'}_{1_b}}{E^{'}_{2_b}} & \lambda^{'}\nu_1 & 0 \\ \lambda^{'}\nu_1 & \lambda^{'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E^{'}_{1_b}E^{'}_{2_b}}{E^{'}_{1_b}+E^{'}_{2_b}+2E^{'}_{2_b}\nu_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.40}$$

onde:

$$E^{'}_{1_b} = \frac{E\left[1-\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_p}\right)^2\right]}{\left[1+\left(\frac{1}{1-\nu\alpha_1}\frac{E}{E_s}-2\right)\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_p}\right)+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_p}\right)^2\right]^2} \tag{4.41}$$

para a compressão biaxial e é igual a E para tração biaxial e tração x compressão. Para o concreto em tração, pode ser suposto o comportamento linear até a ruptura, sem perda significativa de precisão.

$$E'_{2_b} = \frac{E\left[1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_p}\right)^2\right]}{\left[1+\left(\frac{1}{1-\nu\alpha_2}\frac{E}{E_s}-2\right)\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_p}\right)+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_p}\right)^2\right]^2} \tag{4.42}$$

para compressão biaxial e é igual a E para tração biaxial e a E_2 para tração x compressão.

$$\lambda' = \frac{E'_{1_b}}{\left(\frac{E'_{1_b}}{E'_{2_b}}-\nu_1^2\right)} \tag{4.43}$$

A equação (4.40) é proposta como a relação constitutiva do concreto em carregamento biaxial. Para tensões e deformações uniaxiais, a equação (4.40) conduz aos mesmos resultados que a equação (4.34).

Uma limitação desta formulação, aceitável para cargas monotônicas [CHEN 82], consiste no fato de os eixos principais de tensão coincidirem com os eixos principais de deformação, o que não acontece para os casos gerais de carga.

Para solicitações de tração, a ruptura é caracterizada pela formação e crescimento gradual das fissuras. Uma fissura ocorre quando a tensão ou a deformação principal excede seu valor limite. Neste trabalho utiliza-se o critério da tensão máxima, com valores obtidos da envoltória de resistência para o concreto. Após a inicialização do processo de fissuração, o concreto só é capaz de absorver tensões atuantes na direção da fissura, deixando de apresentar características isotrópicas. A queda brusca da resistência na direção perpendicular desencadeia um processo de fissuração para as camadas sucessivas e uma solicitação mais intensa nas armaduras para conter o desequilíbrio gerado. Um mecanismo mais complexo de resistência está presente quando barras de aço ligam elementos fissurados [CHEN 82, HITO 84, FIGU 87]. Na maioria dos casos é desprezado o efeito das armaduras que atravessam a fissura [MOUR 80, FIGU 87].

A consideração da capacidade de resistência do elemento fissurado a tensões cisalhantes é um efeito importante no tratamento pós-fissuração. Nos trabalhos experimentais [HAND 73], é possível observar uma transferência de tensões cisalhantes devido ao movimento relativo de deslizamento provocado pelas irregularidades das faces das fissuras. Para representar este fenômeno, chamado de engrenamento de agregado, é introduzido um fator de retenção de cisalhamento β, que, multiplicado pelo módulo de

cisalhamento G, permite a transferência de tensão cisalhante no concreto fissurado. Muitos pesquisadores [CHEN 82, BUMA 84, FIGU 87] atribuem valores constantes para β ($0<\beta<1$) durante todo o processo de carregamento, devido principalmente à falta de sustentação experimental. Neste trabalho, em toda a análise, é adotado para β o valor fixo de 0,5 [MOUR 80].

Após a formação das fissuras, as relações constitutivas devem sofrer as seguintes modificações: o coeficiente de Poisson é anulado, bem como o módulo de elasticidade na direção perpendicular ao plano fissurado. É utilizado um módulo cisalhante reduzido.

a) Modificação devida à presença de uma única direção fissurada:

$$\mathbf{D}_t^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

b) Modificação devido à presença de duas direções fissuradas:

$$\mathbf{D}_t^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

O termo βG, módulo cisalhante reduzido, é utilizado para computar o efeito do "engrenamento de agregado" atuante no plano fissurado.

Modelos mais complexos para o tratamento pós-fissuração são mostrados em [FIGU 87, BAZA 80, WILL 87] e nos trabalhos referenciados em [BUMA 84].

Como nos casos de solicitação a tração, devem ser realizadas modificações na lei constitutiva para compatibilizar a modelagem com o início do esmagamento no concreto. A plastificação tem início quando a maior deformação de compressão atinge o valor ε_p. Uma vez atingido este limite, o material assume sua resistência máxima. O concreto ainda apresenta capacidade de se deformar sem uma queda brusca de resistência até atingir a deformação limite (ε_u). Sendo ε a deformação máxima e ε_p a deformação de plastificação associada, há dois casos a considerar:

1) Plastificação: a deformação de plastificação é atingida e a capacidade de deformação não é esgotada.

$$|\varepsilon_p| < |\varepsilon| < |\varepsilon_u|$$

A matriz constitutiva a nível tangente é modificada. Para solicitações em compressão x compressão, ela é anulada e para solicitações em tração x compressão (fissurada), é considerado apenas o efeito do engrenamento do agregado.

2) Esmagamento total da seção onde a deformação ε atinge ε_u. A matriz constitutiva a nível tangente é anulada para solicitações em compressão x compressão. Para solicitações em tração x compressão, é mantida a consideração do efeito de engrenamento de agregados.

É necessário definir a condição de esmagamento do concreto para um estado biaxial de tensões. Há falta de resultados experimentais em relação à capacidade de deformação última do concreto nos estados multiaxiais de tensões. Uma possibilidade é simplesmente converter o critério de escoamento a nível de tensão para nível de deformação. Um critério de escoamento em termos de estado multiaxial de tensões é obtido em [HINT 84], como uma generalização da Lei de Escoamento Huber Mises, citada em [HINT 84], o qual conduzido a nível das deformações fica:

$$\beta\left(3J_2'\right)+\alpha_1 I_1' = \varepsilon_u^2 \tag{4.46}$$

onde I_1' e J_2' são, respectivamente, o primeiro e o segundo invariantes de deformação e ε_u é a deformação última para o estado uniaxial. Os parâmetros α_1 e β estão definidos em [KUPF 73] e [OWER 83].

Usando os parâmetros materiais α_1 e β determinados nos resultados de Kupfer, a condição de esmagamento é expressa em termos das componentes de deformação total como [HINT 84]:

$$1{,}355\left(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2-\varepsilon_x^2\varepsilon_y\right)+0{,}75\left(\gamma_{xy}^2+\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2\right)+0{,}355\varepsilon_u\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)=\varepsilon_u^2 \tag{4.47}$$

Quando a deformação atinge o valor especificado como deformação última, é assumido que o elemento perde todas as suas características de resistência e rigidez.

Com o critério de esmagamento definido para solicitação biaxial e designando por ε_1^I, ε_2^I, ε_1^{II} e ε_2^{II} as deformações principais 1 e 2 nas lamelas extremas I e II, é possível definir os domínios para caracterização do estado limite último. Este estado limite último é alcançado quando na fibra mais comprimida do concreto o encurtamento é igual ao valor estabelecido anteriormente como deformação última, ou quando na armadura tracionada a barra de aço tem o alongamento igual ao valor último convencional de

10‰. Para ser alcançado o estado limite último, necessariamente deverá estar satisfeita pelo menos uma das duas condições últimas.

AÇO

Neste trabalho, o aço é considerado como material linear elástico, perfeitamente plástico, com diagrama tensão x deformação representado na figura (4.5).

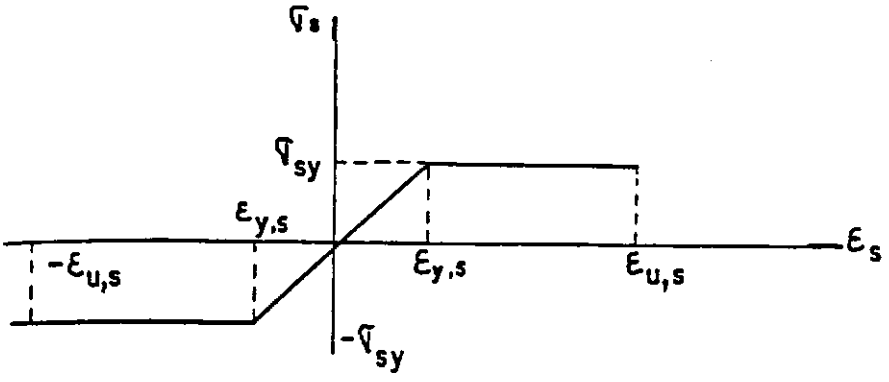


Figura 4.5 - Relação tensão x deformação adotada para o aço

Na modelagem é feita a consideração de três fases distintas:

1) $|\varepsilon_s| < \varepsilon_{y,s}$ (fase elástica)

São utilizadas relações elástico-lineares a nível tangente.

$$d\sigma^s = E_t d\varepsilon^s \tag{4.48}$$

2) $\varepsilon_{y,s} < |\varepsilon_s| \leq \varepsilon_{u,s}$

As deformações estão na fase plástica. A relação tangente é anulada.

3) $|\varepsilon_s| > \varepsilon_{u,s}$

Nesta fase é caracterizada a ruptura da barra e a relação tangente é anulada.

As relações constitutivas são definidas para as direções principais. É necessário fazer a rotação a partir dos eixos globais x e y para os eixos principais, utilizar as relações estabelecidas e voltar aos eixos x e y. As rotações são realizadas através das matrizes de rotação $\mathbf{R}_\sigma$ e $\mathbf{R}_\varepsilon$.

$$d\sigma' = \mathbf{R}_\sigma d\sigma \tag{4.49}$$

$$d\varepsilon' = \mathbf{R}_\varepsilon d\varepsilon \tag{4.50}$$

$$\begin{Bmatrix} d\sigma'_x \\ d\sigma'_y \\ d\sigma'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}^2\theta & 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}^2\theta & \cos^2\theta & -2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta \\ \cos\theta\,\text{sen}\,\theta & \cos\theta\,\text{sen}\,\theta & \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.51}$$

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon'_x \\ d\varepsilon'_y \\ d\varepsilon'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}^2\theta & \cos\theta\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\,\text{sen}\,\theta \\ -2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta & 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta & \cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.52}$$

onde cos θ e sen θ são os cossenos e senos do ângulo θ de rotação de um sistema de eixos para o outro sistema.

As equações (4.49) e (4.50) podem ser reescritas como:

$$d\sigma^c_{pr} = \mathbf{R}_\sigma d\sigma^c \tag{4.53}$$

$$d\varepsilon^c_{pr} = \mathbf{R}_\varepsilon d\varepsilon^c \tag{4.54}$$

A aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais conduz a:

$$d\varepsilon^{ct}_{pr}\sigma^c_{pr} = d\varepsilon^{ct}\sigma^c \tag{4.55}$$

Substituindo (4.54) em (4.55):

$$\sigma^c = \mathbf{R}^t_\varepsilon \sigma^c_{pr} \tag{4.56}$$

sendo $\mathbf{D}^c_{tp}$ a matriz constitutiva na direção principal:

$$d\sigma^c_{pr} = \mathbf{D}^c_{tp}\, d\varepsilon^c_{pr} \tag{4.57}$$

e estabelecendo a transformação apresentada na equação (4.56), a nível incremental:

$$d\sigma^c = \mathbf{R}^t_\varepsilon d\sigma^c_{pr} + \frac{\partial \mathbf{R}^t_\varepsilon}{\partial \varepsilon} d\varepsilon^c \sigma^c_{pr} \tag{4.58}$$

Substituindo (4.57) em (4.58) e considerando $\frac{\partial \mathbf{R}^t_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = 0$:

$$d\sigma^c = \mathbf{R}^t_\varepsilon\, \mathbf{D}^c_{tp}\, d\varepsilon^c_{pr} \tag{4.59}$$

Substituindo (4.53) em (4.59):

$$d\sigma^c = \mathbf{R}^t_\varepsilon\, \mathbf{D}^c_{tp}\, \mathbf{R}_\varepsilon\, d\varepsilon^c \tag{4.60}$$

$$d\sigma^c = \mathbf{D}^c_t\, d\varepsilon^c \tag{4.61}$$

onde:

$$d\sigma^c = \begin{Bmatrix} d\sigma_x^c \\ d\sigma_y^c \\ d\sigma_{xy}^c \end{Bmatrix} \tag{4.62}$$

$$\mathbf{D}_t^c = \mathbf{R}_\varepsilon^t \, \mathbf{D}_{tp}^c \, \mathbf{R}_\varepsilon \tag{4.63}$$

Implementação Computacional dos Modelos

Para cada ponto pesquisado, é necessário:

1) identificar o tipo de solicitação existente;

2) a cada incremento de carga, caracterizar o comportamento do concreto, identificando se está na fase elástica, plástica, se há esmagamento, se há fissuração. Verificar, também, o comportamento característico do aço. Para cada caso é preciso fazer as modificações necessárias nas matrizes constitutivas do concreto e do aço.

Para a implementação computacional, são criados indicadores de estado que estão associados às leis constitutivas do concreto e do aço. Estes indicadores fornecem os estados de tensão possíveis na análise da seção. Um tratamento específico na concepção da modelagem é realizado em associação aos indicadores.

4.3. Solução Numérica

O algoritmo de Newton-Raphson convencional é utilizado para a resolução das equações estabelecidas. No problema em questão, para uma iteração genérica de carregamento, κ, o processo iterativo está resumido a seguir:

1. As cargas aplicadas $\mathbf{N}^a$ são conhecidas.

2. Os incrementos de carga $d\mathbf{N}_\kappa$ são determinados na etapa κ por:

$$d\mathbf{N}_\kappa = \mathbf{N}^a - \mathbf{N}_\kappa^R\left(\varepsilon_{0_\kappa}\right) \tag{4.64}$$

onde $\mathbf{N}_\kappa^R$, esforços resistentes, são função, em última análise, das deformações no plano médio da laje ε_{0_κ}, calculadas na última iteração.

3. A matriz de rigidez $\mathbf{K}_{t_\kappa}$ é adaptada às condições atuais da etapa κ.

4. As deformações incrementais são dadas por:

$$d\varepsilon_{0_\kappa} = \mathbf{K}_{t_\kappa}^{-1} d\mathbf{N}_\kappa \tag{4.65}$$

onde o vetor $d\mathbf{N}_\kappa$ foi determinado conforme definido no item 2.

5. As deformações totais são atualizadas:

$$\varepsilon_{0_{\kappa+1}} = \varepsilon_{0_\kappa} + d\varepsilon_{0_\kappa} \tag{4.66}$$

6. A convergência do processo é verificada: se for atingida, procede-se ao novo incremento de carga; se o critério de convergência não for alcançado, volta-se ao ciclo iterativo.

Para um dado incremento de carga, calcula-se a diferença relativa entre os esforços aplicados N e os esforços resistentes N^R em relação aos esforços aplicados.

$$\|N\| = \sqrt{\sum_{j=1} N_j^2} \tag{4.67}$$

$$\|N^R\| = \sqrt{\sum_{j=1} N_j^2} \tag{4.68}$$

$$\xi = \left| \frac{\|N\| - \|N^R\|}{\|N\|} \right| \tag{4.69}$$

Admite-se que há convergência quando $\xi < \xi_0$, sendo ξ_0 uma tolerância pré-fixada. Esta condição deve ser atingida após um determinado número de iterações, caso contrário o processo é considerado não convergente. A não convergência pode

ocorrer por duas razões: ou o número de iterações é insuficiente ou o colapso foi caracterizado durante o processo iterativo.

7. Procede-se a sucessivos incrementos de carga, utilizando-se o algoritmo descrito até a caracterização do colapso, que é feita verificando se o estágio de deformação em questão pode ser enquadrado em um dos domínios que compõem o estado limite último generalizado.

Os incrementos de carga são mantidos constantes durante o processo iterativo até regiões próximas do colapso. Nesta fase os incrementos são menores, para que seja possível ao processo numérico acompanhar o comportamento típico do carregamento em questão até a caracterização final do colapso. Este procedimento também é adotado no trabalho experimental para possibilitar a observação do comportamento próximo ao colapso e determinar a carga de ruptura com maior precisão.

O algoritmo da bisseção é acoplado ao método de Newton-Raphson para detectar o ponto de colapso dentro de uma precisão escolhida.

Para o problema de lajes de concreto armado, os esforços no plano médio (N_x, N_y, N_{xy}) são sempre nulos; todavia, as deformações correspondentes $(\varepsilon_{0_x}, \varepsilon_{0_y}, \varepsilon_{0_{xy}})$ podem ser não nulas e, por isso, a formulação deve incluir os seis componentes de deformação.

4.4. Procedimento Adotado na Análise Numérica

O programa computacional desenvolvido foi utilizado inicialmente para a determinação dos mesmos pontos da superfície de colapso de lajes de concreto armado obtidos experimentalmente. O objetivo da comparação entre resultados experimentais e numéricos é validar o programa. Uma vez feita sua validação, foram pesquisados diversos pontos da superfície de colapso para um melhor conhecimento da mesma, tendo em vista que a proposta de Johansen superestima a resistência em algumas situações.

As características geométricas e mecânicas das lajes ensaiadas são descritas no Capítulo III. Apesar de o concreto ter sido dosado com o mesmo traço para todas as

lajes, há uma variação nas resistências à compressão e à tração, verificadas experimentalmente. O aço também apresenta uma variação na resistência, dependendo da partida do aço e do diâmetro da barra.

Para pesquisar a superfície de colapso real, no espaço dos esforços seccionais, foram estudados diversos pontos nas geratrizes e na interseção das duas superfícies cônicas de Johansen, estando o procedimento adotado descrito a seguir. Para cada ponto é fixada a direção do vetor dos esforços, a partir da origem, que deveria encontrar a superfície teórica num determinado ponto denominado de ponto-alvo. Como a superfície real não corresponde exatamente à teórica, o ponto determinado numericamente define um vetor que possui a mesma direção, mas uma amplitude diferente, do vetor definido pelo ponto-alvo. Utilizando os valores das componentes de momento fletor do vetor relacionado aos resultados numéricos, é calculado o valor do momento torsor correspondente, fornecido pela teoria de Johansen, possibilitando, assim, a avaliação da diferença no momento torsor entre o resultado numérico e o encontrado pela teoria de Johansen (correspondentes ao mesmo par de momentos fletores), como mostra a figura 4.6.

O ponto-alvo pesquisado recebe uma denominação e o ponto fornecido pelo programa é um ponto próximo, que recebe a mesma denominação acompanhada de um apóstrofo nas figuras e tabelas apresentadas no Capítulo 5.

O programa desenvolvido também foi utilizado para estudar o comportamento das lajes de concreto armado sob solicitação biaxial: momentos fletores atuando em duas direções ortogonais e momento torsor nulo. Como ponto de partida foram utilizadas as características geométricas e mecânicas das lajes L1 e L2, que foram ensaiadas para solicitações de torção pura e flexo-torção. A resistência à compressão do concreto de cada uma das lajes foi mantida constante, enquanto as taxas de armadura sofreram diversas alterações.

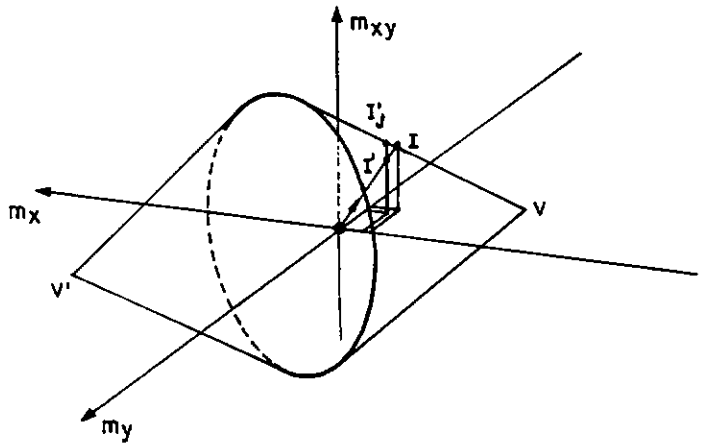


Figura 4.6 - Estudo numérico de um ponto

CAPÍTULO V
ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1. Comparação de Resultados Numéricos e Experimentais

São estudados diversos pontos das lajes ensaiadas, L1, L2 e L3.

A laje L1 possui momentos de plastificação positivos e negativos iguais entre si e iguais nas duas direções. Foram estudados experimentalmente três pontos da laje L1: ponto O, submetido à torção pura, e pontos A_1 e D_2, submetidos à flexo-torção, indicados na figura 5.1. Para o ponto A_1 foram ensaiadas as lajes equivalentes L1A e L1A2, em duas montagens diferentes, e para o ponto D_2, a laje equivalente L1B.

A laje L2 possui momentos de plastificação positivos e negativos iguais, sendo que o momento em uma das direções é o dobro do momento na outra direção. Foram estudados experimentalmente três pontos da laje L2: ponto O, submetido à torção pura, e pontos M e P, submetidos à flexo-torção, nas lajes equivalentes L2A e L2B, indicados na figura 5.2.

O programa foi utilizado, para as lajes L1 e L2, para pesquisar os três pontos ensaiados e mais outros oito pontos de interesse, indicados nas figuras 5.1 e 5.2.

Na utilização do programa computacional as características das lajes L1 e L2 são dados de entrada para o estudo de todos os pontos. Para os pontos A_1 e D_2 da laje L1 e pontos M e P da laje L2, o programa é utilizado também com as características das lajes equivalentes L1A, L1A2, L1B, L2A e L2B, para uma melhor comparação com os ensaios.

A laje L3, como a laje L1, possui momentos de plastificação positivos e negativos iguais entre si e iguais nas duas direções, só que a taxa de armadura é bem menor que a da laje L1. Foi estudado experimentalmente apenas o ponto O da laje L3, submetido à torção pura. O programa foi utilizado para estudar este ponto e mais outros seis pontos de interesse, indicados na figura 5.3.

O momento torsor último de cada ponto estudado experimentalmente também foi determinado utilizando-se a proposta de Nielsen [NIELSEN 63] apresentada no trabalho de Peter Marti e Kong [MARTI 87b].

A tabela 5.1 apresenta os valores dos momentos torsores últimos experimentais, numéricos, utilizando-se a teoria proposta por Johansen e a proposta por Nielsen para os pontos ensaiados. O valor da resistência à compressão do concreto utilizado também é apresentado.

Os valores dos momentos torsores últimos, obtidos pelo programa desenvolvido, para diversos pontos das lajes L1, L2 e L3, que não foram determinados experimentalmente, encontram-se, respectivamente, nas tabelas 5.2, 5.3 e 5.4, ao lado dos momentos obtidos pela teoria de Johansen.

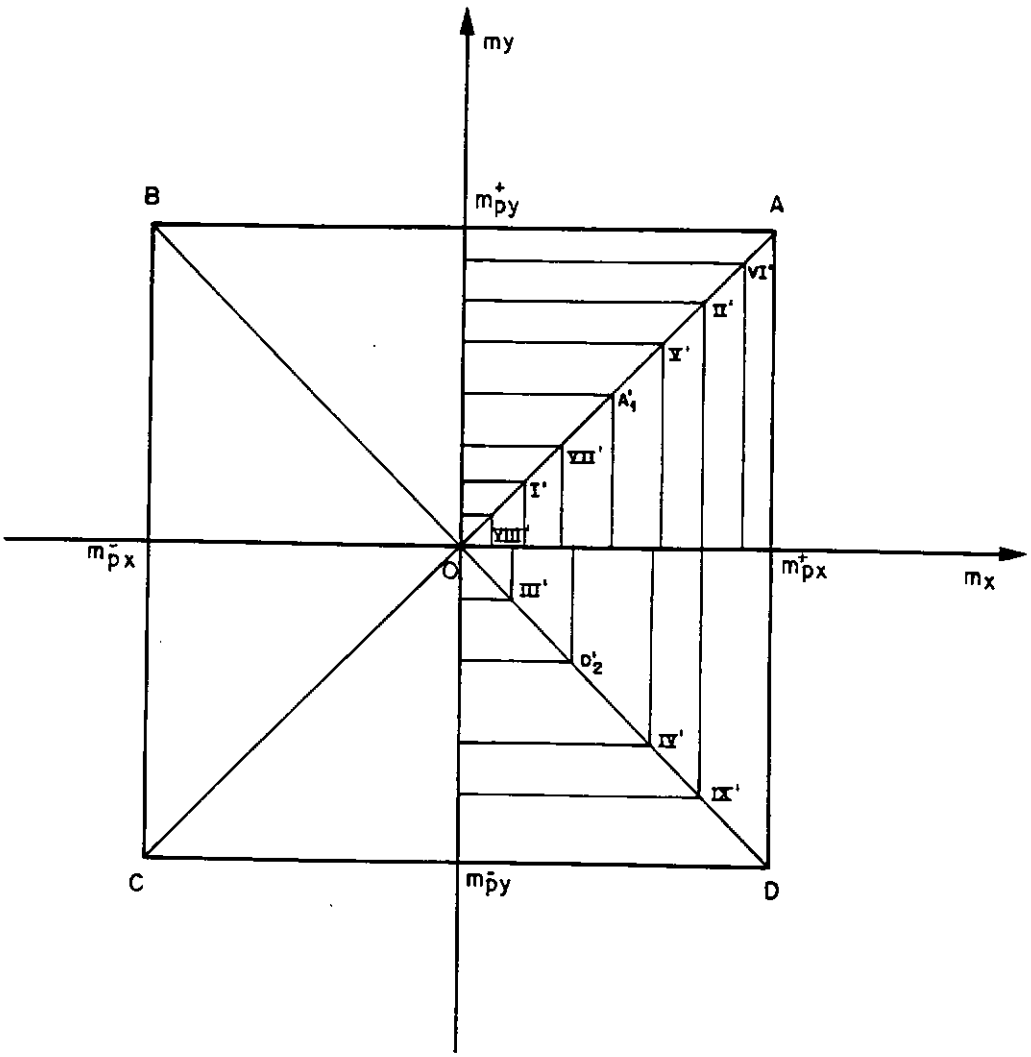


Figura 5.1 - Pontos da laje L1 estudados com o programa computacional desenvolvido

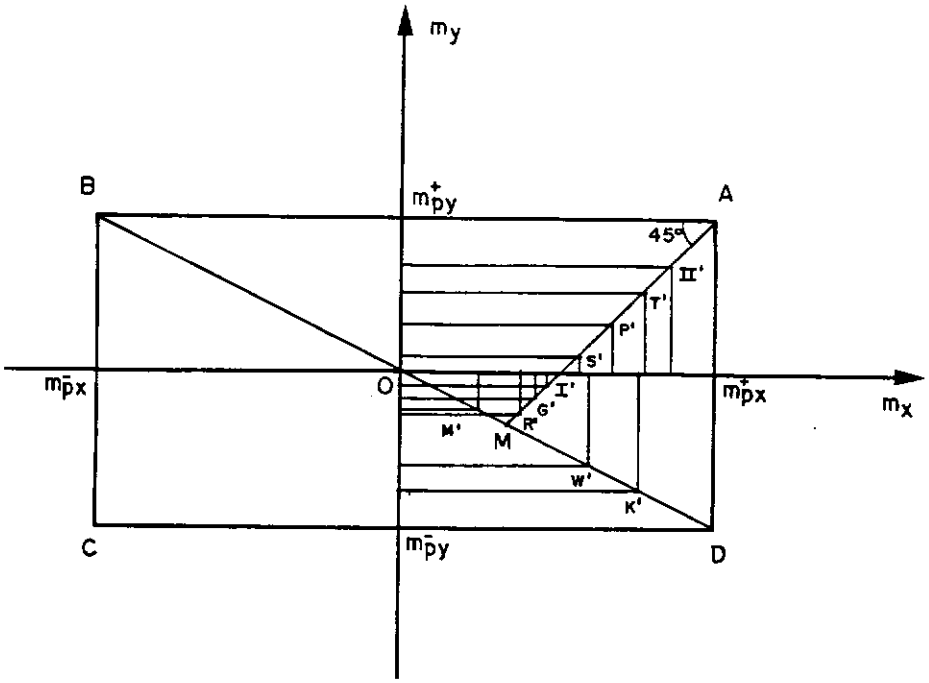


Figura 5.2 - Pontos da laje L2 estudados com o programa computacional desenvolvido

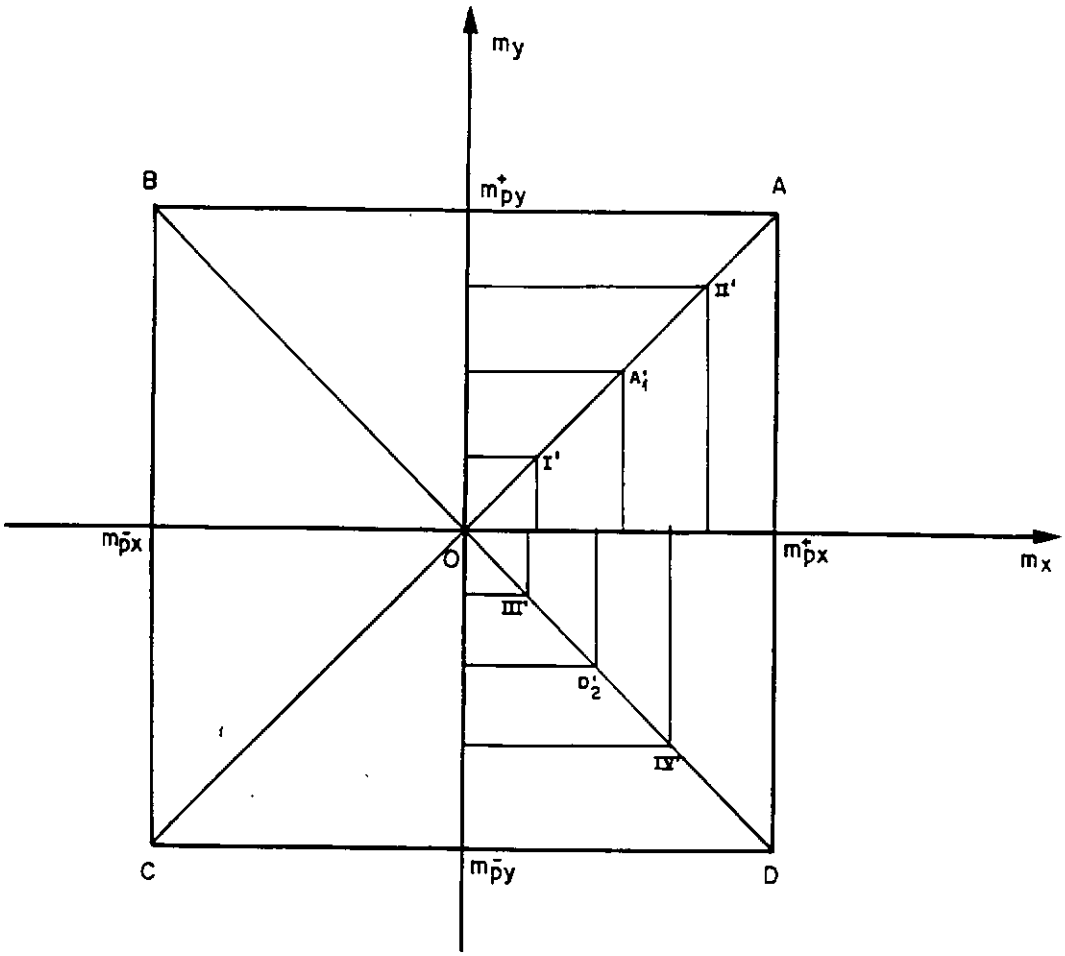


Figura 5.3 - Pontos da laje L3 estudados com o programa computacional desenvolvido

LAJE	PONTO	EXPERIMENTAL (kNm/m)	NUMÉRICO (kNm/m)	JOHANSEN (kNm/m)	NIELSEN (kNm/m)	EXP/JOH	fc MPa
L1	0	37,9	35,2	64,5	34,3	0,59	36,2
L1A	0	33,3	32,2	33,1	28,1	1,01	42,0
L1A2	0	33,9	31,0	33,5	27,4	1,01	35,1
L1B	0	34,7	37,6	55,2	32,6	0,63	39,1
L1	A_1		31,0	33,5			36,2
L1	D_2		39,1	60,4			36,2
L2	0	34,2	36,7	51,2	34,6	0,99	39,0
L2A (M)	0	31,1	32,2	46,9	27,5	0,66	34,4
L2B (P)	0	26,9	25,2	24,2	22,0	1,11	37,1
L2	M		36,2	49,6			39,0
L2	P		25,1	23,1			39,0
L3	0	28,4	32,0	37,3	30,1	0,94	36,5

Tabela 5.1 - Momentos torsores últimos

LAJE	PONTO	RESULTADO NUMÉRICO (kNm/m)	JOHANSEN (kNm/m)	NUMÉRICO / JOHANSEN
L1	0	35,2	64,5	0,55
L1	A_1'	31,0	33,5	0,93
L1	D_2'	39,1	60,4	0,65
L1	I'	39,3	51,4	0,76
L1	II'	16,6	14,6	1,14
L1	III'	39,0	63,7	0,61
L1	IV'	34,1	51,6	0,66
L1	V'	24,8	23,2	1,07
L1	VI'	8,3	6,5	1,28
L1	VII'	33,9	44,1	0,77
L1A	0	32,2	33,0	0,98
L1A2	0	31,0	33,5	0,93
L1B	0	37,6	55,2	0,68
L1	VIII'	36,9	59,2	0,62
L1	IX'	27,1	41,8	0,65

Tabela 5.2. - Momentos torsores últimos para pontos da laje L1

LAJE	PONTO	RESULTADO NUMÉRICO (kNm/m)	JOHANSEN (kNm/m)	NUMÉRICO / JOHANSEN
L2	0	36,7	51,2	0,72
L2	P'	25,1	23,1	1,09
L2	M'	36,2	49,6	0,73
L2	R'	39,2	43,1	0,91
L2	G'	37,7	39,8	0,95
L2	I'	34,3	37,2	0,92
L2	S'	30,3	30,1	1,01
L2	H'	28,1	26,2	1,07
L2	T'	19,1	16,1	1,19
L2	II'	12,7	9,9	1,28
L2	W'	34,4	41,0	0,84
L2	K'	26,1	32,8	0,80
L2A (M)	0	32,2	46,9	0,69
L2B (P)	0	25,2	24,2	1,04
L2	F'	38,5	46,6	0,83
L2	K'	26,1	32,8	0,80

Tabela 5.3 - Momentos torsores últimos para pontos da laje L2

LAJE	PONTO	RESULTADO NUMÉRICO (kNm/m)	JOHANSEN (kNm/m)	NUMÉRICO / JOHANSEN
L3	0	32,0	37,3	0,86
L3	I'	27,0	28,3	0,95
L3	A'	18,8	18,5	1,02
L3	II'	9,5	8,7	1,09
L3	III'	30,6	36,4	0,84
L3	D'	27,3	33,6	0,81
L3	IV'	21,4	27,9	0,77

Tabela 5.4 - Momentos torsores últimos para pontos da laje L3

5.2. Interpretação dos Resultados

Analisando os valores apresentados na tabela 5.1, observa-se, para as lajes L1 e L2, que a diferença entre os resultados experimentais e os resultados obtidos utilizando-se o programa desenvolvido varia entre 3% e 9% (média de 6%), o que mostra que o modelo numérico desenvolvido fornece bons resultados neste caso. Para a laje L3, esta diferença é de 12,7%, maior que a apresentada para L1 e L2. No entanto, as deformações apresentadas pelo concreto e pelas barras de aço, durante o ensaio da laje L3, mostraram que ela rompeu, provavelmente por um problema local, um pouco antes de ser esgotada a sua capacidade de carga.

Observando as figuras 5.1 e 5.2, constata-se que o ponto estudado nas lajes L1A e L1A2 tem posição equivalente, em relação à superfície de colapso, ao ponto da laje L2B, que deveria ter sido denominada L2A. Da mesma forma, há equivalência entre a posição do ponto estudado na laje L1B e o ponto na laje L2A, que deveria ter sido denominada L2B.

Como houve concordância entre os resultados obtidos com o modelo numérico e os resultados experimentais, o programa foi, então, utilizado para outros pontos das lajes L1, L2 e L3, mostrados nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3, e os resultados obtidos aparecem nas tabelas 5.2, 5.3 e 5.4.

Comparando os resultados experimentais com os resultados obtidos pela teoria de Johansen, verifica-se que a última, em alguns pontos, superestima os momentos

torsores últimos, estando, portanto, contra a segurança. A proposta de Nielsen [MARTI 87b] que determina o momento torsor último, quando a solicitação é torção pura, utilizando a análise limite pelo limite inferior conduz a valores, em média, 15% abaixo dos momentos obtidos experimentalmente, estando, portanto, a favor da segurança. A única exceção é a laje L3 que rompeu com carga mais baixa que a obtida pela proposta de Nielsen, mas, como já foi esclarecido anteriormente, a análise dos resultados indica que ela rompeu antes de esgotar a sua capacidade de carga.

Analisando os resultados apresentados nas tabelas 5.2, 5.3 e 5.4, verifica-se que:

1. O ponto da superfície de colapso, onde há torção pura, nas três lajes, é o que apresenta maior abaixamento em relação à superfície de Johansen, sendo este abaixamento menos acentuado no caso da laje L3 que possui menor taxa de armadura. Um abaixamento da mesma ordem de grandeza é verificado nos pontos ensaiados, respectivamente, nas lajes L1B e L2A e em todos os pontos determinados numericamente, pertencentes à elipse que é a interseção das duas superfícies cônicas que constituem a superfície de colapso de Johansen.

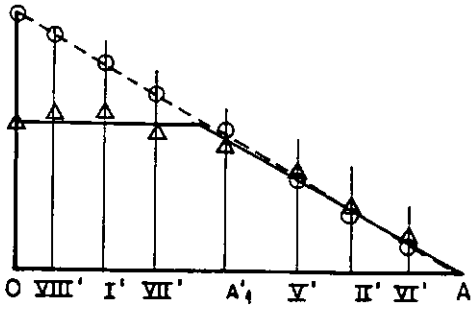
2. Os pontos ensaiados das lajes L1A, L1A2 e L2B são os pontos médios das geratrizes da superfície de colapso de Johansen, geratrizes estas que têm projeção no plano $m_{xy} = 0$, fazendo ângulo de 45° com os eixos x e y. Para o ponto da laje L2B, não houve abaixamento e para os pontos das lajes L1A e L1A2, o abaixamento foi mínimo. Estudando os pontos desta geratriz utilizando-se o programa desenvolvido, é possível verificar que, a partir de um ponto próximo ao meio da geratriz até o vértice da superfície de Johansen, há pouca diferença entre os resultados teórico e numérico e, a partir do mesmo ponto até a elipse, a superfície teórica superestima os valores.

Segundo o trabalho de Peter Marti et al. [MARTI 87a], que analisou apenas pontos submetidos à torção pura, poder-se-ia imaginar que há um abaixamento da superfície de colapso de Johansen na região de momentos torsores significativos, o que se confirma com a análise dos resultados numéricos.

Os pontos A_1 e D_2 da laje L1 e os pontos M e P da laje L2, todos submetidos à flexo-torção, foram ensaiados nas lajes equivalentes L1A, L1B, L2B e L2A, submetidos à torção pura, como foi exposto no Capítulo 3. Para a validação do programa, o mesmo foi usado duas vezes para cada um destes quatro pontos. O programa foi utilizado com as características de cada laje equivalente, como dados de entrada e solicitação de torção

pura, e novamente com as características das lajes L1 e L2 para os pontos A_1, D_2, M e P, submetidos à flexo-torção. As tabelas 5.2 e 5.3 mostram a concordância dos resultados. As pequenas diferenças observadas são devidas à dificuldade de se conseguir a mesma resistência à compressão para o concreto de todas as lajes e, também, porque na execução da laje equivalente é difícil conseguir-se exatamente a armadura teórica calculada, uma vez que as barras de aço são fabricadas em algumas bitolas com áreas determinadas. Por exemplo, a laje equivalente L1A2 é mais exata que a laje equivalente L1A porque a resistência à compressão do concreto utilizado é mais próxima à da laje L1 e os momentos de plastificação, exigidos pela equivalência de lajes, são mais exatos porque as armaduras teóricas e reais são mais próximas, conduzindo, assim, ao mesmo valor para o momento torsor último determinado pelo programa no caso das lajes L1A2 e L1 ponto A_1. Comparando os resultados numéricos para as lajes L1A e L1 ponto A_1, o momento torsor último da primeira é mais alto e a resistência à compressão do concreto também.

As figuras 5.4, 5.5 e 5.6 mostram a variação dos momentos torsores últimos ao longo da geratriz e ao longo da elipse de interseção das duas superfícies cônicas para as lajes L1, L2 e L3. As lajes L1 e L3 se diferenciam apenas pela taxa de armadura. As figuras 5.4 e 5.6, com os resultados destas duas lajes, evidenciam que a superfície cônica de Johansen prevalece em maior extensão no caso da laje com menor taxa de armadura. A análise dos resultados obtidos permite concluir que a superfície de Johansen diverge da superfície definida pelos resultados numéricos e é contra a segurança, principalmente quando a taxa de armadura é alta e quando o momento torsor atuante possui valores significativos em relação aos momentos fletores. Esta observação sugere, para a correção da superfície bicônica, uma superfície que acompanhe os cones, porém com altura constante, ou seja, o momento torsor último é fixo na geratriz a 45° dos eixos x e y e encontra as superfícies cônicas de Johansen em um determinado ponto, a partir do qual prevalece esta superfície cônica. Esta superfície corretora deve ser função da taxa de armadura e sua equação é deduzida no Capítulo 6.



△ NUMÉRICO
○ JOHANSEN

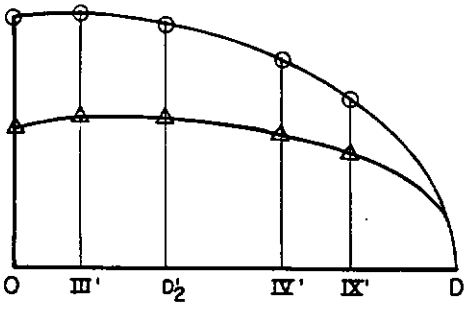
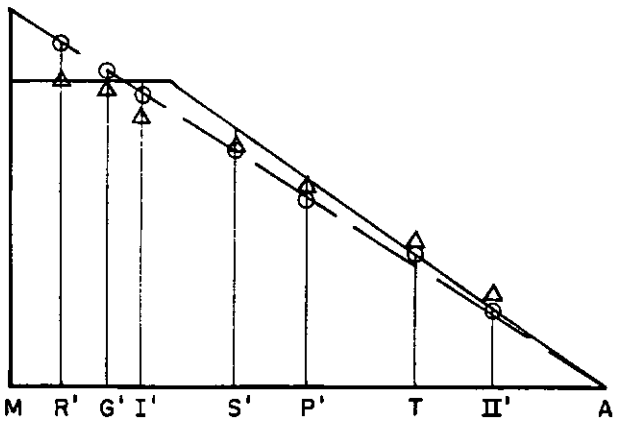


Figura 5.4 - Momentos torsores últimos ao longo da geratriz e ao longo da elipse que é a interseção das superfícies cônicas de Johansen para laje L1, segundo o modelo numérico e segundo a teoria de Johansen



△ NUMÉRICO
○ JOHANSEN

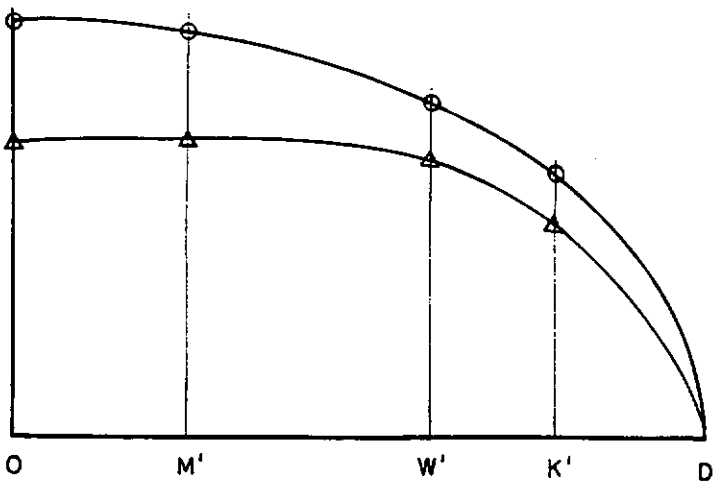


Figura 5.5 - Momentos torsores últimos ao longo da geratriz e ao longo da elipse que é a interseção das superfícies cônicas de Johansen para laje L2, segundo o modelo numérico e segundo a teoria de Johansen

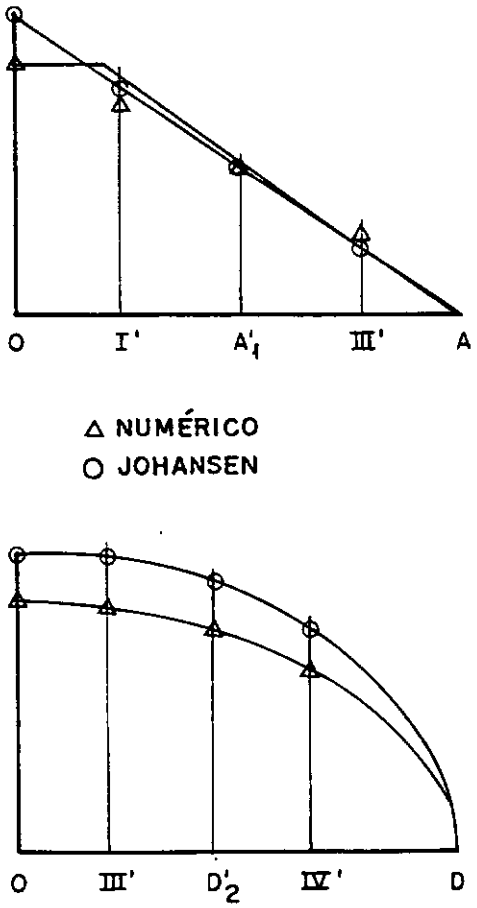


Figura 5.6 - Momentos torsores últimos ao longo da geratriz e ao longo da elipse que é a interseção das superfícies cônicas de Johansen para laje L3, segundo o modelo numérico e segundo a teoria de Johansen

Com o programa desenvolvido é pesquisada também, a região da superfície de Johansen correspondente a momento torsor nulo e momentos fletores de plastificação atuando em duas direções ortogonais.

Inicialmente é estudada a laje L1, ensaiada para solicitação de torção pura. A resistência à compressão do concreto é mantida e as taxas de armadura da laje inicial L1 são modificadas. O procedimento é repetido a partir da laje L2 e os resultados estão nas tabelas 5.5 e 5.6. Para cada laje são verificados os quatro quadrantes, de modo a possibilitar o estudo do comportamento quando ocorrem os casos: compressão x compressão, tração x compressão e tração x tração.

Em cada quadrante estuda-se o comportamento da laje quando atua o par de momentos de plastificação, ou seja, os pontos corespondentes aos vértices A, B, C e D (figuras 5.1, 5.2 e 5.3) do retângulo que é a interseção da superfície com o plano $m_x m_y$. O programa é utilizado e, como resultado, obtemos um par de momentos resistentes. A coluna onde está indicado % significa o valor da diferença relativa entre o par de momentos iniciais e o par de momentos resistentes fornecidos pelo programa em relação ao par inicial. Quando a resistência encontrada é menor, é colocado o sinal – e, em caso contrário, é colocado o sinal +. Nas tabelas 5.5 e 5.6 estão resumidos todos os resultados encontrados: momentos de plastificação, diferença relativa em cada quadrante, taxas geométricas de armadura ρ_x e ρ_y e taxas de armadura relativa w_x e w_y, sendo:

$$\rho_x = \frac{a_x}{h}$$

$$\rho_y = \frac{a_y}{h}$$

$$w_x = \frac{\rho_x f_y}{f_c}$$

$$w_y = \frac{\rho_y f_y}{f_c}$$

onde:

a_x, a_y = área das armaduras respectivamente nas direções x e y

f_y = tensão de escoamento da barra de aço utilizada

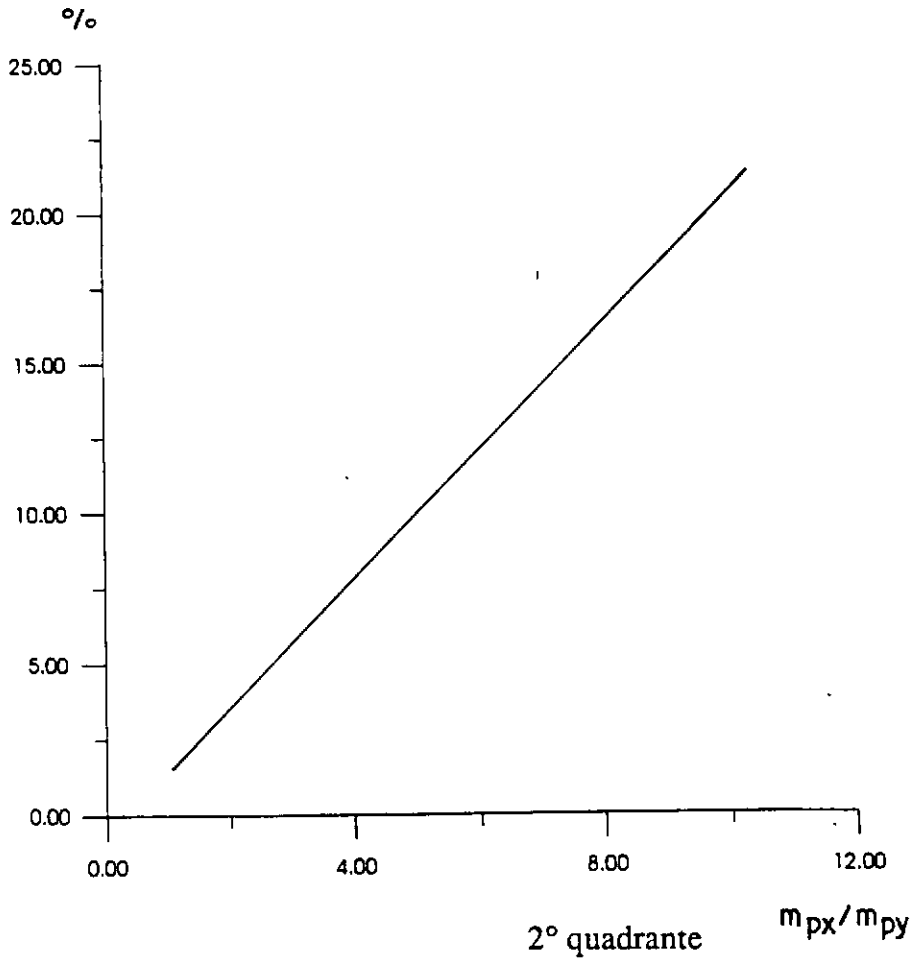
f_c = $0{,}45 f'_c$ = resistência à compressão reduzida do concreto

f'_c = resistência à compressão do concreto obtida experimentalmente.

Analisando os resultados é possível constatar que quando a solicitação biaxial é de tração x compressão (2° e 4° quadrantes) há uma queda nos valores dos momentos resistentes em relação aos valores iniciais dos momentos de plastificação, devido à tração existente. Esta queda é mais acentuada quando o par de momentos solicitantes possui valores muito diferentes (altas taxas de ortogonalidade), conduzindo a um ponto na curva de resistência (Capítulo 4, figura 4.1) onde há redução de resistência. Contrariamente ao esperado, não houve mudança significativa quando os momentos de plastificação têm o mesmo sinal (1° e 3° quadrantes). Apesar de as lamelas externas sofrerem esmagamento, o acréscimo de compressão devido à compressão biaxial não chega a ser mobilizado no restante da região comprimida.

Na figura 5.7 está indicada, em porcentagem, a queda dos momentos resistentes em função da relação entre os momentos de plastificação. Foi obtida uma série de pontos e foi traçada a reta aproximadora ótima, que conduz ao menor erro, utilizando o programa GRAPHER.

Esta reta é utilizada para obtenção dos coeficientes que aparecem na correção da interseção da superfície de colapso com o plano $m_x m_y$.



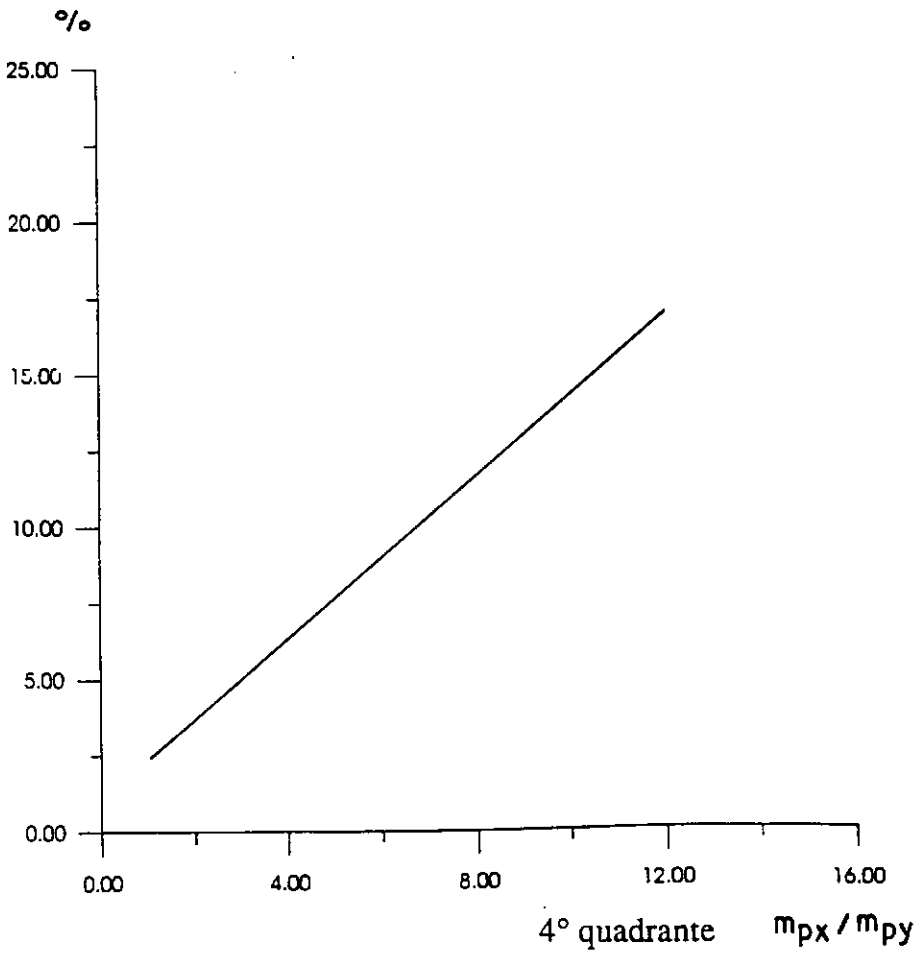


Figura 5.7 - Queda dos momentos de plastificação x taxas de ortogonalidade

ρ_x^-	ρ_x^+	ρ_y^-	ρ_y^+	w_x^-	w_x^+	w_y^-	w_y^+	m_{px}^-	m_{px}^+	m_{py}^-	m_{py}^+	1º quadrante %	2º quadrante %	3º quadrante %	4º quadrante %
0,68%	0,68%	0,75%	0,75%	0,272	0,272	0,303	0,303	64,5	64,5	64,5	64,5	+ 1,6%	– 3,1%	+ 1,6%	– 3,1%
0,68%	0	0,75%	0	0,272	0	0,303	0	64,5	11,1	65,5	11,1	– 1,8%	– 6,2%	0,0%	– 10,6%
0,68%	0,17%	0,75%	0,19%	0,272	0,068	0,303	0,076	64,5	16,6	65,5	18,6	– 1,7%	– 5,4%	0,0%	– 4,7%
0,68%	0	0,75%	0,19%	0,272	0	0,303	0,076	64,5	11,1	65,5	18,6	0,0%	– 5,5%	0,0%	– 9,0%
0,51%	0,51%	0,57%	0,57%	0,204	0,204	0,227	0,227	49,5	49,5	49,5	49,5	0,0%	– 4,0%	0,0%	– 4,0%
0,34%	0,34%	0,38%	0,38%	0,136	0,136	0,151	0,151	33,2	33,2	33,2	33,2	+ 3,0%	– 1,8%	+ 3,0%	– 1,8%
0,17%	0,17%	0,19%	0,19%	0,068	0,068	0,076	0,076	16,8	16,8	16,8	16,8	+ 3,0%	0,0%	+ 3,0%	0,0%
0,085%	0,085%	0,095%	0,095%	0,034	0,034	0,038	0,038	10,9	10,9	10,9	10,9	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
0,85%	0,85%	0,95%	0,95%	0,34	0,34	0,379	0,379	80,5	80,5	80,5	80,5	0,0%	– 5,0%	0,0%	– 5,0%

Tabela 5.5 - Estudo de lajes submetidas a solicitação biaxial f_{ck} = 36,20 MPa

ρ_x^-	ρ_x^+	ρ_y^-	ρ_y^+	w_x^-	w_x^+	w_y^-	w_y^+	m_{px}^-	m_{px}^+	m_{py}^-	m_{py}^+	1º quadrante %	2º quadrante %	3º quadrante %	4º quadrante %
1,35%	1,35%	1,5%	1,5%	0,544	0,544	0,606	0,606	127,5	127,5	123,5	123,5	0,0%	– 4,0%	0,0%	– 4,0%
1,35%	0	1,5%	0	0,544	0	0,606	0	119,5	11,6	118,5	11,3	0,0%	– 20,4%	+ 3,1%	– 23,2%
1,35%	0	1,5%	0,19%	0,544	0	0,606	0,076	120,5	11,6	119,5	19,2	+ 1,7%	– 18,3%	0,0%	– 23,0%
1,35%	0,17%	1,5%	0,19%	0,544	0,068	0,606	0,076	123,5	16,6	120,5	19,2	+ 1,7%	– 8,4%	0,0%	– 18,2%

Tabela 5.5 (continuação) - Estudo de lajes submetidas a solicitação biaxial f_{ck} = 36,20 MPa

ρ_x^-	ρ_x^+	ρ_y^-	ρ_y^+	w_x^-	w_x^+	w_y^-	w_y^+	m_{px}^-	m_{px}^+	m_{py}^-	m_{py}^+	1º quadrante %	2º quadrante %	3º quadrante %	4º quadrante %
0,75%	0,75%	0,4%	0,4%	0,281	0,281	0,149	0,149	72,5	72,5	36,2	36,2	0,0%	– 4,4%	0,0%	– 4,4%
0,75%	0,75%	0,2%	0,2%	0,281	0,281	0,0746	0,0746	72,5	72,5	18,8	18,8	0,0%	– 3,2%	0,0%	– 3,2%
0,75%	0	0,4%	0	0,281	0	0,149	0	71,5	12,1	35,6	11,6	0,0%	– 2,7%	0,0%	– 1,0%
0,75%	0	0,4%	0,4%	0,281	0	0,149	0,149	71,5	12,1	36,2	36,2	0,0%	– 4,5%	0,0%	– 3,5%
1,5%	1,5%	0,8%	0,8%	0,563	0,563	0,299	0,299	142,5	142,5	68,5	68,5	0,0%	– 3,5%	0,0%	– 3,5%
1,5%	1,5%	0,8%	0	0,563	0,563	0,299	0	142,5	142,5	69,5	11,8	0,0%	– 10,9%	0,0%	– 6,9%
1,5%	0	0,8%	0	0,563	0	0,299	0	133,5	12,6	69,5	11,8	0,0%	– 18,8%	0,0%	– 10,2%

Tabela 5.6 - Estudo de lajes submetidas a solicitação biaxial $f_{ck} = 39{,}00$ MPa

CAPÍTULO VI
PROPOSTA PARA CORREÇÃO DA SUPERFÍCIE DE COLAPSO DE JOHANSEN

De acordo com a análise dos resultados experimentais e numéricos, a superfície de Johansen superestima a resistência das lajes de forma mais acentuada quando há predominância da solicitação de torção e quando a taxa de armadura é alta. Portanto, qualquer proposta de correção deve incluir a influência desta taxa e levar em conta que, quando há predominância da solicitação de flexão, a teoria de Johansen é válida. Além disto, quando há solicitação biaxial de flexão, há uma redução de resistência no caso tração x compressão, ou seja, no segundo e quarto quadrantes. É necessário corrigir a superfície de Johansen para levar em conta também este efeito.

A seguir é deduzida a equação para a superfície corretora sugerida no Capítulo 5, que é uma superfície com altura constante, igual ao valor do momento torsor último de Johansen reduzido pelo coeficiente k_{xy}, ao longo da geratriz da superfície bicônica de Johansen e acompanha os cones, como mostra a figura 6.1. Há interseção das duas superfícies e, em cada trecho, prevalece a que fornece momentos torsores últimos menores, para evitar o colapso.

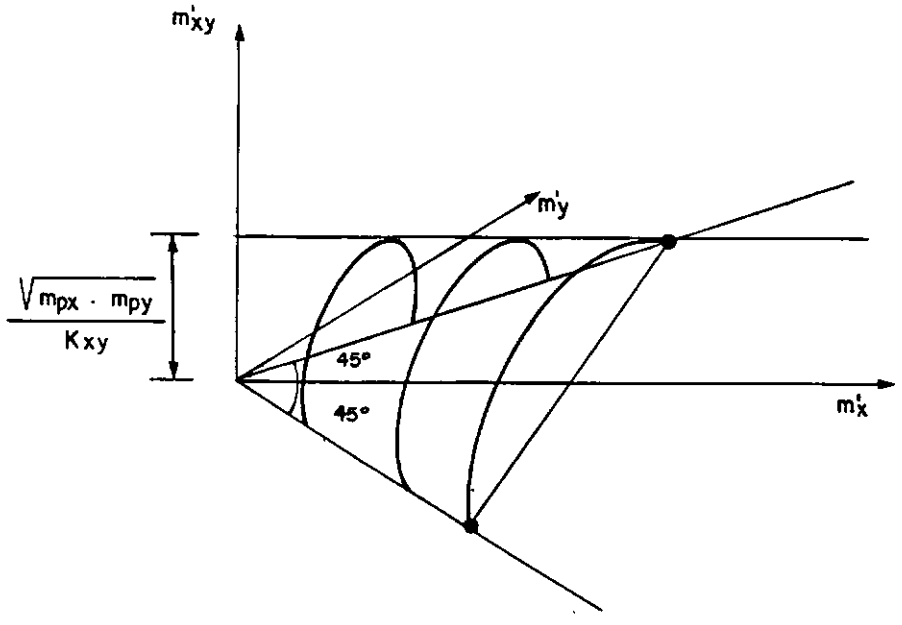


Figura 6.1 - Superfície corretora

Para facilitar a dedução, faz-se inicialmente uma translação dos eixos x e y para o vértice do cone e, em seguida, uma rotação a 45°, de modo que um dos eixos coincida com a geratriz da superfície cônica de Johansen (figura 6.2).

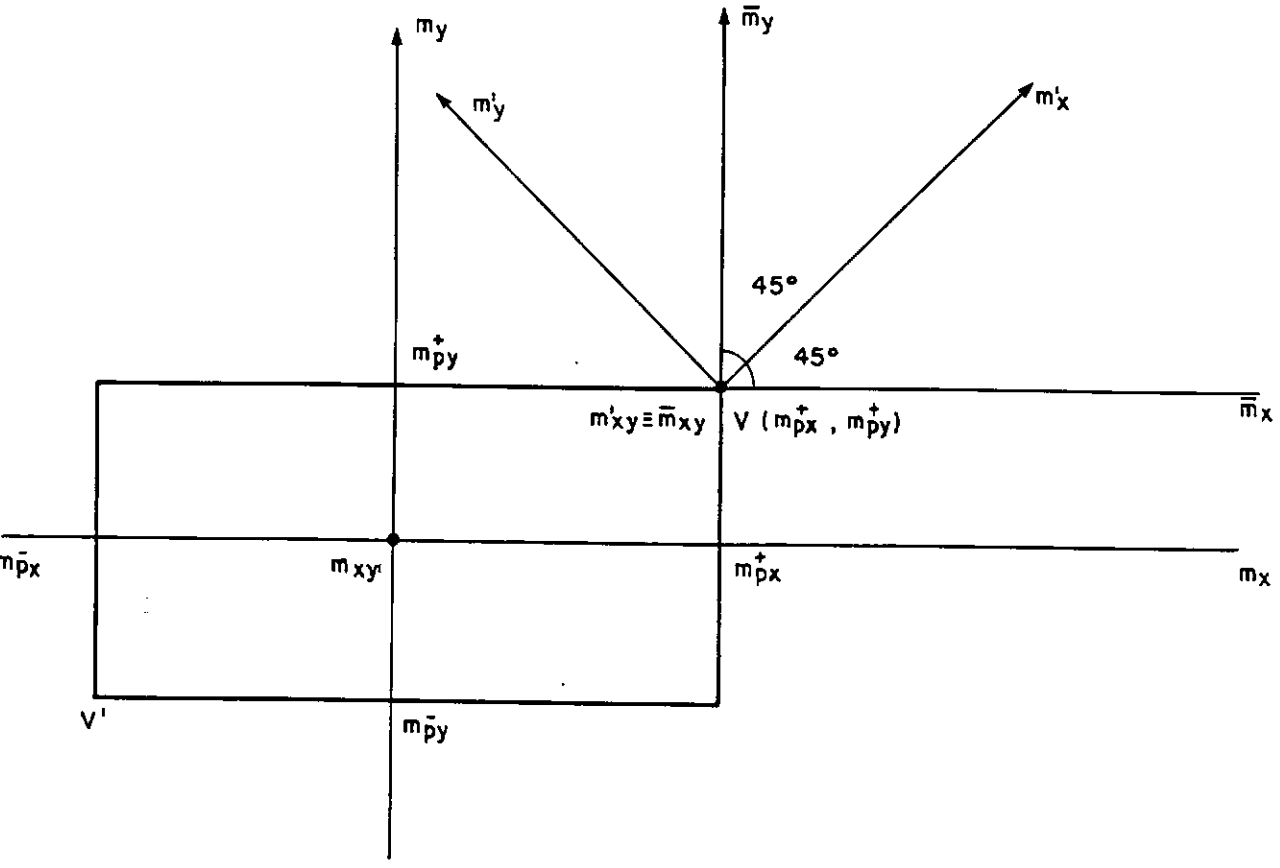


Figura 6.2 - Translação e rotação de eixos

De acordo com Johansen, a equação da superfície é:

$$(m_{px} - m_x)(m_{py} - m_y) = m_{xy}^2 \tag{6.1}$$

que conduz no caso de torção pura, $m_x = m_y = 0$, a:

$$m_{xy} = \sqrt{m_{px}\, m_{py}} \tag{6.2}$$

Como há uma redução neste torsor, função da taxa de armadura, é possível propor:

$$m_{xy} = \sqrt{\frac{m_{px}\, m_{py}}{k_{xy}}} \tag{6.3}$$

sendo preciso determinar o valor do coeficiente redutor k_{xy}.

O valor do momento torsor último deduzido por Nielsen, para o caso de torção pura, utilizando a análise limite pelo limite inferior, é fornecido pela expressão:

$$m_{xy_u} = f_c\, h^2 \sqrt{w_x\, w_y}\, \left(1 - w_x - w_y\right) \tag{6.4}$$

f_C, h, w_x e w_y já foram definidos no Capítulo 5. A comparação feita com os resultados experimentais mostrou que a equação (6.4) conduz a resultados satisfatórios. No trabalho de Peter Marti e Kong [MARTI 87b] é feita uma comparação entre os resultados obtidos utilizando a teoria de Johansen e utilizando a equação (6.4), que foi colocada na forma das curvas da figura 6.3. Analisando estas curvas, é deduzida uma equação para a determinação do coeficiente redutor k_{xy}.

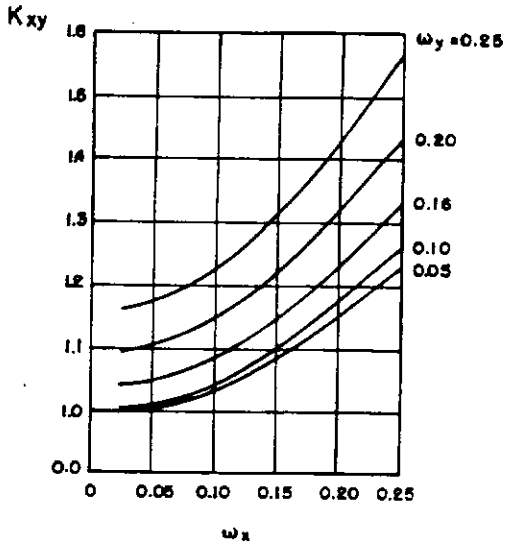


Figura 6.3 - Coeficiente k_{xy}

Se o coeficiente k_{xy} fosse influenciado apenas pela taxa de armadura w_x, poderia se pensar na curva como uma parábola.

$$k_{xy} = a + bw_x + cw_x^2 \tag{6.5}$$

com as condições de contorno:

$$\begin{aligned}
&1.\ w = 0 \quad \rightarrow \quad k_{xy} = 1 \quad \therefore \quad a = 1 \\
&2.\ w = 0 \quad \rightarrow \quad k'_{xy} = 0 \quad \therefore \quad b + 2cw_x = 0 \quad \therefore \quad b = 0 \\
&3.\ w = 0{,}25 \quad \rightarrow \quad k_{xy} = 1{,}25 \quad \therefore \quad 1 + 0{,}25^2 c = 1{,}25 \quad \therefore \quad c = 4
\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$k_{xy} = \left(1 + 4\,w_x^2\right)$$

como o valor de k_{xy} é influenciável de maneira semelhante por w_y:

$$k_{xy} = \left(1 + 4\,w_x^2\right)\left(1 + 4\,w_y^2\right) \tag{6.7}$$

A superfície corretora (figura 6.3) pode ser representada pela equação (6.8):

$$\frac{m_y'^{\,2}}{m_x'^{\,2}} + k_{xy}^2 \frac{m_{xy}'^{\,2}}{m_{px}\, m_{py}} = 1 \tag{6.8}$$

ou:

$$\frac{m_{px}\, m_{py}}{k_{xy}^2}\left(1 - \frac{m_y'^{\,2}}{m_x'^{\,2}}\right) = m_{xy}'^{\,2} \tag{6.9}$$

É preciso fazer a rotação e a translação do sistema de eixos local para voltar ao sistema global.

Rotação:

$$\begin{cases} m_x' = \overline{m}_x \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \overline{m}_y \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ m_y' = -\overline{m}_x \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \overline{m}_y \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{6.10}$$

Substitui-se (6.10) em (6.9).

Translação:

$$\begin{cases} \overline{m}_x = m_x - m_{px} \\ \overline{m}_y = m_y - m_{py} \end{cases} \tag{6.11}$$

Substitui-se (6.11) em (6.9), depois de substituir (6.10) em (6.9).

A equação (6.9) pode ser escrita:

$$\frac{m_{px} m_{py}}{k_{xy}^2} \left(m_x^{'2} - m_y^{'2} \right) = m_x^{'2}\, m_{xy}^{'2} \tag{6.12}$$

Utilizando (6.10):

$$\begin{cases} m_x^{'2} = \frac{1}{2} \overline{m}_x^2 + \overline{m}_x\, \overline{m}_y + \frac{1}{2} \overline{m}_y^2 \\ m_y^{'2} = \frac{1}{2} \overline{m}_x^2 - \overline{m}_x\, \overline{m}_y + \frac{1}{2} \overline{m}_y^2 \end{cases} \tag{6.13}$$

Substituindo (6.13) em (6.12) e como

$$m_{xy}^{'} = \overline{m}_{xy} \tag{6.14}$$

$$\frac{m_{px}\, m_{py}}{k_{xy}^2} . 2\overline{m}_x\, \overline{m}_y = \left(\frac{1}{2} \overline{m}_x^2 + \overline{m}_x\, \overline{m}_y + \frac{1}{2} \overline{m}_y^2 \right) m_{xy}^2 \tag{6.15}$$

ou:

$$m_{xy}^2 \left(\overline{m}_x^2 + \overline{m}_y^2 \right) = \overline{m}_x\, \overline{m}_y \left(4 \frac{m_{px}\, m_{py}}{k_{xy}^2} - 2 m_{xy}^2 \right) \tag{6.16}$$

Considerando a translação indicada em (6.11), chega-se a:

$$m_{xy}^2 \left\{ \left(m_x - m_{px} \right)^2 + \left(m_y - m_{py} \right)^2 \right\} = \left(m_x - m_{px} \right) \left(m_y - m_{py} \right) \left(\frac{4 m_{px}\, m_{py}}{k_{xy}^2} - 2 m_{xy}^2 \right) \tag{6.17}$$

ou:

$$m_{xy}^2\ \left(m_x^2-2m_x\ m_{px}+m_{px}^2+m_y^2-2m_y\ m_{py}+m_{py}^2\right)=$$
$$=m_x\ m_y-m_x\ m_{py}-m_y\ m_{px}+m_{px}\ m_{py}\ \left(\frac{4m_{px}\ m_{py}}{k_{xy}^2}-2m_{xy}^2\right) \tag{6.18}$$

ou:

$$m_{xy}^2\ \left(m_x^2+2m_x\ m_y+m_y^2\right)+m_{xy}^2\ \left(m_{px}+m_{py}\right)^2=$$
$$=2m_{xy}^2\ \left(m_x+m_y\right)\left(m_{px}+m_{py}\right)+\left(m_x-m_{px}\right)\left(m_y-m_{py}\right)\frac{4m_{px}\ m_{py}}{k_{xy}^2} \tag{6.19}$$

ou:

$$m_{xy}^2\left(m_x+m_y\right)^2+m_{xy}^2\left(m_{px}+m_{py}\right)^2-2m_{xy}^2\left(m_x+m_y\right)\left(m_{px}+m_{py}\right)=$$
$$=\left(m_x-m_{px}\right)\left(m_y-m_{py}\right)\frac{4m_{px}\ m_{py}}{k_{xy}^2} \tag{6.20}$$

$$m_{xy}^2\left\{\left(m_{px}+m_{py}\right)-\left(m_x+m_{my}\right)\right\}^2=\left(m_{px}-m_x\right)\left(m_{py}-m_y\right)\frac{4m_{px}\ m_{py}}{k_{xy}^2} \tag{6.21}$$

Finalmente:

Equação dos Pontos da Superfície:

$$m_{xy}^2\left\{\left(m_{px}+m_{py}\right)-\left(m_x+m_y\right)\right\}^2-\left(m_{px}-m_x\right)\left(m_{py}-m_y\right)\frac{4m_{px}\ m_{py}}{k_{xy}^2}=0 \tag{6.22}$$

Condição de Admissibilidade Plástica:

$$m_{xy}^2\left\{\left(m_{px}+m_{py}\right)-\left(m_x+m_y\right)\right\}^2-\left(m_{px}-m_x\right)\left(m_{py}-m_y\right)\frac{4m_{px}\ m_{py}}{k_{xy}^2}\le 0 \tag{6.23}$$

A correção necessária da superfície de Johansen para solicitação biaxial, quando há predominância dos momentos fletores em relação aos torsores, está representada na figura 6.4.

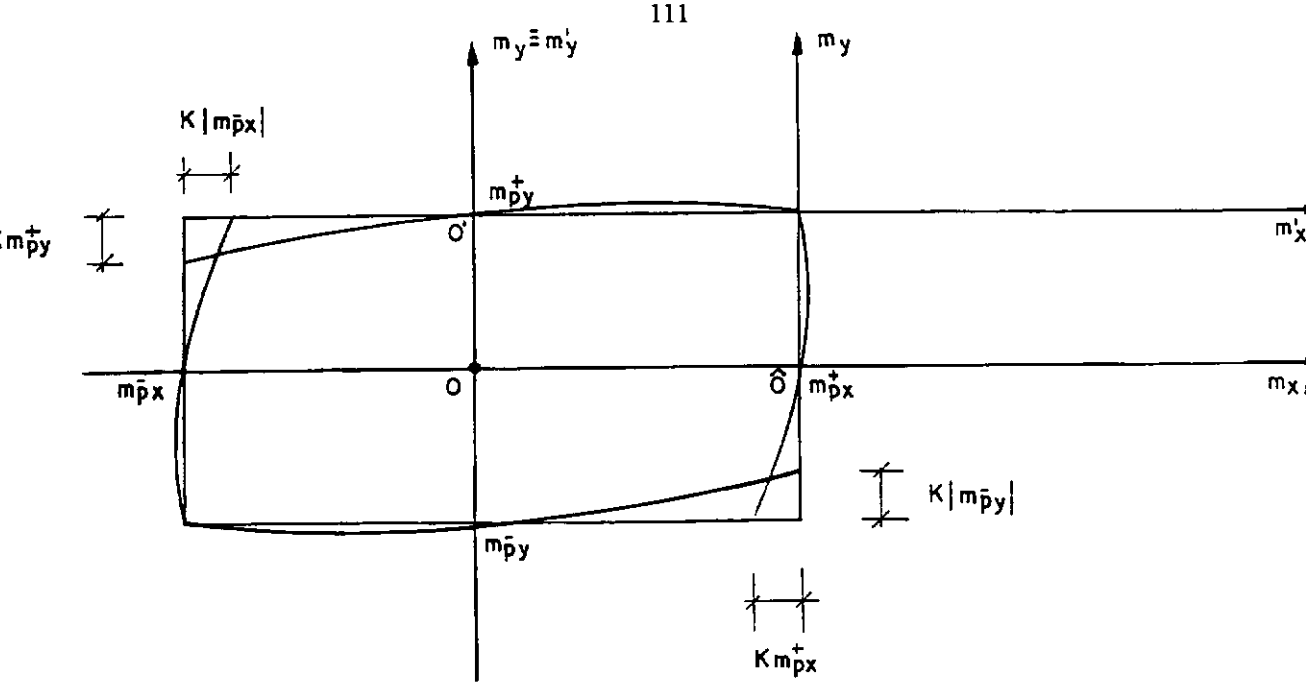


Figura 6.4 - Traço da superfície de colapso no plano $m_x m_y$

Aproximando a correção da reta $m_y = m_{py}^+$ por uma parábola referente aos eixos $m'_x m'_y$:

$$m'_y = a\, m'^2_x + b\, m'_x + c \tag{6.24}$$

Condições de contorno:

1. $m'_x = 0 \;\; ; \;\; m'_y = 0 \quad \therefore \quad c = 0$

2. $m'_x = m_{px}^+ \;\; ; \;\; m'_y = 0 \quad \therefore \quad a\, m_{px}^{+\,2} + b\, m_{px}^+ = 0$ (6.25)

3. $m'_x = -\left|m_{px}^-\right| \;\; ; \;\; m'_y = -k\, m_{py}^+ \quad \therefore \quad a\, m_{px}^{-\,2} - b\left|m_{px}^-\right| = -k\, m_{py}^+$

Resolvendo o sistema de equações (6.26), é possível determinar a e b:

$$\begin{cases} a\, m_{px}^{+\,2} + b\, m_{px}^+ = 0 \\ a\, m_{px}^{-\,2} - b\left|m_{px}^-\right| = -k\, m_{py}^+ \end{cases} \tag{6.26}$$

$$a = \frac{-k\, m_{py}^+}{\left|m_{px}^-\right|\left(\left|m_{px}^-\right| + m_{px}^+\right)} \tag{6.27}$$

$$b = \frac{k\, m_{py}^{+}}{\left(\left|m_{px}^{-}\right| + m_{px}^{+}\right)} \left|\frac{m_{px}^{+}}{m_{px}^{-}}\right| \tag{6.28}$$

Substituindo (6.27) e (6.28) em (6.24):

$$m_y^{'} = \frac{k\, m_{py}^{+}}{\left|m_{px}^{-}\right|\left(\left|m_{px}^{-}\right| + m_{px}^{+}\right)}\, m_x^{'}\left(m_{px}^{+} - m_x^{'}\right) \tag{6.29}$$

Fazendo uma translação para voltar aos eixos originais m_x e m_y:

$$m_y = m_y^{'} + m_{py}^{+} \tag{6.30}$$

Levando (6.29) em (6.30):

$$\frac{k\, m_{py}^{+}}{\left|m_{px}^{-}\right|\left(\left|m_{px}^{-}\right| + m_{px}^{+}\right)}\, m_x\left(m_{px}^{+} - m_x\right) + m_{py}^{+} - m_y = 0 \tag{6.31}$$

Aproximando, também, a correção da reta $m_x = m_{px}^{+}$ por uma parábola referente aos eixos $\hat{m}_x$ $\hat{m}_y$.

$$\hat{m}_x = a\,\hat{m}_y^{\,2} + b\,\hat{m}_y + c \tag{6.32}$$

Condições de contorno:

1. $\hat{m}_y = 0 \qquad \hat{m}_x = 0 \qquad \therefore \qquad c = 0$

2. $\hat{m}_y = m_{py}^{+} \qquad \hat{m}_x = 0 \qquad \therefore \qquad a\, m_{py}^{+\,2} + b\, m_{py}^{+} = 0$ (6.33)

3. $\hat{m}_y = -\left|m_{py}^{-}\right| \qquad \hat{m}_x = -k\, m_{px}^{+} \qquad \therefore \qquad a\, m_{py}^{-\,2} - b\left|m_{py}^{-}\right| = -k\, m_{px}^{+}$

Analogamente ao caso da curva corretora para $m_y = m_{py}^{+}$:

$$\hat{m}_x = \frac{k\, m_{px}^+}{\left|m_{py}^-\right|\left(\left|m_{py}^-\right| + m_{py}^+\right)}\, \hat{m}_y \left(m_{py}^+ - \hat{m}_y\right) \tag{6.34}$$

Voltando aos eixos globais m_x e m_y:

$$m_x = \hat{m}_x + m_{px}^+ \tag{6.35}$$

Substituindo (6.34) em (6.35):

$$\frac{k\, m_{px}^+}{\left|m_{py}^-\right|\left(\left|m_{py}^-\right| + m_{py}^+\right)}\, m_y \left(m_{py}^+ - m_y\right) + m_{px}^+ - m_x = 0 \tag{6.36}$$

Pela teoria de Johansen, a equação da superfície de colapso é:

$$\left(m_{px}^+ - m_x\right)\left(m_{py}^+ - m_y\right) = m_{xy}^2 \tag{6.37}$$

Após a correção, a equação da superfície de colapso é:

$$\begin{aligned} &\left\{ m_{px}^+ \left[\frac{k}{\left|m_{py}^-\right|\left(\left|m_{py}^-\right| + m_{py}^+\right)}\, m_y \left(m_{py}^+ - m_y\right) + 1 \right] - m_x \right\} \cdot \\ &\left\{ m_{py}^+ \left[\frac{k}{\left|m_{px}^-\right|\left(\left|m_{px}^-\right| + m_{px}^+\right)}\, m_x \left(m_{px}^+ - m_x\right) + 1 \right] - m_y \right\} = m_{xy}^2 \end{aligned} \tag{6.38}$$

Se $m_x = m_y = 0$, caso de torção pura, pela teoria de Johansen:

$$m_{xy}^2 = m_{px}^+\, m_{py}^+ \tag{6.39}$$

Utilizando a correção:

$$m_{xy}^2 = m_{px}^+\, m_{py}^+ \tag{6.40}$$

Há concordância de (6.39) e (6.40), pois se trata de um caso em que o momento torsor é significativo e não os momentos fletores.

CAPÍTULO VII
DIMENSIONAMENTO DE LAJES

7.1. Método de Wood

O dimensionamento de lajes de concreto armado é um problema muito freqüente no cálculo de estruturas, ou seja, é necessário determinar a espessura de concreto e a armadura necessárias para que os esforços resistentes superem os esforços solicitantes. A existência do momento torsor, constatada com a utilização de modelos mais exatos de análise, dificulta o dimensionamento, que deve ser compatível com o modelo de análise utilizado. Portanto, não é possível desprezar o momento torsor, sob pena de prejudicar a segurança. Modelos de análise de esforços mais aproximados, como o método das faixas de Hillerborg, desprezam o momento torsor e, em compensação, fornecem valores mais elevados para os momentos fletores, se comparados com métodos que não desprezam o momento torsor.

Dentre os métodos de dimensionamento de lajes de concreto armado que levam em conta momentos de flexão e de torção, o método mais conhecido é o de Wood, que considera apenas um caso de carga e adota armadura em malha ortogonal. Posteriormente, Armer generalizou o método de Wood para o caso de armadura esconsa.

O método de Wood apresenta uma fórmula para se obter os momentos resistentes positivos e negativos nas duas direções ortogonais x e y, necessários para que a laje resista aos momentos fletores m_x e m_y e o momento torsor m_{xy} atuantes num determinado ponto.

A idéia básica do método de Wood consiste em determinar a quantidade de armadura mínima necessária à laje, para que, em uma seção qualquer da mesma, com direção arbitrária, a componente normal do momento último desenvolvido pela laje resulte sempre maior ou igual à componente normal do momento solicitante nesta seção.

As equações deste método são obtidas em dois passos. Inicialmente, minimiza-se a diferença entre a componente normal do momento resistente último e a componente normal do momento solicitante. As equações assim obtidas apresentam como indeterminação a direção da linha de plastificação (rótula plástica). Esta indeterminação é, então, resolvida minimizando-se a quantidade de armadura. Estas equações fornecem, explicitamente, momentos resistentes últimos nas direções das barras de armadura e, para os quais, estas podem ser dimensionadas como em um caso de

flexão simples. Estas equações não consideram a atuação de esforços de membrana e também não levam em conta a interação existente entre as forças que atuam nas armaduras situadas em faces opostas da laje: a armadura de cada face da laje é, então, dimensionada como se a armadura da face oposta não existisse.

Sendo momento resistente último m_{nu} e momentos solicitantes m_n:

$$m_{nu}^{-} \leq m_n \leq m_{nu}^{+} \tag{7.1}$$

Para a resolução da equação (7.1), Wood e Armer utilizaram as equações do critério de escoamento de Johansen (2.1) e (2.3).

$$m_{nu} = m_{px} \cos^2 \theta + m_{py} \operatorname{sen}^2 \theta \tag{7.2}$$

$$m_n = m_x \cos^2 \theta + m_y \operatorname{sen}^2 \theta - m_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{7.3}$$

A seguir, os casos de armaduras positiva e negativa são analisados separadamente.

1. Momentos de dimensionamento da armadura positiva:

$$m_{nu} - m_n \geq 0 \tag{7.4}$$

Substituindo-se (7.2) e (7.3) em (7.4):

$$m_{px}^{+} \cos^2 \theta + m_{py}^{+} \operatorname{sen}^2 \theta - m_x \cos^2 \theta - m_y \operatorname{sen}^2 \theta + m_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \geq 0 \tag{7.5}$$

Como $sen^2\theta = 2sen\theta cos\theta$ e dividindo-se a equação (7.5) por $cos^2\theta$:

$$m_{px}^{+} + m_{py}^{+} k^2 - m_x - m_y k^2 + 2k m_{xy} \geq 0 \tag{7.6}$$

$$k = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = tg\theta \tag{7.7}$$

Para que haja a minimização do excesso de momento normal resistente:

$$\frac{\partial f(k)}{\partial \theta} = 0 \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial^2 f(k)}{\partial^2 \theta} = 0 \tag{7.9}$$

De (7.8) obtém-se:

$$\frac{\partial f(k)}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial f(k)}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial \theta} = \frac{\partial f(k)}{\partial k} \sec^2 \theta \tag{7.10}$$

Como o termo $sec^2\theta$ é sempre diferente de zero, tem-se:

$$\frac{\partial f(k)}{\partial \theta} = \frac{\partial f(k)}{\partial k} = 0 \tag{7.11}$$

Aplicando-se, então, a equação (7.11) em (7.6):

$$2k\, m_{py}^{+} - 2k\, m_y + 2m_{xy} = 0 \tag{7.12}$$

Portanto, o momento para o dimensionamento na direção *y* é:

$$m_{py}^{+} = m_y - \frac{1}{k} m_{xy} \tag{7.13}$$

Substituindo-se (7.13) em (7.6):

$$m_{px}^{+} \geq m_x - k\, m_{xy} \tag{7.14}$$

como o mínimo é desejado:

$$m_{px}^{+} = m_x - k\, m_{xy} \tag{7.15}$$

e aplicando-se (7.9) em (7.6):

$$m_{py}^{+} - m_y \geq 0 \tag{7.16}$$

Para atender (7.13) e (7.16)

$$\frac{1}{k} m_{xy} \leq 0 \tag{7.17}$$

ou seja, m_{xy} e k possuem sinais contrários. Assim, considerando-se a equação (7.17), as equações (7.15) e (7.13) podem ser reescritas como:

$$m_{px}^{+} = m_x + K\left|m_{xy}\right| \tag{7.18}$$

$$m_{py}^{+} = m_y + \frac{1}{K}\left|m_{xy}\right| \tag{7.19}$$

$$K = |k| = |tg\theta| \tag{7.20}$$

Admitindo-se que a diferença entre os braços de alavanca para as armaduras nas direções x e y seja desprezível, a armadura total poderá ser aproximadamente proporcional à soma de m_{px}^{+} e m_{py}^{+}. Desprezar esta diferença corresponde a adotar uma hipótese simplificadora de que o momento seja igual a armadura. Assim,

$$m_{px}^{+} + m_{py}^{+} = m_x + K\left|m_{xy}\right| + m_y + \frac{1}{K}\left|m_{xy}\right| \tag{7.21}$$

Como o objetivo é encontrar uma armadura mais econômica, temos que minimizar a expressão da armadura total (7.21), que equivale a obter um valor para $K = /k/$, tal que torne mínima a expressão (7.21).

$$\frac{\partial}{\partial K}\left(m_{px}^{+} + m_{py}^{+}\right) = 0 \tag{7.22}$$

ou:

$$\frac{\partial}{\partial K}\left[m_x + m_y + \left(K + \frac{1}{K}\right)\left|m_{xy}\right|\right] = 0 \tag{7.23}$$

logo:

$$\left|m_{xy}\right|\left(1 - \frac{1}{K^2}\right) = 0 \tag{7.24}$$

resultando: $K = 1$ (7.25)

e por (7.20):

$$\theta_{cr} = 45° \tag{7.26}$$

Fisicamente, θ_{cr} corresponde à posição da linha de escoamento (ou charneira plástica), em relação às direções das armaduras, que conduz ao dimensionamento mais econômico.

Portanto, os momentos resistentes para o dimensionamento das armaduras positivas, considerando-se $K = 1$.

$$m_{px}^{+} = m_x + |m_{xy}| \tag{7.27}$$

$$m_{py}^{+} = m_y + |m_{xy}| \tag{7.28}$$

2. Momentos de dimensionamento da armadura negativa

Procedendo-se de maneira análoga ao item 1, chega-se a:

$$m_{px}^{-} = m_x - K|m_{xy}| \tag{7.29}$$

$$m_{py}^{-} = m_y - \frac{1}{K}|m_{xy}| \tag{7.30}$$

onde também $K = 1$.

Assim, para o dimensionamento da armadura negativa:

$$m_{px}^{-} = m_x - |m_{xy}| \tag{7.31}$$

$$m_{py}^{-} = m_y - |m_{xy}| \tag{7.32}$$

3. Momentos de dimensionamento das armaduras positivas ou negativas de sinais contraditórios

Quando se utiliza as equações (7.27), (7.28), (7.31) e (7.32), espera-se que os momentos de dimensionamento sejam positivos e negativos, respectivamente. Entretanto, em alguns casos, estas equações conduzem a momentos de dimensionamento

com sinais contraditórios, ou seja, pode-se encontrar para a armadura positiva momentos negativos e vice-versa. Isto se deve ao fato de o critério de escoamento de Johansen (7.2) não considerar a possibilidade de os momentos resistentes últimos terem sinais contrários.

Para contornar este problema, Wood sugere a utilização de um valor de k que anule o momento com sinal conflitante. Este novo valor de k é, então, utilizado para a determinação do momento resistente na outra direção. Este procedimento é válido, uma vez que k é uma constante arbitrária. Se após as correções ainda houver discrepância de sinais, uma nova correção deve ser realizada até que os sinais fiquem coerentes. Anular um momento de dimensionamento significa que é dispensável o uso de armaduras na direção deste momento para o bordo em análise.

Correção para o bordo inferior da laje, associado à armadura positiva e momentos positivos:

Se $m_{px}^{+} < 0$, adota-se:

$$m_{px}^{+} = 0 \tag{7.33}$$

na equação (7.15), portanto:

$$k = \frac{m_x}{m_{xy}} \quad ; \quad K = \left| \frac{m_x}{m_{xy}} \right| \tag{7.34}$$

Substituindo-se (7.34) em (7.19):

$$m_{py}^{+} = m_y + \left| \frac{m_{xy}^2}{m_x} \right| \tag{7.35}$$

Se por (7.35) $m_{py}^{+} < 0$, nova correção:

$$m_{py}^{+} = 0 \tag{7.36}$$

na equação (7.13), logo:

$$k = \frac{m_{xy}}{m_y} \qquad ; \qquad K = \left| \frac{m_{xy}}{m_y} \right| \tag{7.37}$$

Substituindo-se (7.37) em (7.18):

$$m_{px}^{+} = m_x + \left| \frac{m_{xy}^2}{m_y} \right| \tag{7.38}$$

Se por (7.38) $m_{px}^{+} \langle 0$, então nova correção.

Correção para o bordo superior da laje, associado à armadura negativa e momentos negativos.

Analogamente, se $m_{px}^{-} \rangle 0$, faz-se:

$$m_{px}^{-} = 0 \tag{7.39}$$

logo:

$$m_{py}^{-} = m_y - \left| \frac{m_{xy}^2}{m_x} \right| \tag{7.40}$$

Se em (7.40) $m_{py}^{-} \rangle 0$, então nova correção:

$$m_{py}^{-} = 0 \tag{7.41}$$

portanto:

$$m_{px}^{-} = m_x - \left| \frac{m_{xy}^2}{m_y} \right| \tag{7.42}$$

Se por (7.42) $m_{px}^{-} \rangle 0$, então nova correção:

$$m_{px}^{-} = 0 \tag{7.43}$$

Para o caso de armadura esconsa, Armer utilizou a generalização da superfície de escoamento de Johansen e procedeu de maneira análoga ao caso da armadura ortogonal.

7.2. Dimensionamento via Programação Matemática

As técnicas de Programação Matemática (PM) são utilizadas para resolver os problemas de otimização, que são aqueles que procuram maximizar ou minimizar uma função numérica de determinado número de variáveis (ou funções), as quais estão sujeitas a certas restrições. Se todas as relações são lineares, tanto nas restrições como na função a ser otimizada, o problema de Programação Matemática é classificado como problema de Programação Linear (PL). Os programas de PL são freqüentemente utilizados na programação não-linear, quando esta é resolvida de forma recursiva, ou seja, como uma seqüência de problemas de PL.

Matematicamente, o problema de PM consiste em se determinar os valores de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, que tornam máximo ou mínimo o valor de uma função:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{7.44}$$

dadas m restrições ou condições:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad \{\leq, =, \geq\} b_i \qquad (i = 1, 2, ..., m) \tag{7.45}$$

e podendo ainda estas variáveis estarem sujeitas a condições do tipo:

$$l_i \leq x_i \leq u_i \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{7.46}$$

onde:

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é chamada de função objetivo

$x_1, x_2, ..., x_n$ é o vetor das n variáveis

$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ representa o vetor das m restrições

b_i, l_i, u_i são constantes.

Não existe diferença essencial entre um problema de maximização ou minimização, pois os valores de x que maximizam $f(x)$ também minimizam $-f(x)$. Assim,

todo problema de maximização pode ser formulado como um problema de minimização e vice-versa.

Dimensionar é quantificar valores para que a resistência supere a solicitação. Dimensionamento ótimo é, portanto, a determinação de valores mínimos para as armaduras, suficientes para que a resistência supere a solicitação.

No caso de dimensionamento de seções sujeitas à flexão composta reta, existem ábacos de interação que facilitam o dimensionamento. Estes ábacos representam a superfície de esforços resistentes, ou superfície de colapso, que no caso bidimensional (N, M) se degenera em uma curva. Estes ábacos de interação permitem obter a armadura necessária para resistir aos esforços atuantes em uma dada seção. São construídos para uma dada disposição de armadura e tipo de aço. Analogamente, existem as superfícies de colapso utilizadas para a flexão composta oblíqua. Johansen desenvolveu uma metodologia para obtenção de tais superfícies para lajes de concreto armado (Capítulo 2). Como o critério de Johansen é definido separadamente para os momentos positivos e negativos, a formulação é feita da mesma maneira.

1. Momentos positivos

a) O dimensionamento de lajes de concreto armado pode ser feito utilizando-se a superfície de Johansen, de modo a garantir que, em cada caso de carga, o ponto que representa o conjunto de esforços solicitantes m_x, m_y e m_{xy} esteja sobre ou no interior da superfície de escoamento de Johansen.

A partir das equações (7.1) e das equações da superfície de escoamento de Johansen

$$\left(m_{px}^{+} - m_x\right)\left(m_{py}^{+} - m_y\right) = m_{xy}^2 \tag{7.47}$$

$$\left(m_{px}^{+} - m_x\right)\left(m_{py}^{+} - m_y\right) - m_{xy}^2 \geq 0 \tag{7.48}$$

b) Como já foi dito no item 7.1, em algumas situações, os momentos de dimensionamento obtidos possuem sinais contraditórios. Para que a solução encontrada não seja contraditória, impõe-se que os momentos resistentes positivos sejam realmente positivos.

$$m_{px}^{+} \geq 0 \tag{7.49}$$

$$m_{py}^{+} \geq 0 \tag{7.50}$$

c) Os momentos resistentes devem englobar os momentos solicitantes sem sair do cone real, pois a superfície de Johansen é composta por cones reais e imaginários, positivos e negativos.

$$m_{px}^{+} \geq m_x \tag{7.51}$$

$$m_{py}^{+} \geq m_y \tag{7.52}$$

d) Para fazer um dimensionamento ótimo, ou seja, assegurar que a resistência supere a solicitação com um mínimo de armadura, e admitida a hipótese simplificadora de proporcionalidade entre os momentos de dimensionamento e as armaduras, é necessário minimizar

$$f(x) = m_{px}^{+} + m_{py}^{+} \tag{7.53}$$

que é a função objetivo do problema proposto a ser resolvido pela programação matemática.

2. Para os momentos negativos procede-se de maneira análoga.

7.3. Influência do Critério Proposto no Dimensionamento

Com a proposta da nova superfície de colapso, é preciso modificar a restrição que visa garantir que em cada caso de carga, o ponto que representa o conjunto de esforços solicitantes m_x, m_y e m_{xy} esteja sobre ou no interior da superfície de colapso.

CAPITULO VIII
CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Este trabalho consiste no estudo experimental e numérico das superfícies de colapso, no espaço dos esforços seccionais, de lajes de concreto armado com armaduras ortogonais. Estas superfícies são a base para a análise do comportamento de lajes fora do regime linear-elástico e também para o dimensionamento de lajes.

As principais conclusões desta pesquisa estão resumidas a seguir.

- A introdução do conceito de laje equivalente simplifica, com eficiência, a realização dos ensaios.

- A concordância observada na comparação entre resultados experimentais e numéricos permite validar o programa computacional desenvolvido.

- A análise dos resultados experimentais e numéricos permite constatar que a superfície de colapso proposta por Johansen conduz a resultados contra a segurança, principalmente na região onde o momento torsor possui valores significativos em relação aos momentos fletores e quando a taxa de armadura é alta ou moderada. Com base nestes resultados é possível determinar a região de momento torsor significativo onde ocorre o abatimento da superfície de Johansen, sendo que a região e o abatimento são função da taxa de armadura.

- Um estudo da superfície de colapso de Johansen na região de momento torsor nulo e momentos fletores de plastificação permite concluir que também é necessário fazer uma correção nesta região. Quando os momentos fletores de plastificação têm altas taxas de ortogonalidade (relação m_{px}/m_{py}) e sinais contrários (2° e 4° quadrantes) há uma queda nos valores destes momentos, devido à tração existente. Contrariamente ao esperado, não houve mudança significativa quando os momentos de plastificação têm o mesmo sinal (1° e 3° quadrantes). Apesar de as lamelas

externas sofrerem esmagamento, o acréscimo de compressão devido à compressão biaxial não chega a ser mobilizado no restante da região comprimida.

- Tendo como base as conclusões acima referidas, são propostas correções para a superfície de Johansen. A nova superfície de colapso é na verdade composta de duas superfícies, prevalecendo a que fornecer menores resistências na região estudada. Uma das superfícies é a de Johansen, com a correção proposta para a região de torsor nulo, que se encontra com a nova superfície. Esta nova superfície possui altura constante, ao longo das geratrizes das superfícies cônicas, resultante do abatimento da superfície bicônica de Johansen na região de torção pura, e, acompanha as superfícies cônicas. Na verdade, a geratriz de cada superfície cônica não é reta.

- Uma vez que o dimensionamento de lajes depende do critério de resistência e que este critério (superfície de Johansen) foi modificado tornando-se mais rigoroso, os métodos de dimensionamento terão que ser revistos. O método de Wood utiliza o critério de Johansen. Propõe-se então uma nova metodologia para o dimensionamento, baseada na nova superfície de colapso proposta, que utiliza a programação matemática para a obtenção da solução.

A seguir são apresentadas algumas sugestões para o prosseguimento da pesquisa.

- Verificar se há influência de outros parâmetros, como por exemplo, a resistência à compressão do concreto, na determinação da superfície corretora.

- Implementar um programa para o dimensionamento com o objetivo de verificar a influência desta metodologia na determinação dos momentos de plastificação necessários.

- Estender o estudo da superfície de colapso às lajes com armaduras esconsas. O método de Armer, para dimensionamento de lajes com armaduras esconsas, é baseado na generalização da superfície de colapso de Johansen.

- Verificar experimentalmente a região de momento torsor nulo da superfície de colapso de Johansen.

- Estudar a influência na redução do torsor da existência de armaduras positivas e negativas diferentes, iguais ou diferentes nas duas direções. A fórmula de Nielsen foi deduzida para armaduras positivas e negativas iguais, podendo ser diferentes nas duas direções. Usar o programa para tentar obter uma fórmula empírica.

BIBLIOGRAFIA

[AFON89] Afonso, S. M. B. - "Superfícies de Colapso para Esforços Seccionais em Lajes Ortotrópicas de Concreto Armado e suas Aplicações", Dissertação de Mestrado, PUC/RIO, 1989.

[ARME68] Armer, G. S. T. - Discussão de [WOOD68], Concrete 2(8): 319-320 Aug 1968.

[BAZA79] Bazant, Z. P. and Tsubaki, T. - "Concrete Reinforcing Net: Optimum Slip-Free Limit Design", Journal of the Structural Division, ASCE, 105(1): 327-343, Feb 1979.

[BAZA80a] Bazant, Z. P., Tsubaki, T. and Belytschenko, T. B. - "Concrete Reinforcing Net: Safe Design", Journal of the Structural Division, ASCE, 106(9): 1899-1906, Sep 1980.

[BAZA80b] Bazant, Z. P. and Tsubaki, T. - "Slip-Delatancy Model of Cracked Reinforced Concrete", Journal fo the Structural Division, ASCE, 106(9): 1947-1966, Sep 1980.

[BAZA82] Bazant, Z. P. and Lin, C. - "Concrete Plate Reinforcement: Frictional Limit Design", Journal of the Structural Division, ASCE, 108(11): 2443-2459, Nov 1982.

[BENE91] Benevides, M. C. C. S. - "Dimensionamento Ótimo em Pontos de Lajes de Concreto Armado", Dissertação de Mestrado, PUC/RIO, 1991.

[BUMA84] Bumachar, B. S. - "Implantação de Modelos de Fissuração do Concreto Armado no Programa NONSAP", Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC/RIO, Dez 1984.

[CHEN75] Chen, A. C. T. and Chen, W. F. - "Constitutive Relations for Concrete", J. Eng. Mech. Div., ASCE, Nº EM4, Aug 1975.

[CHEN84] Chen, W. F. - "Plasticity in Reinforced Concrete", McGrall Hill, 1982.

[COOK81] Cook, R. D. - "Concepts and Applications of Finit Element Analysis", Wiley, Second Edition, 1981.

[FIGU87] Figueiras, J. A. - "Formulação de Elementos Finitos para a Análise Não Linear de Lajes e Cascas de Betão Armado", VIII Congresso Latino-Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Rio de Janeiro, Nov 1987.

[FLET81] Fletcher, R. - "Practical Methods of Optimization", vol.2, John Wiley & Sons, USA, 1981.

[FONS86] Fonseca, A. M. A. and Neves, A. A. S. - "Análise Plástica Limite de Lajes", VII Congresso Latino-Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais para Engenharia, São Carlos, SP, Nov 1986

[FONS87] Fonseca, A. M. A. and Neves, A. A. S. - "Programação Matemática e Análise Elastoplástica de Lajes", VIII Congresso Latino-Americano e Ibérico sobre Métodos Computcionais para Engenharia, Rio de Janeiro, Nov 1987.

[FOX73] Fox, R. L. - "Optimization Methods for Engineering Design", Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1973.

[FUSC81] Fusco, P. B. - "Estruturas de Concreto - Solicitações Normais", Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1981.

[GILL83] Gill, P. E., Murray, W. e Wright, M. H. - "Practical Optimization", Academic Press, London, 1983.

[GUPT77] Gupta, A. K. and Sen, S. - "Design of Flexural Reinforcement in Concrete Slabs", Journal of the Structural Division, ASCE, 103(4): 793-804, Apr 1977.

[GUPT78] Gupta, A. K. - "Skew Reinforcement in Slabs", Journal of the Structural Division, ASCE, 104(8): 1317-1321, Aug 1978.

[GUPT80] Gupta, A. K. - Discussão de [SEN79], Journal of the Structural Division, ASCE, 106(3): 741-742, Mar 1980.

[GUPT84a] Gupta, A. K. - "Membrane Reinforcement in Concrete Shells: a Review", Nuclear Engineering and Design, 82: 63-75, 1984.

[GUPT84b] Gupta, A. K. and Akbar, H. - "Cracking in Reinforced Concrete Analysis", Journal of the Structural Division, ASCE, 110(8): 17735-1746, Aug 1984.

[GUPT86] Gupta, A. K. - "Combined Membrane and Flexural Reinforcement in Plates and Shells", Journal of the Structural Division, ASCE, 112(3): 550-557, Mar 1986.

[GVOZ38] Gvozdev, A. A. - "The Determination of the Value of the Collapse Load for Statically Indeterminate Systems Undergoing Plastic Deformations", Int. J. Mech. Sci., vol. 1, pág. 322-333, (1960), tradução do original de 1938.

[HADL82] Hadley, G. - "Programação Linear", Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1982.

[HAND73] Hand, F. R., Pecknold, D. A. and Schnobrich, W. C. - "Nonlinear Layered Analysis of R. C. Plates and Shells", Jr. St. Div., vol. 99, Nº ST7, pp. 1491-1505, Jul 1973.

[HILL56] Hillerborg, A. - "Theory of Equilibrium for Reinforced Concrete Slabs", Betong, vol. 41, nº 4, pág. 171-182, 1956.

[HILL75] Hillerborg, A. - "Strip Method of Design", Inglaterra, Londres, tradução da Cement and Concrete Association, 1975.

[HINT84] Hinton, E. and Owen, D. R. J. - "Finite Element Software for Plates and Shells", Pineride Press, 1984.

[HORO84] Horowitz, B. - "Armadura para Lajes", Estruturas, nº 107, pp. 39-52, Jun 1984.

[INGE23] Ingerslev, A. - "The Strength of Retangular Slabs", J. Inst. Struct. Eng. , vol. 1, pág. 3-14, 1923.

[JOHA43] Johansen, K. W. - "Brudlinieteorier", Gjellerup, Copenhagen, Denmark, English edition - "Yield-Line Theory", Cement and Concrete Association, Londres, 1962.

[JOHA62] Johansen, K. W. - "Linhas de Ruptura: Teoria e Prática", Rio de Janeiro, Brasil, Ao Livro Técnico S.A., tradução de Mascu, J., 1962

[KACH74] Kachanov. L. M. - "Fundamentals of the Theory of Plasticity", Ed. MIR, 1974.

[KEMP65] Kemp, K. O. - "The Yield Criterion for Orthotropically Reinforced Concrete Slabs", Int. J. Mech. Sci., 7(11), 737-746, 1965.

[KUPF69] Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. and Rusch, H. - "Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses", Proceedings, ACI, vol. 66, nº 8, pp. 656-666, 1969.

[KUPF73] Kupfer, H. and Gerstle, K. H. - "Behavior of Concrete Under Biaxial Stress", J. Eng. Mech. Div., ASCE, vol. 99, nº EM4, Aug 1973.

[LANG70] Langendonck, T. - "Teoria Elementar das Charneiras Plásticas", vol. I, A.B.C.P., São Paulo, 1970.

[LENS67] Lenschow, R. and Sozen, M. - "A Yield Criterion for Reinforced Concrete Slabs", Proceedings, ACI, vol. 64: 266-273, May 1967.

[LIU72a] Liu, T. C. Y., Nilson, A. H. and Slate, F. O. - "Stress-Strain Response of Fracture of Concrete in Uniaxial and Biaxial Compression", J. Am. Concre. Inst., vol. 69, nº 5, pp. 291-295, May 1972.

[LIU72b] Liu, T. C. Y., Nilson, A. H. and Slate, F. O. - "Stress-Strain Relations for Concrete", J. St. Div., ASCE, vol. 98, nº ST5, pp. 1025-1034, May 1972.

[MART87a] Marti, P., Leesti, P. and Khalifa, W. U. - "Torsion Teste on Reinforced Concrete Slab Elements", Journal of Structural Engineering, vol. 113, nº 5, May 1987.

[MART87b] Marti, P. and Kong, K. - "Response of Reinforced Concrete Slab Element to Torsion", Journal of Structural Engineering, vol. 113, nº 5, May 1987.

[MASS63] Massonet, C. E. and Save, M. A. - "Calcul Plastique des Constructions", vol. II, Structures Spatiales, Centre Belgo-Luxembourgeois d'Information de l'Acier, Brussels, Belgium, 1963.

[MASS72] Massonet, S. - "Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks", North-Holland Publishing Company, 1972.

[MENE90] Menezes, I. F. M. - "Análise Limite de Lajes de Concreto Armado", Dissertação de Mestrado, PUC/RIO, 1990.

[MILL70] Mills, L. L. and Zimmerman, R. M. - "Compressive Strenght of Plain Concrete Under Multiaxial Loading Conditions", Jr. Am. Concr. Inst., pp. 802-807, Out 1970.

[MORL66] Morley, C. T. - "On the Yield Criterion of an Orthogonally Reinforced Concrete Slab Element", J. Mech. Phys. Solids, 14(1), 33-47, 1966.

[MORL77] Morley, C. T. and Gulvanessian, H. - "Optimum Reinforcement of Concrete Slabs Elements", Proc. Insin. Civ. Engrs., (parte 2), 63: 441-454, Jun 1977

[MORL87] Morley, C. T. - Discussão de [HORO84], Journal of Structural Engineering, ASCE, 1385-1386, 1987.

[MOUR80] Moura, J. R. B. - "Análise de Estruturas de Concreto Armado pelo M.E.F. Usando relações Constitutivas Bidimensionais de Base Experimental", Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC/RIO, Maio 1980.

[MUNR78] Munro, J. e Fonseca, A. M. A. - "Yield Line Method by Finite Elements and Linear Programming", The Structural Engineer, vol. 56B, nº 2, pág. 37-44, 1978.

[MUSS87] Musso Jr., F. - "Dimensionamento de Seções de Concreto Armado e Verificação da Estabilidade de Vigas-Colunas no Estado Limite", Dissertação de Mestrado, PUC/RIO, 1987.

[NBR6118] NBR 6118 - Nov 1980 (ABNT, NB-1/78) - "Projeto e Execução de Obras de Concreto", Procedimentos, Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, 1986.

[NIEL63] Nielsen, M. P. - "Flydebetingelser for Jernbetonplader" ("Yield Conditions for Reinforced Concrete Slabs"), Nordisk Betong, 7(1), 61-82, 1963.

[NIEL64] Nielsen, M. P. - "Yield Conditions for Reinforced Concrete Shells in Membrane State", International Association of Shells Structures Symposium on Non-Classical Shell Problems, Warsal, 1963, North Holland Amsterdam, pp. 1030-1040, 1964.

[NIEL82] Nielsen, M. P. and Braestrup, M. W. - "Plastic Methods of Analysis and Design", Handbook of Structural Concrete - cap.20, Eds. Kong, Evans, Cohen, 1982.

[NIEL84] Nielsen, M. P. - "Limit Analysis and Concrete Plasticity", Prentice Hall Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics, USA, 1984.

[PARK80] Park, R. and Gamble, W. L. - "Reinforced Concrete Slabs", New York, J. Wiley, 1980.

[PINH88] Pinheiro, L. M. - "Análise Elástica e Plástica de Lajes Retangulares de Edifícios", Escola de Engenharia de São Carlos, Tese de Doutorado, Abril, 1988.

[PRAG51] Prager, W. e Hodge Jr., P. G. - "Theory of Perfectly Plastic Solids", EUA, Nova Iorque, Willey, 1951.

[SANT72] Santathadapom, S. and Chen, W. F. - "Tangent Stiffness Method for Biaxial Bending", J. St. Div., ASCE, Jan 1972.

[SCHU83] Schulz, M. - "Dimensionamento de Estruturas Laminares de Concreto Armado", Palestra apresentada no Clube de Engenharia, Rio de Janeiro, Jul 1988.

[SCHU88] Schulz, M. - "Verificação Geral de Peças de Concreto Armado Baseada no Modelo Chapa Fissurada", Tese de Doutorado, COPPE, Rio de Janeiro, Ago 1988.

[SEN79] Sen, R. - Discussão de [GUPT78], Journal of the Structural Division, ASCE, 105(5): 970-972, May 1979.

[SZIL74] Szilard, R. - "Theory and Analysis of Plates - Classical and Numerical Methods", Prentice Hall, Inc., 1974.

[VAZ84] Vaz, L. E., Feijó, B., Martha, L. F. R. e Lopes, M. M. - "Determination of the Ultimate Load in Concrete Slabs by the Yield Line Finite Element Method", Proceeding of the Conference on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants, R.S., 1984.

[VAZ87] Vaz, L. E. - "Análise Limite de Vigas e Lajes", 4º Colóquio sobre Comportamento e Projeto de Estruturas, PUC/RIO, Rio de Janeiro, 1987.

[VAZ88] Vaz, L. E. and Afonso, S. M. B. - "Dimensionamento Automático de Placas à Flexão", IX Congresso Latino-Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Rio de Janeiro, Nov 1988.

[VECC86] Vecchio, F. J. and Collins, M. P. - "The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear", J. Am. Concr. Inst., 83(2), pp. 219-231, 1986.

[WILL87] William, K., Pramono, E. and Sture, S. - "Fundamental Issues of Smeared Crack Models", Structural Research Series, vol. 5, Boulder, 1987.

[WOLF64] Wolfensberger, R. - "Traglast und Optimale Bemessug von Platen" ("Ultimate Resistance and Optimum Design of Concrete Slabs"), Technische Forschungs-und-Beratungsstelle der Schweizerischen Zementindustrie, Wildegg, Switzerland, 1964.

[WOOD68] Wood, R. H. - "The Reinforcement of Slabs in Accordance with a Pre-determined Field of Moments", Concrete, 2(2): 69-76, Feb 1968.

[ZIEN73] Zienkiewicz, O. C. and Gallagher, R. H. - "Optimum Structural Design", John Wiley & Sons, 1973.