

ESTRATÉGIA H-P DE REFINAMENTO
PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

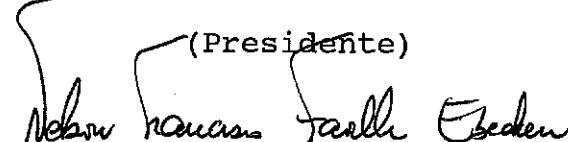
Fernando Luiz Bastos Ribeiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

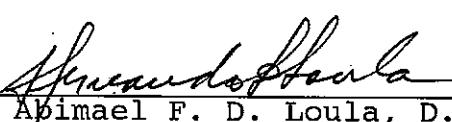

Luiz Landau, D.Sc.

(Presidente)

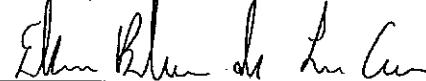

Nelson F. F. Ebecken, D.Sc.


Webe João Mansur, Ph.D.


Paulo Cesar C. Rosman, Ph.D.


Fernando Luiz Bastos Ribeiro

Abimael F. D. Loula, D.Sc.


Estevam B. de Las Casas, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 1991

RIBEIRO, FERNANDO LUIZ BASTOS

Estratégia H-P de Refinamento para o Método dos Elementos Finitos (Rio de Janeiro), 1991.

viii, 146 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 1991).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Mecânica Computacional.
2. Método dos Elementos Finitos.
3. Métodos Adaptativos.

I. COPPE/UFRJ.

II. Título (Série).

iii

A

Terezinha, Mariza,

Angela e Nilo.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPQ e à PETROBRÁS.

Aos colegas Luiz Landau, Osni A. Marques, José Luiz A. Drummond, Alvaro Luiz G. A. Coutinho e Francisco de Assis Moreira Jr., pelo apoio e amizade.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ESTRATÉGIA H-P DE REFINAMENTO
PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Fernando Luiz Bastos Ribeiro

NOVEMBRO, 1991

Orientador: Luiz Landau

Programa: Engenharia Civil

Discutimos neste trabalho as bases de implementação computacional de uma estratégia *h-p* de refinamento para o método dos elementos finitos.

O método aqui descrito caracteriza-se, principalmente, pelo emprego de elementos finitos triangulares e de estimativas de erro *a-posteriori*, locais e globais. O refinamento polinomial é feito através da introdução de funções de interpolação hierárquicas.

Aplicamos este método na análise de problemas planos de elasticidade e de potencial.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

H-P REFINEMENT STRATEGY
FOR THE FINITE ELEMENT METHOD

Fernando Luiz Bastos Ribeiro

NOVEMBER, 1991

Thesis Supervisor: Luiz Landau

Department: Civil Engineering

In this work we discuss the computational aspects of an *h-p* strategy for the finite element method.

The main characteristics of the method presented herein are the use of triangular finite elements and *a-posteriori* local/global error estimates. Polynomial refinement is carried out by addition of hierarchical interpolation functions.

We use this method in the analysis of plane elasticity and potential problems.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	01
1. ESTIMATIVA DE ERRO	06
1.1 Introdução	06
1.2 Elasticidade plana	07
1.2.1 Equações básicas	07
1.2.2 Estimativa de erro	10
1.3 Problemas de potencial	22
1.3.1 Equações básicas	22
1.3.2 Estimativa de erro	23
1.4 Taxas de convergência	25
2. MÉTODOS ADAPTATIVOS	27
2.1 Introdução	27
2.2 Método h	30
2.2.1 Refinamento de quadriláteros bilineares ...	33
2.2.2 Refinamento de triângulos lineares	41
2.2.3 Suavização de malha	49
2.3 Método r	59
2.4 Método p	65
3. ESTRATÉGIA H-P DE REFINAMENTO	78
3.1 Introdução	78

3.2 Características gerais	79
3.3 Resolução do sistema de equações	81
4. APLICAÇÕES	84
4.1 Introdução	84
4.2 Problemas de elasticidade	85
4.3 Problemas de potencial	112
CONCLUSÕES	131
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	133
APÊNDICE A	138
APÊNDICE B	145

INTRODUÇÃO

Neste trabalho descrevemos um método adaptativo de análise utilizando elementos finitos, para a análise de problemas planos de elasticidade e de potencial.

Os métodos adaptativos diferem dos procedimentos usuais de análise por possuírem rotinas para análise de erros e refinamento seletivo, sendo este baseado na distribuição de erros da solução do problema. Distinguem-se três categorias diferentes de refinamento:

1. *Método h* - Neste método os elementos são subdivididos em elementos menores, mantendo-se constante o grau dos polinômios usados. Este método é adequado para o tratamento de singularidades.
2. *Método p* - Consiste em enriquecer o espaço solução aumentando-se o grau das funções de interpolação. Apresenta taxas de convergência mais altas que o método *h* em problemas suaves. Geralmente, o refinamento *p* é efetivado por meio da introdução de funções hierárquicas, preservando assim as informações quando se passa de um nível de refinamento para outro.
3. *Método r* - Este esquema reposiciona os pontos nodais da malha de acordo com a distribuição de erros. Tem

como vantagem o fato de manter inalterado o número de equações, porém a malha tem que ser rica o suficiente para fornecer um resultado satisfatório. É mais eficiente em problemas dinâmicos, nos quais a distribuição de erros se modifica com o tempo.

Análises convencionais do método dos elementos finitos exigem grande esforço manual e experiência por parte do analista, para que sejam obtidos resultados satisfatórios. A automatização dos procedimentos para análise de erros e refinamento é uma questão fundamental para o aperfeiçoamento e crescente utilização do método, e vem sendo motivo de estudos desde meados da década de 70.

Um dos primeiros trabalhos publicados a esse respeito foi o de Carey [10], sobre refinamento de malha. Mesmo tendo utilizado medidas de erro rudimentares, se comparadas com as que mais tarde seriam desenvolvidas, todas as etapas do que hoje se considera uma análise adaptativa estavam, de modo geral, já delineadas em seu trabalho:

1. Geração do modelo inicial.
2. Resolução do sistema de equações.
3. Delimitação das regiões de refinamento. Fim da análise se a solução é aceitável.
4. Refinamento das regiões críticas.
5. Retorno a etapa 2.

Posteriormente, os trabalhos de Babuska *et alii* [3-8],

contribuíram significativamente para a formulação matemática da teoria de erros e para o estudo de convergência do método dos elementos finitos. São também importantes os trabalhos de Zienkiewicz *et alii* [27, 29, 31], Szabo [25], Demkowicz *et alii* [12], Oden *et alii* [20], e Rachowicz *et alii* [21].

A estratégia de refinamento aqui proposta é uma combinação dos métodos h e p . Esta combinação permite que se tire proveito, simultaneamente, das taxas de convergência mais altas do refinamento polinomial e da capacidade de tratar singularidades do método h . Em uma primeira fase desta estratégia os elementos do modelo inicial são sucessivamente subdivididos (método h) até que se obtenha um percentual de erro pré-especificado e, em uma segunda e última fase, emprega-se o refinamento polinomial (método p) para que seja atingido o erro final desejado.

A escolha deste procedimento é conveniente sob vários aspectos. A subdivisão dos elementos exerce um papel de gerador de malhas, o que permite a consideração de modelos iniciais constituídos por poucos elementos. Além disso, esta subdivisão resulta em uma malha adaptativa onde as possíveis singularidades da solução são detectadas, tornando mais eficiente a aplicação do refinamento polinomial. Por último, a estrutura de dados necessária para a implementação computacional deste esquema não difere em muito daquelas utilizadas nos códigos convencionais do método dos elementos finitos.

O erro da solução é calculado *a-posteriori*. Utiliza-se, para este fim, uma estimativa de erro que se baseia na suavização de tensões, sugerida por Zienkiewicz e Zhu [29].

São utilizados apenas elementos triangulares, para os quais foi desenvolvido um esquema especial de subdivisão. A utilização de triângulos torna o refinamento mais ágil e flexível no que diz respeito a geometria. Após cada etapa do refinamento de malha utilizamos um algoritmo de suavização de malha, para manter a uniformidade dos elementos.

O refinamento p é feito hierarquicamente, o que se justifica principalmente por dois motivos: preservam-se os dados referentes ao nível de refinamento anterior, e evita-se o problema de continuidade nas interfaces entre elementos com diferentes graus de aproximação.

Tal procedimento permite atingir resultados extremamente precisos, a partir de malhas formadas por um número mínimo de elementos e pontos nodais.

A organização do presente texto é a seguinte:

No capítulo 1 discutimos, em detalhes, a implementação da estimativa de erro utilizada, para os problemas de elasticidade e de potencial.

Tratamos, no capítulo 2, de alguns dos principais conceitos relacionados com os métodos adaptativos, de um

modo geral. Apresentamos, neste capítulo, algoritmos de subdivisão de elementos quadriláteros e triangulares (método h), de suavização de malhas, e de refinamento polinomial (método p). Mostramos também alguns resultados obtidos via redistribuição de nós (método r).

O capítulo 3 é dedicado ao estudo do método $h-p$. Com base nos algoritmos descritos no capítulo 2, discutimos a construção da estratégia de refinamento acima referida.

Finalmente, o capítulo 4 apresenta os resultados numéricos obtidos.

CAPÍTULO 1

ESTIMATIVA DE ERRO

1.1 INTRODUÇÃO

Com o emprego do Método dos Elementos Finitos (MEF) na resolução de um problema físico, três tipos de erro podem ocorrer. O primeiro é o erro causado pelas simplificações envolvidas na construção do modelo matemático do problema. O segundo corresponde aos erros de truncamento ocorridos durante os cálculos computacionais, e o terceiro resulta da discretização do problema, originalmente contínuo, e que se traduz no não cumprimento das equações diferenciais.

As estimativas deste último tipo de erro desempenham um papel fundamental nas análises adaptativas. Com a crescente popularidade destes métodos, o estudo de estimativas *a-posteriori* de erro tem-se tornado cada vez mais importante [14, 24].

No presente trabalho adotamos a estimativa sugerida por Zienkiewicz e Zhu [29], de implementação computacional simples, e que tem mostrado ser numericamente eficiente. Não é o nosso propósito provar aqui a sua eficiência, mas sim discutir sua implementação para os problemas de elasticidade plana e de potencial.

Uma análise em bases matemáticas desta estimativa pode ser encontrada no trabalho de Ainsworth *et alii* [1].

1.2 ELASTICIDADE PLANA

1.2.1 Equações básicas

Considere-se um problema estático linear de elasticidade, definido em um domínio plano Ω , de contorno $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma$. As equações de equilíbrio são dadas por,

$$\mathcal{L}^t \sigma + f = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (1.1)$$

onde \mathcal{L} é o operador diferencial linear,

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

σ o campo de tensões,

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

e $f^t = (f_x, f_y)$ representa o vetor de forças externas por unidade de área.

As relações entre o campo de deformações ϵ e o campo de

tensões são dadas pelas expressões,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \mathcal{L} \mathbf{u} \quad (1.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathcal{L} \mathbf{u} \quad (1.5)$$

nas quais $\mathbf{u}^t = (u_x, u_y)$ é o campo de deslocamentos, \mathbf{D} é a matriz constitutiva do material, igual a,

$$\mathbf{D} = E / (1-\nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

para o caso de estado plano de tensão, e,

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

para os problemas de estado plano de deformação. E e ν representam o módulo de Young e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

Escrevendo as equações de equilíbrio (1.1) em termos de deslocamentos, obtém-se a expressão,

$$\mathcal{L}^t \mathbf{D} \mathcal{L} \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

que juntamente com as condições de contorno,

$$T \cdot n - \bar{t} = 0 \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (1.9)$$

$$u = u_p \quad \text{em } \Gamma_u \quad (1.10)$$

definem o conjunto de equações que regem o problema de elasticidade plana.

Nas equações (1.9) e (1.10), T é o tensor de tensões, n é o vetor normal ao contorno, \bar{t} são forças distribuídas no contorno, e u_p são deslocamentos prescritos.

No MEF utiliza-se uma aproximação \hat{u} do tipo,

$$\hat{u} = N \bar{u} \quad (1.11)$$

onde a matriz N contém as funções de interpolação, e \bar{u} são os valores nodais da solução aproximada.

Após o tratamento variacional das equações (1.8), (1.9) e (1.10), e fazendo uso da aproximação (1.11), obtém-se o sistema de equações algébricas,

$$K \bar{u} = F \quad (1.12)$$

onde K é a matriz de rigidez do problema, e F o vetor de forças nodais equivalentes.

A matriz K e o vetor F são obtidos a partir dos elementos, cujas contribuições relativas aos nós i e j são

dadas por,

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} (\mathcal{L} \mathbf{N}_i)^t \mathbf{D} (\mathcal{L} \mathbf{N}_j) d\Omega \quad (1.13)$$

$$\mathbf{F}_i = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (1.14)$$

As deformações e tensões aproximadas são obtidas a partir do campo de deslocamentos $\hat{\mathbf{u}}$,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{L} \hat{\mathbf{u}} = (\mathcal{L} \mathbf{N}) \bar{\mathbf{u}} \quad (1.15)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \mathcal{L} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{D} (\mathcal{L} \mathbf{N}) \bar{\mathbf{u}} \quad (1.16)$$

1.2.2 Estimativa de erro

Define-se o erro associado a uma aproximação do tipo (1.11) como sendo a função \mathbf{e} que mede a diferença entre a solução exata e a solução aproximada,

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \quad (1.17)$$

Normalmente, utiliza-se a norma de energia [16, 17] para a aferição da magnitude do erro, que no caso do problema de elasticidade plana é dada pela expressão,

$$\| \mathbf{e} \|_E^2 = \int_{\Omega} (\mathcal{L} \mathbf{e})^t \mathbf{D} (\mathcal{L} \mathbf{e}) d\Omega \quad (1.18)$$

Substituindo (1.17) em (1.18), e considerando-se os campos aproximados de deformações e de tensões, a norma de energia do erro pode ser escrita na forma,

$$\begin{aligned}\| \boldsymbol{\epsilon} \| ^2 &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon} - \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^t \mathbf{D} (\boldsymbol{\epsilon} - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^t \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (1.19)\end{aligned}$$

Na equação acima omitimos, por simplicidade, o subíndice ϵ da norma de energia. Ao longo deste trabalho, estaremos sempre nos referindo à norma de energia.

Como pode ser visto nesta expressão, o erro pode ser escrito como uma função da diferença entre os campos de tensões exatas e aproximadas.

A estimativa proposta por Zienkiewicz e Zhu consiste em aproximar o campo de tensões exatas por um campo de tensões contínuas (suavizadas) $\boldsymbol{\sigma}^*$, obtido segundo uma interpolação semelhante à dos deslocamentos,

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \quad (1.20)$$

na qual $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$ são valores nodais das tensões, e \mathbf{N} é a matriz de (1.11), com funções de mesmo grau.

Uma vez tornado contínuo o campo tensões, pode-se então obter uma estimativa da norma de energia do erro,

$$\|\hat{\mathbf{e}}\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma^* - \hat{\sigma})^t \mathbf{D}^{-1} (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \quad (1.21)$$

As tensões nodais $\bar{\sigma}^*$ podem ser obtidas ponderando-se a diferença entre os campos de tensões σ^* e $\hat{\sigma}$, em relação às funções de interpolação,

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^t (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.22)$$

Com a introdução de (1.20) em (1.22) obtém-se,

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^t (\mathbf{N} \bar{\sigma}^* - \hat{\sigma}) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{N}^t \mathbf{N} \bar{\sigma}^* - \mathbf{N}^t \hat{\sigma}) d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.23)$$

$$\bar{\sigma}^* = \mathbf{A}^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \hat{\sigma} d\Omega \quad (1.24)$$

sendo \mathbf{A} a matriz quadrada e simétrica,

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \mathbf{N} d\Omega \quad (1.25)$$

A Figura 1.1 nos dá uma idéia do significado físico desta estimativa de erro, mostrando a sua relação com a diferença entre o campo de tensões suavizadas e o campo de tensões fornecido pelo MEF.

Zienkiewicz e Zhu sugerem, em seu trabalho, a utilização da matriz \mathbf{A} na forma diagonalizada, uma vez que a resolução do sistema de equações (1.24) exigiria um enorme esforço computacional.

Uma alternativa mais simples ainda que a diagonalização da matriz \mathbf{A} consiste em considerar as tensões $\bar{\sigma}^*$ como sendo a média nodal das tensões computadas nos pontos nodais dos elementos.

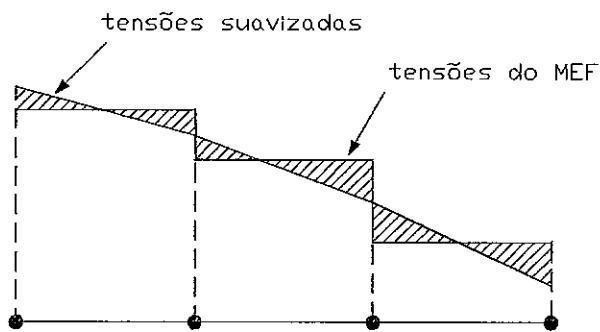


Figura 1.1 - Tensões suavizadas e tensões do MEF em uma malha de 3 elementos reticulados lineares.

Mostramos a seguir que a utilização da média nodal é equivalente ao procedimento de diagonalização da matriz \mathbf{A} , para malhas uniformes de elementos triangulares lineares.

Considere-se a malha uniforme da Figura 1.2. Para um elemento genérico, a expressão (1.20) toma a forma,

$$\sigma^* = \begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \bar{\sigma}_i^* = \mathbf{N} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1^* \\ \bar{\sigma}_2^* \\ \bar{\sigma}_3^* \end{Bmatrix} \quad (1.26)$$

com,

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3] \quad (1.28)$$

$$\bar{\sigma}_i^* = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{x_i}^* \\ \bar{\sigma}_{y_i}^* \\ \bar{\tau}_{xy_i}^* \end{Bmatrix} \quad (1.29)$$

onde o índice i refere-se aos nós do elemento. As funções de interpolação N_i são dadas pelas coordenadas de área L_i (Apêndice A).

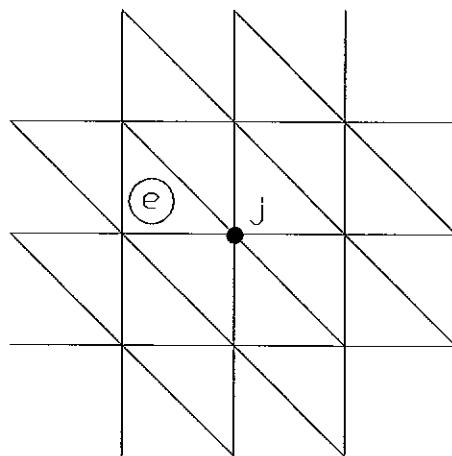


Figura 1.2 - Malha uniforme de elementos triangulares lineares.

Efetuando-se, a nível de elemento, a integral da equação (1.25), obtém-se,

$$\mathbf{A}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^t \mathbf{N} d\Omega_e = S_e \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

sendo S_e a área do elemento. Utilizando o símbolo \mathbf{I}_3 para designar a matriz identidade 3×3 , as submatrizes M_{ij} podem ser escritas na forma,

$$M_{ij} = \begin{cases} 1/6 \mathbf{I}_3, & \text{se } i = j \\ 1/12 \mathbf{I}_3, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (1.31)$$

Após diagonalização, a matriz \mathbf{A}_e se transforma em,

$$\bar{\mathbf{A}}_e = \frac{1}{3} S_e \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Sendo as tensões $\hat{\sigma}_e$ constantes no elemento, a integral da equação (1.24) tem por resultado,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^t \hat{\sigma}_e d\Omega_e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^t d\Omega_e \hat{\sigma}_e = \\ &= \frac{1}{3} S_e \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \hat{\sigma}_e \end{aligned} \quad (1.33)$$

Considerando-se agora as contribuições dos elementos

relativas a um nó j genérico da malha, pode-se escrever que,

$$\left(\sum_{e=1}^m \frac{1}{3} S_e I_3 \right) \bar{\sigma}_j^* = \sum_{e=1}^m \frac{1}{3} S_e I_3 \hat{\sigma}_e \quad (1.34)$$

e, mais simplificadamente,

$$\left(\sum_{e=1}^m S_e \right) \bar{\sigma}_j^* = \sum_{e=1}^m S_e \hat{\sigma}_e \quad (1.35)$$

Da expressão acima, podemos concluir que o procedimento de diagonalização da matriz \mathbf{A} equivale a tomarmos a média nodal ponderada das tensões, levando-se em conta as áreas dos elementos.

Finalmente, se as áreas S_e dos m elementos concorrentes no nó j forem iguais, esta expressão passa a ter a forma,

$$\bar{\sigma}_j^* = \frac{1}{m} \sum_{e=1}^m \hat{\sigma}_e \quad (1.36)$$

que corresponde a média nodal das tensões.

Mesmo em malhas não-uniformes, a diferença entre as estimativas de erro obtidas segundo a média nodal das tensões e a matriz \mathbf{A} diagonalizada não é significativa, como mostram os exemplos numéricos das Figuras 1.3 e 1.4.

A Figura 1.3 mostra um exemplo de estado plano de deformação para o qual foram consideradas três malhas, correspondendo a três diferentes níveis de refinamento.

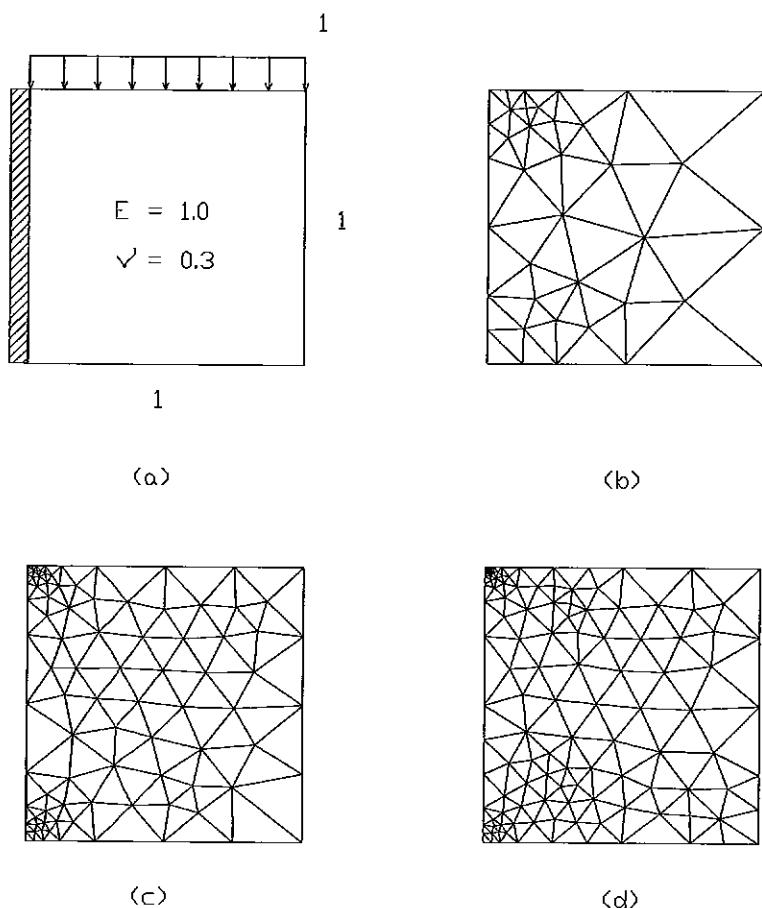


Figura 1.3 - Viga curta em balanço. a) Geometria e constantes físicas. b) Malha 1. c) Malha 2. d) Malha 3.

As estimativas de erro deste problema, utilizando-se elementos lineares ($p = 1$), quadráticos ($p = 2$) e cúbicos ($p = 3$), podem ser vistas na Tabela 1.1, onde n corresponde ao número de equações, e $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, e $\hat{\mathbf{e}}_3$ representam as estimativas obtidas através, respectivamente, da média nodal de tensões, da matriz \mathbf{A} diagonalizada, e da matriz \mathbf{A} cheia.

Para os elementos quadráticos e cúbicos, utilizamos a expressão (1.35) como forma alternativa de diagonalização da matriz \mathbf{A} .

Tabela 1.1 - Viga curta em balanço. Estimativas de erro.

malha	p	n	$\ \hat{\mathbf{e}}_1\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}_2\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}_3\ $
1	1	62	0.3065551	0.3015007	0.2787771
	2	238	0.0624233	0.0597869	0.0546515
	3	528	0.0334389	0.0315919	0.0293447
2	1	160	0.2108689	0.2083750	0.1978181
	2	622	0.0253912	0.0244497	0.0224833
	3	1386	0.0126880	0.0119882	0.0111579
3	1	218	0.1876370	0.1866352	0.1785612
	2	848	0.0186726	0.0180776	0.0166058
	3	1890	0.0085406	0.0080783	0.0075342

A Tabela 1.2 apresenta as soluções obtidas e os índices de efetividade,

$$\theta_i = \|\hat{\mathbf{e}}_i\| / \|\mathbf{e}\| \quad (1.37)$$

sendo o erro exato calculado segundo a expressão,

$$\| \mathbf{e} \|^2 = \| \mathbf{u} \|^2 - \| \hat{\mathbf{u}} \|^2 \quad (1.38)$$

válida para operadores diferenciais auto-adjuntos [16].

Tabela 1.2 - Viga curta em balanço. Índices de efetividade.

$$\| \mathbf{u} \| = 1.379745 \quad [1].$$

malha	p	$\ \hat{\mathbf{u}} \ $	$\ \mathbf{e} \ $	θ_1	θ_2	θ_3
1	1	1.3290060	0.3707290	0.83	0.81	0.75
	2	1.3759216	0.1026484	0.61	0.58	0.53
	3	1.3785216	0.0580960	0.58	0.54	0.51
2	1	1.3607868	0.2279390	0.93	0.91	0.87
	2	1.3791463	0.0406497	0.62	0.60	0.55
	3	1.3795657	0.0222588	0.57	0.54	0.50
3	1	1.3650417	0.2008933	0.93	0.93	0.89
	2	1.3793358	0.0336130	0.56	0.54	0.49
	3	1.3796151	0.0189498	0.45	0.43	0.40

O exemplo da Figura 1.4 representa um problema de estado plano de tensões, de domínio em L, e constituído por dois tipos diferentes de material. As Tabelas 1.3 e 1.4 mostram os resultados das análises deste problema.

As análises destes dois problemas mostram valores bastante próximos para as estimativas de erro calculadas por meio da média nodal e da matriz \mathbf{A} diagonalizada, e também que os índices de efetividade são mais próximos da unidade quando $p = 1$, ou seja, podemos esperar melhores estimativas

para elementos lineares. Para o cálculo do erro "exato" foram consideradas as soluções fornecidas por Ainsworth et alii [1].

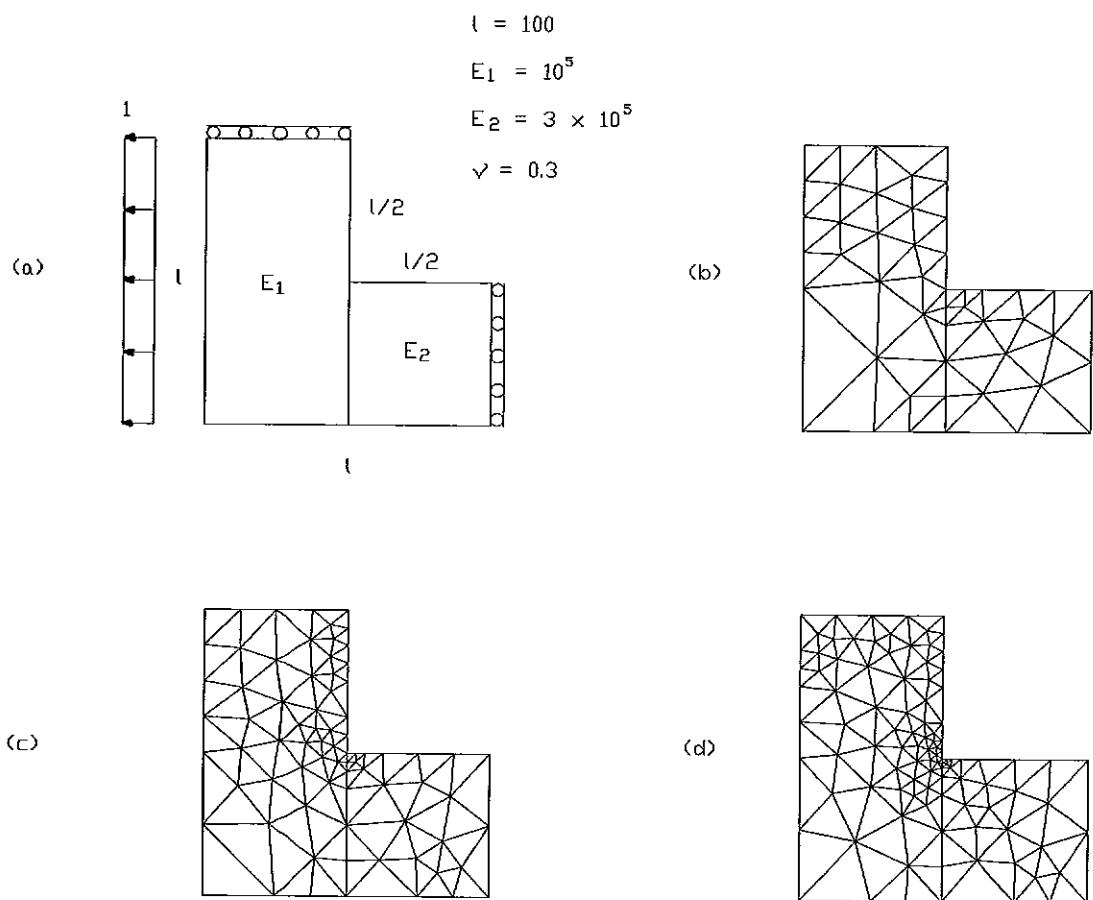


Figura 1.4 - Domínio em L. a) Geometria e constantes físicas. b) Malha 1. c) Malha 2. d) Malha 3.

Tabela 1.3 - Domínio em L. Estimativas de erro.

malha	p	n	$\ \hat{\mathbf{e}}_1\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}_2\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}_3\ $
1	1	89	0.1325039	0.1327912	0.1234394
	2	318	0.0435268	0.0412393	0.0383684
	3	687	0.0291839	0.0274888	0.0255867
2	1	146	0.1136086	0.1135788	0.1065317
	2	534	0.0283826	0.0274131	0.0255686
	3	1164	0.0190091	0.0181959	0.0169199
3	1	200	0.0998921	0.1000198	0.0936372
	2	744	0.0205457	0.0199697	0.0185509
	3	1632	0.0136355	0.0131339	0.0121849

Tabela 1.4 - Domínio em L. Índices de efetividade. $\|\mathbf{u}\| = 0.452394$ [1].

malha	p	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \mathbf{e}\ $	θ_1	θ_2	θ_3
1	1	0.4228431	0.1608220	0.82	0.83	0.77
	2	0.4484330	0.0597315	0.73	0.69	0.64
	3	0.4507866	0.0380981	0.77	0.72	0.67
2	1	0.4335965	0.1290508	0.88	0.88	0.83
	2	0.4506604	0.0395623	0.72	0.69	0.65
	3	0.4516640	0.0256837	0.74	0.71	0.66
3	1	0.4393871	0.1076987	0.93	0.93	0.87
	2	0.4515549	0.0275356	0.75	0.73	0.67
	3	0.4520658	0.0172194	0.79	0.76	0.71

1.3 PROBLEMAS DE POTENCIAL

1.3.1 Equações básicas

Seja uma função f definida em um domínio plano Ω , de contorno $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, que representa o divergente de uma função vetorial $\mathbf{v}^t = (v_x, v_y)$,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = f \quad \text{em } \Omega \quad (1.39)$$

Admitindo-se que existe uma função potencial u , tal que,

$$\mathbf{v} = -k \nabla u \quad \text{em } \Omega \quad (1.40)$$

$$u = u_p \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (1.41)$$

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (1.42)$$

pode-se escrever a equação de Poisson, com a substituição de (1.40) em (1.39),

$$-k \nabla^2 u = f \quad \text{em } \Omega \quad (1.43)$$

com suas correspondentes condições de contorno (1.41) e (1.42). Nesta equação, k é uma constante física que depende do tipo de problema considerado.

Considerando-se o problema variacional associado às

equações (1.41), (1.42) e (1.43), e a aproximação do MEF,

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \bar{\mathbf{u}} \quad (1.44)$$

chega-se ao sistema de equações algébricas,

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F} \quad (1.45)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}$ é o vetor de incógnitas nodais. As expressões da matriz \mathbf{K} e do vetor \mathbf{F} são dadas, a nível de elemento, por,

$$K_{ij} = k \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, d\Omega \quad (1.46)$$

$$F_i = \int_{\Omega} N_i f \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} N_i q \, d\Gamma \quad (1.47)$$

O vetor de fluxos aproximados $\hat{\mathbf{v}}$ é obtido a partir de,

$$\hat{\mathbf{v}} = -k \nabla \hat{\mathbf{u}} \quad (1.48)$$

1.3.2 Estimativa de erro

A norma de energia do erro correspondente ao operador diferencial da equação (1.46) é dada por,

$$\| e \|^2 = k \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla e \, d\Omega \quad (1.49)$$

Sendo o erro definido por,

$$e = u - \hat{u} \quad (1.50)$$

pode-se reescrever a norma de energia na forma,

$$\begin{aligned} \| e \|^2 &= k \int_{\Omega} \nabla (u - \hat{u}) \cdot \nabla (u - \hat{u}) d\Omega = \\ &= \frac{1}{k} \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}) \cdot (\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}) d\Omega \end{aligned} \quad (1.51)$$

Ou seja, a norma de energia do erro mede a diferença entre os campos de fluxos exato e aproximado.

Para utilização desta estimativa na prática, considera-se, analogamente ao que foi feito no item 1.2.2, um campo contínuo de fluxos,

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{N} \bar{\mathbf{v}}^* \quad (1.52)$$

onde os fluxos nodais $\bar{\mathbf{v}}^*$ são dados por,

$$\bar{\mathbf{v}}^* = \mathbf{A}^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \hat{\mathbf{v}} d\Omega \quad (1.53)$$

sendo a matriz \mathbf{A} obtida segundo a expressão,

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \mathbf{N} d\Omega \quad (1.54)$$

Valem aqui os mesmos comentários e observações do item 1.2.2, a respeito da diagonalização da matriz \mathbf{A} e da consideração de um campo de fluxos suavizados obtido a

partir das médias nodais, tendo-se em conta a analogia entre fluxos e tensões.

1.4 TAXAS DE CONVERGÊNCIA

O fato de que uma aproximação do MEF converge para a solução exata do problema, na norma de energia, quando o tamanho dos elementos $h \rightarrow 0$ e/ou o grau dos polinômios utilizados $p \rightarrow \infty$ pode ser descrito matematicamente pela inequação,

$$\| e \| \leq C h^\mu p^{-\lambda} \quad (1.55)$$

onde C é uma constante que independe de h e p , λ é um real positivo que mede a força das singularidades da solução, e $\mu = \min(p, \lambda)$ [8].

Fazendo $p = \text{constante}$ na expressão acima obtém-se a taxa μ de convergência h , ou seja, a taxa de convergência quando $h \rightarrow 0$, mantendo-se p fixo,

$$\| e \| \leq C h^\mu \quad (1.56)$$

Considerando-se que em duas dimensões, o número de equações n correspondente a uma determinada malha pode ser expresso, aproximadamente, em função de p e h ,

$$n \approx \frac{p^2}{h^2} \quad (1.57)$$

a expressão (1.56) pode ser reescrita de forma mais conveniente,

$$\| e \| \leq C n^{-\mu/2} \quad (1.58)$$

Portanto, para soluções suaves pode-se esperar uma taxa de convergência h igual a $-p/2$.

A taxa de convergência p é determinada aumentando-se o grau dos polinômios com h mantido fixo. Neste caso o limite superior do erro é dado pela expressão,

$$\| e \| \leq C n^{-\beta} \quad (1.59)$$

sendo β um real positivo que depende da regularidade da solução.

CAPÍTULO 2

MÉTODOS ADAPTATIVOS

2.1 INTRODUÇÃO

Apresentamos, neste capítulo, algumas alternativas de implementação dos métodos adaptativos h , p e r , considerando, inicialmente, alguns aspectos comuns a estes três métodos.

Os códigos adaptativos devem possuir medidas de erro locais, que servem para apontar as regiões da malha com maior carência de refinamento, e medidas globais, que dizem a respeito da necessidade ou não de se melhorar a solução.

A estimativa apresentada no capítulo 1 pode ser tomada como medida local de erro, se calculada a nível de elemento, obtendo-se a medida global simplesmente efetuando-se o somatório das estimativas dos m elementos da malha,

$$\|\hat{e}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\hat{e}_i\|^2 \quad (2.1)$$

É necessário também que sejam definidos os critérios de refinamento, ou seja, devem ser estabelecidas as condições em que a solução precisa ser melhorada, e identificadas as regiões ou elementos a serem refinados.

No que diz respeito ao critério de refinamento da solução, deve-se observar que o valor absoluto da norma do erro não tem utilidade na prática, em virtude de sua ordem de grandeza depender das unidades empregadas no problema. Utilizamos, portanto, o conceito de erro relativo [29,30],

$$\eta = \frac{\| e \|}{\| u \|} \times 100 \% \quad (2.2)$$

que pode ser estimado segundo a expressão,

$$\hat{\eta} = \left(\frac{\|\hat{e}\|^2}{\|\hat{e}\|^2 + \|\hat{u}\|^2} \right)^{1/2} \times 100 \% \quad (2.3)$$

e adotamos o critério de refinar a solução u quando seu erro relativo for maior que um percentual $\bar{\eta}$ pré-especificado,

$$\hat{\eta} > \bar{\eta} \quad (2.4)$$

Para especificar quais os elementos a serem refinados, consideramos dois critérios distintos. No primeiro (critério 1), são refinados os elementos que satisfazem a relação,

$$\frac{\|\hat{e}_i\|_i}{e_m} \geq 1 \quad (2.5)$$

onde e_m representa o erro médio dos m elementos,

$$e_m = \frac{\|\hat{e}\|}{m^{1/2}} \quad (2.6)$$

No segundo (critério 2), os erros dos elementos são comparados com um percentual γ do erro máximo. Assim, são refinados os elementos para os quais,

$$\|\hat{e}\|_i \geq \gamma_{\max} \|\hat{e}\|_i \quad (2.7)$$

Observe-se que para $\gamma = 1$, somente o elemento com o maior erro é refinado, enquanto que para $\gamma = 0$, todos são refinados.

Com o refinamento sucessivo de uma malha através destes critérios, há uma tendência de equidistribuição do erro. Tendo-se em conta este fato, o critério 1 parece ser mais natural. Entretanto, o critério 2 permite que se tenha maior controle sobre o número de elementos refinados.

Com estes conceitos estabelecidos, escrevemos o seguinte algoritmo adaptativo,

1. Geração do modelo inicial.
2. Resolução do sistema de equações.
3. Cálculo das estimativas de erro a nível de elemento.
4. Cálculo da estimativa global de erro,

$$\|\hat{e}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\hat{e}\|_i^2$$

5. Se $\hat{\eta} > \bar{\eta}$ refina os elementos de acordo com o critério adotado.

Fim da análise, se $\hat{\eta} \leq \bar{\eta}$.

6. Retorna à etapa 2.

Este algoritmo pode ser utilizado indistintamente para os métodos h e p . No método r , a etapa 5 consistiria em um reposicionamento de nós, de acordo com a distribuição de erros, em lugar do refinamento dos elementos.

2.2 MÉTODO H

O método h consiste na subdivisão dos elementos, mantendo-se inalterado o grau das funções de interpolação utilizadas na aproximação. Desta forma, as novas funções introduzidas são do mesmo tipo que as anteriores, com a diferença de que são definidas em domínios menores, como pode ser visto na Figura 2.1.

Em decorrência da subdivisão dos elementos surgem alguns problemas, como por exemplo,

- dependendo da malha original, a uniformidade dos elementos pode não ser satisfatória após o refinamento, ocasionando um mal condicionamento do sistema de equações.
- a numeração sequencial dos novos pontos nodais aumenta consideravelmente a largura de banda do sistema de equações.
- há uma perda de continuidade da solução nas interfaces entre elementos refinados e elementos não refinados, o que compromete a convergência do MEF.

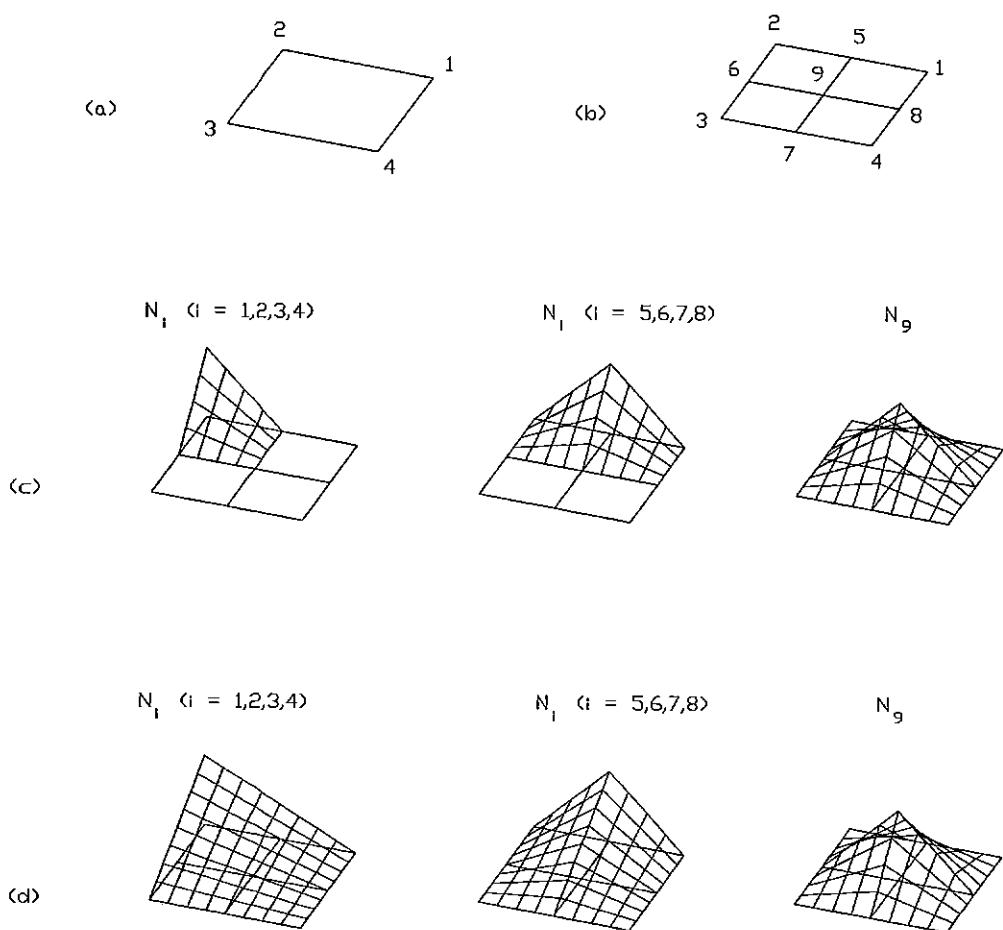


Figura 2.1 - Refinamento h de elemento quadrilátero bilinear. a) Elemento original. b) Elemento após subdivisão. c) Funções standard. d) Funções hierárquicas.

A uniformidade dos elementos pode ser melhorada através da utilização de algoritmos específicos para este fim, algoritmos estes geralmente chamados de suavizadores de malha. Discutiremos no item 2.2.3 um algoritmo deste tipo, aplicado a malhas de elementos triangulares.

A numeração dos pontos nodais é irrelevante quando o esquema de solução do sistema de equações é do tipo iterativo, mas no caso de utilização de um método direto torna-se necessário efetuar uma renumeração dos nós, visando otimizar a largura de banda do sistema de equações.

Quanto ao problema de continuidade nas interfaces, é conveniente analisar separadamente os casos de elementos quadriláteros e elementos triangulares. Em quadriláteros, este problema pode ser resolvido impondo-se restrições aos nós irregulares das interfaces, ou triangularizando-se temporariamente os elementos adjacentes não refinados, somente para efeito da montagem e resolução do sistema de equações (Figura 2.4). Em triângulos, este problema é resolvido subdividindo-se os elementos vizinhos aos elementos refinados.

O uso de funções de interpolação hierárquicas (Figura 2.1.d) eliminaria o problema de continuidade nas interfaces, além da vantagem de manter inalteradas as matrizes e vetores relativas ao nível de refinamento anterior [27,28,30]. No entanto, traria o custo adicional de um complicado esquema de integração numérica, assim como exigiria uma estrutura de

dados mais complexa. Por estas razões, empregamos a formulação *standard* do MEF no refinamento h .

Discutiremos a seguir estes e outros aspectos, particularizados para os casos de elementos quadriláteros e triangulares.

2.2.1 Refinamento de quadriláteros bilineares

O padrão de refinamento segundo o qual os elementos são subdivididos em quatro novos elementos permite a construção de um procedimento simples do método h , com uma estrutura de dados que pouco difere daquelas utilizadas nos códigos convencionais do MEF.

Consideremos, por exemplo, a malha da Figura 2.2.a, de quatro elementos, sendo que dois destes devem ser refinados. Após a subdivisão destes elementos, obtém-se a malha refinada da figura 2.2.b. Pode-se observar, nesta figura, que um determinado elemento da malha final pode ter dois elementos adjacentes a qualquer um de seus lados.

Sendo assim, suponhamos que além das conexividades dos elementos da malha inicial, dispomos também de uma matriz que contém os elementos vizinhos de cada elemento [13,19], como mostram as figuras 2.2.c, 2.2.d e 2.2.e.

Os lados que pertencem ao contorno podem ser

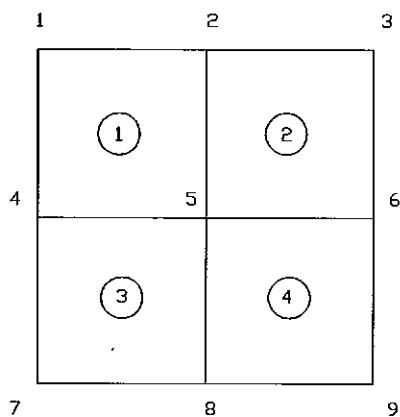
identificados na matriz VIZEL de vizinhanças atribuindo-se valores negativos aos seus vizinhos, como pode ser visto na figura 2.2.e.

Com uma estrutura de dados que contenha esta matriz VIZEL, podemos então construir o algoritmo de refinamento do Quadro 2.1.

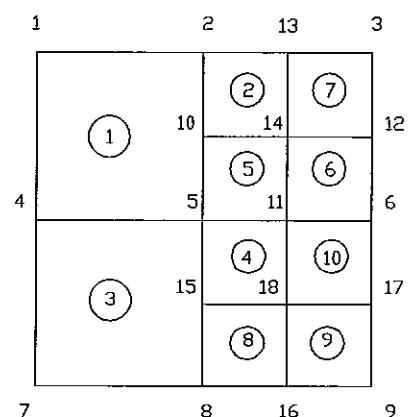
Neste procedimento, portanto, é fundamental uma rotina para determinação das vizinhanças dos elementos da malha inicial. No decorrer do refinamento, estas vizinhanças são atualizadas.

É importante observar que limitamos em dois o número máximo de vizinhos por face de cada elemento. Isto implica na necessidade de se ter um controle sobre os níveis de refinamento dos elementos. Por exemplo, os elementos da malha inicial pertencem ao nível 0 de refinamento, os elementos gerados a partir da primeira subdivisão da malha pertencem ao nível 1, e assim por diante.

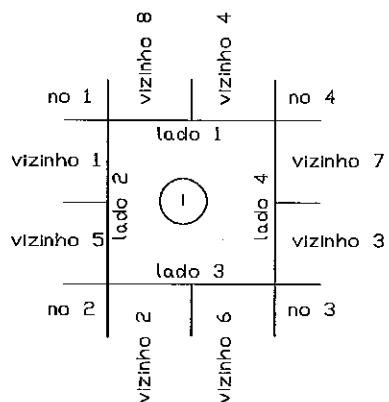
Para que cada elemento tenha no máximo dois elementos vizinhos, a diferença de níveis de refinamento entre dois elementos adjacentes não pode ser maior do que 1. Conclui-se portanto, que além dos elementos refinados em decorrência da distribuição de erros, outros elementos também devem ser subdivididos, com a finalidade de manter a diferença de níveis entre elementos adjacentes em no máximo 1. A Figura 2.3 ilustra este conceito de níveis de refinamento.



(a)



(b)



(c)

CONEL (n, m)

1	2	4	5
4	5	7	8
5	6	8	9
2	3	5	6

(d)

VIZEL (p, m)

-1	1	-1	3
3	4	-1	-1
2	-1	4	-1
-1	-1	1	2
-1	1	-1	3
3	4	-1	-1
2	-1	4	-1
-1	-1	1	2

(e)

 $m = \text{número de elementos}$ $n = \text{número de pontos nodais / elemento}$ $p = \text{número de vizinhos / elemento}$

Figura 2.2 - a) Malha inicial. b) Malha refinada. c) Conetividades e vizinhanças de um elemento genérico i . d) Matriz de conetividades dos elementos da malha inicial. e) Matriz de vizinhanças dos elementos da malha inicial.

```

loop nos M elementos (i = 1,...,M):
  se elemento i deve ser refinado então:
    loop nos 4 lados do elemento i (j = 1,...,4):
      . vizinho1 = VIZEL(j,i)
      . vizinho2 = VIZEL(j+4,i)

      se (vizinho1 = vizinho2) então:
        . calcula coordenadas do novo ponto nodal, no
          ponto médio do lado j
        . numero de nós = número de nós + 1
        . atualiza vizinhança de vizinho1, se vizinho1 > 0
        . atribui vizinho1 como vizinho dos novos
          elementos
        . atribui condições de contorno ou prescrição de
          valores ao novo ponto nodal

      caso contrário:
        . atualiza vizinhanças de vizinho1 e vizinho2
        . atribui vizinho1 e vizinho2 como vizinhanças dos
          novos elementos

    fim do se

    para os novos elementos:
      . atribui conetividades
      . atribui cargas distribuídas no interior e nas faces
      . atribui tipo de material do elemento original

  fim do loop nos lados

  . calcula coordenadas do novo ponto nodal, no
    centro de gravidade do elemento
  . numero de nós = número de nós + 1
  . número de elementos = número de elementos + 3

fim do se

fim do loop nos elementos

```

Quadro 2.1 - Algoritmo de refinamento h para elementos quadriláteros lineares.

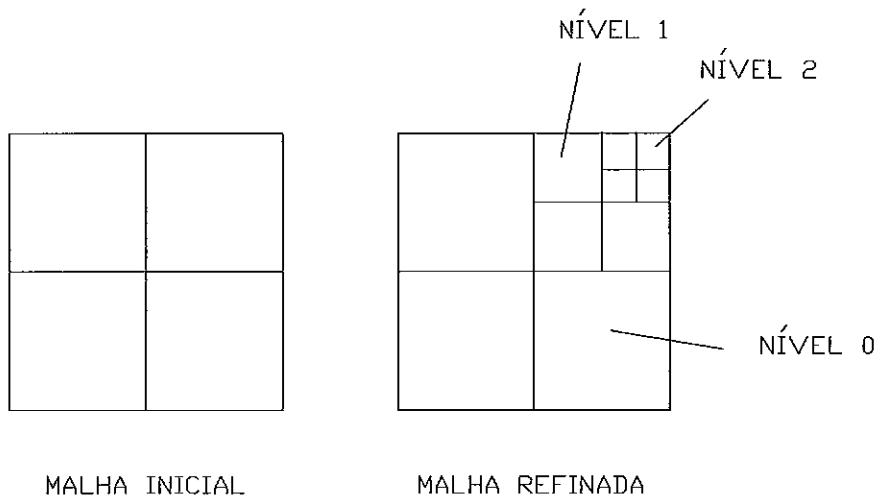


Figura 2.3 – Níveis de refinamento.

A consideração de pontos nodais nas interfaces entre elementos refinados e elementos não refinados resulta em perda de continuidade da solução, o que pode ser evitado de duas maneiras. Pode-se considerar, por exemplo, uma condição do tipo,

$$u_j = (u_i + u_k) / 2 \quad (2.8)$$

nas interfaces onde ocorram tais pontos nodais (Figura 2.4.a), ou simplesmente triangularizar os elementos necessários (Figura 2.4.b) somente para efeito de montagem e resolução do sistema de equações. Nesta última hipótese, o número de equações é maior, uma vez que uma condição do tipo (2.8) torna inativos os pontos nodais irregulares.

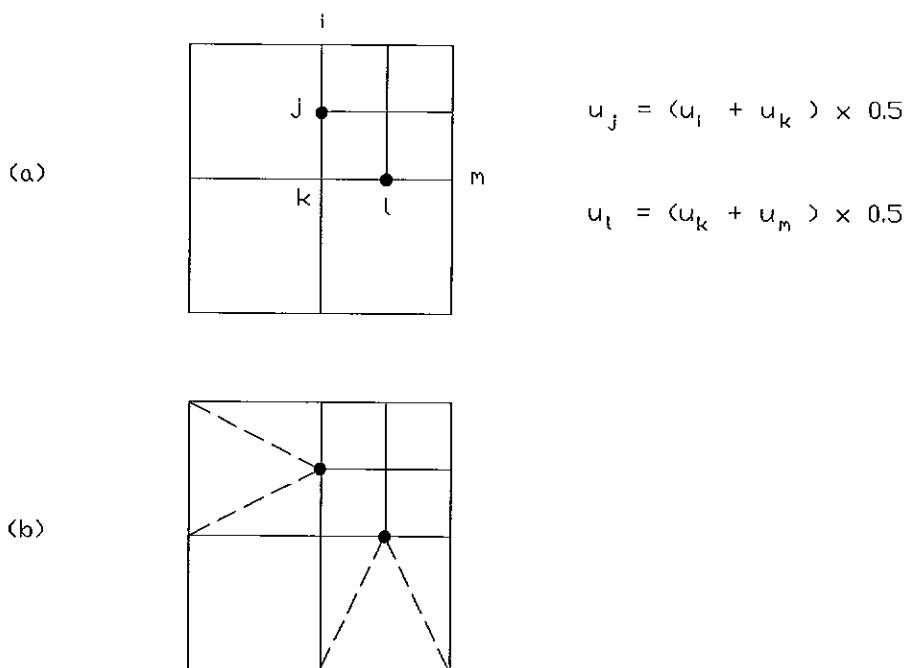


Figura 2.4 - Pontos nodais irregulares. a) Condição de continuidade. b) Triangularização momentânea.

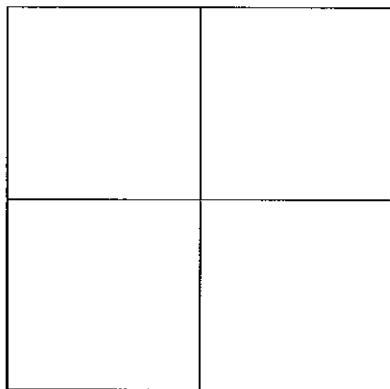
Aplicamos o procedimento acima descrito ao problema da viga curta em balanço da Figura 1.3. A malha inicial (etapa 1) e aquelas correspondentes às etapas 4, 6 e 9 do refinamento adaptativo (critério 2, $\gamma = 0.70$) podem ser vistas na Figura 2.5. A Tabela 2.1 mostra os resultados desta análise, e as taxas de convergência obtidas com o refinamento adaptativo e com refinamento uniforme são comparadas no gráfico da Figura 2.6.

Pode-se observar que, para um mesmo número de equações, a malha adaptativa apresenta sempre erros menores do que os da malha uniforme, além de possuir taxa de convergência maior. Utilizamos, neste exemplo, a condição (2.8) como garantia de continuidade da solução nas interfaces com nós irregulares.

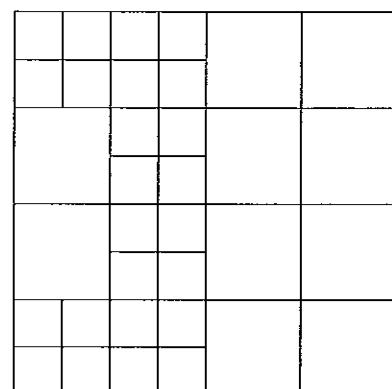
Tabela 2.1 - Refinamento h adaptativo (critério 2, $\gamma = 0.50$). Erros relativos. $\| \hat{u} \| = 1.37975$ [1].

malha	n	$\ \hat{u} \ $	$\ \hat{e} \ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	12	1.24440	0.31051	24.21
4	70	1.35021	0.20077	14.71
6	198	1.37049	0.13378	9.72
9	704	1.37742	0.07296	5.29

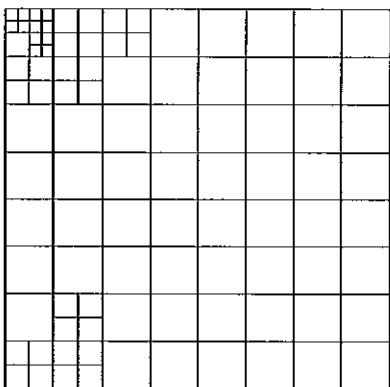
MALHA 1 (INICIAL)



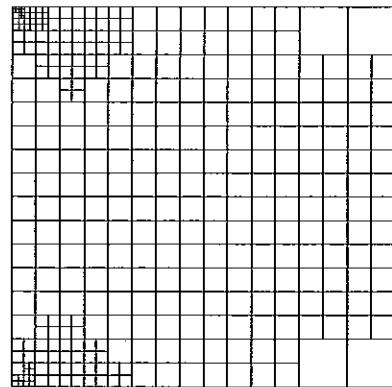
MALHA 4



MALHA 6



MALHA 9 (FINAL)

Figura 2.5 – Refinamento h adaptativo (critério 2, $\gamma = 0.70$).

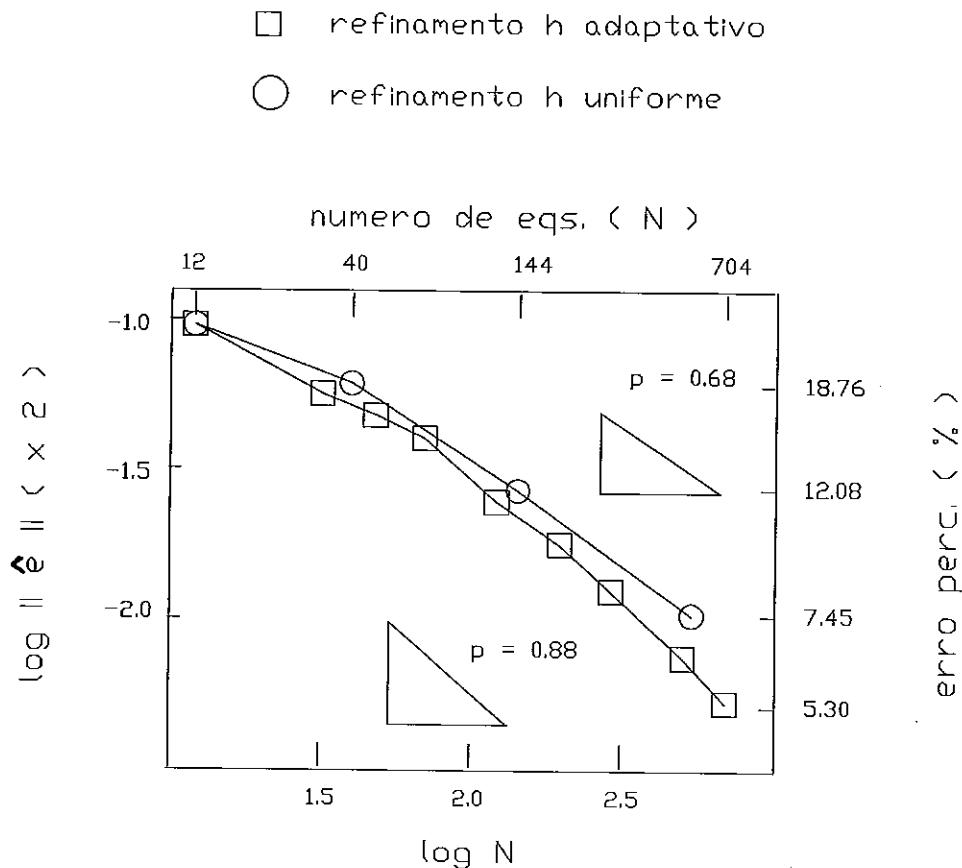


Figura 2.6 - Taxas de convergência.

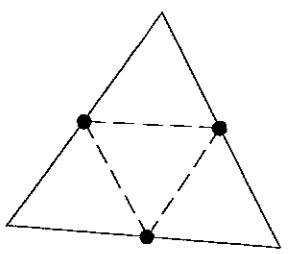
2.2.2 Refinamento de triângulos lineares

Neste item apresentamos um esquema de subdivisão de elementos triangulares utilizando, basicamente, a mesma estrutura de dados descrita no item anterior.

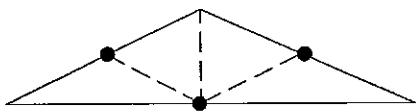
Este esquema, além de possuir maior flexibilidade geométrica, tem a vantagem de eliminar o problema de continuidade nas interfaces dos elementos, já que produz malhas sem a ocorrência de nós irregulares, como acontece no caso de elementos quadriláteros.

Outra vantagem deste esquema é que, em consequência da ausência de pontos nodais irregulares, torna-se desnecessário o controle de níveis de refinamento.

Os elementos refinados de acordo com o critério estabelecido (critério 1 ou 2) são subdivididos em quatro novos triângulos, segundo um dos dois padrões da Figura 2.7. A escolha entre estes padrões depende dos ângulos dos novos elementos resultantes da subdivisão do elemento original, descartando-se o padrão que fornecer o menor ângulo.



(a)



(b)

Figura 2.7 - Padrões de subdivisão de triângulos.

Após esta subdivisão inicial da malha, surgem elementos com nós irregulares em suas faces. Estes elementos são então subdivididos em outros triângulos, utilizando-se padrões de subdivisão que permitem uma transição entre elementos refinados e elementos não refinados.

Também estes padrões dependem dos ângulos resultantes da subdivisão dos elementos, como pode ser visto na Figura 2.8.

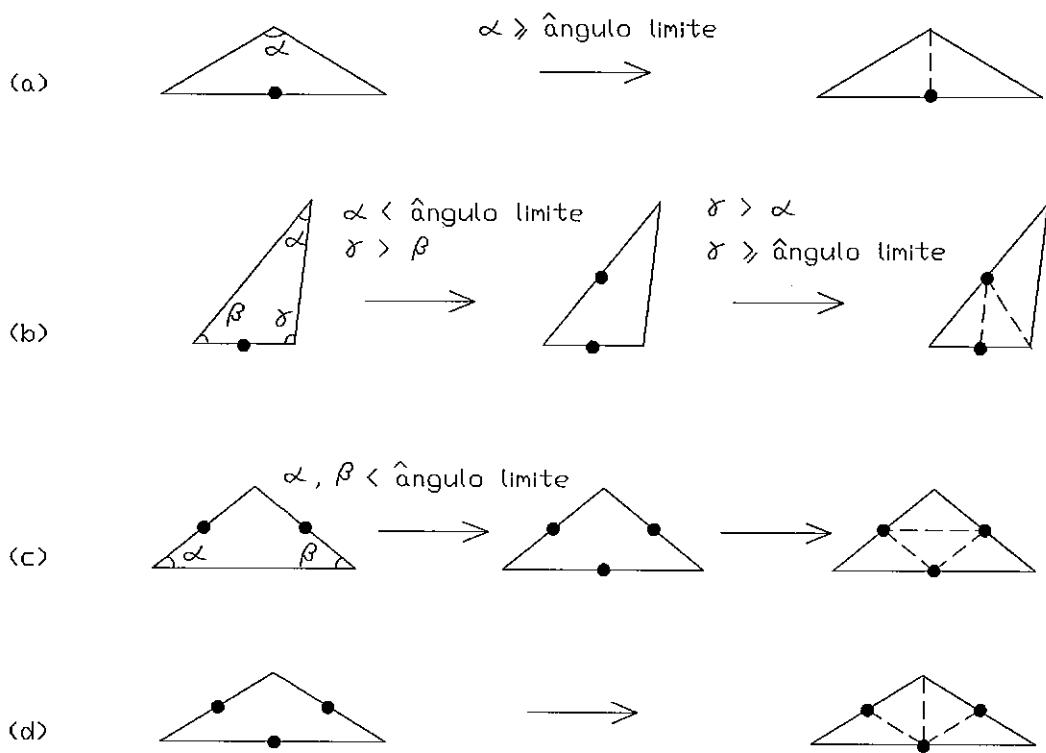


Figura 2.8 - Eliminação de nós irregulares.

Pode-se observar, nesta figura, que há a introdução de novos pontos nodais, quando os ângulos dos vértices opostos aos nós irregulares são menores do que um ângulo limite especificado. Quanto maior este limite, melhor será a uniformidade dos elementos mas, em contra-partida, maior também será o número de elementos subdivididos. Nos exemplos que serão apresentados adotou-se um ângulo limite igual a 60° .

O algoritmo desenvolvido para este tipo de procedimento divide-se em duas etapas. Em uma primeira etapa são introduzidos todos os novos pontos nodais da malha (Quadro 2.2). Este nós são introduzidos nos pontos médios das faces dos elementos, tendo em conta o ângulo limite acima mencionado. A segunda fase consiste na subdivisão dos elementos em dois, três, ou quatro elementos. Para esta última fase pode-se empregar um algoritmo semelhante ao empregado na subdivisão de quadriláteros.

Tomamos como exemplo de aplicação deste procedimento, o mesmo problema do item anterior. As Figuras 2.9.a e 2.9.b mostram as malhas refinadas segundo os critérios 1 e 2 ($\gamma = 0.50$), e os resultados obtidos podem ser vistos nas Tabelas 2.2.a e 2.2.b. Verifica-se, na Figura 2.15, que enquanto o refinamento uniforme forneceu uma taxa de convergência $\mu = 0.72$, as taxas de convergência da análise adaptativa atingiram os valores $\mu = 0.93$ e $\mu = 0.94$ para os critérios 1 e 2 respectivamente, praticamente eliminando, portanto, os efeitos das singularidades da solução.

loop nos elementos:

 se elemento deve ser refinado então:

- . introduz três pontos nodais nos pontos médios das faces

 fim do se

fim do loop nos elementos:

início

loop nos elementos:

 se elemento tem 1 nó irregular então:

- . determina ângulo oposto à facedo nó irregular

 se ângulo oposto < ângulo limite então:

- . determina o maior dos dois outros ângulos do triângulo
- . introduz novo ponto nodal na face oposta a este ângulo

 fim do se

caso elemento tenha 2 nós irregulares então:

- . determina os dois ângulos opostos aos nós irregulares

 se estes ângulos são ambos menores que ângulo limite então:

- . introduz novo ponto nodal na face comum a estes dois ângulos

 fim do se

 fim do se

fim do loop nos elementos

se houve introdução de novo ponto nodal então:

- . retorna ao início

fim do se

Quadro 2.2 - Algoritmo da fase de introdução de pontos nodais.

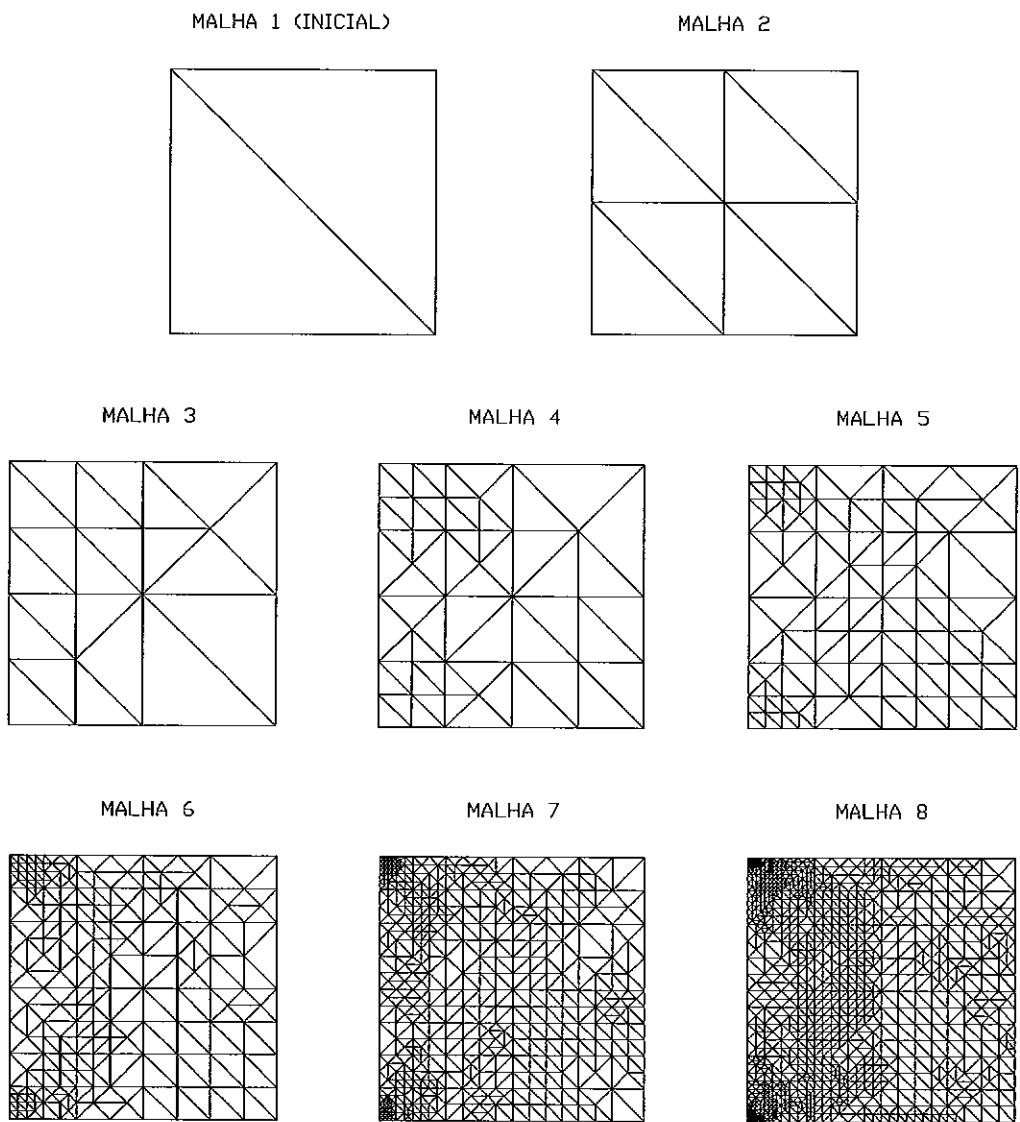


Figura 2.9.a - Refinamento h adaptativo (critério 1).

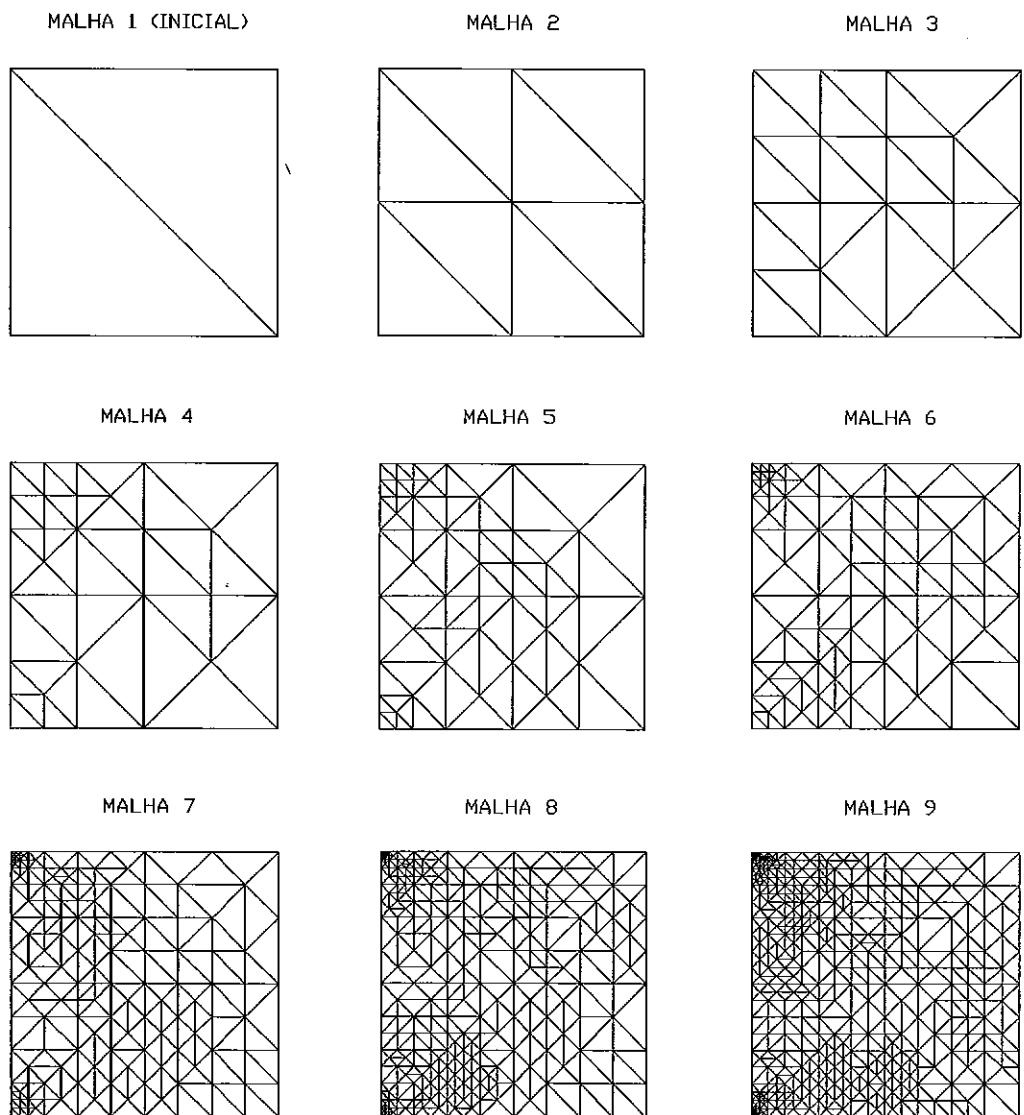


Figura 2.9.b - Refinamento h adaptativo (critério 2, $\gamma = 0.50$).

Tabela 2.2.a - Refinamento h adaptativo (critério 1). Erros relativos. $\| \mathbf{u} \| = 1.37975$.

malha	n	$\ \hat{\mathbf{u}} \ $	$\ \hat{\mathbf{e}} \ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	4	1.02858	0.37538	34.28
2	12	1.18940	0.44207	34.84
3	26	1.27475	0.37266	28.06
4	64	1.32984	0.29947	21.97
5	146	1.35497	0.22122	16.11
6	342	1.36896	0.15349	11.14
7	798	1.37486	0.10542	7.64
8	1712	1.37744	0.07381	5.35

Tabela 2.2.b - Refinamento h adaptativo (critério 2, $\gamma = 0.50$). Erros relativos. $\| \mathbf{u} \| = 1.37975$.

malha	n	$\ \hat{\mathbf{u}} \ $	$\ \hat{\mathbf{e}} \ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	4	1.02858	0.37538	34.28
2	12	1.18940	0.44207	34.84
3	30	1.27950	0.36388	27.35
4	46	1.31432	0.32328	23.88
5	90	1.34244	0.26152	19.12
6	144	1.35573	0.21978	16.00
7	274	1.36663	0.17020	12.36
8	478	1.37245	0.13155	9.54
9	778	1.37530	0.10452	7.58

2.2.3 Suavização de malhas

A regularidade dos elementos, nas malhas de elementos finitos, é um aspecto importante e que deve ser considerado. Grandes distorções geométricas dos elementos podem causar problemas numéricos, resultantes do mal condicionamento do sistema de equações.

Os algoritmos de subdivisão de elementos descritos nos itens anteriores não oferecem garantia de que as malhas por eles produzidas tenham um grau de regularidade aceitável, sob o aspecto numérico.

Dependendo da malha inicial, estes algoritmos podem conduzir a malhas com elementos muito distorcidos, sendo então necessária a utilização de algoritmos suavizadores de malhas, com o objetivo de minimizar a diferença entre os ângulos internos dos elementos.

O método empregado neste trabalho pode ser aplicado indistintamente a elementos quadriláteros e triangulares, e consiste em reposicionar os nós da malha segundo a média das coordenadas de seus pontos nodais vizinhos (Figura 2.10). A cada nó genérico i não restrinrido (geometricamente) corresponde então uma equação associada,

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^{m_i} x_j \right) / m_i \quad (2.9)$$

onde m_i é o número de nós conectados ao nó i .

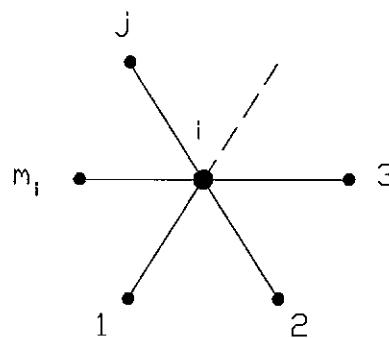


Figura 2.10 – Conexões nodais de um nó genérico i .

Este esquema conduz a um sistema de n equações algébricas lineares,

$$\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (2.10)$$

sendo n o número de pontos nodais da malha não restringidos geometricamente. O vetor \mathbf{f} contém as coordenadas dos pontos nodais fixos, e \mathbf{x} é o vetor de incógnitas do sistema de equações, as novas coordenadas nodais.

A matriz \mathbf{C} é simétrica, e os elementos de sua diagonal principal correspondem ao número de nós conectados a cada ponto nodal. Os coeficientes fora da diagonal ou são nulos, ou são iguais a -1 , e a soma dos coeficientes de cada linha desta matriz é igual a zero,

$$C_{ii} = m_i \quad (2.11.a)$$

$$C_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{se o nó } j \text{ é conectado ao } i \\ 0, & \text{se o nó } j \text{ não é conectado ao nó } i \end{cases} \quad (2.11.b)$$

$$\sum_{j=1}^n C_{ij} = 0 \quad (2.11.c)$$

Uma matriz com tais características é positiva definida e, consequentemente, o sistema de equações (2.10) admite uma única solução. No Apêndice B demonstramos que C é, de fato, positiva definida.

Na resolução deste sistema, utilizamos o seguinte algoritmo iterativo,

$$\Delta x_i^k = -\frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} x_j^{k-1} - x_i^{k-1} \quad (2.12.a)$$

$$x_i^k = x_i^{k-1} + \Delta x_i^k \quad (2.12.b)$$

onde i varia de 1 a n , e k varia de 0 até o número de iterações necessárias para que haja convergência, ou seja,

$$\frac{|\Delta x^k|}{|x^k|} \leq \text{tolerância} \quad (2.13)$$

Na prática, atinge-se uma regularidade satisfatória com poucas iterações, não sendo necessário, portanto, que se obtenha a solução exata do sistema (2.10).

Para a estrutura de dados de um código de elementos

finitos, o procedimento iterativo acima descrito pode ser implementado de maneira mais eficiente através do algoritmo do Quadro 2.3, particularizado para o caso de malhas planas de elementos triangulares.

A Figura 2.11 e a Tabela 2.3 ilustram o desempenho deste algoritmo, mostrando que com poucas iterações pode-se atingir bons resultados.

Para aumentar a eficiência do método acima descrito, pode-se utilizar ainda um algoritmo auxiliar de troca de diagonal de pares de elementos (Figura 2.12). No exemplo da Figura 2.13 pode-se verificar a capacidade de adaptação geométrica destes dois algoritmos, quando utilizados em conjunto.

Mostra-se a seguir a análise adaptativa do exemplo do item 2.2.2, agora com suavização de malha. Os resultados podem ser vistos nas Figuras 2.14.a, 2.14.b, 2.15, e nas Tabelas 2.4.a e 2.4.b. Observa-se que não houve alteração significante na convergência da análise adaptativa, em decorrência do algoritmo de suavização. Foram obtidas as taxas de convergência $\mu = 1.04$ e $\mu = 1.00$ para os critérios 1 e 2 ($\gamma = 0.50$), respectivamente.

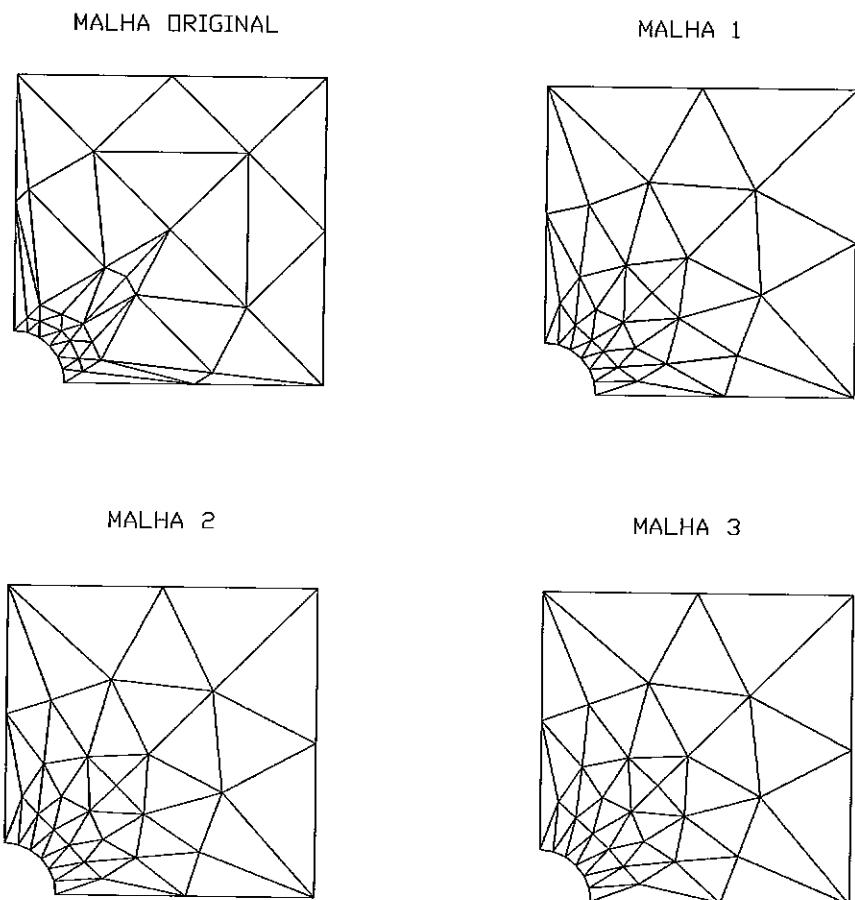


Figura 2.11 - Suavização de malha.

Tabela 2.3 - Número de iterações.

malha	iter. em x	iter. em y	$ \Delta x / x $ (%)	$ \Delta y / y $ (%)
1	2	2	4.26	5.00
2	5	7	0.93	0.81
3	17	19	0.10	0.09

```

loop nos elementos (j = 1, numel):
    loop nos nós do elemento j (k = 1, 3):
        . nok = conetividade(k,j)
        se (nok não é fixo) então:
            loop nos nós do elemento j (l = 1, 3):
                . nol = conetividade(l,j)
                se (nol ≠ nok) então:
                    . Fnok = Fnok + xnol - xnok
                    . Anok = Anok + 1
            fim do se
        fim do loop nos nós
    fim do se
fim do loop nos nós

loop nos nós (i = 1, n):
    se (no i não é fixo) então:
        . Δxi = Fi / Ai
        . xi = xi + Δxi
    fim do se
fim do loop nos nós
se ( |Δx| > tolerância ) então:
    | x |
    retorna ao início do loop nos elementos
fim do se

```

Quadro 2.3 - Algoritmo de suavização de malhas planas de elementos triangulares.

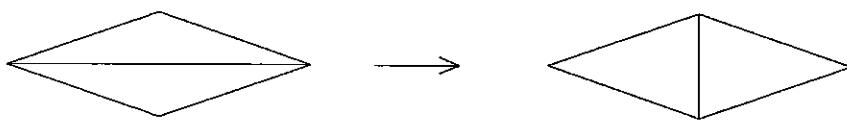


Figura 2.12 - Troca de diagonal de pares de elementos.

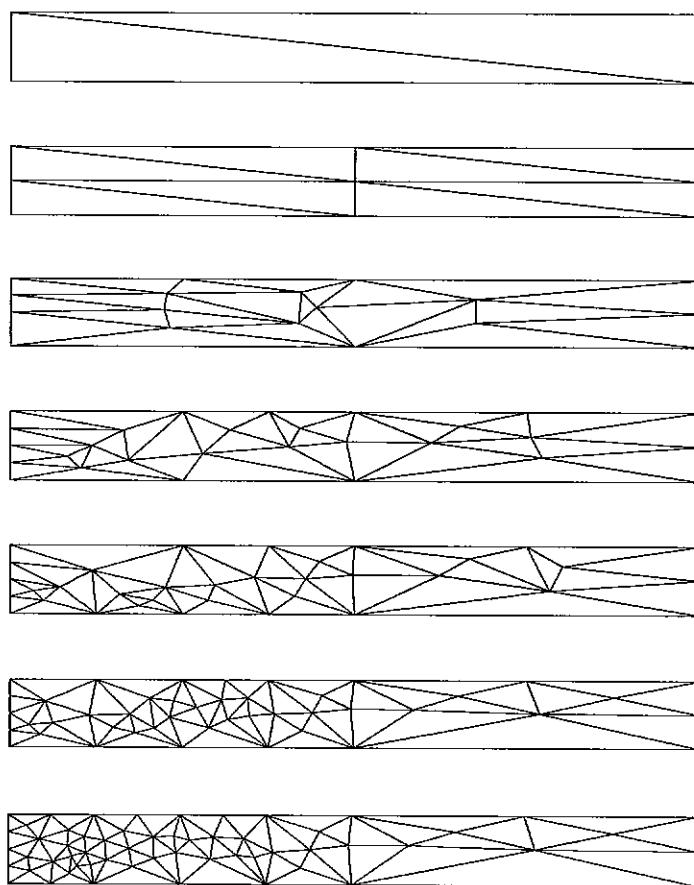


Figura 2.13 - Refinamento h adaptativo com suavização de malha e troca de diagonal.

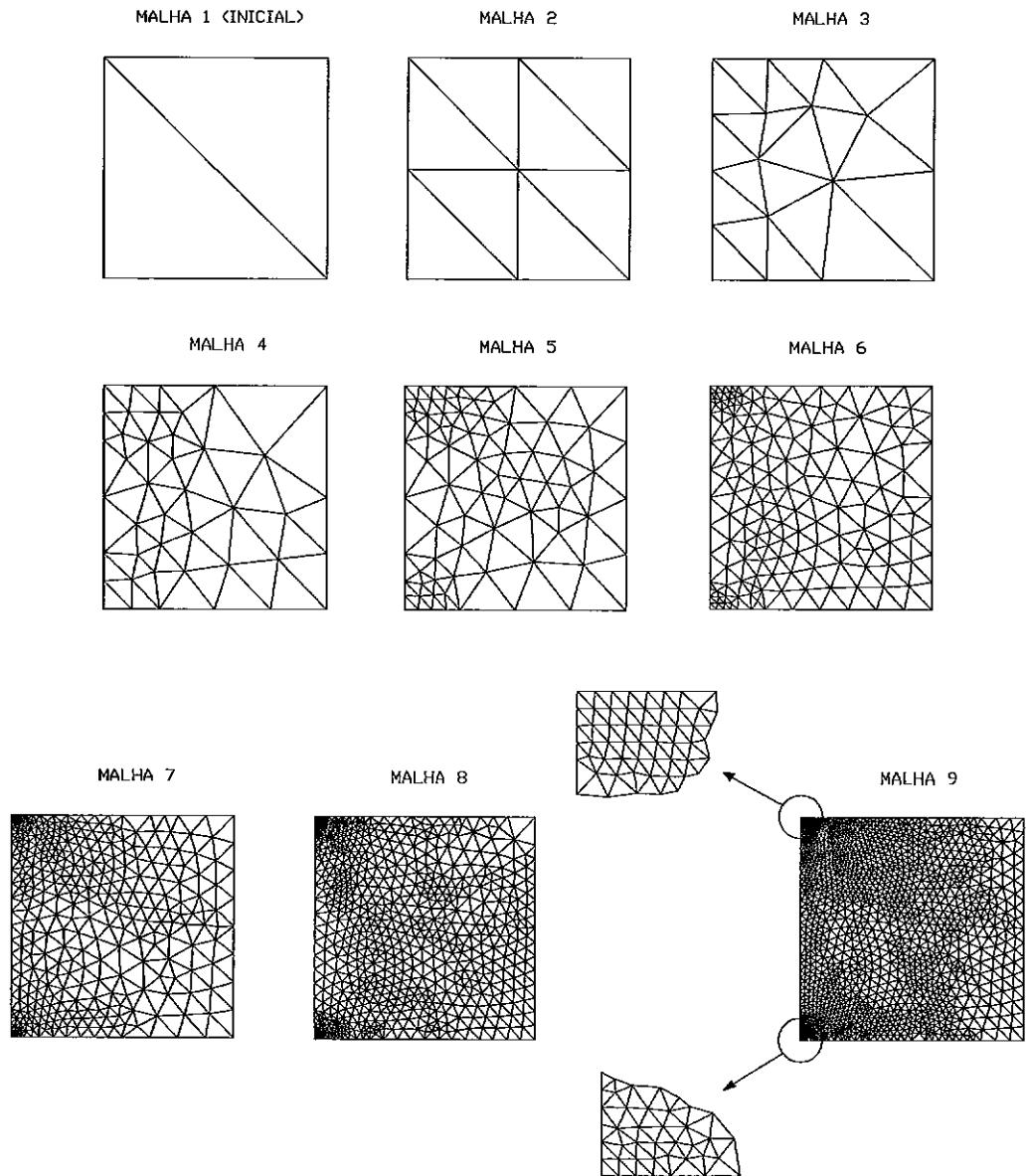


Figura 2.14.a - Refinamento h adaptativo com suavização de malha (critério 1).

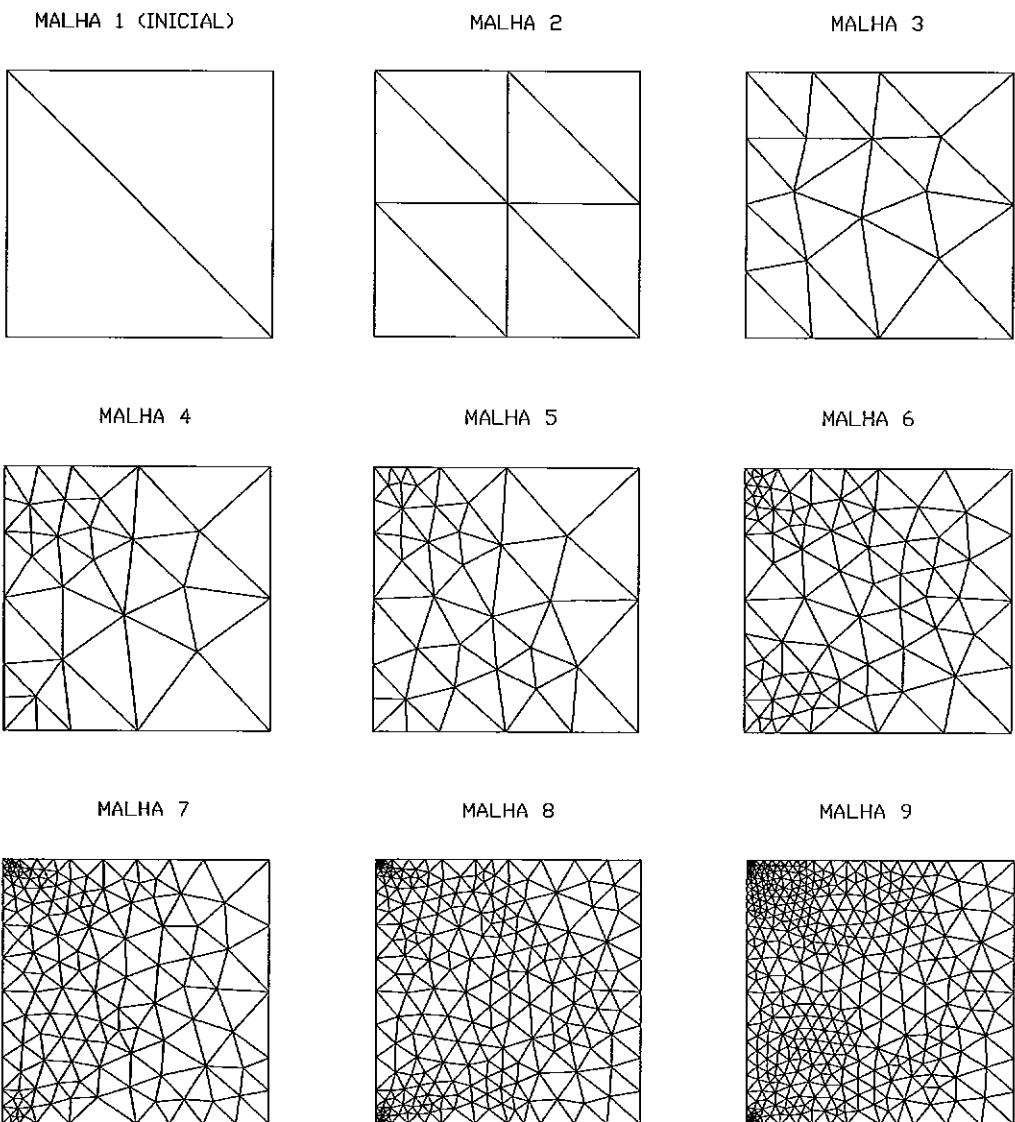


Figura 2.14.b - Refinamento h adaptativo com suavização de malha (critério 2, $\gamma = 0.50$).

Tabela 2.4.a - Refinamento h adaptativo com suavização de malha (critério 1). Erros relativos. $\| \mathbf{u} \| = 1.37975$.

malha	n	$\ \hat{\mathbf{u}} \ $	$\ \hat{\mathbf{e}} \ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	4	1.02858	0.37538	34.28
2	12	1.18940	0.44207	34.84
3	26	1.27792	0.37397	28.09
4	70	1.33258	0.29207	21.41
5	142	1.35726	0.21538	15.67
6	302	1.36929	0.15314	11.11
7	694	1.37527	0.10269	7.45
8	1440	1.37752	0.07358	5.33
9	3174	1.37878	0.04876	3.53

Tabela 2.4.b - Refinamento h adaptativo com suavização de malha (critério 2, $\gamma = 0.50$). Erros relativos. $\| \mathbf{u} \| = 1.37975$.

malha	n	$\ \hat{\mathbf{u}} \ $	$\ \hat{\mathbf{e}} \ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	4	1.02858	0.37538	34.28
2	12	1.18940	0.44207	34.84
3	30	1.27813	0.36383	27.38
4	50	1.31704	0.32905	24.24
5	70	1.33878	0.29080	21.23
6	152	1.36177	0.20897	15.17
7	266	1.36909	0.16249	11.79
8	434	1.37327	0.12961	9.40
9	754	1.37606	0.09842	7.13

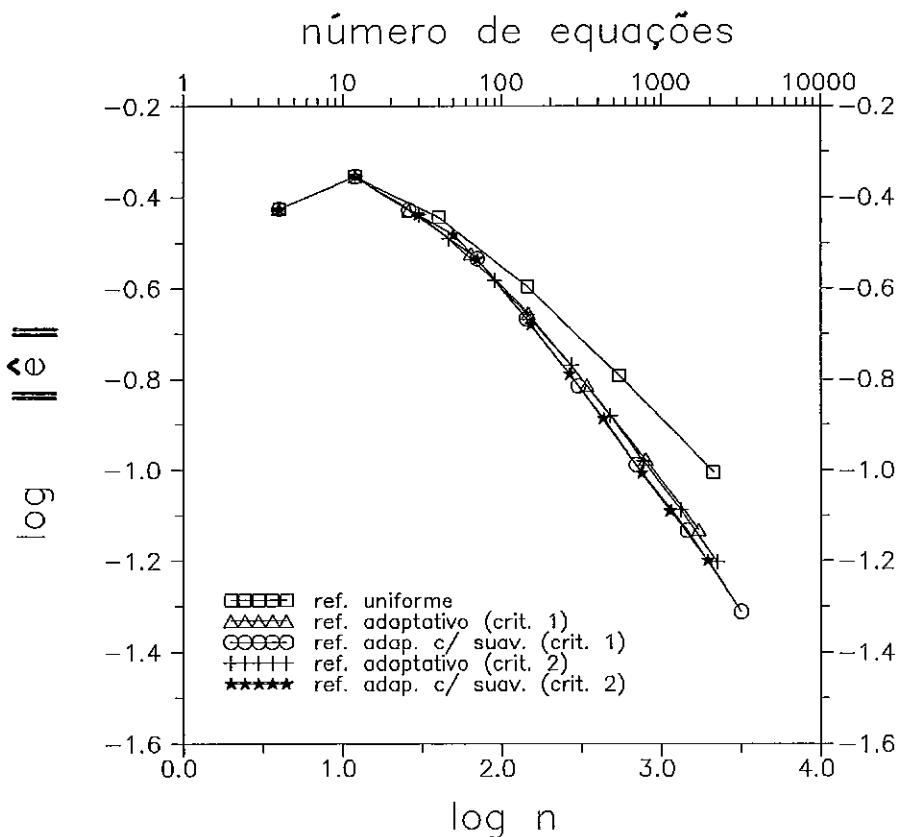


Figura 2.15 – Taxas de convergência.

2.3 MÉTODO R

O método *r* tem como objetivo reposicionar os nós de uma discretização de modo a resultar em uma malha ótima, no sentido de que haja o máximo de uniformidade possível na distribuição de erros. A topologia da malha permanece inalterada, isto é, mantém-se o mesmo número de nós e elementos, e as mesmas conetividades nodais e vizinhanças de

elementos.

O problema de determinar esta malha ótima pode ser visto como uma minimização do funcional associado às equações diferenciais do problema, incluindo-se também como variáveis as coordenadas nodais da malha [18].

Este procedimento tem elevado custo computacional, pois além de resultar em um sistema de equações não-lineares envolvendo, simultaneamente, as incógnitas do problema propriamente ditas, e as incógnitas em termos de coordenadas nodais, é necessário um controle das possíveis distorções dos elementos.

Alternativamente, pode-se empregar o algoritmo adaptativo descrito na introdução deste capítulo, utilizando-se na etapa referente ao refinamento uma técnica apropriada de redistribuição de nós.

Particularizando para malhas de elementos triangulares, apresentamos, neste item, uma técnica segundo a qual reposiciona-se cada nó de modo a localizá-lo no interior do polígono formado pelos baricentros de seus elementos concorrentes (Figura 2.16), levando-se em conta fatores de ponderação correspondentes a estes elementos. Assim, para um nó genérico i , no qual incidem m_i elementos, pode-se escrever as equações,

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^{m_i} b_j w_j \right) / \left(\sum_{i=1}^{m_i} w_i \right) \quad (2.14.a)$$

$$w_j = (1 + \alpha \frac{\|\hat{e}_j\|}{\|\hat{e}_i\|_{\max}}) A_j \quad (2.14.b)$$

onde b_j é o baricentro do elemento j , concorrente ao nó i , e w_j , A_j , e $\|\hat{e}_j\|$ são respectivamente o fator de ponderação, a área e a estimativa de erro relativas a este elemento. O fator multiplicador α mede o grau de participação das estimativas de erro dos elementos no reposicionamento dos nós. Para $\alpha = 0$, este método funciona apenas como um suavizador de malhas, semelhante ao apresentado no item anterior. Se $\alpha \rightarrow \infty$, a influência das áreas dos elementos desaparece diante das estimativas de erro, que passam a direcionar o reposicionamento de nós.

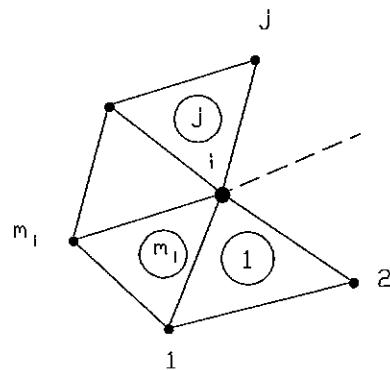


Figura 2.16 - Elementos concorrentes em um nó genérico i.

Como o método do item 2.3, este também resulta em um sistema de n (número de nós não restringidos) equações,

sendo que estas equações são agora não-lineares, em virtude do produto $b_j w_j$, que envolve produtos de coordenadas nodais.

As equações (2.14.a) podem ser resolvidas iterativamente da seguinte forma,

$$\Delta x_i^k = \left(\sum_{j=1}^{m_i} (b_j^{k-1} - x_i^{k-1}) w_j \right) / \left(\sum_{l=1}^{m_i} w_l \right) \quad (2.15.a)$$

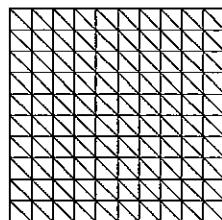
$$x_i^k = x_i^{k-1} + \Delta x_i^k \quad (2.15.b)$$

com i variando de 1 a n , e o índice k referindo-se às iterações. Pode-se utilizar um algoritmo similar ao do Quadro 2.3 para resolução das equações (2.15).

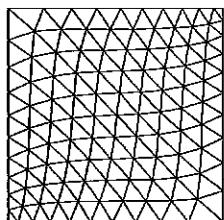
Analisamos, com este método, a viga curta em balanço da Figura 1.3. A Figura 2.17 mostra a malha original e as obtidas com diferentes valores de α . Os valores de α e os correspondentes números de iterações podem ser vistos na Tabela 2.5, e os resultados obtidos na Tabela 2.6.

Pode-se observar, nestas tabelas, que o erro relativo de 16.12 % da malha original cai para 12.88 % quando α atinge um valor igual a 10^4 . A partir deste valor, tanto o erro relativo, quanto o número de iterações permanecem constantes. Utilizamos uma tolerância de 10^{-3} para a convergência do loop iterativo.

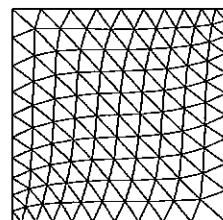
MALHA ORIGINAL



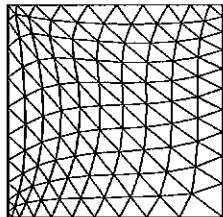
MALHA 1



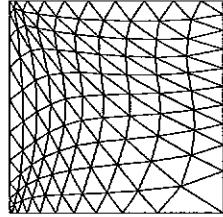
MALHA 2



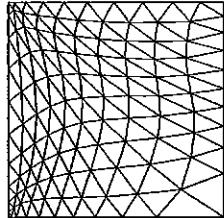
MALHA 3



MALHA 4



MALHA 5



MALHA 6

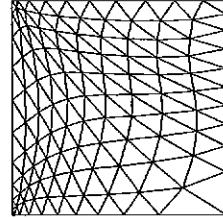


Figura 2.17 - Redistribuição de nós.

Tabela 2.5 - Valores de α e número de iterações.

malha	α	iter. em x	iter. em y
1	0	30	26
2	1	29	25
3	10^2	46	27
4	10^4	62	33
5	10^8	62	33
6	10^{12}	62	33

Tabela 2.6 - Erros relativos. $\| \mathbf{u} \| = 1.37975$.

malha	$\ \hat{\mathbf{e}} \ $	$\ \hat{\mathbf{u}} \ $	$\hat{\eta} (\%)$
original	0.22091	1.3525	16.12
1	0.22174	1.3534	16.17
2	0.21263	1.3562	15.49
3	0.18362	1.3660	13.32
4	0.17756	1.3672	12.88
5	0.17756	1.3672	12.88
6	0.17756	1.3672	12.88

2.4 MÉTODO P

O método p é uma alternativa de refinamento na qual aumenta-se o grau dos polinômios de interpolação, mantendo-se fixo o número de elementos.

Diferentemente do método h , a utilização de funções hierárquicas é conveniente neste método, principalmente em virtude dos domínios de integração dos elementos permanecerem inalterados.

Além de possibilitar o cálculo de estimativas de erro *a-posteriori*, a formulação hierárquica do MEF apresenta também a vantagem de resultar em sistemas de equações com melhor condicionamento, devido à maior ortogonalidade entre as funções hierárquicas [14, 22, 23, 27, 28].

Principalmente, em um determinado nível de refinamento pode-se fazer uso das matrizes do nível anterior, que são mantidas inalteradas, devido ao seu caráter hierárquico.

Se, por exemplo, uma solução com n graus de liberdade, é refinada hierarquicamente através da introdução de m novas funções de interpolação,

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i \bar{u}_i + \sum_{j=n+1}^{n+m} N_j \bar{a}_j \quad (2.16)$$

obtém-se o seguinte sistema de equações,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nn} & \mathbf{K}_{nm} \\ \mathbf{K}_{mn} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_n \\ \mathbf{f}_m \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

no qual a matriz \mathbf{K}_{nn} e o vetor \mathbf{f}_n podem ser inteiramente aproveitados.

Empregando-se, para este tipo de refinamento, o algoritmo do item 2.1, ao final das análise adaptativas são obtidas malhas com elementos de diferentes graus de aproximação. O uso de funções hierárquicas garante a continuidade da solução nas interfaces dos elementos, como mostra a Figura 2.18.

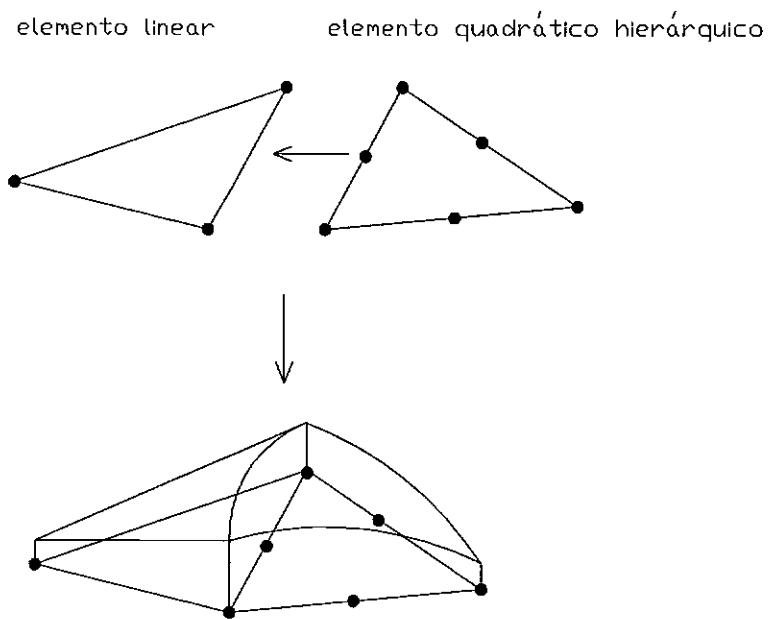


Figura 2.18 - Continuidade da solução entre elementos quadráticos e lineares.

No algoritmo utilizado neste trabalho, os elementos de grau p são refinados para o grau $p+1$, seguindo o critério de refinamento da etapa 5 do algoritmo adaptativo do item 2.1.

Neste algoritmo, um elemento que possui somente algumas das funções de um grau $p+1$ é considerado como sendo do grau p .

A estrutura de dados necessária é a mesma do refinamento h , com a matriz de vizinhanças dos elementos desempenhando um papel fundamental no algoritmo acima mencionado.

Em um determinado nível de refinamento, a matriz de conetividades nodais dos elementos é dimensionada de acordo com o número máximo de nós por elemento, correspondente ao elemento de maior grau existente naquele nível.

Por exemplo, se o elemento de mais alto grau é um elemento cúbico de 10 nós ($p = 3$), a matriz de conetividades será da ordem ($M, 10$), sendo M o número total de elementos.

Aos nós inativos dos elementos com $p < p_{\max}$ são atribuídos o número 0, como pode ser visto na Figura 2.19. Os elementos de grau p são refinados para um grau $p+1$ simplesmente atribuindo-se nova numeração aos seus nós inativos, de modo que todas as funções de interpolação do grau $p+1$ sejam acrescentadas.

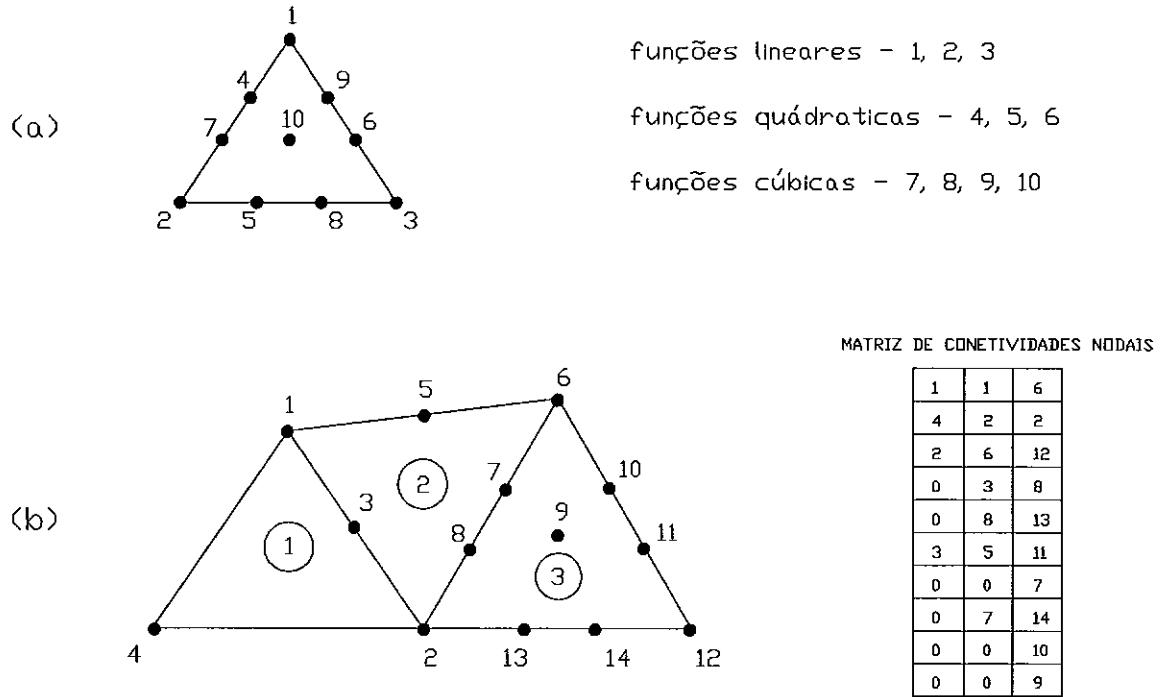


Figura 2.19 - a) Elemento cúbico hierárquico. b) Conetividades nodais de elementos de diferentes graus de aproximação.

Empregamos este método na análise do problema da Figura 1.3, considerando três malhas iniciais distintas, sendo uma uniforme (malha 1) e duas obtidas através de refinamento h adaptativo (malhas 2 e 3), todas de grau $p = 1$. Utilizamos o critério 1 de refinamento para a malha 2, e o critério 2,

com $\gamma = 0.70$, para a malha 3. A Figura 2.20 mostra estas três malhas e as correspondentes distribuições de erro, para $p = 1$.

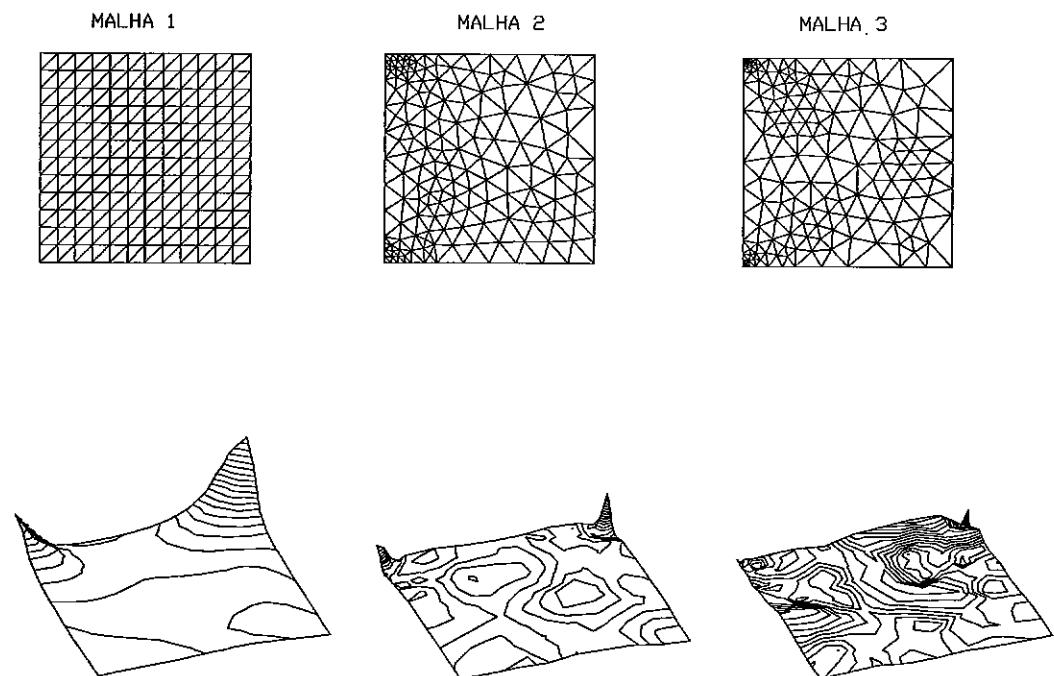


Figura 2.20 - Malha 1 (uniforme), Malha 2 (critério 1) e Malha 3 (critério 2, $\gamma = 0.70$). Distribuições de erros ($p = 1$).

Aplicamos inicialmente, para estas três malhas, o refinamento p uniforme, que equivale a utilizarmos o critério 2, com $\gamma = 0.0$. Os resultados obtidos podem ser vistos na Tabela 2.7.

Pode-se observar, nesta Tabela e na Figura 2.21, que os melhores resultados, em termos de valores absolutos, de índices de efetividade, e de taxas de convergência, correspondem à malha 3. Das três malhas, esta última é a que apresenta a distribuição de erros mais uniforme (Figura 2.20). Por outro lado, os piores resultados correspondem à malha 1 (uniforme), cuja distribuição de erros é a mais desigual.

Verifica-se, ainda na Figura 2.21, que para o refinamento h uniforme, as taxas de convergência são praticamente iguais para os graus $p = 1$ ($\mu = 0.72$), $p = 2$ ($\mu = 0.74$) e $p = 3$ ($\mu = 0.74$).

Estes resultados mostram que os efeitos de singularidade predominam nas convergências h e p da solução, na malha uniforme. No entanto, se a malha é construída de modo a obter-se uma distribuição de erros mais uniforme, estes efeitos são minimizados.

As Figuras 2.22-2.25 apresentam as taxas de convergência para o refinamento p adaptativo (critério 1), também aplicado às malhas 1, 2 e 3.

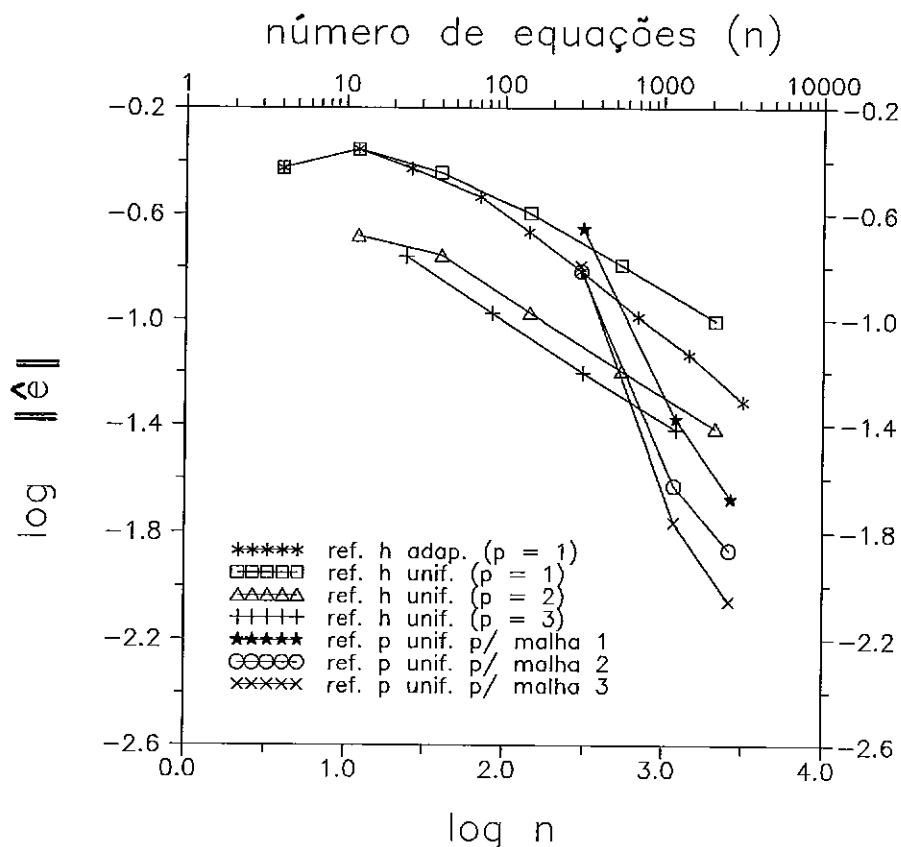


Figura 2.21 - Refinamento p uniforme. Taxas de convergência.

Tabela 2.7 - Refinamento p uniforme. Erros relativos.

$$\| \mathbf{u} \| = 1.37975.$$

p	malha	n	$\ \hat{\mathbf{u}} \ $	$\ \hat{\mathbf{e}} \ $	$\hat{\eta} (\%)$	θ	$\eta (\%)$
1	1	312	1.34933	0.22162	16.21	0.77	20.88
	2	302	1.36929	0.15314	11.11	0.90	12.29
	3	300	1.36967	0.16021	11.62	0.96	12.06
2	1	1200	1.37605	0.04181	3.04	0.41	7.31
	2	1172	1.37906	0.02356	1.71	0.54	3.15
	3	1168	1.37954	0.01728	1.25	0.72	1.74
3	1	2664	1.37833	0.02106	1.53	0.34	4.53
	2	2610	1.37949	0.01363	0.99	0.52	1.91
	3	2604	1.37969	0.00878	0.64	0.71	0.90

Nota-se que, apesar do limite máximo $p = 3$, houve uma melhora significativa nas taxas de convergência. As malhas finais e os resultados obtidos podem ser vistos nas Figuras 2.26-2.28 e na Tabela 2.8.

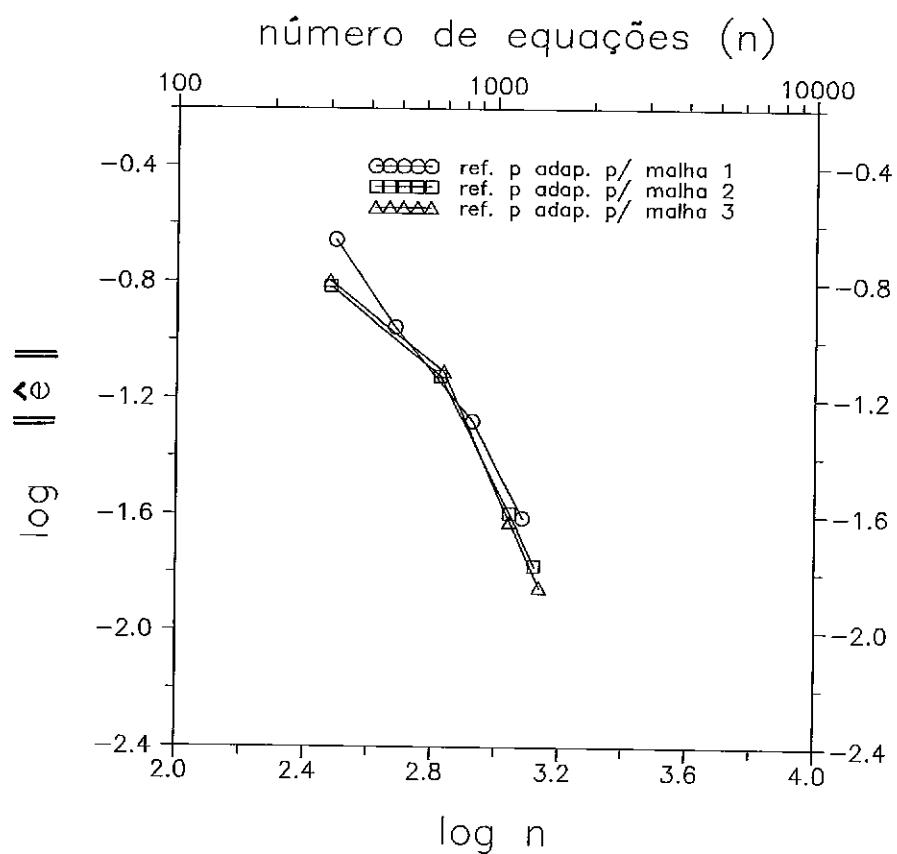


Figura 2.22 - Refinamento p adaptativo. Taxas de convergência para as malhas 1, 2 e 3.

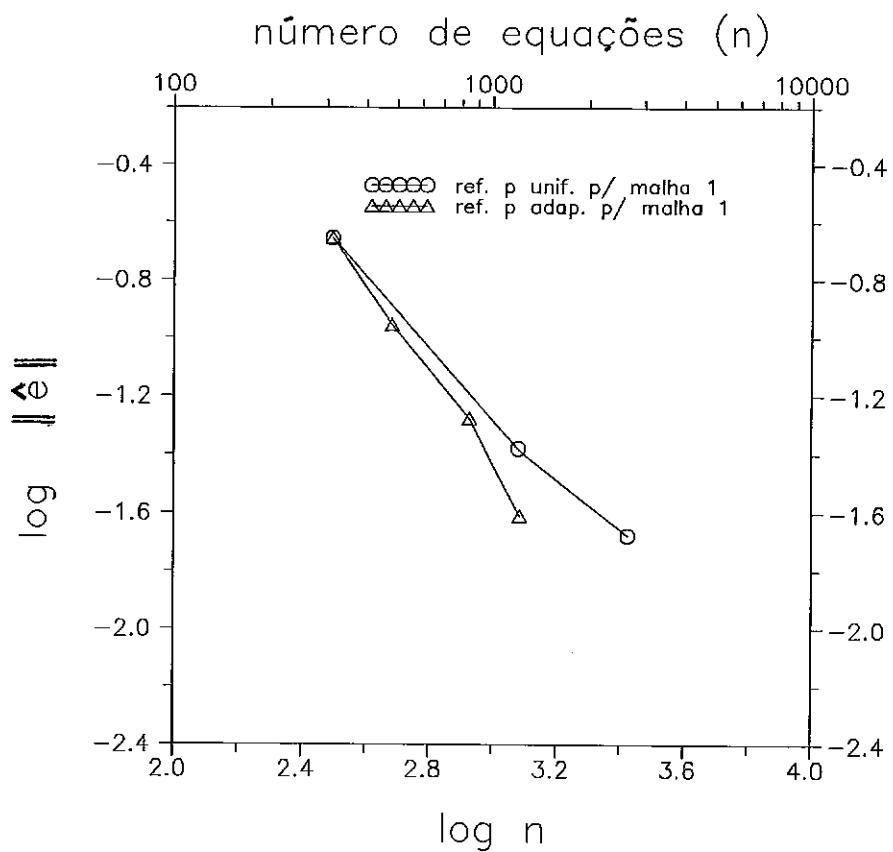


Figura 2.23 - Refinamento p adaptativo. Taxas de convergência para a malha 1.

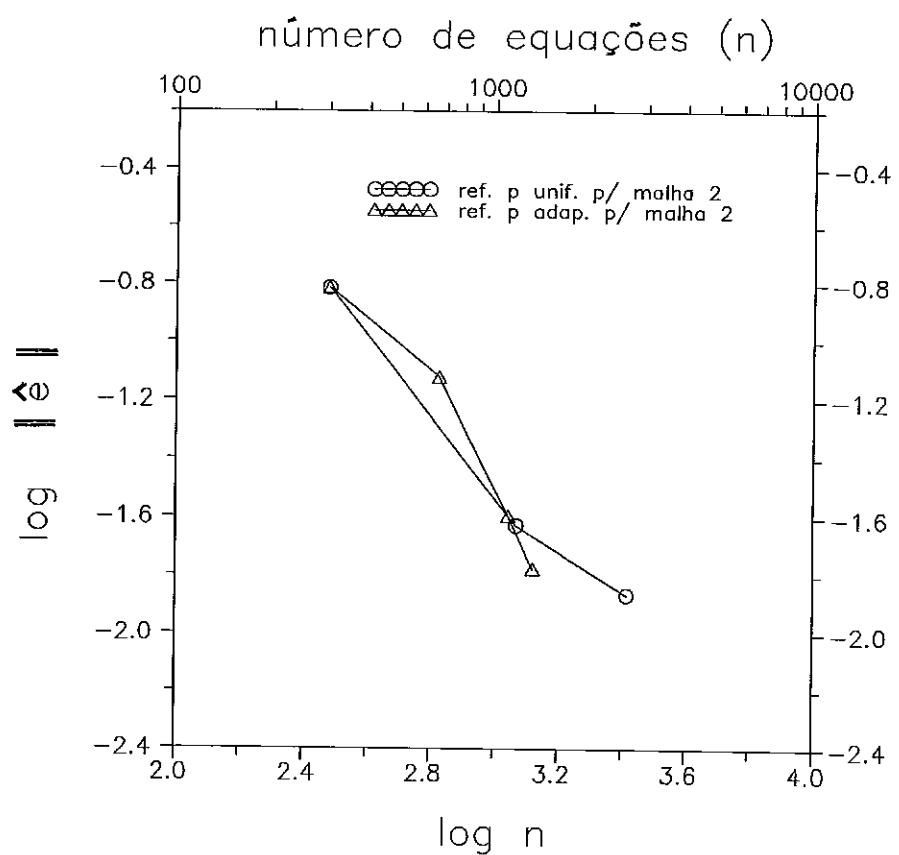


Figura 2.24 - Refinamento p adaptativo. Taxas de convergência para a malha 2.

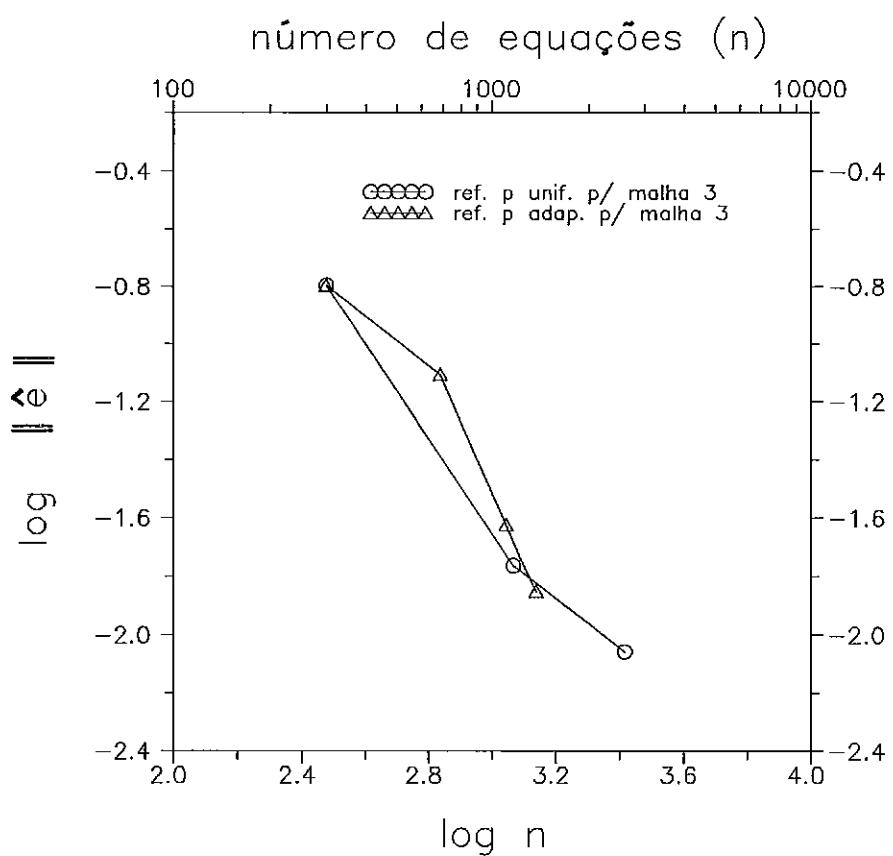


Figura 2.25 - Refinamento p adaptativo. Taxas de convergência para a malha 3.

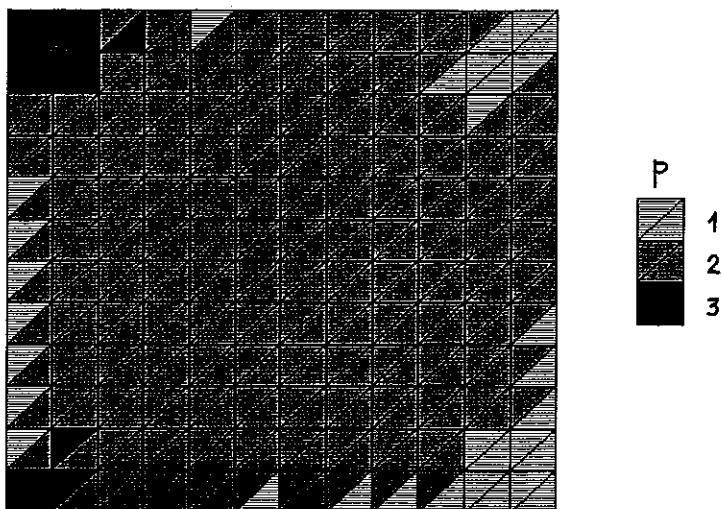


Figura 2.26 - Refinamento p adaptativo. Malha 1.

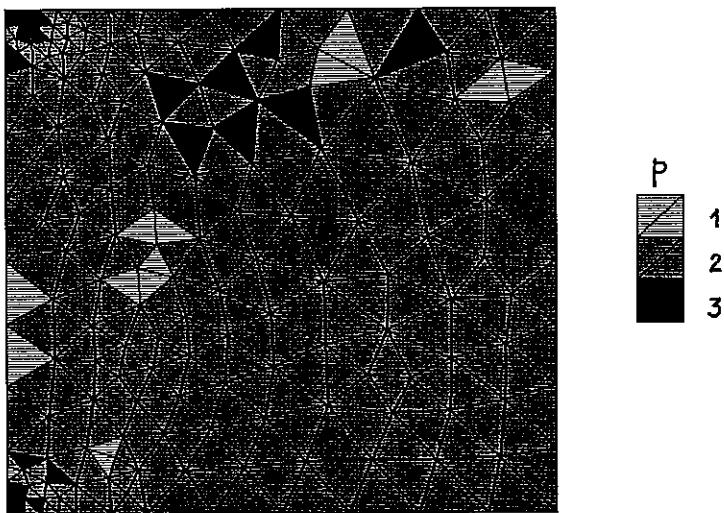


Figura 2.27 - Refinamento p adaptativo. Malha 2.

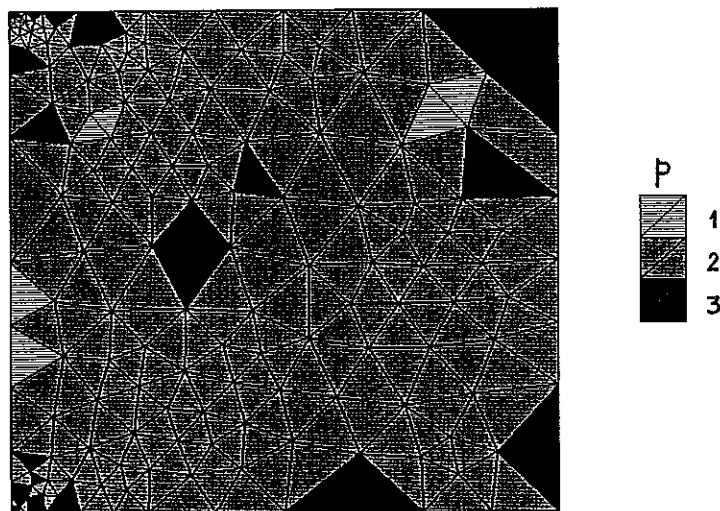


Figura 2.28 - Refinamento p adaptativo. Malha 3.

Tabela 2.8 - Refinamento p adaptativo. Erros relativos.

$$\| \mathbf{u} \| = 1.37975.$$

malha	n	$\ \hat{\mathbf{u}} \ $	$\ \hat{\mathbf{e}} \ $	$\hat{\eta} (\%)$	θ	$\eta (\%)$
1	1214	1.37826	0.02453	1.78	0.38	4.64
2	1322	1.37945	0.01674	1.21	0.59	2.06
3	1372	1.37964	0.01412	1.02	0.85	1.21

CAPÍTULO 3

ESTRATÉGIA H-P DE REFINAMENTO

3.1 INTRODUÇÃO

Procuramos estabelecer um procedimento de análise que pudesse tirar o máximo proveito das características dos métodos h e p de refinamento, e que ao mesmo tempo preservasse a simplicidade da estrutura de dados.

Com estes objetivos, desenvolvemos uma estratégia de refinamento que consiste na combinação destes dois métodos, reunindo assim, em um mesmo algoritmo, a capacidade de tratar singularidades do refinamento de malha e as taxas mais elevadas de convergência polinomial.

Discutimos, no item seguinte, os principais aspectos desta estratégia.

Cabe aqui salientar que foram, inicialmente, realizados vários testes combinando os três métodos, h , p e r , apresentados neste trabalho. Este último, porém, apresentou resultados que não justificam a sua utilização em conjunto com o método h no esquema de refinamento aqui proposto.

Em problemas estáticos, as regiões com os maiores gradientes da solução são sempre as mesmas e, neste caso, a

eficiência do método r é bem menor do que em problemas dinâmicos.

3.2 CARACTERÍSTICAS GERAIS

O método $h-p$ desenvolvido neste trabalho, representado sob a forma de fluxograma no Quadro 3.1, é uma generalização do algoritmo adaptativo descrito no item 2.1.

Sua estratégia consiste em atingir um determinado percentual de erro $\bar{\eta}_h$ através do método h , com $p = 1$, empregando a partir daí o refinamento polinomial para chegar ao percentual de erro final desejado $\bar{\eta}_p$.

Desta forma, as possíveis singularidades da solução são detectadas pelo refinamento de malha, tornando mais eficiente o método p .

Devem ser pré-estabelecidos os critérios de refinamento dos métodos h e p , bem como os percentuais de erro $\bar{\eta}_h$ e $\bar{\eta}_p$.

O erro relativo $\bar{\eta}_h$ pode ser estimado em função do grau p a que se pretende chegar, e do erro final $\bar{\eta}_p$. Assumindo-se que, na pior hipótese, a taxa de convergência p seja igual à taxa de convergência h , as expressões (1.57) e (1.58) fornecem a seguinte relação,

$$\frac{\bar{\eta}_p}{\bar{\eta}_h} \approx \left(\frac{n_p}{n_h} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{p} \quad (3.1)$$

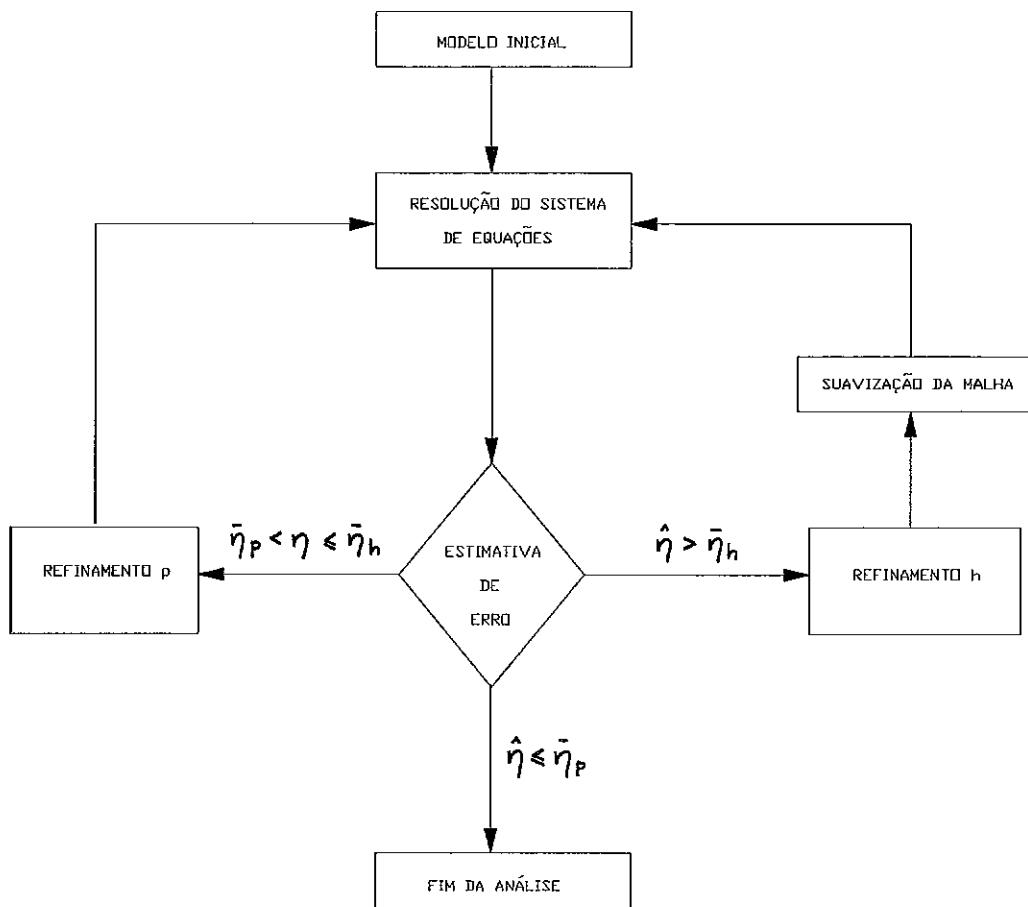
onde n_p e n_h representam, respectivamente, o número de equações correspondente à malha linear e à malha de grau p .

Deste modo, especificamos o percentual $\bar{\eta}_h$ como sendo igual a $\bar{\eta}_p/p$. Portanto, para determinar o percentual de erro a ser atingido pelo refinamento de malha, utilizamos a razão $1/3$ para malha final cúbica, e $1/2$ no caso de malha quadrática.

Na prática, principalmente em soluções suaves, razões bem menores do que $1/p$ podem ser obtidas. Por exemplo, $\bar{\eta}_p \rightarrow 0$ se a solução exata do problema pode ser representada por polinômios de grau p .

Utilizamos elementos triangulares, por serem estes de maior capacidade de adaptação geométrica, tanto em problemas planos quanto em superfícies curvas. Além disso, para $p = 1$ estes elementos necessitam de apenas 1 ponto de integração numérica, o que torna mais ágil a análise h adaptativa.

Os algoritmos de subdivisão de triângulos e de suavização de malhas descritos anteriormente permitem que as análises adaptativas possam ser iniciadas a partir de malhas extremamente pobres, diminuindo consideravelmente os trabalhos da fase de geração de malha, que muitas vezes pode ser mais onerosa do que a própria análise do problema.



Quadro 3.1 - Algoritmo adaptativo $h\text{-}p$.

3.3 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Utilizamos o método de eliminação de Gauss com decomposição de Crout, para a resolução do sistema de equações. Após cada etapa de refinamento os nós da malha são reordenados com o objetivo de reduzir a largura de banda do

sistema de equações. Para tal fim, empregamos o algoritmo Reverse Cuthill-McKee de otimização de largura de banda [15].

Dentro do contexto da estratégia aqui proposta, este esquema mostrou-se eficiente principalmente na fase de refinamento h , na qual as primeiras soluções correspondem a sistemas de poucas equações ($n < 3000$).

Embora este esquema tenha sido utilizado em ambas as fases de refinamento, h e p , apresentamos a seguir um procedimento alternativo de solução dos sistemas hierárquicos obtidos através do refinamento polinomial.

Considere-se o sistema de n equações correspondente à malha final atingida pelo refinamento h ,

$$K_{nn} \ u_n^0 = f_n \quad (3.2)$$

Após o refinamento p hierárquico, obtém-se o sistema de $m+n$ equações,

$$\begin{bmatrix} K_{nn} & K_{nm} \\ K_{mn} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_n \\ f_m \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Observe-se que em virtude de (1.57), $m+n \approx 4n$, se todos os elementos forem quadráticos, e $m+n \approx 8n$, se a malha final for cúbica.

Para um elevado número de equações $m+n$, a utilização de um método iterativo de solução pode ser mais vantajosa. Sugerimos a utilização do método dos Gradientes Conjugados Pré-condicionado, com o pré-condicionador dado pela matriz,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nn}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}}_{mm} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde $\bar{\mathbf{K}}_{mm}$ é a matriz diagonal formada pelos coeficientes da diagonal principal de \mathbf{K}_{mm} , e \mathbf{K}_{nn}^{-1} corresponde à forma triangularizada de \mathbf{K}_{nn} em (3.2) [2,11].

Pode-se ainda fazer uso da solução de (3.2) como vetor de partida do procedimento iterativo,

$$\mathbf{u}_{n+m}^0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES

4.1 INTRODUÇÃO

Apresentamos neste capítulo 5 exemplos de aplicação, sendo 3 de elasticidade e dois de potencial. Estes problemas foram analisados através dos métodos h , p e $h-p$.

Os resultados das etapas de refinamento são apresentados em tabelas, e as soluções são representadas espacialmente, com o objetivo de facilitar a visualização das regiões onde ocorrem as maiores variações. As taxas de convergência podem ser vistas em gráficos do tipo $\log n \times \log \|\hat{e}\|$.

Para os problemas de contornos curvos foram utilizados dois esquemas de introdução de pontos nodais no refinamento h . No primeiro, as coordenadas dos novos nós são interpoladas por funções de interpolação quadráticas unidimensionais. No segundo, as curvas do contorno são pré-especificadas, quando conhecidas.

4.2 PROBLEMAS DE ELASTICIDADE PLANA

Exemplo 1

Como primeiro exemplo de aplicação consideramos o problema de estado plano de tensão da Figura 4.1, de domínio em forma de L.

Analisamos este problema inicialmente através do método h , partindo da malha inicial da Figura 4.1.b. As malhas finais resultantes dos refinamentos uniforme e adaptativo podem ser vistas na Figura 4.2. Para o refinamento adaptativo empregamos os critérios 1 e 2, este último com $\gamma = 0.50$.

As taxas de convergência obtidas podem ser comparadas no gráfico da Figura 4.3. Enquanto o refinamento uniforme apresentou uma taxa máxima de $\mu = 0.63$, o refinamento adaptativo forneceu os valores máximos $\mu = 0.96$ e $\mu = 1.15$ para os critérios 1 e 2, respectivamente.

As Tabelas 4.1-4.3 apresentam os resultados de cada etapa de refinamento. Os índices de efetividade foram calculados considerando-se como solução "exata" $\| u \| = 0.452394$ [1]. As Figuras 4.4 e 4.5 mostram, em representação espacial, os deslocamentos e as tensões correspondentes à etapa final do refinamento adaptativo (critério 2).

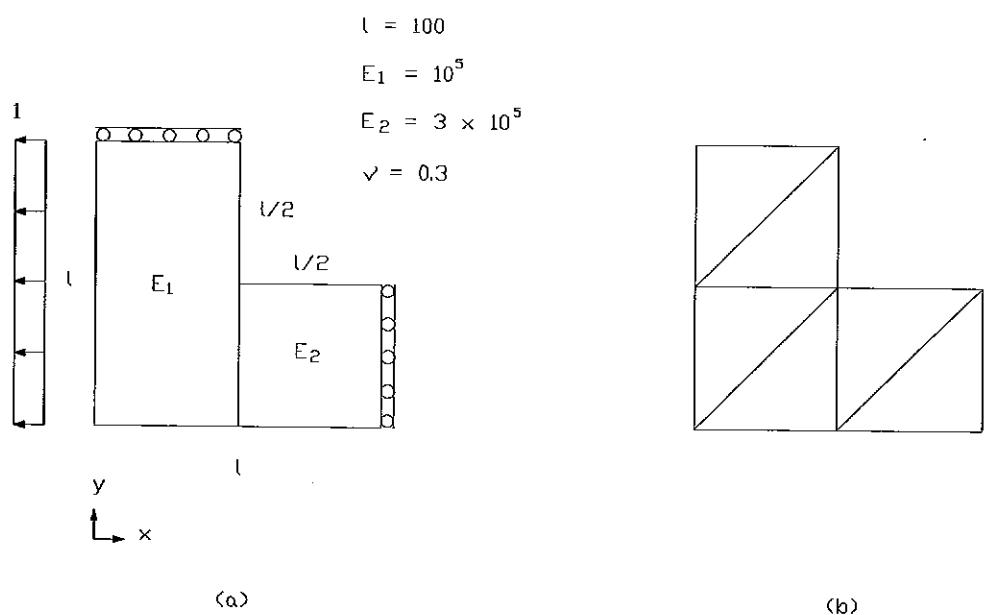


Figura 4.1 - Problema de estado plano de tensão, domínio em L. a) Geometria e constantes físicas. b) Malha inicial.

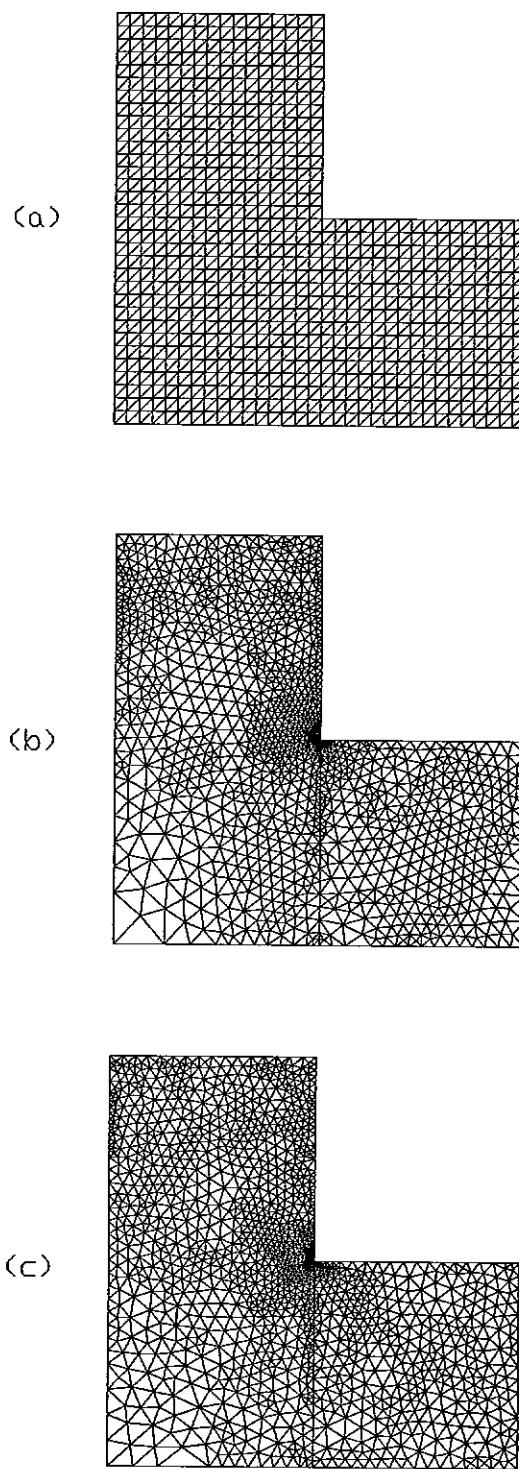


Figura 4.2 - Refinamento h , malhas finais. a) Refinamento uniforme. b) Refinamento adaptativo, critério 1. c) Refinamento adaptativo, critério 2, $\gamma = 0.50$.

Tabela 4.1 - Refinamento h uniforme. Índices de efetividade.

$$\| \mathbf{u} \| = 0.45239.$$

malha	n	$\ \hat{\mathbf{u}} \ $	$\ \hat{\mathbf{e}} \ $	$\hat{\eta} (\%)$	θ	$\eta (\%)$
1	12	0.34616	0.13637	36.65	0.47	64.38
2	36	0.38891	0.15837	37.72	0.69	51.08
3	120	0.42135	0.13025	29.53	0.79	36.41
4	432	0.43895	0.09078	20.25	0.83	24.20
5	1632	0.44661	0.05969	13.25	0.83	15.94

Tabela 4.2 - Refinamento h adaptativo, critério 1. Índices de efetividade. $\| \mathbf{u} \| = 0.45239$.

malha	n	$\ \hat{\mathbf{u}} \ $	$\ \hat{\mathbf{e}} \ $	$\hat{\eta} (\%)$	θ	$\eta (\%)$
1	12	0.34616	0.13637	36.65	0.47	64.38
2	22	0.36025	0.13599	35.32	0.50	60.49
3	52	0.40150	0.14514	34.00	0.70	46.08
4	102	0.42520	0.12726	28.67	0.82	34.15
5	266	0.44036	0.09023	20.07	0.87	22.91
6	600	0.44684	0.06314	13.99	0.89	15.62
7	1286	0.44975	0.04393	9.72	0.90	10.79
8	2708	0.45112	0.03077	6.80	0.91	7.50

Tabela 4.3 - Refinamento h adaptativo, critério 2. Índices de efetividade. $\| \hat{u} \| = 0.45239$.

malha	n	$\ \hat{u} \ $	$\ \hat{e} \ $	$\hat{\eta} (\%)$	θ	$\eta (\%)$
1	12	0.34616	0.13637	36.65	0.47	64.38
2	34	0.38708	0.16507	39.23	0.70	51.76
3	86	0.42156	0.13367	30.23	0.81	36.29
4	165	0.43489	0.10837	24.18	0.87	27.55
5	242	0.44070	0.09336	20.72	0.91	22.59
6	352	0.44471	0.07814	17.31	0.94	18.35
7	513	0.44737	0.06487	14.35	0.96	14.86
8	570	0.44804	0.06130	13.56	0.98	13.84
9	1005	0.44992	0.04684	10.36	0.99	10.44
10	1103	0.45021	0.04440	9.81	1.00	9.81
11	1603	0.45091	0.03688	8.15	1.01	8.09
12	2118	0.45127	0.03242	7.17	1.02	7.04
13	3171	0.45165	0.02658	5.87	1.03	5.73

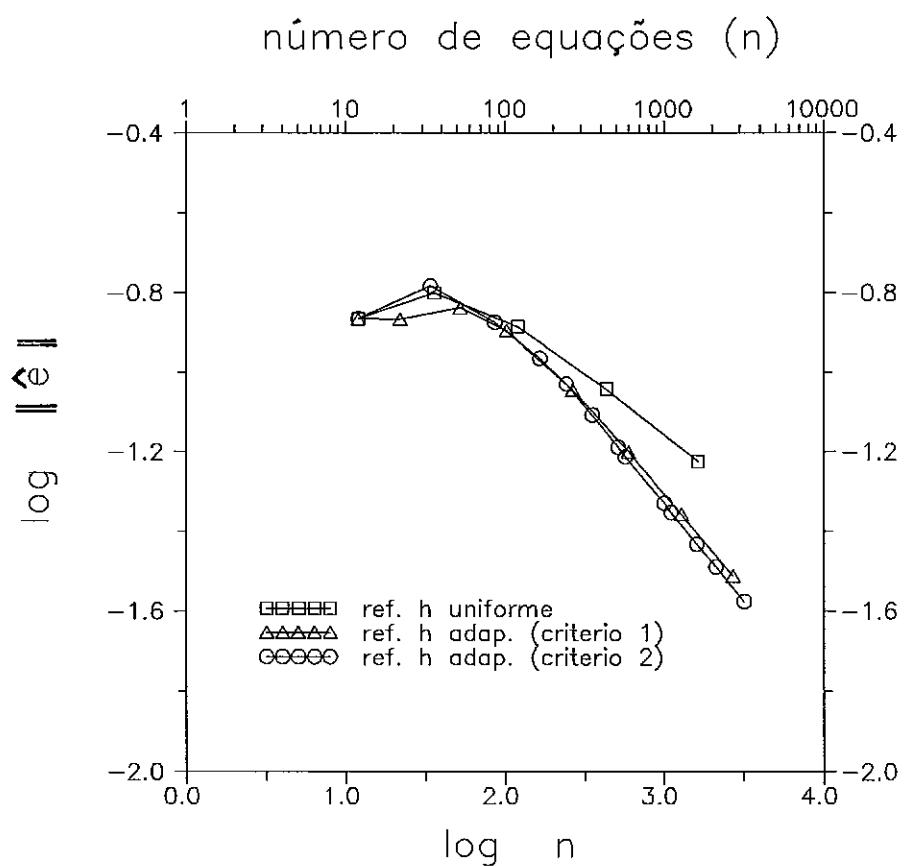


Figura 4.3 – Refinamento h . Taxas de convergência.

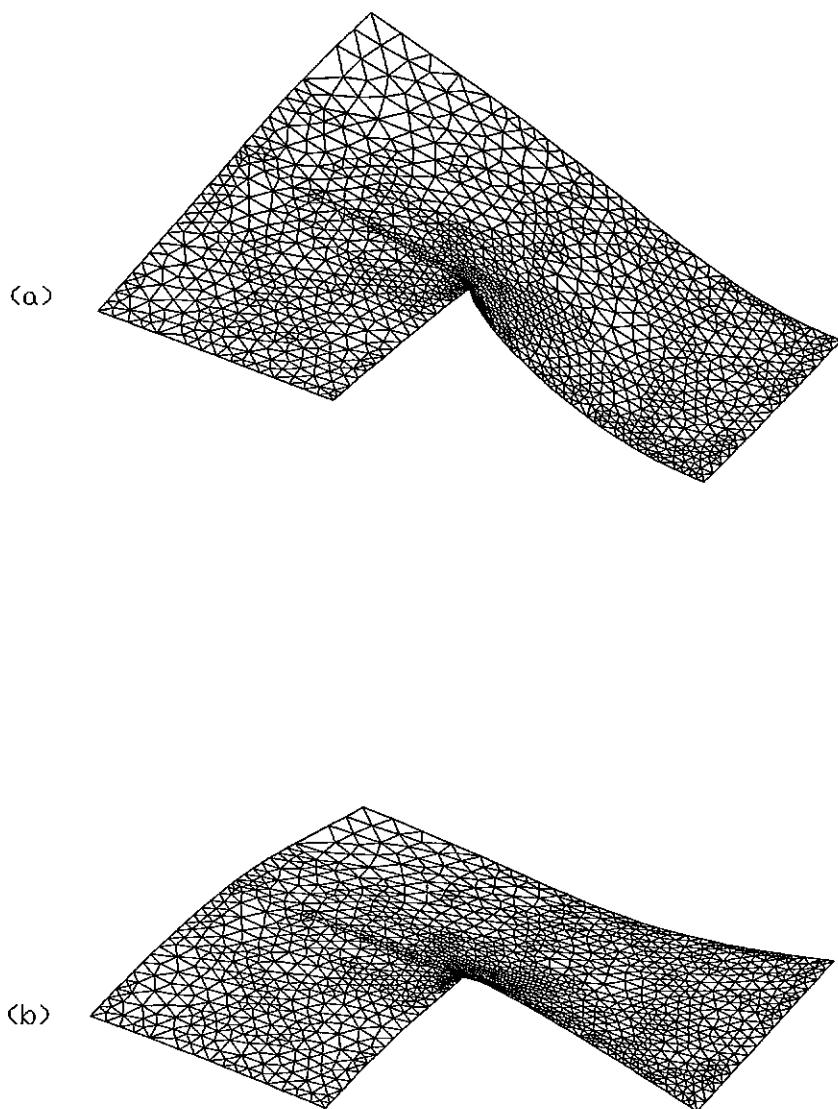


Figura 4.4 - Deslocamentos, representação espacial. a)
Deslocamentos u_x . b) Deslocamentos u_y .

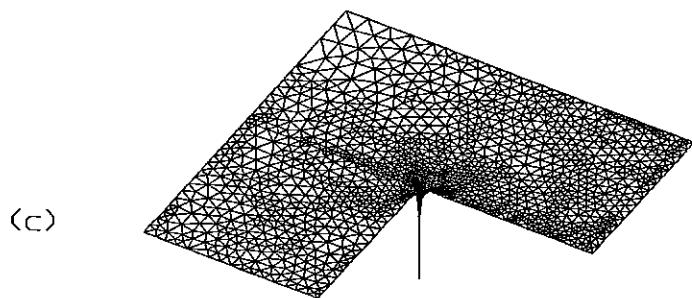
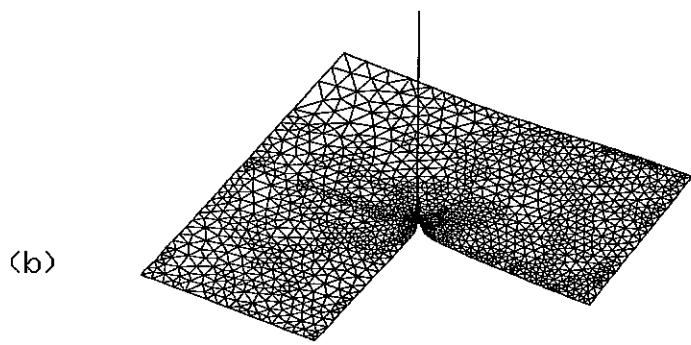
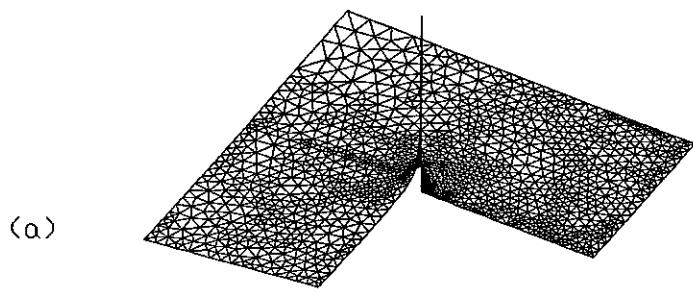


Figura 4.5 - Tensões, representação espacial. a) Tensões σ_x ($\times 10000$). b) Tensões σ_y ($\times 10000$). c) Tensões τ_{xy} ($\times 10000$).

Para a análise p consideramos a malha correspondente à etapa 4 do refinamento h uniforme. Os resultados dos refinamentos uniforme e adaptativo são apresentados nas Tabelas 4.4 e 4.5. Observa-se nestas tabelas que enquanto a malha quadrática (1632 equações) forneceu um percentual de erro $\hat{\eta} = 7.11 \%$, a malha de elementos lineares, quadráticos e cúbicos da Figura 4.6 (1246 equações) resultou em um percentual $\hat{\eta} = 6.86 \%$. As taxas de convergência p podem ser vistas na Figura 4.8.

Na análise $h-p$ estipulamos um percentual $\bar{\eta}_h = 20 \%$ a ser atingido pelo refinamento h , e adotamos, nesta fase, o critério 2 de refinamento, com $\gamma = 0.50$.

Na fase p empregamos refinamento uniforme (Tabela 4.6) e refinamento adaptativo com o critério 1 (Tabela 4.7), cujas taxas de convergência são apresentadas na Figura 4.8.

A malha final obtida através da estratégia $h-p$, com a fase p adaptativa, pode ser vista na Figura 4.7. Nota-se que os elementos cúbicos encontram-se distribuídos por todo o domínio, enquanto que na malha da Figura 4.6 estes elementos estão concentrados na região da singularidade do problema.

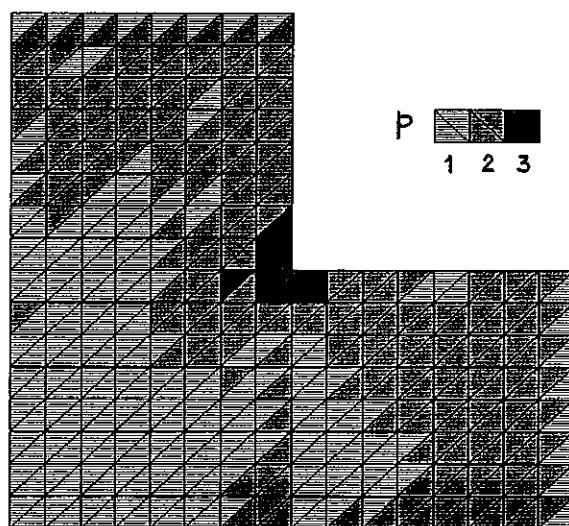


Figura 4.6 - Malha final p adaptativa.

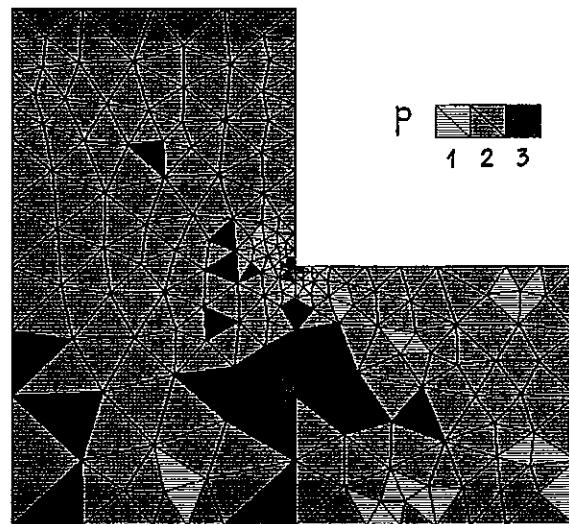


Figura 4.7 - Malha final $h-p$ adaptativa.

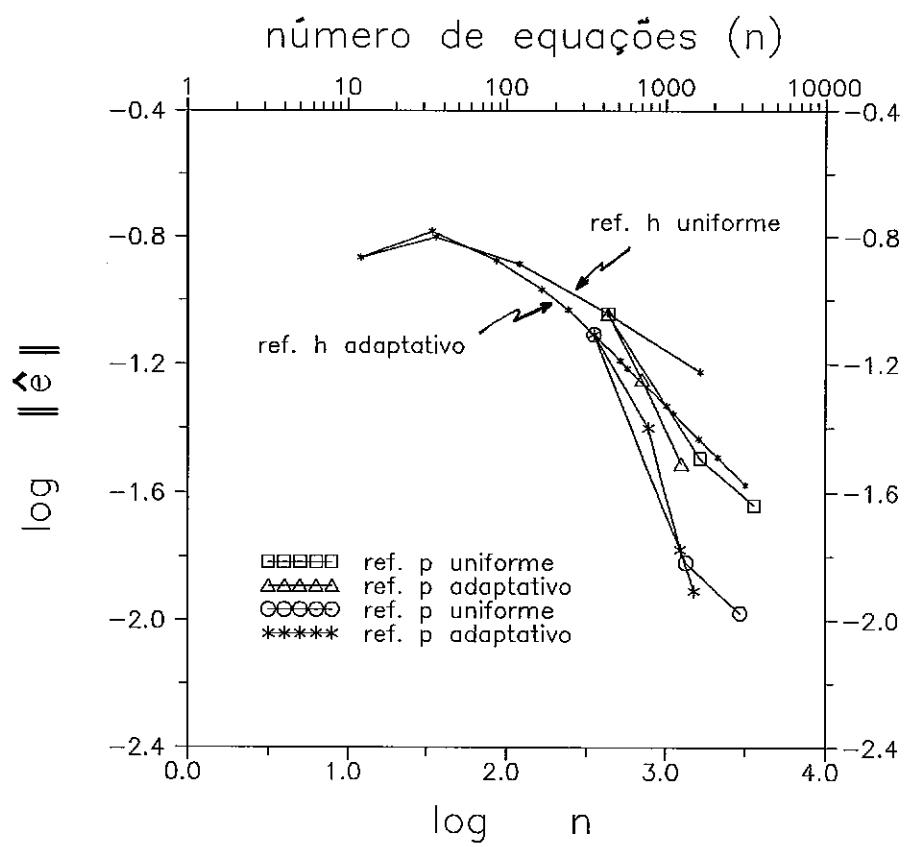


Figura 4.8 – Refinamento p . Taxas de convergência.

Tabela 4.4 - Refinamento p uniforme. Índices de efetividade.

p	n	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta} (\%)$	θ	$\eta (\%)$
1	432	0.43895	0.09078	20.25	0.83	24.20
2	1632	0.44986	0.03208	7.11	0.67	10.57
3	3600	0.45115	0.02299	5.09	0.69	7.41

Tabela 4.5 - Refinamento p adaptativo. Índices de efetividade.

p	n	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta} (\%)$	θ	$\eta (\%)$
1	432	0.43895	0.09078	20.25	0.83	24.20
1,2	704	0.44727	0.05652	12.54	0.83	15.01
1,2,3	1246	0.45060	0.03096	6.86	0.77	8.90

Tabela 4.6 - Estratégia $h-p$, p uniforme. Índices de efetividade.

p	n	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta} (\%)$	θ	$\eta (\%)$
1	352	0.44471	0.07814	17.31	0.94	18.35
2	1330	0.45194	0.01519	3.36	0.75	4.48
3	2934	0.45221	0.01054	2.33	0.82	2.85

Tabela 4.7 - Estratégia $h-p$, p adaptativo. Índices de efetividade.

p	n	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta} (\%)$	θ	$\eta (\%)$
1	352	0.44471	0.07814	17.31	0.94	18.35
1,2	775	0.45031	0.03986	8.82	0.92	9.59
1,2,3	1229	0.45194	0.01668	3.69	0.82	4.48
1,2,3	1499	0.45215	0.01236	2.73	0.83	3.28

Exemplo 2

Neste exemplo analisamos o problema de estado plano de deformação da Figura 4.9. As três malhas da Figura 4.10 correspondem à malha inicial e às malhas finais obtidas na análise h adaptativa, com os critérios de refinamento 1 e 2. Para o critério 2 utilizamos o valor $\gamma = 0.50$.

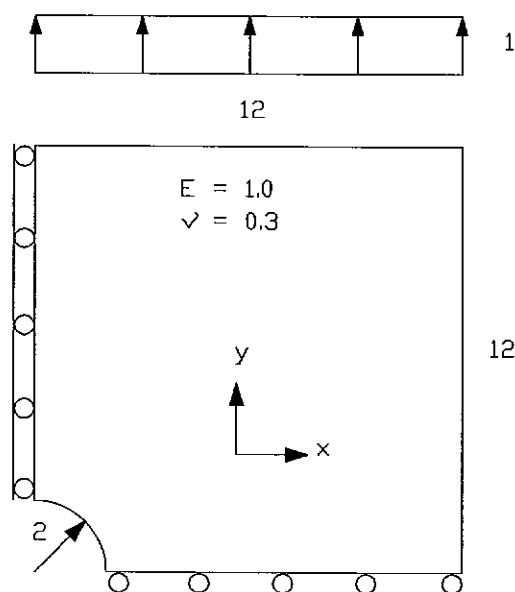


Figura 4.9 - Problema de estado plano de deformação.
Geometria e constantes físicas.

As Figuras 4.11 e 4.12 ilustram, em representação espacial, os deslocamentos e as tensões correspondentes à malha final da Figura 4.10.c.

Os resultados da análise h adaptativa podem ser vistos nas Tabelas 4.8 e 4.9. As curvas de convergência obtidas para os dois critérios são praticamente coincidentes, como pode ser verificado na Figura 4.14. Foram obtidas as taxas $\mu = 1.04$ (critério 1) e $\mu = 1.06$ (critério 2) para as últimas etapas de refinamento.

Para a análise $h-p$ adotamos o critério 2 ($\gamma = 0.50$) na fase h . Ao ser atingida a malha da Figura 4.13, com um erro $\hat{\eta} = 4.76 \%$, iniciou-se o refinamento p . Os resultados e as taxas de convergência da fase p podem ser vistos nas Tabelas 4.10, 4.11, e na Figura 4.14. Verifica-se, nesta última, que apesar de apresentar maior taxa de convergência, a curva correspondente ao refinamento p adaptativo (critério 1) situa-se sempre acima da curva do refinamento p uniforme.

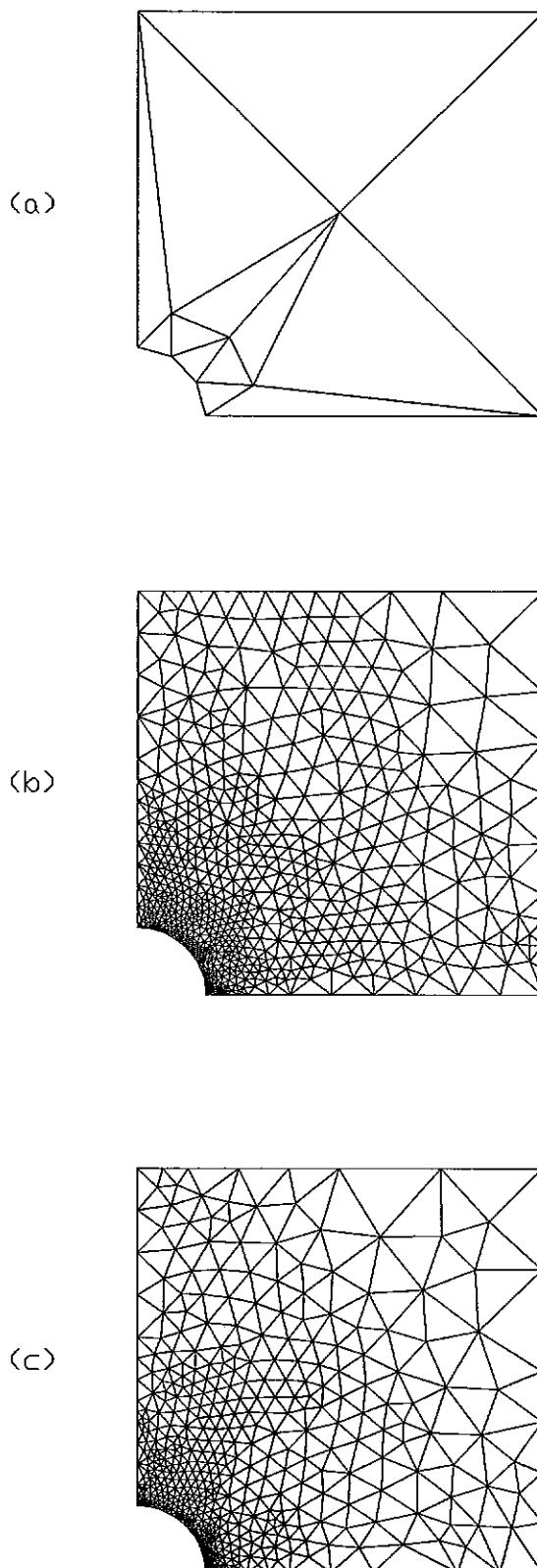


Figura 4.10 – Refinamento h adaptativo. a) Malha inicial. b) Malha final (critério 1). c) Malha final (critério 2, $\gamma = 0.50$).

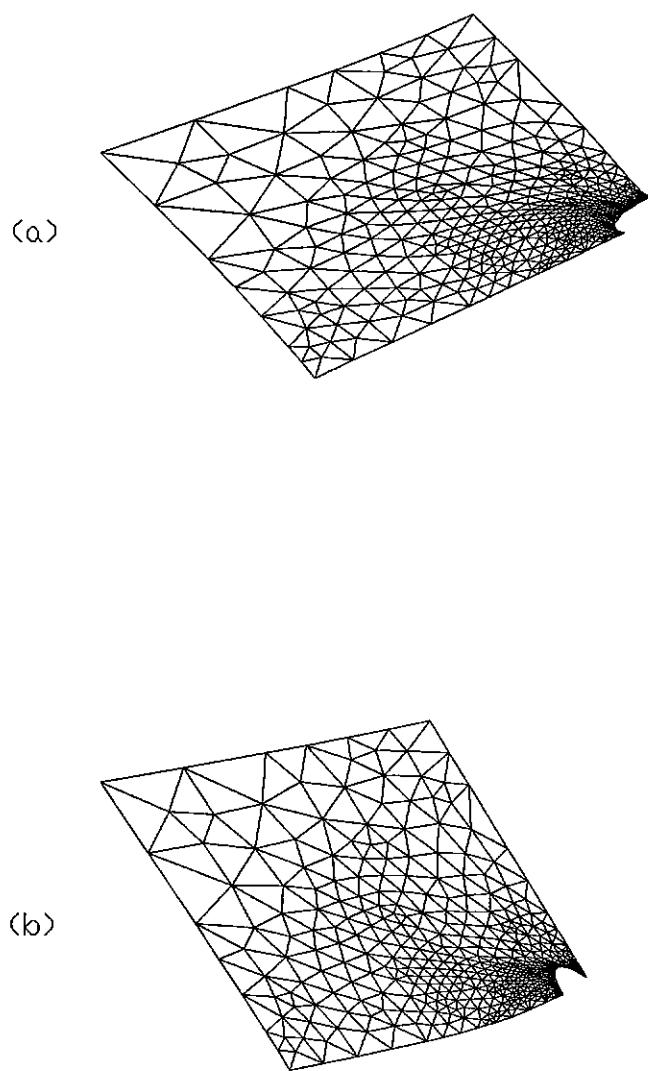


Figura 4.11 - Representação espacial dos deslocamentos u_x (a) e u_y (b).

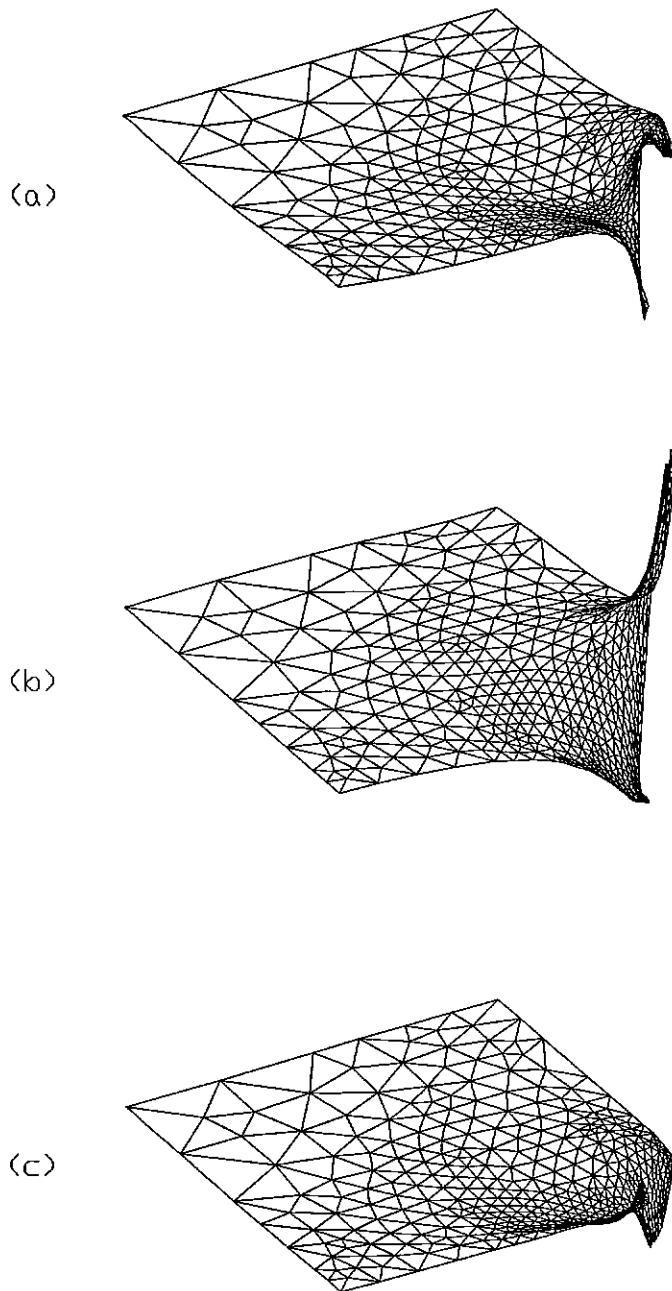


Figura 4.12 - Representação espacial das tensões. a) Tensões σ_x ($\times 3$). b) Tensões σ_y ($\times 3$). c) Tensões τ_{xy} ($\times 3$).

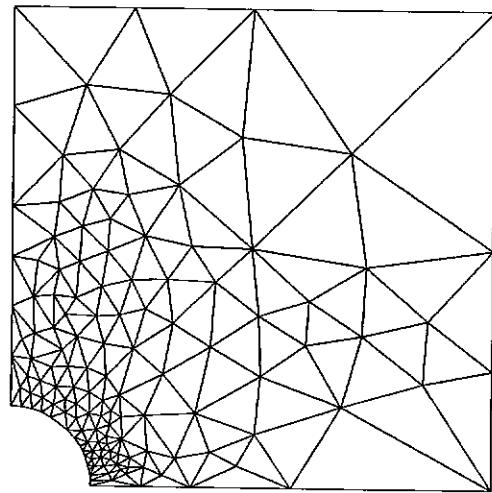


Figura 4.13 – Estratégia $h-p$. Malha final da fase h .

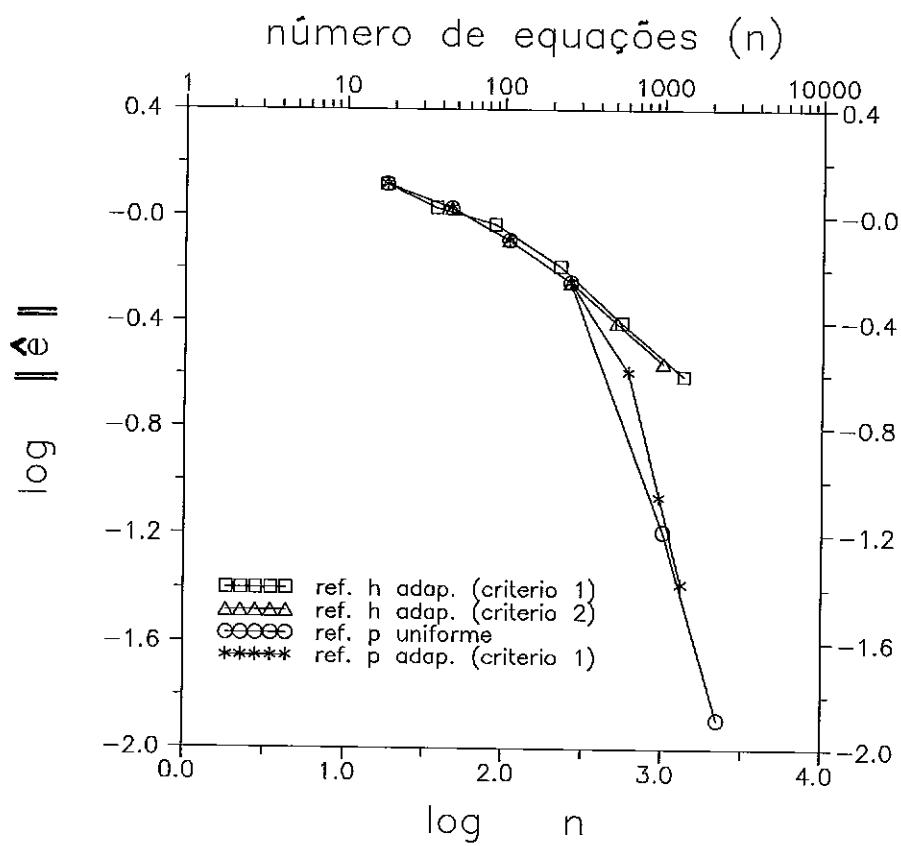


Figura 4.14 – Taxas de convergência.

Tabela 4.8 - Refinamento h , critério 1. Estimativas de erro.

malha	n	$\ \hat{u}\ $	$\ \hat{e}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	18	11.69066	1.31686	11.19
2	37	11.71256	1.07370	9.13
3	87	11.78263	0.92971	7.87
4	226	11.82498	0.64512	5.45
5	551	11.84006	0.39491	3.33
6	1342	11.84469	0.24824	2.10

Tabela 4.9 - Refinamento h , critério 2. Estimativas de erro.

malha	n	$\ \hat{u}\ $	$\ \hat{e}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	18	11.69066	1.31686	11.19
2	46	11.75261	1.07020	9.07
3	107	11.80794	0.81250	6.86
4	262	11.83128	0.56322	4.76
5	512	11.83993	0.39485	3.33
6	993	11.84398	0.27796	2.35

Tabela 4.10- Refinamento p uniforme. Estimativas de erro.

p	n	$\ \hat{u}\ $	$\ \hat{e}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	262	11.83128	0.56322	4.76
2	1008	11.84646	0.06473	0.55
3	2238	11.84679	0.01291	0.11

Tabela 4.11- Refinamento p adaptativo (critério 1).

Estimativas de erro.

p	n	$\ \hat{u}\ $	$\ \hat{e}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	262	11.83128	0.56322	4.76
1,2	606	11.84347	0.25738	2.17
1,2,3	948	11.84632	0.08718	0.74
1,2,3	1304	11.84671	0.04157	0.35

Exemplo 3

Neste exemplo realizamos a análise de uma peça com furo circular, de espessura unitária, sob condições de estado plano de tensão (Figura 4.15).

Os resultados da análise h adaptativa podem ser vistos nas Tabelas 4.12 e 4.13. A Figura 4.16 mostra a malha inicial e as malhas obtidas com os critérios 1 e 2 ($\gamma = 0.50$).

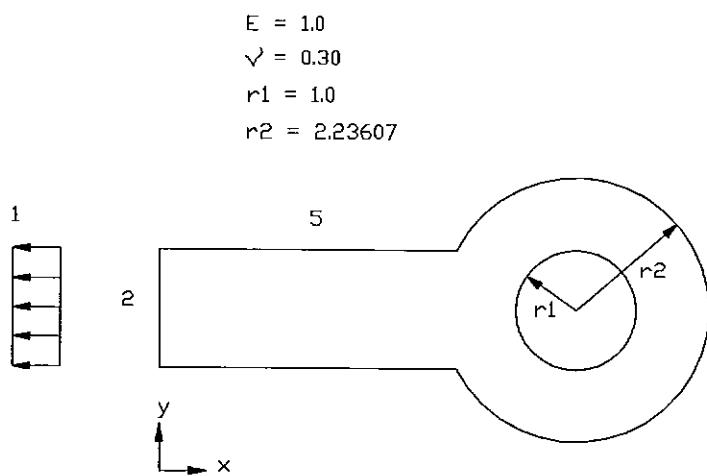


Figura 4.15 - Problema de estado plano de tensão. Geometria e constantes físicas.

Na análise $h-p$ especificamos um percentual $\bar{\eta}_h = 4\%$. Os resultados da fase p , uniforme e adaptativa, podem ser vistos nas Tabelas 4.14 e 4.15. Os deslocamentos e tensões correspondentes à malha atingida pelo refinamento h ($\hat{\eta} = 3.75\%$) estão representados nas Figuras 4.17 e 4.18.

As taxas de convergência das análises h e $h-p$ podem ser comparadas na Figura 4.19.

Tabela 4.12 - Refinamento h adaptativo, critério 1.

malha	n	$\ \hat{u}\ $	$\ \hat{e}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	22	3.40251	0.55223	16.02
2	48	3.43049	0.43166	12.48
3	104	3.44889	0.32549	9.40
4	254	3.45191	0.22154	6.40
5	546	3.45497	0.15337	4.43
6	1238	3.45678	0.10695	3.09
7	2502	3.45773	0.07648	2.21

Tabela 4.13 - Refinamento h adaptativo, critério 2.

malha	n	$\ \hat{u}\ $	$\ \hat{e}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	22	3.40251	0.55223	16.02
2	32	3.40572	0.42434	12.36
3	66	3.43048	0.37006	10.73
4	156	3.44656	0.27027	7.82
5	214	3.45124	0.23491	6.79
6	330	3.45399	0.20012	5.78
7	518	3.45597	0.15997	4.62
8	746	3.45663	0.12972	3.75
9	1004	3.45707	0.11270	3.26
10	1904	3.45783	0.08243	2.38

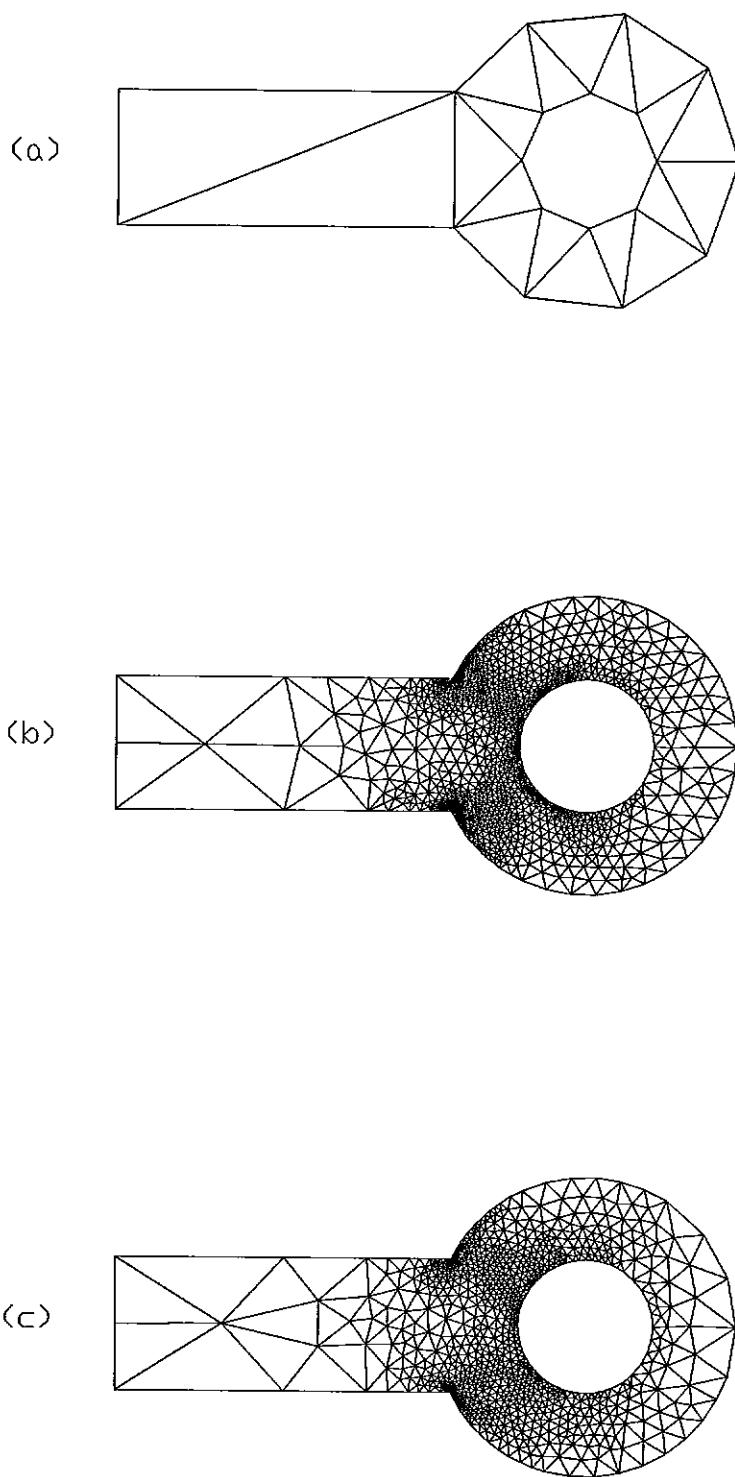


Figura 4.16 – Refinamento h adaptativo. a) Malha inicial. b) Malha final (critério 1). c) Malha final (critério 2, $\gamma = 0.50$).

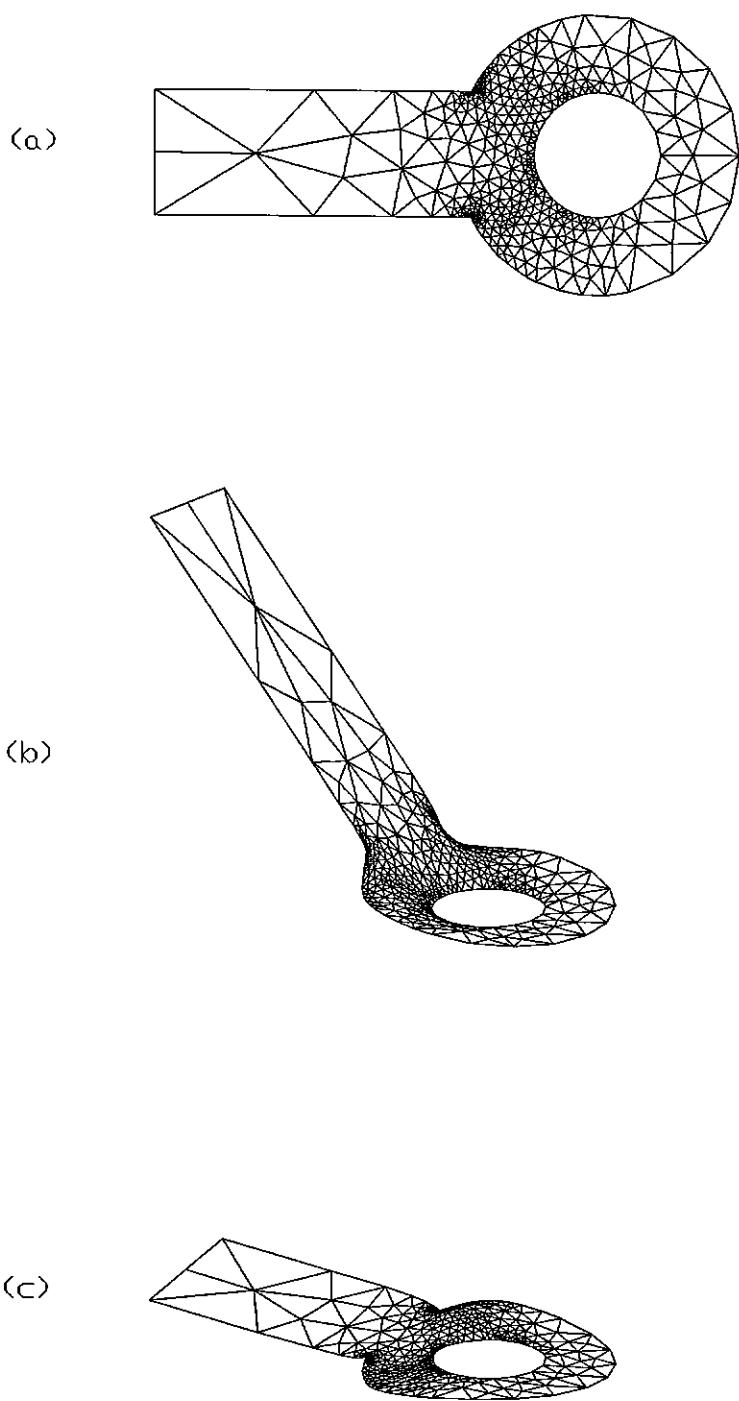


Figura 4.17 - Refinamento $h-p$. a) Malha atingida pelo refinamento h ($\hat{\eta} = 3.75 \%$). b) Deslocamentos u_x . c) Deslocamentos u_y .

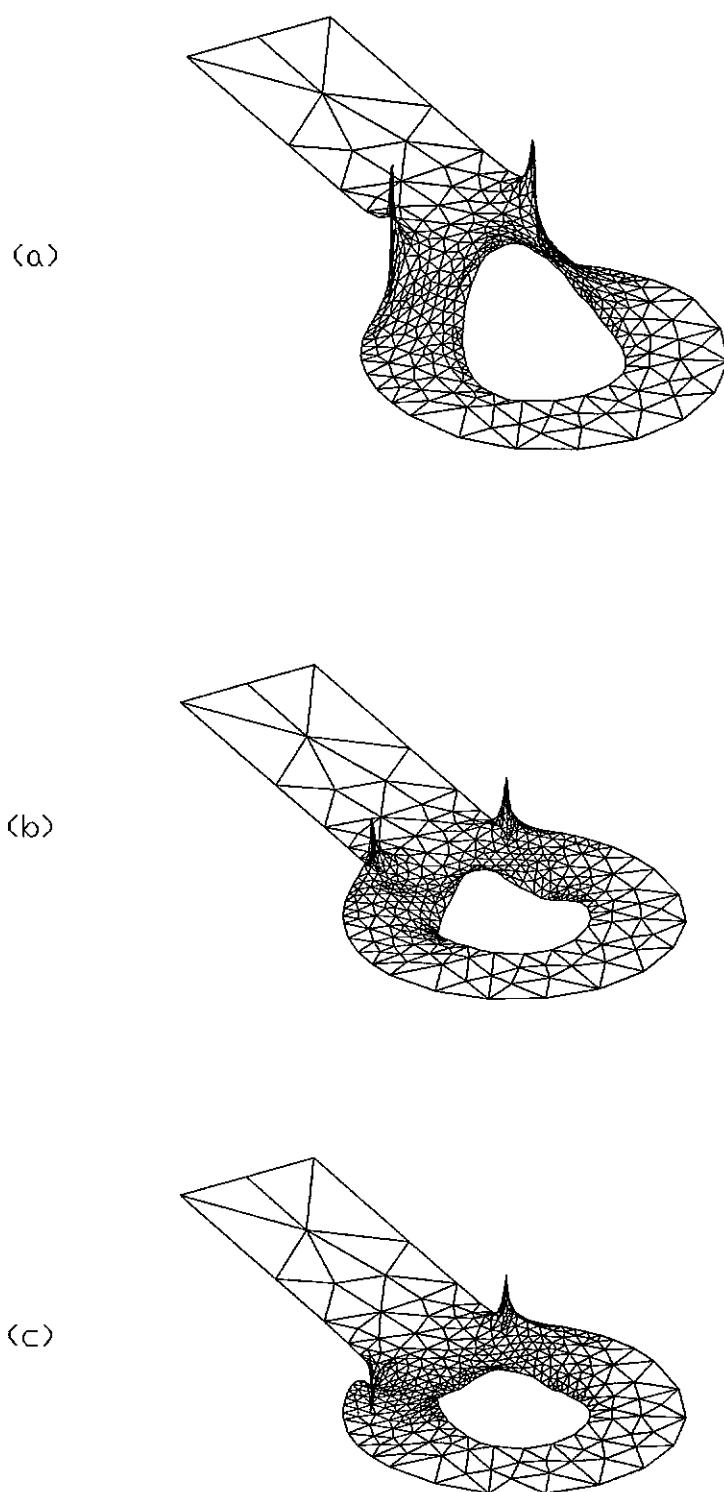


Figura 4.18 - Refinamento $h-p$. Tensões correspondentes à malha obtida na fase h . a) Tensões σ_x . b) Tensões σ_y . c) Tensões τ_{xy} .

Tabela 4.14 - Refinamento p uniforme. Estimativas de erro.

p	n	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	746	3.45663	0.12972	3.75
2	2950	3.45905	0.02314	0.67

Tabela 4.15 - Refinamento p adaptativo.

p	n	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	746	3.45663	0.12972	3.75
1, 2	1918	3.45860	0.05795	1.68
1, 2, 3	2844	3.45906	0.023971	0.69

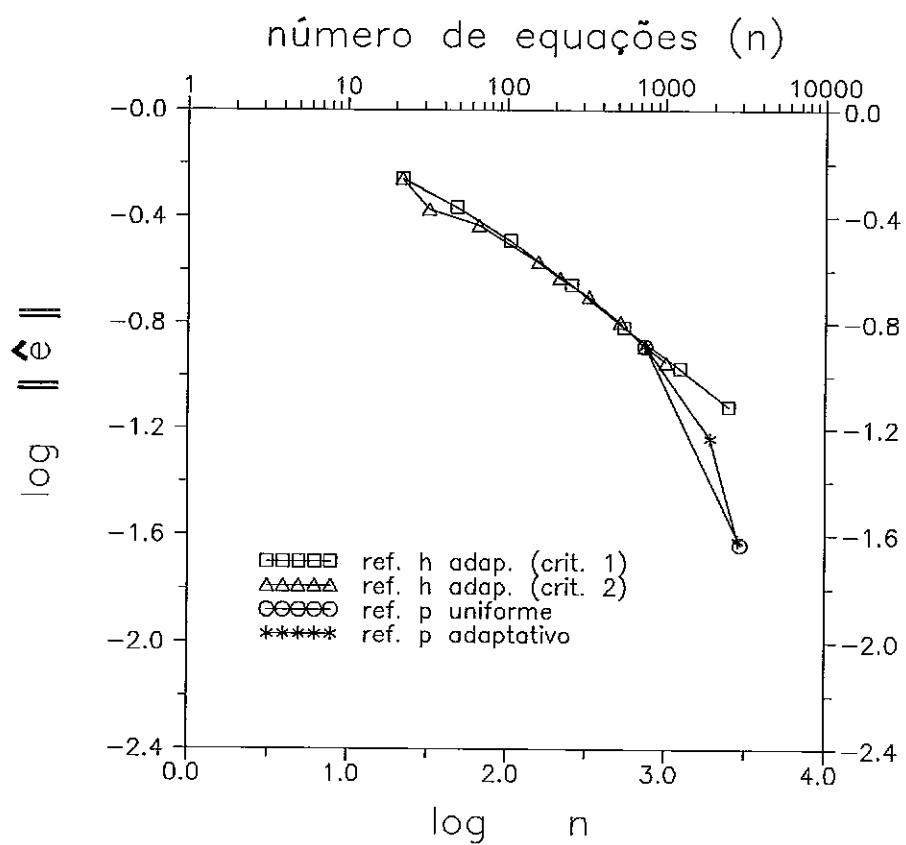


Figura 4.19 - Taxas de convergência.

4.3 PROBLEMAS DE POTENCIAL

Exemplo 4

Consideramos, neste exemplo, o fluxo irrotacional em um anel circular de raio interno r_1 e raio externo $r_2 = 2$.

Este problema é regido pela equação (1.43), com $k = 1$ e $f = 0$. Para as condições de contorno $u = 0$ em \overline{AB} e $u = 1$ em \overline{CD} , a solução analítica é dada por $\| u \|^2 = (2/\pi) (\ln r_2 - \ln r_1)$. As velocidades são as derivadas da função potencial u , $v_x = \partial u / \partial x$ e $v_y = \partial u / \partial y$.

Analisamos este problema considerando três valores diferentes para o raio interno, $r_1 = 0.2$, $r_1 = 0.1$, e $r_1 = 0.02$. No limite, quando $r_1 \rightarrow 0$, este problema corresponde ao problema de um vortex irrotacional.

As Tabelas 4.16-4.21 e as Figuras 4.21-4.29 mostram os resultados obtidos e as malhas correspondentes. Pode-se observar na Figura 4.30 que foram obtidas taxas de convergência praticamente iguais no refinamento h .

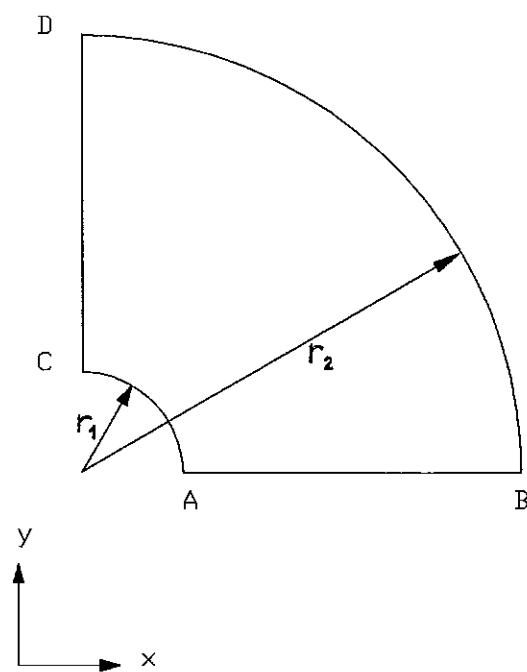


Figura 4.20 – Fluxo irrotacional em torno de um cilindro.

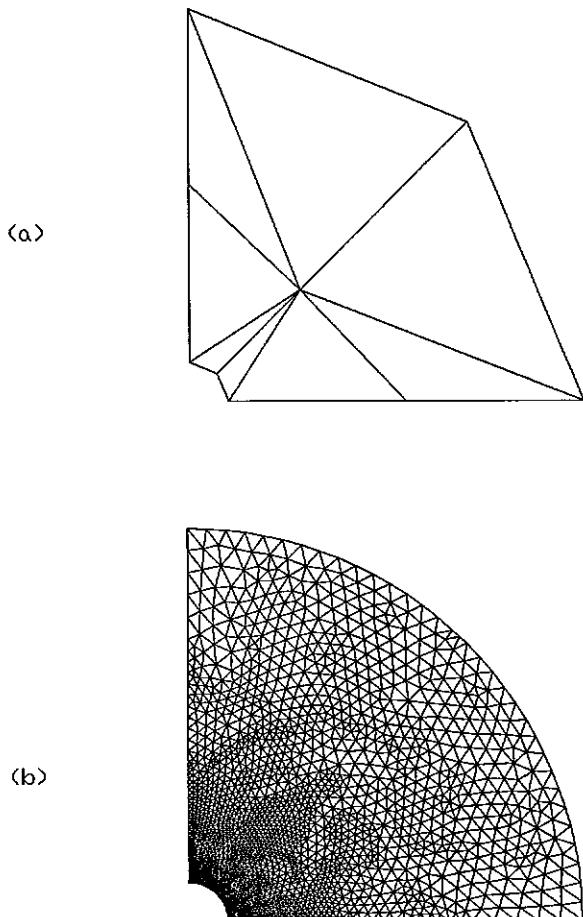


Figura 4.21 - Refinamento h , $r_1 = 0.2$. a) Malha inicial. b) Malha final.

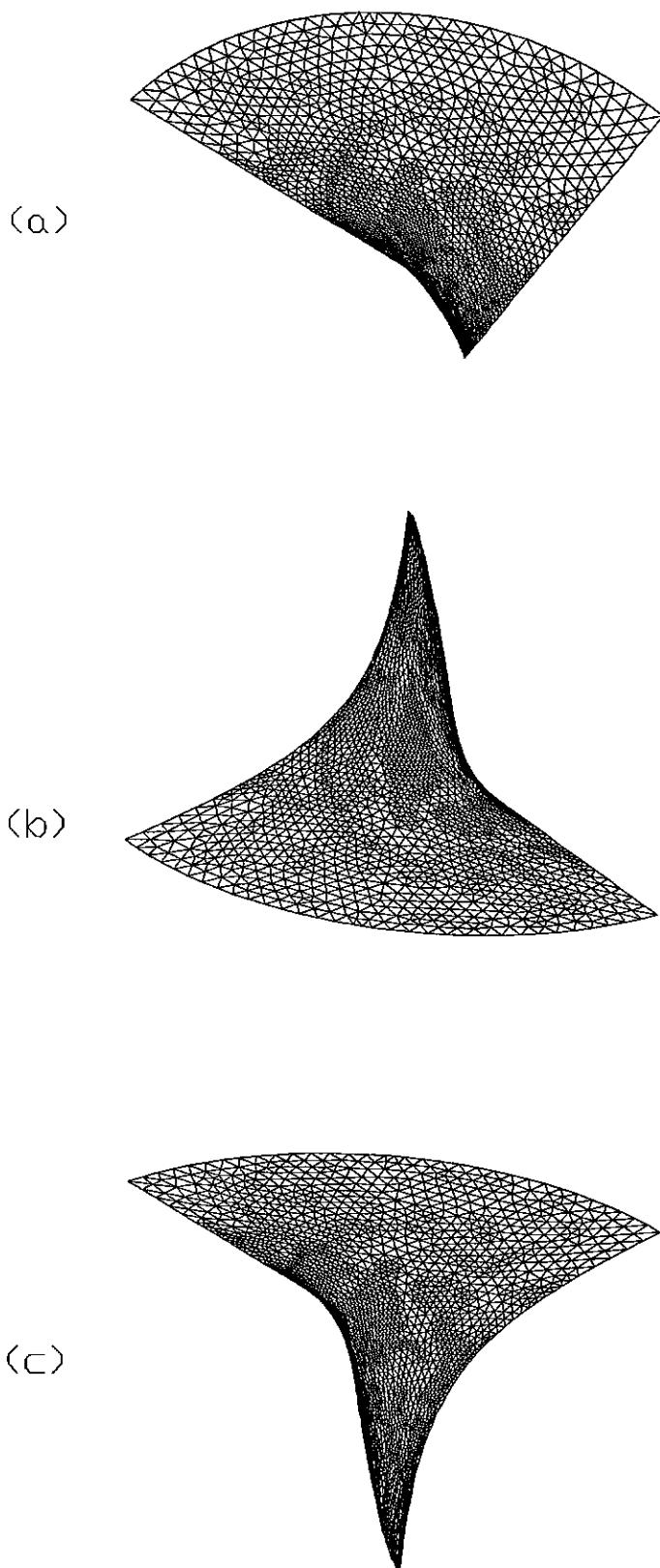


Figura 4.22 - Refinamento h , $r_1 = 0.2$. a) Potencial. b)
Velocidades v_x ($\times 0.5$). c) Velocidades v_y ($\times 0.5$).

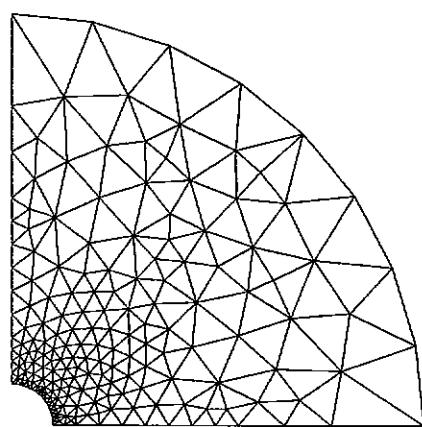


Figura 4.23 - Refinamento p , $r_1 = 0.2$. Malha inicial ($p = 1$).

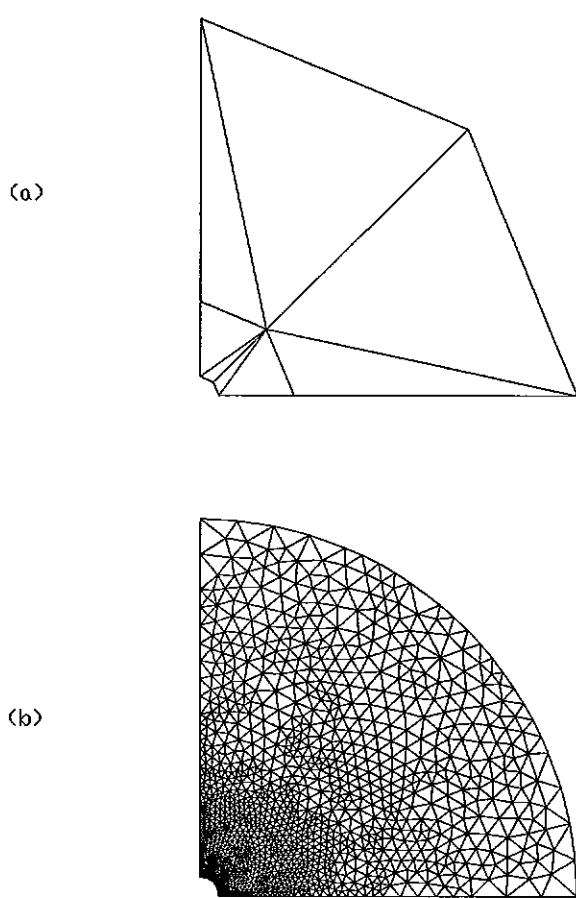


Figura 4.24 - Refinamento h , $r_1 = 0.1$. a) Malha inicial. b) Malha final.

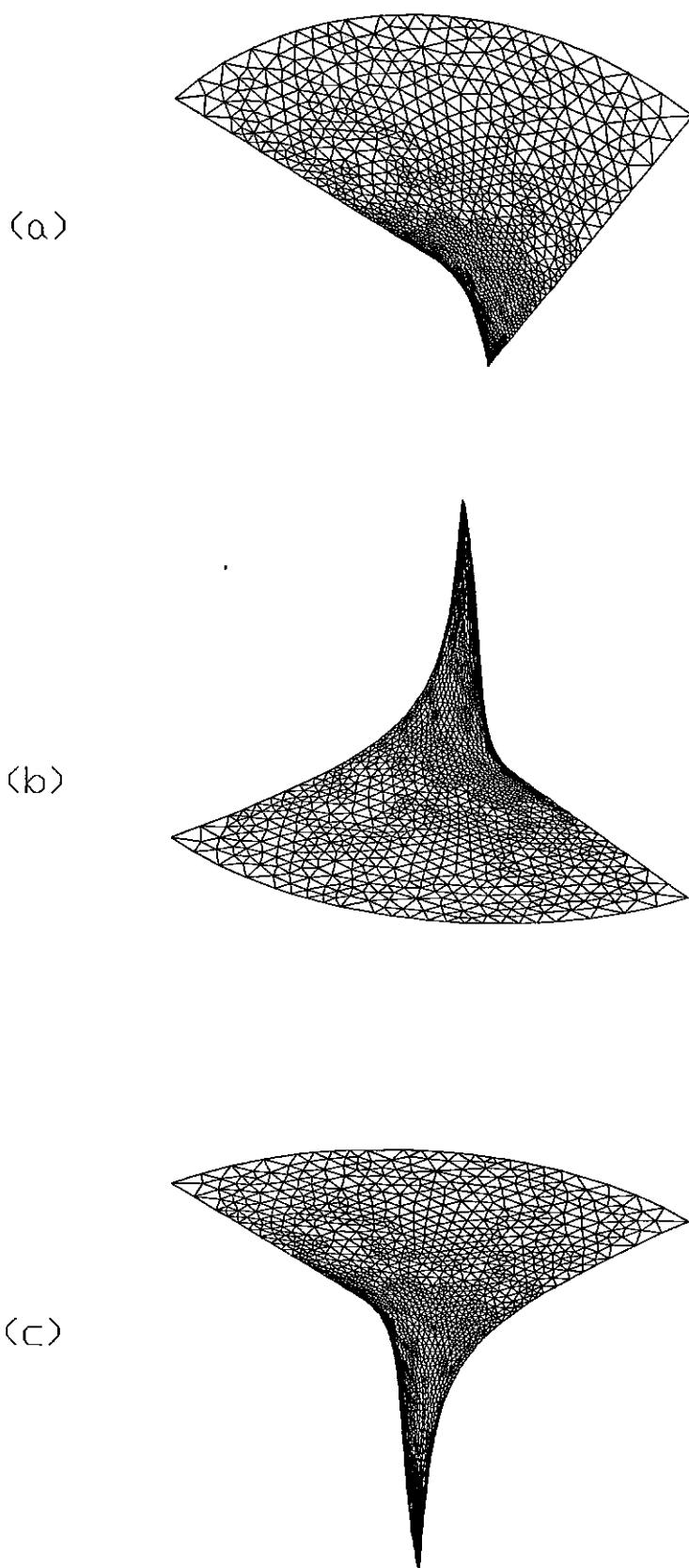


Figura 4.25 - Refinamento h , $r_1 = 0.1$. a) Potencial. b)
Velocidades v_x (x 0.25). c) Velocidades v_y (x 0.25).

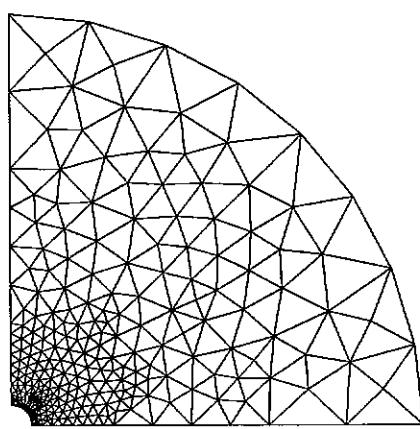


Figura 4.26 - Refinamento p , $r_1 = 0.1$. Malha inicial ($p = 1$).

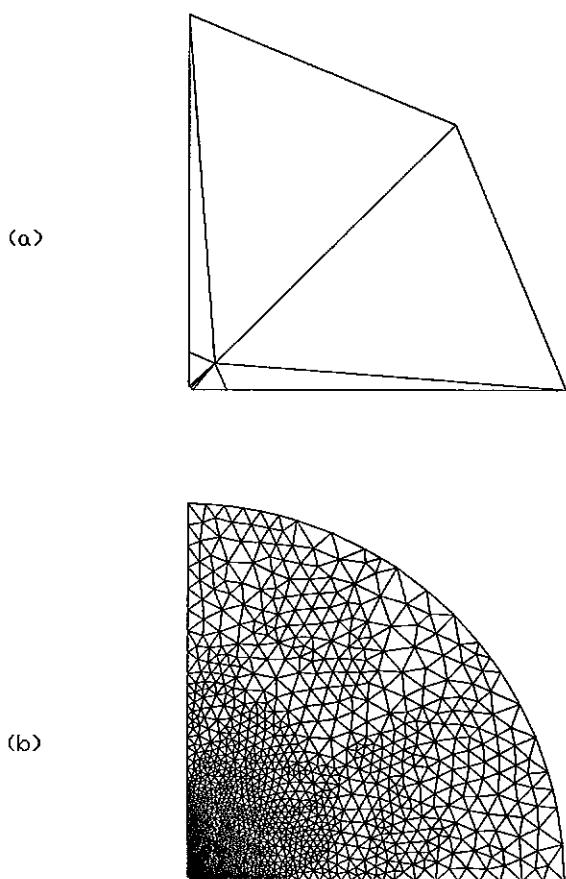


Figura 4.27 - Refinamento h , $r_1 = 0.02$. a) Malha inicial. b) Malha final.

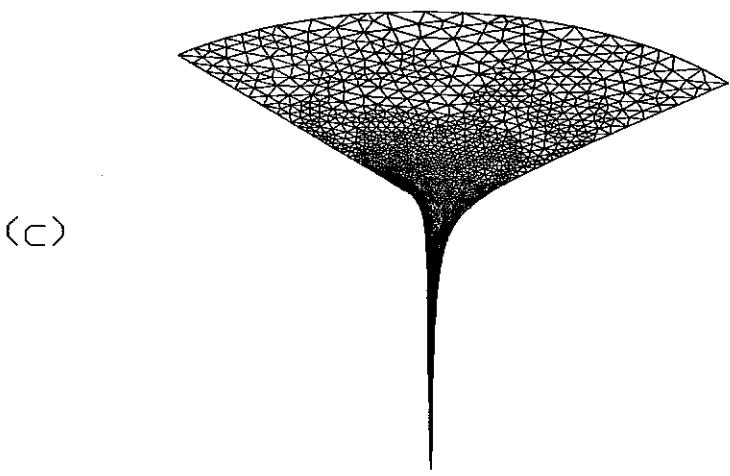
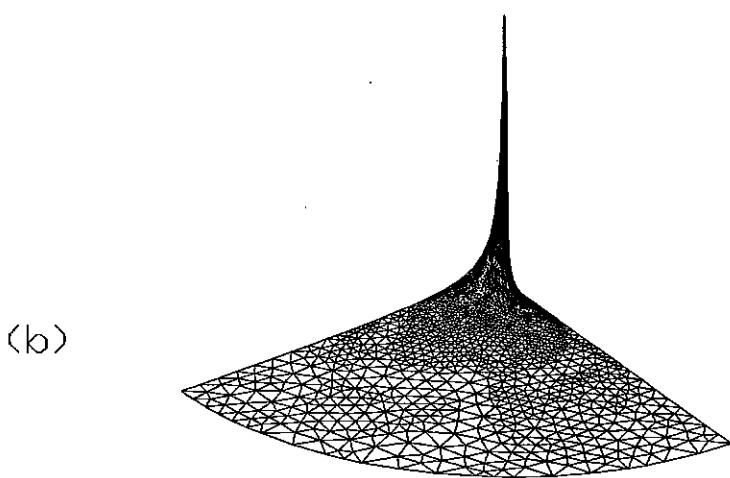
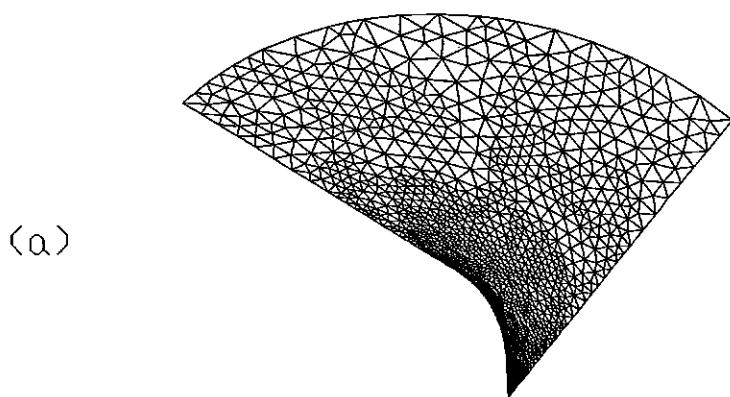


Figura 4.28 - Refinamento h , $r_1 = 0.02$. a) Potencial. b)
Velocidades v_x ($\times 0.05$). c) Velocidades v_y ($\times 0.05$).

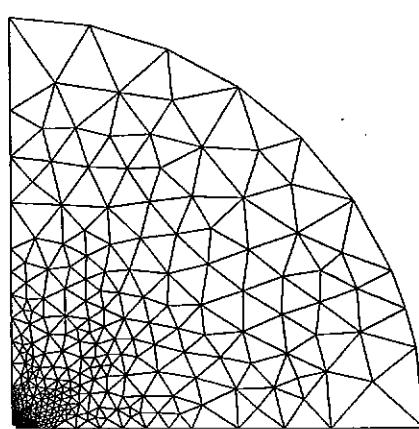


Figura 4.29 - Refinamento p , $r_1 = 0.02$. Malha inicial ($p = 1$).

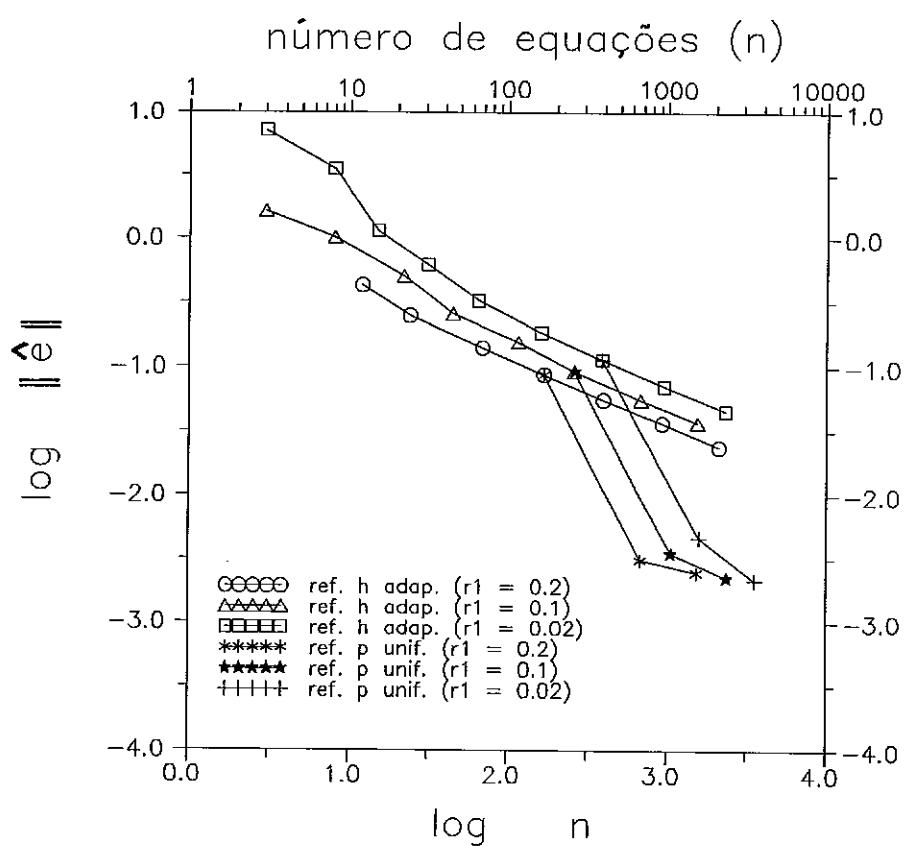


Figura 4.30 - Taxas de convergência.

Tabela 4.16 - Refinamento h adaptativo, $r_1 = 0.2$.

$$\| \hat{u} \| = 1.21073.$$

malha	n	$\ \hat{u} \ $	$\ \hat{e} \ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	3	1.43818	0.95298	88.47
2	12	1.28108	0.42719	35.37
3	24	1.23360	0.25117	20.80
4	69	1.21838	0.14087	11.64
5	169	1.21312	0.08760	7.24
6	396	1.21201	0.05598	4.62
7	925	1.21129	0.03676	3.04
8	2109	1.21097	0.02392	1.98

Tabela 4.17 - Refinamento p uniforme, $r_1 = 0.2$.

p	n	$\ \hat{u} \ $	$\ \hat{e} \ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	169	1.21312	0.08760	7.24
2	680	1.21012	0.00312	0.26
3	1532	1.21009	0.00248	0.20

Tabela 4.18 - Refinamento h adaptativo, $r_1 = 0.1$.

$$\| u \| = 1.38099.$$

malha	n	$\ \hat{u} \ $	$\ \hat{e} \ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	3	1.73867	1.63565	277.42
2	8	1.64782	1.01317	77.96
3	22	1.45949	0.50513	36.89
4	45	1.40152	0.25972	18.86
5	116	1.38639	0.15617	11.34
6	262	1.38340	0.09306	6.74
7	680	1.38200	0.05584	4.04
8	1544	1.38142	0.03726	2.70

Tabela 4.19 - Refinamento p uniforme, $r_1 = 0.1$.

p	n	$\ \hat{u}\ $	$\ \hat{e}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	262	1.38340	0.09306	6.74
2	1049	1.38041	0.00351	0.25
3	2360	1.38038	0.00225	0.16

Tabela 4.20 - Refinamento h adaptativo, $r_1 = 0.02$.

$$\|u\| = 1.71223.$$

malha	n	$\ \hat{u}\ $	$\ \hat{e}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	3	2.64602	7.19517	107.54
2	8	2.37776	3.53668	135.09
3	15	1.98387	1.14529	70.70
4	31	1.80134	0.62066	36.70
5	65	1.73797	0.32821	19.23
6	161	1.72087	0.18563	10.85
7	389	1.71571	0.11405	6.66
8	951	1.71383	0.07134	4.17
9	2323	1.71301	0.04600	2.69

Tabela 4.21 - Refinamento p uniforme, $r_1 = 0.02$.

p	n	$\ \hat{u}\ $	$\ \hat{e}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	389	1.71578	0.11405	6.66
2	1581	1.71209	0.00468	0.27
3	3575	1.71207	0.00217	0.13

Exemplo 5

A Figura 4.31 ilustra o problema de um fluxo irrotacional com obstáculo cilíndrico. Realizamos, para este problema, as análises adaptativas h e $h-p$, utilizando o critério 1 na fase h e refinamento uniforme na fase p . A Figura 4.32 mostra as malhas inicial e final da análise h . O potencial as velocidades correspondentes à esta análise estão representados na Figura 4.33.

Na análise $h-p$, foram atingidos os percentuais de erro 6.14 % na fase h (Figura 4.34), e 0.65 % ($p = 2$) e 0.25 % ($p = 3$) na fase p .

Os resultados e as taxas de convergência de ambas as análises podem ser vistos nas Tabelas 4.22-4.23 e na Figura 4.35.

Tabela 4.22 - Refinamento h adaptativo.

malha	n	$\ \hat{u}\ $	$\ \hat{e}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	12	6.04757	0.86118	14.10
2	29	6.13236	0.86830	14.02
3	79	6.25592	0.65321	10.39
4	193	6.29859	0.38776	6.14
5	437	6.30909	0.24359	3.86
6	1091	6.31462	0.14848	2.35

Tabela 4.23 - Refinamento p uniforme.

p	n	$\ \hat{u}\ $	$\ \hat{e}\ $	$\hat{\eta} (\%)$
1	193	6.29859	0.38776	6.14
2	725	6.31212	0.04100	0.65
3	1595	6.31236	0.01573	0.25

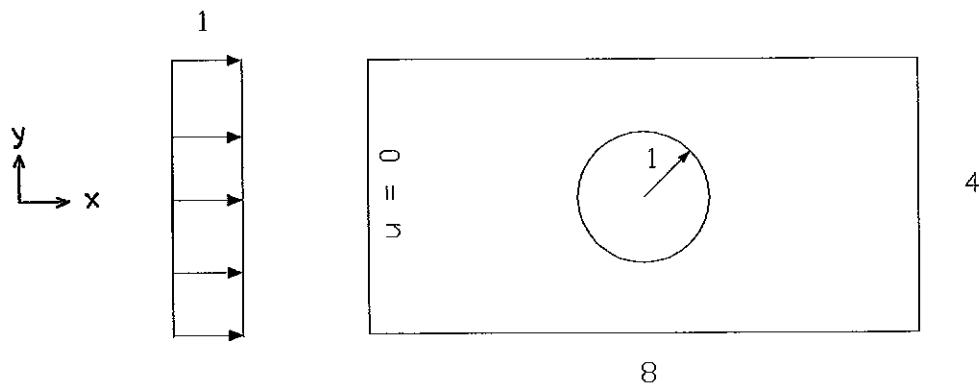
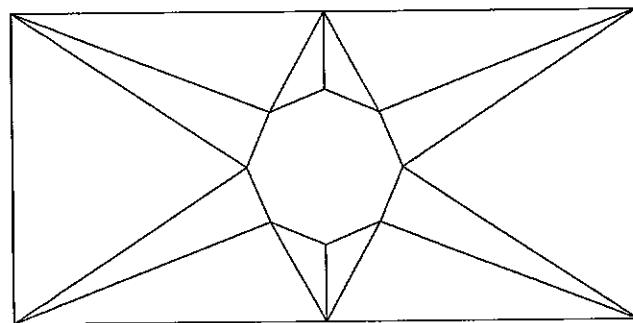


Figura 4.31 - Fluxo irrotacional com obstáculo cilíndrico.

(a)



(b)

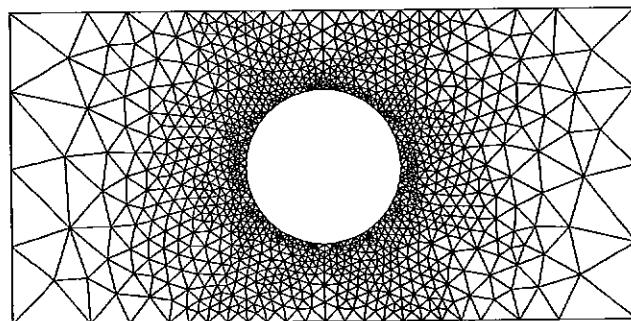


Figura 4.32 - Refinamento h . a) Malha inicial. b) Malha final.

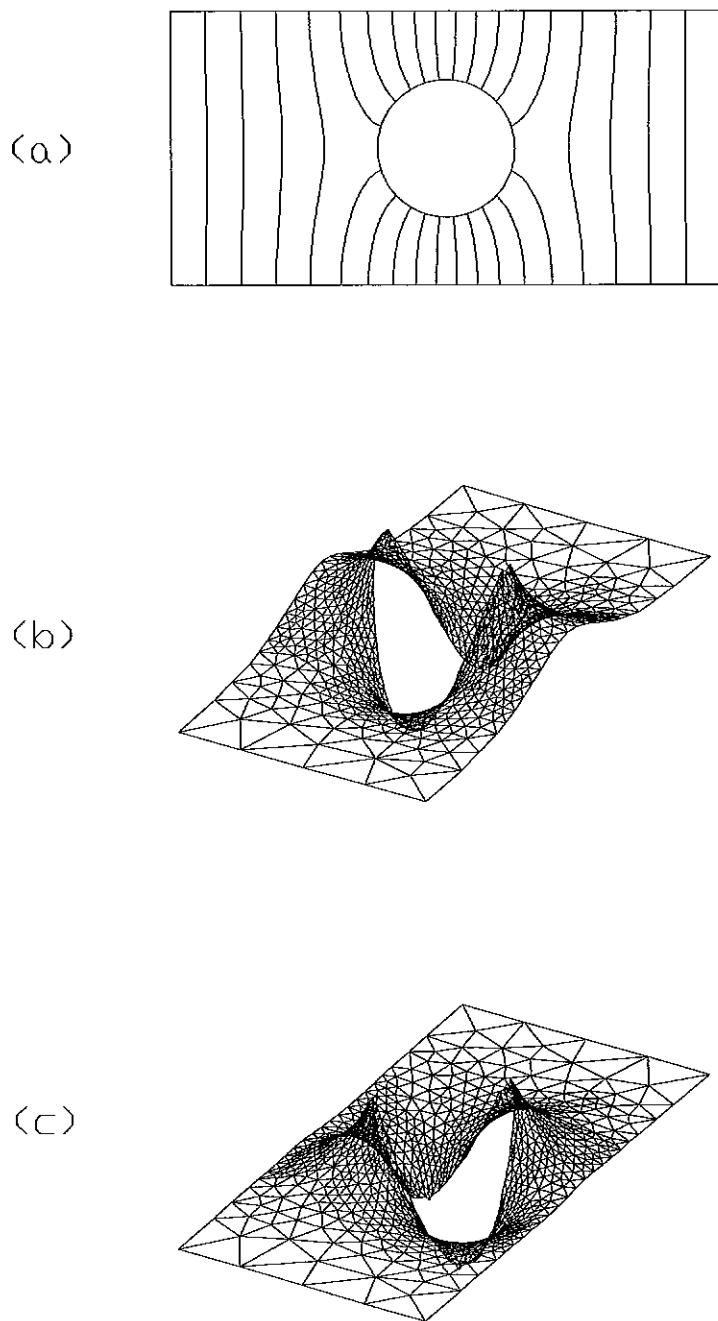


Figura 4.33 - Refinamento h . a) Potencial. b) Velocidades v_x . c) Velocidades v_y .

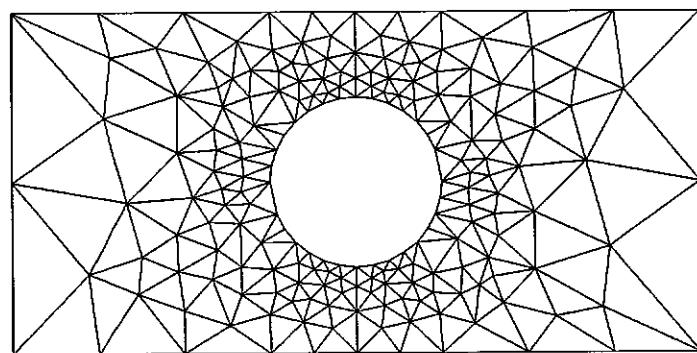


Figura 4.34 - Malha inicial do refinamento p .

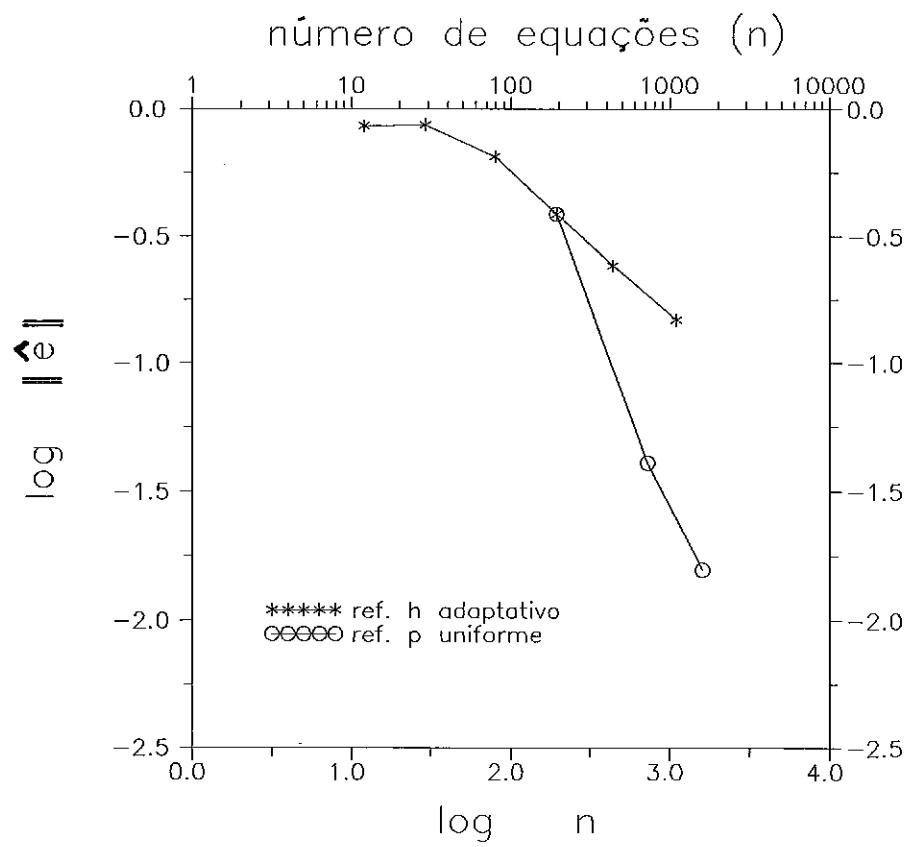


Figura 4.35 - Taxas de convergência.

CONCLUSÕES

Apresentamos neste trabalho um método $h-p$ de análise, aplicado a problemas planos e independentes do tempo de elasticidade e potencial.

As análises realizadas mostram que a estratégia proposta conduz a resultados de alta precisão. As malhas adaptativas produzidas pelo refinamento h minimizam os efeitos das singularidades das soluções, resultando em distribuições de erro aproximadamente uniformes. Aumenta-se, desta forma, a eficiência da fase p de refinamento.

O esquema apresentado permite que a fase p possa ser utilizada uniforme ou adaptativamente. No entanto, para o limite $p = 3$, o refinamento uniforme pode ser uma alternativa mais econômica, ainda que o refinamento adaptativo possa atingir o erro final desejado com um menor número de equações. Isto porque o número de sistemas de equações a serem resolvidos talvez não justifique o aumento da taxa de convergência nesta fase.

Para que o refinamento p adaptativo pudesse ser melhor avaliado, dentro do contexto desta estratégia, seria necessária a consideração de graus de aproximação $p > 3$. Deve-se observar, porém, que a utilização de graus mais altos pode resultar em sistemas mal condicionados.

Os algoritmos empregados na fase h mostraram grande capacidade de adaptação geométrica, permitindo que as análises possam ser iniciadas a partir de malhas extremamente pobres, eliminando os trabalhos referentes à etapa de geração do modelo. Deve-se ainda observar que o esquema de subdivisão de triângulos, independentemente do conhecimento da distribuição de erros, pode desempenhar o papel de um poderoso gerador de malhas.

Outro aspecto importante do método apresentado é a estrutura de dados que, por sua simplicidade, permitiu o desenvolvimento de um código adaptativo $h-p$ que não se constitui somente em um protótipo de pesquisas, mas que também pode ser utilizado para aplicações reais.

Como continuação deste trabalho, pretende-se estender esta metodologia a outros tipos de problemas, com a consideração de efeitos não-lineares e dinâmicos. Nestes últimos, o método r apresentado poderá ser comparado com um esquema de refinamento/desrefinamento [9] a ser desenvolvido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AINSWORTH, M., ZHU, J. Z., CRAIG, A. W. and ZIENKIEWICZ, O. C., "Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A-posteriori Error Estimator in the Finite Element Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 28, pp. 2161-2174, 1989.
- [2] AXELSSON, O. and BARKER, V. A., *Finite Element Solution of Boundary Value Problems, Theory and Computation*, Academic Press, 1984.
- [3] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W. C., "Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol 15, pp. 736-754, 1978.
- [4] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W. C., "A-posteriori Error Estimates for the Finite Element Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 12, pp. 1597-1615, 1978.
- [5] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W. C., "Adaptive Approaches and Reliability Estimations in Finite Element Analysis", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 18, pp. 519-540, 1979.
- [6] BABUSKA, I., SZABO, B. A. and KATZ, I. N., "The P-version of the Finite Element Method", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 18, No. 3, pp. 515-545, 1981.

- [7] BABUSKA, I. and SZABO, B. A., "On the Rates of Convergence of Finite Element Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 18, pp. 323-341, 1982.
- [8] BABUSKA, I. and SURI, M., "The p and $h-p$ Versions of the Finite Element Method, an Overview", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 80, pp. 5-26, 1990.
- [9] BENKHALDOUN, F., FERNANDEZ, T., LARROUTUROU, B. and LEYLAND, P., *A Dynamical Adaptive Method Based on Local Refinement and Unrefinement for Triangular Finite-Element Meshes: Preliminary Results*, Rapports de Recherche n. 1271, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), 1990.
- [10] CAREY, G. F., "A Mesh-Refinement Scheme for Finite Element Computations", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 7, pp. 93-105, 1976.
- [11] COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D. e EBECKEN, N. F. F., "Two-Level Preconditioners for Hierarchical Finite Element Equations and Their Applications in Solid Mechanics", *International Symposium on Iterative Methods in Linear Algebra*, Bruxelas, Belgica, 1991.
- [12] DEMKOWICZ, L., ODEN, J. T., RACHOWICZ, W. and HARDY, O., "Toward a Universal $h-p$ Adaptive Finite Element Strategy, Part 1. Constrained Approximation and Data Structure", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 77, pp. 79-112, 1989.

- [13] DEVLOO, P., *An H-P Adaptive Finite Element Method for Steady Compressible Flow*, Ph.D. Thesis, University of Texas, Austin, 1987.
- [14] EWING, R. E., "A Posteriori Error Estimation", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 82, pp. 59-72, 1990.
- [15] GEORGE, A. and LIU, J. W. H., *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*, Prentice-Hall, 1981.
- [16] HUGHES, T. J. R., *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, 1987.
- [17] JOHNSON, C., *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, 1987.
- [18] LAS CASAS, E. B. de, *R-H Mesh Improvement Algorithms for the Finite Element Method*, Ph.D. Thesis, Purdue University, Purdue, 1988.
- [19] LYRA, P. R. M., *Uma Estratégia de Refinamento Auto-adaptativo Versão h do Método dos Elementos Finitos Aplicada a Problemas Bi-dimensionais Regidos pela Equação de Campo*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1988.

- [20] ODEN, J. T., DEMKOWICZ, L., RACHOWICZ, W. and WESTERMANN, T. A., "Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 2. A Posteriori Error Estimation", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 77, pp. 113-180, 1989.
- [21] RACHOWICZ, W. , ODEN, J. T. and DEMKOWICZ, L., "Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 3. Design of h-p Meshes" , *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 77, pp. 181-212, 1989.
- [22] RIBEIRO, F. L. B., *Formulação Hierárquica do Método dos Elementos Finitos: Refinamento Auto-adaptativo Versão P Aplicado a Problemas de Elasticidade*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1986.
- [23] RIBEIRO, F. L. B. e LANDAU, L., "O Método dos Elementos Finitos Hierárquico com Aplicações a Problemas de Elasticidade", *Revista Brasileira de Engenharia, Cad. de Eng. Estrut.*, vol. 5, No. 1, pp. 61-87, 1987.
- [24] SHEPHARD, M. S., BAEHMANN, P. L., GEORGES, M. K. and KORNGOLG, E. V., "Framework for the Reliable Generation and Control of Analysis Idealizations", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 82, pp. 257-280, 1990.
- [25] SZABÓ, B. A., "The p and $h-p$ Versions of the Finite Element Method in Solid Mechanics", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 80, pp. 185-195, 1990.

- [26] VARGA, R. S., *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, 1962.
- [27] ZIENKIEWICZ, O. C. and MORGAN, K., *Finite Elements and Approximation*, Wiley-Interscience, 1983.
- [28] ZIENKIEWICZ, O. C., GAGO, J. P. de S. R. and KELLY, D. W., "The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis", *Computers & Structures*, vol. 16, pp. 53-65, 1983.
- [29] ZIENKIEWICZ, O. C. and ZHU, J. Z., "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 24, pp. 337-357, 1987.
- [30] ZIENKIEWICZ, O. C. and TAYLOR, R. L., *The Finite Element Method*, Fourth Edition, Volume 1, McGraw-Hill, 1989.
- [31] ZIENKIEWICZ, O. C., ZHU, J. Z. and GONG, N. G., "Effective and Practical $h-p$ -Version Adaptive Analysis Procedures for the Finite Element Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 28, pp. 879-891, 1989.

APÊNDICE A

ELEMENTO TRIANGULAR CÚBICO

A.1 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

De acordo com a numeração nodal da Figura A.1, as funções utilizadas no presente trabalho são as seguintes [27],

Funções lineares:

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1 \\ N_2 &= L_2 \\ N_3 &= L_3 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Funções quadráticas hierárquicas:

$$\begin{aligned} N_4 &= 4 L_1 L_2 \\ N_5 &= 4 L_2 L_3 \\ N_6 &= 4 L_1 L_3 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Funções cúbicas hierárquicas:

$$\begin{aligned} N_7 &= (27/2) L_1 L_2 (L_1 - L_2) \\ N_8 &= (27/2) L_2 L_3 (L_2 - L_3) \\ N_9 &= (27/2) L_1 L_3 (L_3 - L_1) \\ N_{10} &= 27 L_1 L_2 L_3 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Funções quadráticas standard:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= L_1 (2L_1 - 1) \\
 N_2 &= L_2 (2L_2 - 1) \\
 N_3 &= L_3 (2L_3 - 1) \\
 N_4 &= 4 L_1 L_2 \\
 N_5 &= 4 L_2 L_3 \\
 N_6 &= 4 L_1 L_3
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Funções cúbicas standard:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (9/2) L_1 (L_1^2 - L_1 + (2/9)) \\
 N_2 &= (9/2) L_2 (L_2^2 - L_2 + (2/9)) \\
 N_3 &= (9/2) L_3 (L_3^2 - L_3 + (2/9)) \\
 N_4 &= (9/2) L_1 L_2 (3L_1 - 1) \\
 N_5 &= (9/2) L_2 L_3 (3L_2 - 1) \\
 N_6 &= (9/2) L_1 L_3 (3L_3 - 1) \\
 N_7 &= (9/2) L_1 L_2 (3L_2 - 1) \\
 N_8 &= (9/2) L_2 L_3 (3L_3 - 1) \\
 N_9 &= (9/2) L_1 L_3 (3L_1 - 1) \\
 N_{10} &= 27 L_1 L_2 L_3
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Nas expressões acima, L_i são coordenadas de área [27], com as seguintes propriedades,

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \tag{A.6}$$

$$L_i = \begin{cases} 1 \text{ no nó 1} \\ 0 \text{ no lado 2} \end{cases} \tag{A.7}$$

$$L_2 = \begin{cases} 1 \text{ no nó 2} \\ 0 \text{ no lado 3} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

$$L_3 = \begin{cases} 1 \text{ no nó 3} \\ 0 \text{ no lado 1} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Para a aproximação da solução são utilizadas as funções de interpolação hierárquicas, enquanto que o campo de tensões (ou fluxos) suavizado é interpolado através das funções *standard*.

A geometria do elemento é descrita pelas funções lineares N_1 , N_2 e N_3 e, consequentemente, seus lados são retos. Os nós 4-10 servem apenas para identificar as demais funções de interpolação.

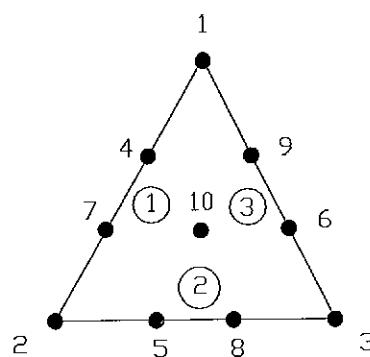


Figura A.1 - Elemento cúbico triangular.

A.2 FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

Para uma distribuição constante de forças (ou fluxos) \bar{t} no contorno de um elemento de comprimento l (Figura A.2), as forças nodais equivalentes são dadas pela integral,

$$f_i = \int N_i \, d\Gamma \, \bar{t} \quad (\text{A.10})$$

Para as funções de (A.1), (A.2) e (A.3) esta expressão assume os valores,

$$\begin{aligned} f_j &= 0.5 l \bar{t} \\ f_k &= 0.5 l \bar{t} \\ f_{i+3} &= (2/3) l \bar{t} \\ f_{i+6} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

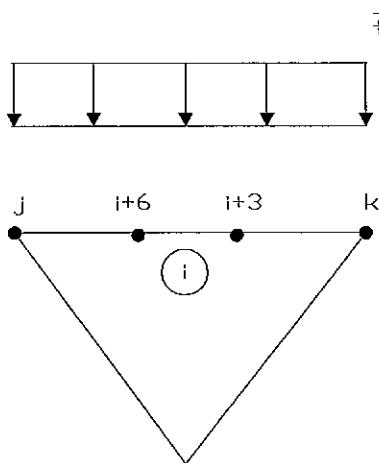


Figura A.2 - Distribuição constante de forças no contorno.

Para uma distribuição constante de forças \bar{q} no interior de um elemento de área S , as forças nodais equivalentes são dadas por,

$$\mathbf{f}_i = \int N_i d\Omega \bar{q} \quad (A.12)$$

e para as funções (A.1), (A.2) e (A.3) estas forças são,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (1/3) S \bar{q} \\ \mathbf{f}_2 &= (1/3) S \bar{q} \\ \mathbf{f}_3 &= (1/3) S \bar{q} \\ \mathbf{f}_4 &= (1/3) S \bar{q} \\ \mathbf{f}_5 &= (1/3) S \bar{q} \\ \mathbf{f}_6 &= (1/3) S \bar{q} \\ \mathbf{f}_7 &= 0 \\ \mathbf{f}_8 &= 0 \\ \mathbf{f}_9 &= 0 \\ \mathbf{f}_{10} &= 0.45 S \bar{q} \end{aligned} \quad (A.13)$$

A.3 RELAÇÕES ENTRE INCÓGNITAS HIERÁRQUICAS / STANDARD

Considerando-se a variação das funções de interpolação (A.1), (A.2) e (A.3) em um determinado lado de um elemento (Figura A.3) tem-se que,

$$\begin{aligned} N_1 &= r \\ N_2 &= 1-r \\ N_3 &= 4r(1-r) \\ N_4 &= (27/2)r(1-r)(2r-1) \end{aligned} \quad (A.14)$$

A solução u é então dada por,

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 a_3 + N_4 a_4 \quad (\text{A.15})$$

onde u_1 e u_2 são os valores da solução nos nós 1 e 2, e a_3 e a_4 são as incógnitas hierárquicas.

No ponto médio deste lado ($r = 0.5$), pode-se escrever,

$$u \Big|_{r=0.5} = -\frac{1}{2} (u_1 + u_2) + a_3 \quad (\text{A.16})$$

$$a_3 = u \Big|_{r=0.5} - \frac{1}{2} (u_1 + u_2) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{du}{dr} \Big|_{r=0.5} = u_1 - u_2 + \frac{1}{2} a_4 \quad (\text{A.18})$$

$$a_4 = 2 \left(\frac{du}{dr} \Big|_{r=0.5} - (u_1 - u_2) \right) \quad (\text{A.19})$$

Observando-se as expressões (A.17) e (A.19), conclui-se que para uma variação linear da solução u no contorno do elemento, as incógnitas hierárquicas a_3 e a_4 são nulas,

$$a_3 = a_4 = 0 \quad (\text{A.20})$$

Este resultado é importante na prescrição de valores da solução no contorno.

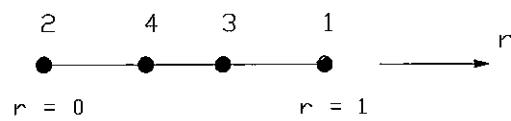


Figura A.3 - Lado genérico de um elemento.

APÊNDICE B

MATRIZ C POSITIVA DEFINIDA

Das expressões (2.11) pode-se concluir que C é uma matriz diagonal dominante [26], pois atende à condição,

$$|C_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |C_{ij}| \quad (B.1)$$

Toda matriz cujos termos da diagonal principal são positivos e que satisfazem estritamente a inequação de (B.1) é positiva definida. Se a expressão (B.1) é satisfeita, porém não estritamente a inequação, então é necessário que a matriz seja também irredutível [26]. Este é o caso da matriz C , que atende somente à igualdade de (B.1).

Para $n \geq 2$, uma matriz A ($n \times n$) é redutível se, através de permutações de suas linhas e colunas, pode ser transformada em outra matriz P tal que,

$$P = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

sendo $A_{1,1}$ ($r \times r$) e $A_{2,2}$ ($(n-r) \times (n-r)$) submatrizes de A , com $r \geq 1$. Caso contrário, a matriz A é irredutível.

Para matrizes simétricas, a matriz reduzida P seria igual a,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Pode-se então afirmar que a matriz \mathbf{C} , além de diagonal dominante, é também irredutível, uma vez que sua forma reduzida (B.3) implicaria, geometricamente, em que houvesse duas regiões do domínio completamente desconectadas entre si, em virtude de (2.11.b).

Portanto, \mathbf{C} é positiva definida.