NOVAS FORMULAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS MISTOS COM PÓS-PROCESSAMENTO

Elson Magalhães Toledo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por :

Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken, D.Sc.

(Presidente)

Prof. Abimael Fernando D. Loula, D.Sc.

Prof. Edison Castro Prates de Lima, D.Sc.

Prof. Helio José Correa Barbosa, D.Sc.

Prof. Eduardo Gomes D. do Carmo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO de 1990

TOLEDO, ELSON MAGALHÃES

Novas Formulações de Elementos Finitos Mistos

com Pós-Processamento (Rio de Janeiro) 1990

viii, 90 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D. Sc., Engenharia

Civil, 1990)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Elementos Finitos Mistos 2. Pós-Processamento

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

A Regina.

Aos meus pais

A Gustavo e Tiago

AGRADECIMENTOS

A prof. Abimael Loula pela orientação, apoio e sobretudo pela lição de vida.

Ao professor Nelson Ebecken pelo apoio junto a COPPE. E mais: pela compreensão e paciência infinita durante a realização deste trabalho.

A João Guerreiro por sua contribuição decisiva na realização deste trabalho.

A Helio Barbosa pelo estímulo, pelas discussões e sugestões sempre proveitosas.

Aos colegas do LNCC, em especial a Sandra Malta, Renato Ribeiro, Regina Almeida, Eduardo Garcia, Miriam Barbuda, Ana Vasconcelos, pelo apoio, estímulo e pela convivência enriquecedora.

A José Karam Filho, pelos macros do TEX, e por tudo mais.

Ao programa de Engenharia Civil da COPPE.

Ao LNCC/CNPq onde este trabalho foi realizado.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.).

NOVAS FORMULAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS MISTOS COM PÓS-PROCESSAMENTO

Elson Magalhães Toledo

Junho de 1990

Orientador : Abimael Fernando Dourado Loula

Programa : Engenharia Civil

Nesta tese analisamos formulações de elementos finitos mistos, baseadas no método de Petrov-Galerkin para problemas sem restrição , como no caso do problema de Poisson e da elasticidade compressível, e para problemas com restrição interna como o da elasticidade incompressível.

Discutimos as dificuldades de construção de aproximações de elementos finitos para esses problemas de valor de contorno examinando detalhadamente a construção de elementos estáveis e suas taxas de convergência.

Essas novas formulações de Petrov-Galerkin além de melhorarem as taxas de convergência das formulações clássicas, transformam o problema original de ponto de sela em um problema de mínimo. Várias técnicas de pós-processamento para o cálculo dos fluxos/tensões são tambem apresentadas e discutidas.

Exemplos numéricos são apresentados confirmando o bom desempenho das formulações aqui propostas que recuperam a estabilidade e a convergência de aproximações que são instáveis com o método de Galerkin.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fullfilment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.).

NEW MIXED FINITE ELEMENT FORMULATIONS
WITH POST-PROCESSING SCHEMES

Elson Magalhães Toledo

June, 1990

Thesis Supervisor : Abimael Fernando Dourado Loula

Department : Civil Engineering

In this thesis we present a new mixed finite element formulation based on the Petrov-Galerkin method for unconstrained problems like Poisson's problem and compressible elasticity and for constrained problems like incompressible elasticity.

We discuss the main difficulties in the construction of finite element approximations to these boundary value problems examining in detail the construction of stable elements and their convergence.

These new formulations, besides enhancing the convergence rates of the classical formulations transform the original saddle point problem into a minimization one. Several post-processing techniques for the fluxes/stresses are also proposed and discussed. Numerical examples are shown which confirm the good performance of this new approach that recovers the stability and convergence of some unstable Galerkin approximations.

ÍNDICE

I . INTRODUÇÃO 1

II . PROBLEMAS SEM RESTRIÇÃO 4

II.1. Introdução 4

II.2.Formulação Cinemática 5

II.3. Problema de Poisson 8

II.3.1. Formulação Mista Primal 9

II.3.2. Formulação Mista Dual ou de Raviart-Thomas 17

II.3.3. Formulações de Petrov-Galerkin 21

II.3.4. Análise Numérica 22

II.3.5. Resultados Numéricos 28

II.4. Problema da Elasticidade Compressível 30

II.4.1. Introdução 30

II.4.2. Formulações Mistas Clássicas 31

II.4.2.1. Formulação Mista Primal 31

II.4.2.2. Formulação Mista Dual 33

II.4.3. Formulações Mistas de Petrov-Galerkin 34

II.4.4. Análise Numérica 36

III . PROBLEMAS COM RESTRIÇÃO INTERNA 39

III.1. Introdução 39

III.2. Elasticidade Linear Incompressível 41

III.2.1 Formulações Mistas Clássicas 42

III.2.2. Formulações de Petrov-Galerkin 46

III.3. Fluência Estacionária 50

III.3.1. Formulação de Petrov-Galerkin 52

III.4 Exemplos Numéricos 53

IV . FORMULAÇÕES COM PÓS-PROCESSAMENTO 61

IV.1. Introdução 61

IV.2. Formulação Pós-Processamento - Problema de Calor 61

IV.2.1. Análise Numérica 62

IV.3. Formulação de Pós-Processamento - Problema da Elasticidade 64

IV.3.1. Análise Numérica 65

IV.4. Exemplos Numéricos 66

V . CONCLUSÕES 81

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 83

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O presente trabalho insere-se no contexto do uso de modelos mistos na construção de aproximações de elementos finitos para a solução de uma grande classe de problemas da mecânica. Assim é que na literatura recente frequentemente encontramos modelos mistos aplicados a problemas de escoamento incompressiveis (Equação de Navier Stokes), ao problema de flexão de placas, elasticidade incompressível, cascas etc.

O aspecto comum que une esta categoria de problemas reside principalmente no fato de que as aproximações de elementos finitos para esses problemas com o emprego das formulações em um só campo, como as formulações cinemática e de equílibrio, padecem de dificuldades incontornáveis que tornam seu uso impraticável.

A solução natural que daí advem tem sido a utilização de formulações mistas, cuja análise para assegurar a existência e unicidade de solução não pode ser feita com o Lema de Lax. A existência e unicidade para esta categoria de problemas é feita com a utilização dos teoremas de BABUSKA(1974) e de BREZZI(1974), que além das exigências usuais de continuidade e elipticidade das formas bilineares envolvidas exigem a satisfação de condições de compatibilidade entre os espaços a serem adotados para cada uma das variáveis nas quais o problema é formulado.

Além disso outro aspecto que deve ser examinado cuidadosamente refere-se ao fato de que as propriedades do problema contínuo, tais como existência e unicidade

de solução , nem sempre são transferidas para a aproximação discreta do mesmo. Isto implica em que uma certa formulação mista pode ter solução única para o problema contínuo e sua versão discreta apresentar fenômenos indesejáveis, tais como não unicidade, trancamento e oscilações espúrias.

Apresentamos aqui, a partir de um método proposto por LOULA, HUGHES, FRANCA e MIRANDA(1987) novas formulações mistas para o estudo do problema de Poisson, da elasticidade compressível e da elasticidade incompressível usando interpolações contínuas e descontínuas.

Derivamos, para tanto, novas formulações de Petrov-Galerkin em que o problema original de ponto de sela das formulações mistas usuais, é transformado em um problema de mínimo. Dessa forma eliminam-se as restrições impostas pela necessidade da compatibilização entre os espaços de aproximação para as variáveis do problema, restando satisfazer unicamente aos requisitos de conformidade usuais na construção de aproximações com o método dos elementos finitos.

Essas novas formulações são de fácil implementação em códigos já existentes e têm como principal ganho, além desta facilidade, a melhoria sensível nas ordens de convergência para as variáveis envolvidas.

No capítulo II tratamos inicialmente de problemas onde não há nenhuma restrição interna limitando qualquer um dos campos em que a formulação é posta. Dentro desse contexto inserem-se o problema de transferencia de calor descrito pela equação de Poisson e o problema da elasticidade compressível.

No capítulo III procedemos de forma análoga para o problema da elasticidade incompressível, apresentando inclusive uma extensão aplicável ao caso de fluência estacionária.

Em seguida, no Capítulo IV, apresentamos outras formulações denominadas de formulações com pós-processamento e finalmente, no Capítulo V elaboramos

algumas conclusões e apresentamos sugestões para futuros avanços nesta área.

CAPÍTULO II

PROBLEMAS SEM RESTRIÇÃO

II.1 - Introdução

Vários fenômenos físicos, de grande interesse para a engenharia, podem ser descritos por um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem num domínio Ω. Por simplicidade consideremos $\Omega \subset R^2$ um domínio limitado com contorno regular $\Gamma = \partial\Omega$, e a seguinte classe de problemas:

Para um dado campo $\mathbf{f}$ achar os campos σ e $\mathbf{u}$, satisfazendo a

$$\text{div}\sigma + \mathbf{f} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{II.1}$$

$$A\sigma = B\mathbf{u} \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{II.2}$$

com condições de contorno $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ em Γ (condições de contorno mais gerais serão consideradas nas aplicações numéricas). Esta classe de problemas inclue, como casos particulares, o problema de transferência de calor em regime estacionário, denominado daqui por diante, como usualmente, problema de Poisson, e o problema da elasticidade, ambos restritos a domínios bidimensionais.

No caso do problema de Poisson, $\mathbf{f}$ é um escalar, $\mathbf{u}$ é um potencial (temperatura por exemplo), σ é o fluxo derivado do potencial, A é um tensor de segunda ordem (representando a condutividade), e $B = \nabla$ é o operador gradiente. No caso do problema da elasticidade, $\mathbf{f}$ é o campo vetorial de forças de volume, $\sigma = \sigma^T$ é o tensor de tensões de Cauchy, $\mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos, A é um tensor de

quarta ordem (inverso do tensor de elasticidade), e B é o operador que, no caso da elasticidade linear, define o tensor de deformação ou seja:

$$B\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \qquad (II.3)$$

II.2 - Formulação Cinemática

Seja $L^2(\Omega)$ o espaço de Hilbert contendo funções quadrado integráveis em Ω, com produto interno

$$(f,g) = \int_\Omega fg \; d\Omega\,, \qquad (II.4)$$

e norma associada

$$\|f\|_0 = \|f\| = (f,f)^{1/2}\,. \qquad (II.5)$$

Seja $H^m(\Omega)$ o espaço de Hilbert de ordem m,

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega);\ \forall\alpha, |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha f \in L^2(\Omega)\}\,, \qquad (II.6)$$

com o produto interno usual

$$(f,g)_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha f \; \partial^\alpha g \, d\Omega\,, \qquad (II.7)$$

norma associada

$$\|f\|_m = (f,f)_m^{1/2} \qquad (II.8)$$

e seminorma

$$|f|_m = (\partial^m f, \partial^m f)^{1/2}\,. \qquad (II.9)$$

A notação $\partial^\alpha f$ indica a derivada de f no sentido das distribuições , isto é,

$$(\partial f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha\varphi) \quad \forall\varphi \in D$$

onde

$$\partial^{\alpha}\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}, \quad \varphi \in D \tag{II.10}$$

com α_i inteiro natural, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, e D o espaço das funções testes. Seja ainda o subespaço de $H^1(\Omega)$ de funções que se anulam no contorno Γ i.e.:

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega), \quad f = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma\}. \tag{II.11}$$

Quando A é inversível, como no caso do problema de Poisson ou da elasticidade compressível, uma formulação natural para o problema proposto envolvendo o campo $\mathbf{u}$ apenas, normalmente referida como modelo cinemático, é facilmente obtida eliminando-se o campo σ, pela substituição de (II.2) em (II.1), resultando

$$-\text{div}(\text{A}^{-1}\text{B}\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{II.12}$$

com condições de contorno homogêneas, cuja forma variacional é

Problema PU: Achar $\mathbf{u} \in U$ tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in U \tag{II.13}$$

com $U = H_0^1(\Omega)$, no caso do problema de Poisson, ou $U = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, no caso do problema da elasticidade compressível, e

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} A^{-1}B\mathbf{u} \cdot B\mathbf{v}\, d\Omega \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U, \tag{II.14}$$

$$f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in U. \tag{II.15}$$

Que o **Problema PU** tem solução única podemos fàcilmente verificar pelo lema de Lax, uma vez que $f(\cdot)$ é contínuo e $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear, contínua e U-elíptica, isto é, existem constantes $M < \infty$ e $\gamma > 0$ tais que,

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M\|\mathbf{u}\|_U\|\mathbf{v}\|_U \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U, \tag{II.16}$$

$$a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq \gamma \|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in U. \tag{II.17}$$

Aproximações de elementos finitos para o **Problema PU** são classicamente obtidas introduzindo-se o espaço de elementos finitos $U_h^k \subset U$, onde k é o grau do polinômio de interpolação e h é o parâmetro da malha. Temos assim

Problema PU$_h$: Achar $\mathbf{u}_h \in U_h^k$ tal que

$$a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) = f(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h^k. \tag{II.18}$$

Como $U_h^k \subset U$, as propriedades (II.16) e (II.17) são imediatamente transferidas para o **Problema PU$_h$**, o que nos assegura a existência e a unicidade de solução para este problema. Pelo lema de Céa, e considerando (II.16) e (II.17), resulta

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_U \leq \sqrt{\frac{M}{\gamma}} \|\mathbf{u}-\mathbf{v}_h\|_U \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h, \tag{II.19}$$

que combinada com resultados clássicos da teoria de interpolação (CIARLET,1978) conduz às seguintes taxas de convergência para $\mathbf{u}_h$ e $\nabla \mathbf{u}_h$

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^{k+1}|\mathbf{u}|_{k+1} \tag{II.20}$$

$$\|\nabla \mathbf{u}-\nabla \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^{k}|\mathbf{u}|_{k+1}. \tag{II.21}$$

Além de não ser imediatamente aplicável ao caso da elasticidade incompressível, como se verá mais adiante, esta formulação apresenta o inconveniente de que a aproximação para σ é obtida por meio de derivadas do campo $\mathbf{u}_h$, resultando assim

$$\|\sigma-\sigma_h\|_0 \leq Ch^{k}|\mathbf{u}|_{k+1}. \tag{II.22}$$

O que significa que neste caso as aproximações obtidas para o fluxo, ou para as tensões, são sempre menos precisas que as das variáveis primitivas (temperatura ou deslocamentos). Outro inconveniente desta formulação é que ela conduz a uma

aproximação σ_h que satisfaz a equação de equilíbrio de forma extremamente fraca. Como na maioria das aplicações práticas obter uma boa aproximação para as tensões e fluxos é mais importante do que para os deslocamentos e temperatura, respectivamente, várias formulações têm sido desenvolvidas com esta finalidade, como por exemplo, formulações baseadas em modelos de equilíbrio onde a variável primitiva é a tensão (fluxo). A dificuldade com os modelos de equilíbrio é que eles exigem a construção de espaços de aproximação satisfazendo "a priori" a equação de equilíbrio. Uma alternativa para se evitar os inconvenientes das formulações em um único campo são as formulações mistas envolvendo os campos σ e $\mathbf{u}$, que consideramos a seguir, inicialmente para o problema de Poisson e posteriormente para o problema da elasticidade compressível (sem restrição).

II.3 Problema de Poisson

A construção de aproximações de elementos finitos para o problema da equação de calor não apresenta, em geral, nenhuma dificuldade conforme visto no item anterior. Na formulação então apresentada este problema pode ser posto como um problema de minimização no qual toda e qualquer aproximação conforme de elementos finitos é normalmente convergente com taxas ótimas para o campo de temperaturas, sendo que o fluxo de calor neste caso só pode ser calculado como derivada do campo de temperatura, o que acarreta perda de precisão na sua aproximação .

Com o intuito de melhorar a aproximação do fluxo um outro tratamento para este problema tem sido classicamente proposto onde se consideram os dois campos, temperatura e fluxo, como variáveis independentes, o que dá origem a um problema de ponto de sela. Neste caso duas formulações têm sido usualmente apresentadas: uma formulação mista denominada primal, com temperatura em H_0^1 e fluxo em

$(L^2)^2$, e mais recentemente, uma outra, que tem sido denominada de formulação dual, com temperatura em L^2 e fluxo em $H(\mathrm{div})$, como proposto inicialmente por RAVIART e THOMAS(1975).

Essas formulações podem ser analisadas pela utilização do teorema de BABUSKA(1973a) ou pelo teorema de BREZZI(1974), de onde concluimos que as escolhas dos espaços de aproximação para as variáveis consideradas são limitadas por uma condição de "compatibilidade" entre eles que é conhecida como a condição de Ladyszhenskaya - Babuska - Brezzi (LBB) (BABUSKA, 1973a e BREZZI, 1974).

II.3.1. - Formulação Mista Primal

Além das definições já apresentadas, consideremos o espaço produto $U = (L^2(\Omega))^2$ com norma

$$\|\mathbf{q}\|_U = (\mathbf{q}, \mathbf{q})^{1/2}\,, \tag{II.23}$$

e o subespaço

$$H(\mathrm{div}) = \{\mathbf{q} \in \mathrm{U}\,,\ \mathrm{div}\mathbf{q} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\} \tag{II.24}$$

com norma

$$\|\mathbf{q}\|_{H(\mathrm{div})} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + (\mathrm{div}\mathbf{q}, \mathrm{div}\mathbf{q})\}^{1/2}\,. \tag{II.25}$$

O problema de transferência de calor em regime estacionário aqui considerado consiste em:

Para uma dada fonte de calor f achar o fluxo de calor $\mathbf{p} : \Omega \to R^2$ e a temperatura $\theta : \Omega \to R$, satisfazendo

$$\mathrm{div}\mathbf{p} + \mathrm{f} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{II.26}$$

$$A\mathbf{p} = -\nabla\theta \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{II.27}$$

com condições de contorno tipo Dirichlet, $\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ em Γ, e A, inverso do tensor de condutividade térmica simétrico e positivo definido i.e. existe $\alpha > 0$ tal que

$$A\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} > \alpha \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \quad \forall \mathbf{q} \in R^2 , \quad \mathbf{q} \neq 0 . \tag{II.28}$$

Naturalmente, condições de contorno mais gerais podem ser consideradas (ROBERT e THOMAS, 1987).

Admitindo $f \in H^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{p} \in U$ e $\theta \in V$, a forma variacional para este problema é obtida pela utilização do Princípio de Hellinger-Reissner bastante conhecido por suas aplicações a problemas da elasticidade. Nesta formulação variacional a equação (II.26), vista como uma restrição , é relaxada com o uso da técnica dos multiplicadores de Lagrange, resultando

Problema M: Achar $\{\mathbf{p}, \theta\} \in U \times V$, tal que

$$(A\mathbf{p}, \mathbf{q}) + (\mathbf{q}, \nabla\theta) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in U , \tag{II.29}$$

$$(\mathbf{p}, \nabla\eta) - f(\eta) = 0 \quad \forall \eta \in V . \tag{II.30}$$

É importante notar que o **Problema M** é equivalente a determinar o ponto de sela $\{\mathbf{p}, \theta\} \in U \times V$ do seguinte lagrangiano

$$L(\mathbf{q}, \eta) = \frac{1}{2}(A\mathbf{q}, \mathbf{q}) + (\mathbf{q}, \nabla\eta) - f(\eta) \quad \forall \mathbf{q} \in U \quad \forall \eta \in V . \tag{II.31}$$

Isto pode ser fácilmente provado pela constatação de que as equações (II.26) e (II.27) são as equações de Euler-Lagrange do funcional L, que são equivalentes a

$$L(\mathbf{p}, \eta) \leq L(\mathbf{p}, \theta) \leq L(\mathbf{q}, \theta) \; \forall \eta \in V, \; \forall \mathbf{q} \in U. \tag{II.32}$$

Com relação a questão da existência e unicidade de solução para a classe de problemas mistos a qual pertence o **Problema M**, não podemos aplicar neste caso o Lema de Lax-Milgram. Entretanto, tal como apresentado nas equações (II.29)

e (II.30), o **Problema M** se enquadra dentro da forma abstrata dos problemas tratados pelo teorema de Brezzi, ou seja, o **Problema M** é um caso particular do seguinte problema abstrato:

Achar $\{\mathbf{p}, \theta\} \in U \times V$, tal que

$$a(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + b(\mathbf{q}, \theta) = g(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in U\,, \tag{II.33}$$

$$b(\mathbf{p}, \eta) = f(\eta) \quad \forall \eta \in V\,, \tag{II.34}$$

com a, b, f e g dados por

$$a(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (A\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in U = (L^2(\Omega))^2 \tag{II.35}$$

$$b(\mathbf{q}, \eta) = (\mathbf{q}, \nabla\eta)\ \forall \mathbf{q} \in U,\ \forall \eta \in V = H_0^1(\Omega), \tag{II.36}$$

$$g(\mathbf{q}) = 0,\ \forall \mathbf{q} \in U \tag{II.37}$$

$$f(\eta) = (f, \eta) \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega),\ f \in H^{-1}(\Omega) \tag{II.38}$$

A análise desta classe de métodos pelo teorema de Brezzi exige inicialmente a definição do seguinte problema reduzido:

Problema MR: Dados $f \in V'$ e $g \in U'$, sendo V' e U' espaços duais de U e V, determinar $\mathbf{p} \in K(f)$, tal que

$$a(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = g(\mathbf{q}), \quad \forall \mathbf{q} \in K, \tag{II.39}$$

onde

$$K(f) = \{\mathbf{q} \in U : b(\mathbf{q}, \eta\ ) = f(\eta),\ \forall \eta \in V\}, \tag{II.40}$$

$$K = K(0) = \{\mathbf{q} \in U : b(\mathbf{q}, \eta) = 0,\ \forall \eta \in V\}. \tag{II.41}$$

Notar que, como $b(\cdot, \cdot)$ é contínuo, K é um subespaço fechado de U. Notar ainda que se $\{\mathbf{p}, \theta\} \in U \times V$ é uma solução do **Problema M** então $\mathbf{p} \in K(f)$ é solução de MR (GIRAULT e RAVIART, 1986).

Com relação a existência e unicidade de solução do **Problema M** temos o seguinte resultado:

Teorema II.1 (BREZZI, 1974) :

Se $f(\cdot) : V \rightarrow R$ é contínuo e as formas bilineares $a(\cdot,\cdot) : U \times U \rightarrow R$ e $b(\cdot,\cdot) : U \times V \rightarrow R$ satisfazem as seguintes hipóteses:

(H0) – Continuidade de $a(\mathbf{p},\mathbf{q})$ e $b(\mathbf{q},\eta)$: Existem constantes, $M_1 > 0$ e $M_2 > 0$, tais que

$$|a(\mathbf{p},\mathbf{q})| \leq M_1 \|\mathbf{p}\|_U \|\mathbf{q}\|_U, \quad \forall \mathbf{p},\mathbf{q} \in U, \tag{II.42}$$

$$|b(\theta,\mathbf{q})| \leq M_2 \|\theta\|_V \|\mathbf{q}\|_U, \quad \forall \mathbf{q} \in U, \theta \in V; \tag{II.43}$$

(H1) – K-Elipticidade de $a(\mathbf{p},\mathbf{q})$: Existe uma constante $\alpha > 0$, tal que

$$|a(\mathbf{q},\mathbf{q})| \geq \alpha \|\mathbf{q}\|_U^2, \quad \forall \mathbf{q} \in K; \tag{II.44}$$

(H2) – LBB : Existe $\beta > 0$, tal que

$$\sup_{\mathbf{q} \in U} \frac{|b(\mathbf{q},\eta)|}{\|\mathbf{q}\|_U} \geq \beta \|\eta\|_V, \quad \forall \eta \in V, \tag{II.45}$$

então o **Problema M** tem uma única solução $\{\mathbf{p},\theta\} \in U \times V$.

Demonstração : Ver BREZZI (1974) ou GIRAULT e RAVIART (1986).

A condição (H2) é chamada frequentemente de condição de inf-sup e alguns autores têm se referido a ela como condição de Brezzi, outros preferem chama-la de condição de Babuska-Brezzi. A tendência maior, no entanto, e que se adota aqui, é chama-la simplesmente LBB referindo-se a Ladyszhenskaya, Babuska e Brezzi.

Para o **Problema M** aqui considerado as hipóteses (H0) - (H2) são verificadas pelas formas bilineares $a(\cdot,\cdot)$ e $b(\cdot,\cdot)$. Desse modo tem-se garantida a existência e unicidade da solução para este **Problema M** em $U \times V$.

A hipótese (H1) é satisfeita mais fortemente: a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$, como definida anteriormente, é não só K-elíptica mas também U-elíptica, i.e., existe uma constante $\alpha > 0$, tal que

$$a(\mathbf{q},\mathbf{q}) \geq \alpha \|\mathbf{q}\|_U^2 \quad \forall \mathbf{q} \in U\,. \tag{II.46}$$

Tal fato decorre diretamente das hipóteses adotadas sobre A, que foi suposta positiva definida - equação (II.28). Esta elipticidade no espaço U, e não sómente em K, tem um efeito benéfico na construção de aproximações estáveis de elementos finitos para o **Problema M**, como será mostrado em seguida.

A hipótese (H2) pode ser facilmente verificada para esta formulação já que, em função dos espaços em que estamos trabalhando, é sempre possível escolher para todo $\eta \in V$ um $\overline{\mathbf{q}} \in U$ tal que

$$\overline{\mathbf{q}} = \nabla\eta \tag{II.47}$$

Temos então

$$\sup_{\mathbf{q}\in U} \frac{b(\mathbf{q},\eta)}{\|\mathbf{q}\|_0} \geq \frac{b(\overline{\mathbf{q}},\eta)}{\|\overline{\mathbf{q}}\|_0} \geq \frac{(\overline{\mathbf{q}},\nabla\eta)}{\|\overline{\mathbf{q}}\|_0} \geq \frac{(\nabla\eta,\nabla\eta)}{\|\nabla\eta\|_0} \geq \|\nabla\eta\|_0$$

e a LBB segue imediatamente da desigualdade de Poincaré:

$$\exists\beta > 0: \qquad \|\nabla\eta\|_0 \geq \beta\sigma\Gamma\eta\|_V \;\forall\eta \in V = H_0^1(\Omega). \tag{II.48}$$

Analisamos a seguir as implicações decorrentes da satisfação dessas hipóteses sobre a construção de aproximações de elementos finitos para o **Problema M**. Para tanto admitimos, por simplicidade, que Ω é um domínio poligonal discretizado por uma malha uniforme de N_e elementos tal que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{Ne} \bar{\Omega}^e \quad \text{com} \quad \emptyset = \Omega^i \bigcap \Omega^j, \quad i \neq j, \tag{II.49}$$

onde Ω^e denota o interior do e-ésimo elemento, e $\bar{\Omega}^e$ seu fechamento. Denotamos por $h = \max h_e$, o parâmetro da malha, sendo h_e o diâmetro do elemento e. Seja $Q_h^l(\Omega)$ o espaço das funções de interpolação de elementos finitos de classe C^{-1}, polinomiais por partes de grau l, e $S_h^k(\Omega)$ o espaço das funções de interpolação de elementos finitos de classe C^0, polinomiais por partes, de grau k em cada variável para elementos quadriláteros ou em ambas variáveis para elementos triangulares. Em outras palavras Q_h^l e $S_h^k(\Omega)$ são os espaços de elementos finitos isoparamétricos usuais de graus l e k, respectivamente, sendo Q_h^l composto por funções descontínuas e S_h^k por funções contínuas na interface dos elementos.

Para elementos quadriláteros

$$Q_h^l(\Omega) = \{\phi_h \in L^2(\Omega)\,,\ \phi_h^e \in P_{l,l}(\Omega^e)\} \tag{II.50}$$

e

$$S_h^k(\Omega) = \{\eta_h \in H^1(\Omega)\,,\ \eta_h^e \in P_{k,k}(\Omega^e)\} \tag{II.51}$$

onde ϕ_h^e e η_h^e são as restrições de ϕ_h e η_h ao elemento e, e $P_{i,j}(\Omega^e)$ é o conjunto dos polinômios definidos em Ω^e, com grau menor ou igual a i e j em x_1 e x_2, respectivamente.

Para os elementos triangulares

$$Q_h^l(\Omega) = \{\phi_h \in L^2(\Omega)\,,\ \phi_h^e \in P_l(\Omega^e)\} \tag{II.52}$$

e

$$S_h^k(\Omega) = \{\eta_h \in H^1(\Omega)\,,\ \eta_h^e \in P_k(\Omega^e)\} \tag{II.53}$$

onde $P_j(\Omega^e)$ é o conjunto dos polinômios definidos em Ω^e, com grau menor ou igual a j em $x_1 x_2$. São válidas as seguintes propriedades de interpolação para os espaços de elementos finitos $S_h^k(\Omega)$ e $Q_h^l(\Omega)$, cujas provas podem ser encontradas em CIARLET (1978).

Teorema II.2 (Interpolação em $H^1(\Omega)$):

Para qualquer $\psi \in H^{m+1}(\Omega)$ e $\phi \in H^{n+1}(\Omega)$ existem constantes C_1 e C_2 e projeções $\tilde{\psi}_h \in S_h^k(\Omega)$ e $\tilde{\phi}_h \in Q_h^l$ tais que

$$\|\psi - \tilde{\psi}_h\|_0 + h\|\nabla\psi - \nabla\tilde{\psi}_h\|_0 \leq C_1 h^{m+1}|\psi|_{m+1},\ 1 \leq m \leq k, \qquad (II.54)$$

$$\|\phi - \tilde{\phi}_h\|_0 + h\|\nabla\phi - \nabla\tilde{\phi}_h\|_0 \leq C_2 h^{n+1}|\phi|_{n+1},\ 0 \leq n \leq l. \qquad (II.55)$$

A aproximação de Galerkin para o **Problema M** no espaço produto $U_h^l \times V_h^k$, com $U_h^l = (Q_h^l)^2$ e $V_h^k = S_h^k$, é dada por

Problema M_h: Achar $(\mathbf{p}_h, \theta_h) \in U_h^l \times V_h^k$, tal que

$$a(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) + b(\mathbf{q}_h, \theta_h) = 0 \quad \forall \mathbf{q}_h \in U_h^l\,, \qquad (II.56)$$

$$b(\mathbf{p}_h, \eta_h) = f(\eta_h) \quad \forall \eta_h \in V_h^k\,. \qquad (II.57)$$

De acordo com o **Teorema II.1**, existência e unicidade de solução para o **Problema M** passa pela verificação das versões discretas de (H0), (H1) e (H2). A hipótese $(H0)_h$, continuidade de $a(\cdot,\cdot)$ e $b(\cdot,\cdot)$, é automaticàmente verificada por aproximações conformes. Neste caso devem ser verificadas:

$(H1)_h$ – (K_h - Elipticidade de $a : U_h^l \times U_h^l \to R$): Existe $\alpha_h > 0$ tal que

$$a(\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h) \geq \alpha_h \|\mathbf{q}_h\|_U^2 \quad \forall \mathbf{q}_h \in K_h\,, \qquad (II.58)$$

$(H2)_h$ – (LBB discreta): Existe uma constante $\beta_h > 0$ tal que

$$\sup_{\mathbf{q}_h \in U_h^l} \frac{b(\mathbf{q}_h, \eta_h)}{\|\mathbf{q}_h\|_U} \geq \beta_h \|\eta_h\|_V, \quad \forall \eta_h \in V_h^k\,. \qquad (II.59)$$

Neste caso $(H1)_h$ é automaticamente satisfeita devido a desigualdade (II.46) e ao fato de termos adotado espaços de elementos finitos conformes, i. e. $U_h^l \subset U$. A versão discreta de (H2) no entanto impõe uma condição de compatibilidade entre

U_h^l e V_h^k: nem toda escolha U_h^l e V_h^k satisfaz $(H2)_h$. Entretanto para o **Problema** M_h é fácil obtermos combinações de U_h^l e V_h^k capazes de satisfazer esta condição . Por exemplo para $l \geq k$, a hipótese $(H2)_h$ é trivialmente verificada, já que nestes casos sempre se pode escolher $\mathbf{q}_h = \overline{\mathbf{q}}_h = \nabla\eta_h \in U_h^l$, para qualquer $\eta_h \in V_h^k$, tal que

$$\sup_{\mathbf{q}_h \in U_h^l} \frac{b(\mathbf{q}_h, \eta_h)}{\|\mathbf{q}_h\|_U} \geq \frac{b(\overline{\mathbf{q}}_h, \eta_h)}{\|\overline{\mathbf{q}}_h\|_U} \geq \|\nabla\eta_h\|_0 \quad \forall \eta_h \in V_h^k \,, \tag{II.60}$$

e $(H2)_h$ segue imediatamente da desigualdade de Poincaré, como no caso contínuo.

Sendo satisfeitas as hipóteses $(H0)_h$, $(H1)_h$ e $(H2)_h$ podemos aplicar o teorema de Brezzi ao problema aproximado e derivar a seguinte estimativa para $(\mathbf{p}_h, \theta_h)$ - BREZZI(1974)

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_U + \|\theta - \theta_h\|_V \leq C(\|\mathbf{p} - \mathbf{q}_h\|_U + \|\theta - \eta_h\|_V) \quad \forall \mathbf{q}_h \in U_h^l \quad \forall \eta_h \in V_h^k \,, \tag{II.61}$$

que no caso específico aqui considerado se traduz em:

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_0 + \|\theta - \theta_h\|_1 \leq C(\|\mathbf{p} - \mathbf{q}_h\|_0 + \|\theta - \eta_h\|_1) \quad \forall \mathbf{q}_h \in U_h^l \quad \forall \eta_h \in V_h^k \,, \tag{II.62}$$

evidenciando, como é usual neste tipo de formulação, que o erro no fluxo $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_0$ e o erro na temperatura $\|\theta - \theta_h\|_1$ são acoplados. Dessa forma, com relação as taxas de convergência, de nada adianta aumentar a ordem da interpolação para o fluxo independentemente da ordem da interpolação utilizada para a temperatura, e vice versa. Por exemplo, se se adota $l = k$, que é uma boa escolha do ponto de vista computacional, de (II.61) e com o uso dos resultados clássicos da teoria de interpolação obtém-se as seguintes estimativas de erro:

$$\|\theta - \theta_h\|_0 + h\|\nabla\theta - \nabla\theta_h\|_0 \leq Ch^{k+1}, \tag{II.63}$$

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_0 \leq Ch^k \,. \tag{II.64}$$

Essas taxas de convergência são exatamente as mesmas obtidas com a formulação cinemática para este problema (II.20) e (II.21). Além disso devemos ressaltar que nesse caso, mesmo com $l > k$ estas estimativas são preservadas.

Para $l < k$ a dificuldade surge na satisfação da condição LBB discreta com β_h independente de h (exceto quando adotamos $l = k - 1$ e elementos triangulares). Da análise acima apresentada concluimos que este método funciona, em termos de taxas de convergência, da mesma forma que seu correspondente modelo cinemático.

II.3.2 - Formulação Mista Dual ou de Raviart-Thomas

Supondo $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{p} \in H(\mathrm{div})$ e $\theta \in L^2(\Omega)$, o problema de calor pode ser também formulado como:

Problema M^*: Achar $\{\mathbf{p}, \theta\} \in H(\mathrm{div}) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ tal que

$$a(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + b^*(\mathbf{q}, \theta) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in H(\mathrm{div}), \tag{II.65}$$

$$b^*(\mathbf{p}, \eta) = f(\eta) \quad \forall \eta \in L^2(\Omega), \tag{II.66}$$

com $a(\cdot,\cdot)$ e $f(\cdot)$ como definido anteriormente, mas em $H(\mathrm{div})$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente, e

$$b^*(\mathbf{q}, \eta) = -(\mathrm{div}\mathbf{q}, \eta) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathrm{H(div)} \quad \forall \eta \in \mathrm{L}^2(\Omega). \tag{II.67}$$

Nesta formulação a continuidade de $a(\cdot,\cdot)$, $b^*(\cdot,\cdot)$ e $f(\cdot)$ são preservadas em $H(\mathrm{div})$ e $L^2(\Omega)$. A LBB para η é também verificada. Entretanto a elipticidade de $a(\cdot,\cdot)$ na norma de $H(\mathrm{div})$ está restrita ao subespaço dos fluxos auto-equilibrados $K = K(0)$, i.e.,

$(H1)^*$ – (K–Elipticidade de $a : U \times U \to R$): Existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \geq \alpha \|\mathbf{q}\|^2_{H(\mathrm{div})} \quad \forall \mathbf{q} \in K, \tag{II.68}$$

$(H2)^*$ – (LBB): Existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{\mathbf{q}\in H(\mathrm{div})} \frac{b^*(\mathbf{q},\eta)}{\|\mathbf{q}\|_{H(\mathrm{div})}} \geq \beta\|\eta\|_0, \quad \forall\eta \in L^2(\Omega)\,. \tag{II.69}$$

A satisfação da hipótese $(H1)^*$ é imediata já que por definição

$$K = \{\mathbf{q} \in H(\mathrm{div})\,,\ \mathrm{div}\mathbf{q} = 0\}\,. \tag{II.70}$$

A LBB, hipótese $(H2)^*$, pode ser provada empregando-se o seguinte resultado auxiliar (ROBERT e THOMAS, 1987): Para cada $\eta \in L^2(\Omega)$ existe $\overline{\mathbf{q}} \in H(\mathrm{div})$ tal que

$$\mathrm{div}\overline{\mathbf{q}} = \eta \quad \text{e} \quad \|\overline{\mathbf{q}}\|_{H(\mathrm{div})} \leq C\|\eta\|_0$$

Deste modo temos

$$\sup_{\mathbf{q}\in H(\mathrm{div})} \frac{b^*(\mathbf{q},\eta)}{\|\mathbf{q}\|_{H(\mathrm{div})}} \geq \frac{(\mathrm{div}\overline{\mathbf{q}},\eta)}{\|\overline{\mathbf{q}}\|_{\mathrm{H(div)}}} \geq \frac{(\eta,\eta)}{C\|\eta\|_0} \geq \frac{\|\eta\|_0^2}{C\|\eta\|_0} \geq \beta\|\eta\|_0, \tag{II.71}$$

o que demonstra a (II.69) com $\beta = \frac{1}{C}$

Analisemos agora o aproximação discreta do **Problema** M^*. Inicialmente é importante ressaltar que para construir esta aproximação é necessário a construção de subespaços de dimensão finita dos espaços $H(\mathrm{div})$ e L^2 onde esta formulação foi estabelecida. Esses espaços devem possuir boa capacidade de aproximação e satisfazer as condições de compatibilidade exigidas para satisfação das versões discretas de $(H1)^*$ e $(H2)^*$. Para tanto são frequentemente empregados, neste caso, os espaços propostos por RAVIART e THOMAS (1978). Os espaços de Raviart-Thomas de ordem k, $W_h^k \times M_h^k$, são tais que $M_h^k \subset L^2(\Omega)$ é idêntico a Q_h^{k-1}, e

$$W_h^k = \{\mathbf{q}_h \in H(\mathrm{div})\,, \mathbf{q}_\mathrm{h}^\mathrm{e} \in \mathrm{P_{k,k-1}}(\Omega^\mathrm{e}) \times \mathrm{P_{k-1,k}}(\Omega^\mathrm{e})\} \tag{II.72}$$

para elementos retangulares, ou

$$W_h^k = \{\mathbf{q}_h \in H(\mathrm{div})\,, \mathbf{q}_\mathrm{h}^\mathrm{e} \in \mathrm{P_{k-1}}(\Omega^\mathrm{e}) \times \mathrm{P_{k-1}}(\Omega^\mathrm{e}) + \mathbf{x}\mathrm{P_{k-1}}(\Omega^\mathrm{e})\} \tag{II.73}$$

para elementos triangulares. Esses espaços W_h^k e M_h^k de elementos finitos possuem as seguintes propriedades de interpolação, cujas provas podem ser encontradas em RAVIART-THOMAS (1980) ou em ROBERT e THOMAS(1987).

Teorema II.3 (Interpolação em $H(\mathrm{div})$:

Existe uma constante C e uma projeção $\tilde{\mathbf{q}}_h \in W_h^k$ tal que

$$\|\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}_h\|_0 \leq Ch^m |\mathbf{q}|_m \quad \forall \mathbf{q} \in (H^m(\Omega))^2\,,\ 1 \leq m \leq k\,, \tag{II.74}$$

$$\|\mathrm{div}(\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}_h)\|_0 \leq Ch^m |\mathrm{div}\mathbf{q}|_m \quad \forall \mathbf{q} \in (H^1(\Omega))^2, \tag{II.75}$$

com

$$\mathrm{div}\mathbf{q} \in H^m(\Omega)\,,\ 0 \leq m \leq k$$

A aproximação de Galerkin para o Problema M^* nesses espaços consiste em:

Problema M_h^*: Achar $(\mathbf{p}_h, \theta_h) \in W_h^k \times M_h^k$ tal que

$$a(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) + b^*(\mathbf{q}_h, \theta_h) = 0 \quad \forall \mathbf{q}_h \in W_h^k\,, \tag{II.76}$$

$$b^*(\mathbf{p}_h, \eta_h) = f(\eta_h) \quad \forall \eta_h \in M_h^k\,. \tag{II.77}$$

As versões discretas das hipóteses $(H1)$ e $(H2)$ a serem verificadas neste caso são

$(H1)_h^*$ – ($K_h{}^*$-Elipticidade de $a : W_h^k \times W_h^k \to R$): Existe $\alpha_h > 0$ tal que

$$a(\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h) \geq \alpha_h \|\mathbf{q}_h\|^2_{H(\mathrm{div})} \quad \forall \mathbf{q}_h \in K_h^*\,, \tag{II.78}$$

com

$$K_h^* = \{\mathbf{q}_h \in W_h^k\,,\ b^*(\mathbf{q}_h, \eta_h) = 0\ \forall \eta_h \in M_h^k\} \tag{II.79}$$

$(H2)_h^*$ – (LBB discreta): Existe uma constante $\beta_h > 0$ tal que

$$\sup_{\mathbf{q}_h \in W_h^k} \frac{b^*(\mathbf{q}_h, \eta_h)}{\|\mathbf{q}_h\|_{H(\mathrm{div})}} \geq \beta_h \|\eta_h\|_0, \quad \forall \eta_h \in M_h^k\,. \tag{II.80}$$

Os espaços de Raviart-Thomas são construídos de tal forma que para todo $\eta_h \in M_h^k$ existe $\mathbf{q}_h \in W_h^k$ com $\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h} = \eta_\mathrm{h}$, e vice versa. Assim, da definição de K_h^* temos que os elementos $\mathbf{q}_h \in K_h^*$ satisfazem a

$$b^*(\mathbf{q}_h, \eta_h) = 0 \ \forall \eta_h \in M_h^k \tag{II.81}$$

ou

$$(\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}, \eta_\mathrm{h}) = 0. \tag{II.82}$$

Com a escolha acima citada obtemos:

$$\|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\|^2 = 0 \iff \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h} = 0\,, \tag{II.83}$$

de onde concluimos que, neste caso, $K_h^* \subset K$, as hipóteses discretas $(H1)_h^*$ e $(H2)_h^*$ são verificadas e podemos aplicar o teorema de Brezzi para provar existência e unicidade da solução para o Problema M_h^* e derivar a seguinte estimativa:

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div})} + \|\theta - \theta_h\|_0 \leq C(\|\mathbf{p} - \mathbf{q}_h\|_{H(\mathrm{div})} + \|\theta - \eta_h\|_0) \tag{II.84}$$

$$\forall \mathbf{q}_h \in W_h^k \quad \forall \eta_h \in M_h^k\,, \tag{II.85}$$

que combinada com (II.74) a (II.75) conduz a:

$$\|\theta - \theta_h\|_0 \leq C(\theta, \mathbf{p}) h^k\,, \tag{II.86}$$

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div})} \leq C(\theta, \mathbf{p}) h^k\,, \tag{II.87}$$

válidas para soluções $(\mathbf{p}, \theta)$ suficientemente regulares, isto é $\mathbf{p} \in (H^k(\Omega))^2$ com $\mathrm{div}\mathbf{p} \in H^k(\Omega)$ e $\theta \in H^k(\Omega)$.

Podemos observar das taxas de convergência acima apresentadas que esta formulação melhora a taxa de convergência para aproximação do fluxo se comparada com aquela obtida com a formulação anterior - formulação primal. Entretanto o oposto acontece com a aproximação para a temperatura, já que esta é agora

expressa na norma de L^2. Para sanar tais inconvenientes apresentamos a seguir novas formulações de Petrov-Galerkin onde esses problemas são evitados.

II.3.3 - Formulações de Petrov-Galerkin

Seguindo a metodologia introduzida em LOULA, HUGHES, FRANCA e MIRANDA (1987), apresentamos aqui novas formulações mistas de elementos finitos para o problema estacionário de transferência de calor em temperatura e fluxo com menos e até mesmo sem qualquer limitação na escolha dos espaços de aproximação dessas variáveis. Inicialmente apresentamos formulações mistas clássicas, suas análises, taxas de convergências possíveis e dificuldades que surgem nas suas aplicações. Em seguida apresentamos e analisamos novas formulações mistas para o caso em questão, obtidas com a adição consistente de formas residuais de mínimos quadrados das equações originais do problema. Dessa forma, como será mostrado, transforma-se o problema de ponto de sela das formulações mistas clássicas em um novo problema de minimização. Como as aproximações de elementos finitos em subespaços de $U = H(\mathrm{div})$ e $V = H^1(\Omega)$ baseadas no método de Galerkin, não são necessáriamente estáveis propomos a seguir uma formulação de Petrov-Galerkin para o modelo dual do **Problema M** em espaços de elementos finitos $H_h^l \subset H(\mathrm{div})$ e $V_h^k \subset H^1(\Omega)$, obtida adicionando-se à forma variacional dual termos do tipo mínimos quadrados dos resíduos das equações que governam o problema, resultando então:

$$(A\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) - (\mathrm{div}\mathbf{q}_h, \theta_h) - (\mathrm{div}\mathbf{p}_h, \eta_h) - f(\eta_h) +$$

$$+\delta_1(\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h} + \mathrm{f}, \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) + \delta_2(\mathrm{A}\mathbf{p}_\mathrm{h} + \nabla\theta_\mathrm{h}, \mathbf{q}_\mathrm{h} + \mathrm{A}^{-1}\nabla\eta_\mathrm{h}) = 0,$$

$$\forall \mathbf{q}_h \in H_h^l,\ \forall \eta_h \in V_h^k \qquad (II.88)$$

que pode ser apresentada na forma

Problema PG_δ: Achar $(\mathbf{p}_h, \theta_h) \in H_h^l \times V_h^k$, tal que

$$A_\delta(\{\mathbf{p}_h, \theta_h\}, \{\mathbf{q}_h, \eta_h\}) - F_\delta(\{\mathbf{q}_h, \eta_h\}) = 0 \quad \forall \{\mathbf{q}_h, \eta_h\} \in H_h^l \times V_h^k \,, \qquad (II.89)$$

onde

$$A_\delta(\{\mathbf{p}_h, \theta_h\}, \{\mathbf{q}_h, \eta_h\}) = (A\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) - (\mathrm{div}\mathbf{q}_h, \theta_h) - (\mathrm{div}\mathbf{p}_h, \eta_h)$$

$$+\delta_1(\mathrm{div}\mathbf{p}_h, \mathrm{div}\mathbf{q}_h) + \delta_2(A\mathbf{p}_h + \nabla\theta_h, \mathbf{q}_h + A^{-1}\nabla\eta_h)\,, \qquad (II.90)$$

$$F_\delta(\{\mathbf{q}_h, \eta_h\}) = f(\eta_h) - \delta_1(f, \mathrm{div}\mathbf{q}_h). \qquad (II.91)$$

É importante notar que, como será mostrado a seguir, o Problema PG_δ é equivalente ao seguinte problema de minimização :

Problema PJ - Achar $(\mathbf{p}_h, \theta_h) \in H_h^l \times V_h^k$ tal que

$$J_\delta(\mathbf{p}_h, \theta_h) \leq J_\delta(\mathbf{q}_h, \eta_h) \quad \forall (\mathbf{q}_h, \eta_h) \in H_h^l \times V_h^k \,, \qquad (II.92)$$

com

$$J_\delta(\mathbf{q}_h, \eta_h) = \frac{1}{2} A_\delta(\{\mathbf{q}_h, \eta_h\}, \{\mathbf{q}_h, \eta_h\}) - F_\delta(\{\mathbf{q}_h, \eta_h\})\,. \qquad (II.93)$$

Os termos em δ_1 e δ_2 tem por objetivo dar estabilidade ao problema. Se consideramos $\delta_1 = \delta_2 = 0$, recaimos na formulação de Raviart-Thomas apresentada anteriormente.

II.3.4 - Análise Numérica

Demonstramos a seguir que a formulação proposta satisfaz os requisitos necessários para a estabilidade e convergência das aproximações numéricas do problema de Poisson. Para tanto definimos inicialmente como norma do espaço produto aqui considerado:

$$\|\{\mathbf{q}, \eta\}\|_{H(\mathrm{div})\times V} = \|\mathbf{q}\|_{H(\mathrm{div})} + \|\eta\|_V \quad \forall \mathbf{q} \in H(\mathrm{div}) \quad \forall \eta \in V \,, \qquad (II.94)$$

e verificamos que a formulação proposta tem as seguintes propriedades:

1. **Consistência**

A solução exata $\{\mathbf{p},\theta\} \in H(\mathrm{div}) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ do **Problema M** original satisfaz a expressão da forma variacional discreta PG_δ ou seja:

$$A_\delta(\{\mathbf{p},\theta\},\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) - F_\delta(\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) = 0 \quad \forall\{\mathbf{q}_h,\eta_h\} \in H_h^l \times V_h^k \qquad (II.95)$$

Esta consistência decorre de que os espaços de aproximação aqui considerados para $\{\mathbf{p}_h,\theta_h\}$ são tais que $H_h^l \subset H(\mathrm{div})$ e $V_h^k \subset H_0^1(\Omega)$ e, do fato de que o problema discreto PG_δ foi construído a partir de resíduos das equações do problema, utilizando sobre a equação de balanço - $\mathrm{div}\mathbf{p} + \mathrm{f} = 0$ - a função peso

$$\mathbf{w}_h = -\eta_h + \delta_1 \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\,, \qquad (II.96)$$

e sobre a equação constitutiva - $A\mathbf{p} = -\nabla\theta$ - a função peso

$$\mathbf{r}_h = \mathbf{q}_h + \delta_2(\mathbf{q}_h + A^{-1}\nabla\eta_h). \qquad (II.97)$$

Temos então

$$(\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h} + \mathrm{f}, -\eta_\mathrm{h} + \delta_1 \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) +$$

$$+(A\mathbf{p}_h + A^{-1}\nabla\theta_h, \mathbf{q}_h + \delta_2(\mathbf{q}_h + A^{-1}\nabla\eta_h)) = 0$$

$$\forall\mathbf{q}_h \in H_h^l, \theta_h \in V_h^k \qquad (II.98)$$

Integrando por partes o termo $(\mathbf{q}_h, \nabla\theta_h)$, e separando os termos pesados por $\mathbf{q}_h$ e η_h obtemos imediatamente:

$$(A\mathbf{p}_h, \theta_h) - (\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}, \theta_\mathrm{h}) - (\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}, \eta_\mathrm{h}) - (\mathrm{f}, \eta_\mathrm{h}) +$$

$$+\delta_1(\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h} + \mathrm{f}, \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) + \delta_2(\mathrm{A}\mathbf{p}_\mathrm{h} + \nabla\theta_\mathrm{h}, \mathbf{q}_\mathrm{h} + \mathrm{A}^{-1}\nabla\eta_\mathrm{h}) = 0 \qquad (II.99)$$

que é idêntica a equação variacional (II.89) que caracteriza o **Problema** PG_δ.

2. Continuidade

A forma bilinear $A_\delta(\cdot,\cdot) : (H(\mathrm{div}) \times V) \times (H(\mathrm{div}) \times V) \rightarrow R$ é contínua, isto é: Existe uma constante $M < \infty$, tal que

$$A_\delta(\{\mathbf{p},\theta\},\{\mathbf{q},\eta\}) \leq M\|\{\mathbf{p},\theta\}\|_{H(\mathrm{div})\times \mathrm{V}}\|\{\mathbf{q},\eta\}\|_{H(\mathrm{div})\times \mathrm{V}}$$

$$\forall\{\mathbf{p},\theta\}\,,\ \{\mathbf{q},\eta\} \in H(\mathrm{div}) \times \mathrm{V}\,, \qquad (II.100)$$

Da definição de A_δ

$$A_\delta(\{\mathbf{p}_h,\theta_h\},\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) = (A\mathbf{p}_h,\mathbf{q}_h) - (\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h},\eta_\mathrm{h}) - (\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h},\theta_\mathrm{h}) +$$

$$+\delta_1(\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h},\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) + \delta_2(\mathrm{A}\mathbf{p}_\mathrm{h} + \nabla\theta_\mathrm{h}\,,\ \mathbf{q}_\mathrm{h} + \mathrm{A}^{-1}\nabla\eta_\mathrm{h})\,, \qquad (II.101)$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$A_\delta(\{\mathbf{p}_h,\theta_h\},\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) \leq \|A\|\ \|\mathbf{p}_h\|\ \|\mathbf{q}_h\| + \|\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}\|\ \|\eta_\mathrm{h}\| + \|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\|\ \|\theta_\mathrm{h}\| +$$

$$+\delta_1\|\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}\|\ \|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\| + \delta_2\|\mathrm{A}\|\ \|\mathbf{p}_\mathrm{h}\|\ \|\mathbf{q}_\mathrm{h}\| + \delta_2\|\mathrm{A}^{-1}|\ \|\nabla\theta_\mathrm{h}\|\ \|\nabla\eta_\mathrm{h}\| +$$

$$+\delta_2(\mathbf{p}_h,\nabla\eta_h) + \delta_2(\mathbf{q}_h,\nabla\theta_h)\,. \qquad (II.102)$$

Integrando por partes os dois últimos termos de (II.102) chegamos a:

$$A_\delta(\{\mathbf{p}_h,\theta_h\},\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) \leq \|A\|(1+\delta_2)(\|\mathbf{p}_h\|\ \|\mathbf{q}_h\|) + \delta_1\|\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}\|\ \|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\| +$$

$$+(1+\delta_2)\|\mathrm{div}\mathbf{q}_h\|\ \|\theta_h\| + (1+\delta_2)\|\mathrm{div}\mathbf{p}_h\|\ \|\eta_h\| +$$

$$+\delta_2\|A^{-1}\|\nabla\eta_h\|\ \|\nabla\theta_h\| \qquad (II.103)$$

Podemos então reescrever (II.103) como

$$A_\delta(\{\mathbf{p}_h,\theta_h\},\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) \leq C_1\|\mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div})}\ \|\mathbf{q}_h\|_{H(\mathrm{div})} + (1+\delta_2)\|\mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div})}\ \|\eta_h\|_1 +$$

$$+(1+\delta_2)\|\theta_h\|_1\ \|\mathbf{q}_h\|_{H(\mathrm{div})} + \delta_2\|A^{-1}\|\ \|\theta_h\|_1\ \|\eta_h\|_1 \qquad (II.104)$$

onde

$$C_1 = 2\max\{\|\mathrm{A}\|(1+\delta_2)\ ,\ \delta_1\}. \qquad (II.105)$$

Definindo M como

$$M = \max\{\mathrm{C}_1\ ,\ 1+\delta_2\ ,\ \delta_2\|\mathrm{A}^{-1}\|\} \qquad (II.106)$$

Obtemos imediatamente:

$$A_\delta(\{\mathbf{p}_h,\theta_h\},\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) \leq M\left\{\|\mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div})}\ \|\mathbf{q}_h\|_{H(\mathrm{div})} + \|\mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div})}\|\eta_h\|_1 + \right.$$

$$\left. + \|\mathbf{q}_h\|_{H(\mathrm{div})}\ \|\theta_h\|_1 + \|\theta_h\|_1\ \|\eta_h\|_1\right\}. \qquad (II.107)$$

De onde concluimos que

$$A_\delta(\{\mathbf{p}_h,\theta_h\},\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) \leq M(\|\mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div})} + \|\theta_h\|_1)(\|\mathbf{q}_h\|_{H(\mathrm{div})} + \|\eta_h\|_1) \qquad (II.108)$$

ou

$$A_\delta(\{\mathbf{p}_h,\theta_h\},\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) \leq M\,\|\mathbf{p}_h,\theta_h\|_{H(\mathrm{div})\times\mathrm{V}}\|\mathbf{q}_h,\eta_h\|_{H(\mathrm{div})\times\mathrm{V}}\,, \qquad (II.109)$$

o que demonstra a continuidade A_δ.

2. $U_h^l \times V_h^k$ – **Elipticidade de** A_δ^*

Existe uma constante $\alpha_h > 0$, independente de h, tal que

$$A_\delta(\{\mathbf{q}_h,\eta_h\},\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) \geq \alpha_h\|\mathbf{q}_h,\eta_h\|^2_{H(\mathrm{div})\times\mathrm{V}} \quad \forall \mathbf{q}_h,\eta_h \in H(\mathrm{div})^{\mathrm{l}}_{\mathrm{h}} \times \mathrm{V}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{h}}. \qquad (II.110)$$

Da expressão de A_δ

$$A_\delta(\{\mathbf{q}_h,\eta_h\},\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) = (A\mathbf{q}_h,\mathbf{q}_h) - (\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h},\eta_\mathrm{h}) - (\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h},\eta_\mathrm{h}) +$$

$$+\delta_1(\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h},\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) + \delta_2(\mathrm{A}\mathbf{q}_\mathrm{h} + \nabla\eta_\mathrm{h},\mathbf{q}_\mathrm{h} + \mathrm{A}^{-1}\nabla\eta_\mathrm{h}), \qquad (II.111)$$

e considerando (II.17) e (II.28) temos

$$A_\delta(\{\mathbf{q}_h,\eta_h\},\{\mathbf{q}_h,\eta_h\}) \geq \alpha\|\mathbf{q}_h\|^2 + \delta_1\|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\|^2 - 2(\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h},\eta_\mathrm{h}) +$$

$$+\delta_2\alpha\|\mathbf{q}_h\|^2 + \delta_2\gamma\|\eta_h\|_1^2 + 2\delta_2(\mathbf{q}_h, \nabla\eta_h)\,. \qquad (II.112)$$

Integrando por partes o último termo e utilizando a desigualdade de Poincaré (II.48), resulta

$$A_\delta(\{\mathbf{q}_h, \eta_h\}, \{\mathbf{q}_h, \eta_h\}) \geq \alpha(1+\delta_2)\,\|\mathbf{q}_h\|^2 + \frac{\delta_2\gamma}{2}\|\eta_h\|_1^2 +$$

$$+\delta_1\|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\|^2 - 2(1+\delta_2)(\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}, \eta_\mathrm{h}) + \frac{\delta_2\gamma\mathrm{C}}{2}\|\eta_\mathrm{h}\|^2\,. \qquad (II.113)$$

Usando a desigualdade

$$-2\mathbf{ab} \geq -\kappa\|\mathbf{b}\|^2 - \frac{1}{\kappa}\|\mathbf{a}\|^2 \;\; \forall\kappa > 0, \qquad (II.114)$$

temos que

$$-2(1+\delta_2)(\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}, \eta_\mathrm{h}) \geq -\frac{1+\delta_2}{\kappa}\|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\|^2 - \kappa(1+\delta_2)\|\eta_\mathrm{h}\|^2 \;\; \forall\kappa > 0 \qquad (II.115)$$

que substituída em (II.113) nos permite obter

$$A_\delta(\{\mathbf{q}_h, \eta_h\}, \{\mathbf{q}_h, \eta_h\}) \geq \alpha_h(\|\mathbf{q}_h\|^2 + \|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\|^2 + \|\eta_\mathrm{h}\|^2 + \|\nabla\mathbf{v}_\mathrm{h}\|^2) \qquad (II.116)$$

Ou seja

$$A_\delta(\{\mathbf{p}_h, \theta_h\} \geq 2\alpha_h\|\{\mathbf{q}_h, \eta_h\}\|^2_{H(\mathrm{div})\times\mathrm{V}}\,, \qquad (II.117)$$

o que demonstra a elipticidade de A_δ com

$$2\alpha_h = \min\left\{\alpha(1+\delta_2),\; \delta_1 - \frac{1+\delta_2}{\kappa},\; \frac{\delta_2\gamma}{2},\; \frac{\mathrm{C}\delta_2\gamma}{2} - \kappa(1+\delta_2)\right\} \qquad (II.118)$$

Onde a constante $\alpha_h > 0$ desde que

$$\kappa < \frac{\delta_2 C\gamma}{2(1+\delta_2)} \qquad (II.119)$$

e

$$\delta_1 > \frac{2(1+\delta_2)^2}{\delta_2 C\gamma} \qquad (II.120)$$

4. Existência, Unicidade e Erro de Aproximação

A existência e unicidade de solução para o **Problema** PG_δ seguem imediatamente da continuidade e elipticidade através do lema de Lax. Da consistência da formulação obtemos fácilmente a propriedade da ortogonalidade do erro ao espaço $U_h^l \times V_h^k$, e tendo em vista a simetria da forma bilinear associada ao **Problema** PG_δ, temos

$$\|\{\mathbf{p}-\mathbf{p}_h, \theta-\theta_h\}\|_{H(\mathrm{div})\times \mathrm{V}} \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha_h}} \|\{\mathbf{p}-\mathbf{q}_h, \theta-\eta_h\}\|_{H(\mathrm{div})\times \mathrm{V}}$$

$$\forall \{\mathbf{q}_h, \eta_h\} \in H_h^l \times V_h^k, \qquad (II.121)$$

que é precisamente a expressão do lema de Céa no espaço produto $H_h^l \times V_h^k$.

5. Equivalência com o Problema de Mínimo

A equivalência entre o problema de mínimo - **Problema PJ** - e a formulação aqui proposta - **Problema** PG_δ – decorre das seguintes constatações :

i - Diferenciabilidade de J_δ -

O funcional J_δ é diferenciável no sentido de Gateaux, sendo

$$A_\delta(\{\mathbf{p}_h, \theta_h\}, \{\mathbf{q}_h, \eta_h\}) - F_\delta(\{\mathbf{q}_h, \eta_h\}) \qquad (II.122)$$

sua derivada no ponto $\{\mathbf{p}_h, \theta_h\}$ na direção $\{\mathbf{q}_h, \eta_h\}$. Pelas definições dos espaços e regularidades aqui assumidas é sempre possível calcular este diferencial e pela condição de estacionaridade de J_δ recuperar as equações originais do problema (II.88).

ii - Convexidade de J_δ -

O funcional J_δ é estritamente convexo ou seja, para todo $0 < \zeta < 1$,

$$J_\delta(\zeta\{\mathbf{p}_h, \theta_h\} + (1-\zeta)\{\mathbf{q}_h, \eta_h\}) < \zeta J_\delta(\{\mathbf{p}_h, \eta_h\}) + (1-\zeta) J_\delta(\{\mathbf{q}_h, \eta_h\}). \quad (II.123)$$

ii - Coercividade de J_δ -

J_δ é coercivo isto é

$$\lim_{\|\{q_h,\eta_h\}\|\to\infty} J_\delta(q_h,\eta_h) \to \infty \qquad (II.124)$$

6. Estimativas de erro e Comentários

Levando em conta a expressão do Lema de Céa (II.121) e as propriedades de interpolação nos espaços $H(\mathrm{div})$ (II.74) e (II.75) e H^1 (II.54) e (II.55) , para $k = l$, temos as seguintes estimativas:

$$\|\theta - \theta_h\|_0 + h\|\nabla\theta - \nabla\theta_h\|_0 \leq Ch^{k+1} \qquad (II.125)$$

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div})} \leq Ch^k\,, \qquad (II.126)$$

admitindo que as soluções exatas $\{\mathbf{p},\theta\}$ sejam suficientemente regulares.

Dessa forma concluimos que com esta nova formulação melhoramos a taxa de convergência para a aproximação do fluxo sem, no entanto, comprometer a taxa de convergência para a temperatura.

II.3.5 - Resultados Numéricos

Para confirmar as taxas de convergências estabelecidas na análise consideramos um exemplo simples, com solução exata conhecida, consistindo na solução de um problema de condução de calor num domínio quadrado $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, sujeito a uma fonte

$$f = \mathrm{sen}\pi\mathrm{x}\ \mathrm{sen}\pi\mathrm{y}\,, \qquad (II.127)$$

cuja solução exata é:

$$\theta = \frac{1}{2\pi^2}\mathrm{sen}\pi\mathrm{x}\ \mathrm{sen}\pi\mathrm{y}, \qquad (II.128)$$

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{2\pi}\cos\pi x\ \mathrm{sen}\pi\mathrm{y}, \qquad (II.129)$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{1}{2\pi}\mathrm{sen}\pi\mathrm{x}\ \cos\pi\mathrm{y}. \qquad (II.130)$$

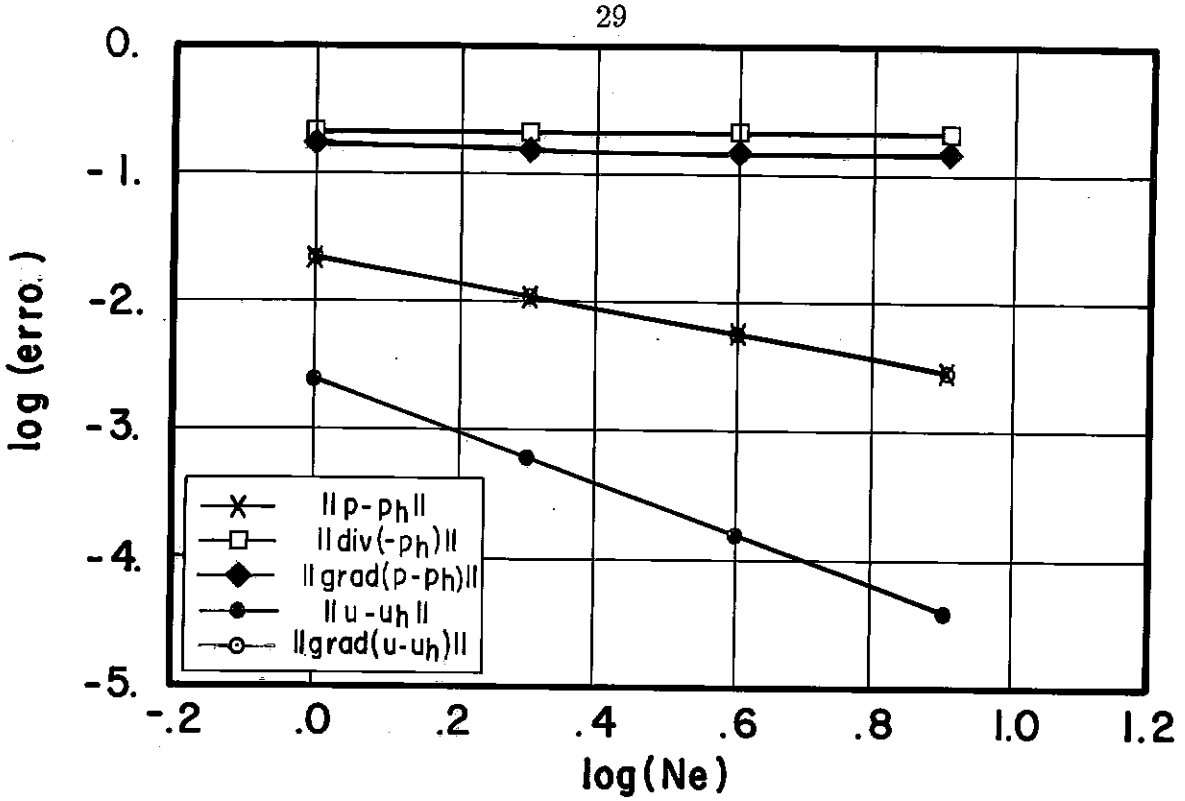


Fig. II.1 Formulação Mista Primal de Galerkin.

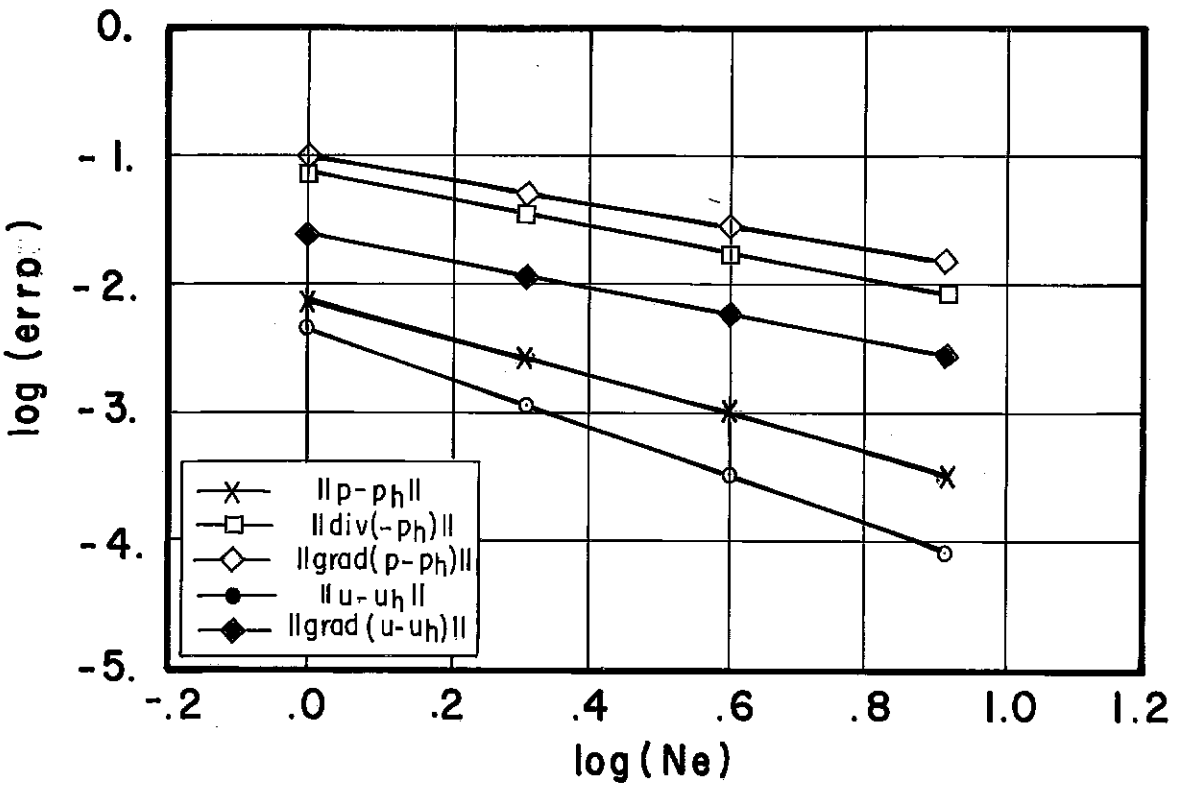


Fig. II.2 Formulação Mista Dual de Petrov-Galerkin.

Na análise de elementos finitos adotamos malhas uniformes com 1, 4, 16 e 64 elementos bilineares com interpolações de igual ordem $k = l = 1$, associada com uma formulação primal com interpolações descontínuas para o fluxo, e a formulação mista de Petrov-Galerkin com interpolações contínuas para o fluxo – **Problema** PG_h.

Na Figura II.1 apresentamos o gráfico relacionando o logaritmo do número de elementos com o logaritmo da norma L^2 do erro das aproximações de elementos finitos: $\mathbf{p}_h$, $\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}$, $\nabla\mathbf{p}_\mathrm{h}$, θ_h e $\nabla\theta_h$, obtidas com a formulação clássica de Galerkin. O estudo feito confirmou as taxas de convergências previstas para θ_h, $\nabla\theta_h$ e $\mathbf{p}_h$ (nesse caso $\mathbf{p}_h = \nabla\theta_h$). Como se pode observar, não se obtem convergência na norma L^2 para $\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}$ ou $\nabla\mathbf{p}_h$.

Na Figura II. 2 apresentamos o mesmo tipo de comparação para a formulação mista dual de Petrov-Galerkin com interpolações contínuas para os fluxos onde adotamos $\delta_1 = 0.1$ e $\delta_2 = 1.0$. Note-se a acentuada melhora para as aproximações dos fluxos: além da convergência de $\mathbf{p}_h$ também $\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}$ e $\nabla\mathbf{p}_h$ convergem na norma L^2.

II.4 - Problema da Elasticidade Compressível

II.4.1 - Introdução

Do mesmo modo que no problema de Poisson, a construção de aproximações de elementos finitos para o problema da elasticidade compressível, baseadas em modelos cinemáticos, em geral não apresenta qualquer dificuldade, já que este problema equivale a minimizar um funcional quadrático em um espaço de Hilbert. Neste caso, como no anterior, aproximações de elementos finitos conformes convergem normalmente com taxas ótimas sendo o campo de tensões calculado via

gradiente do campo de deslocamentos o que acarreta aproximações menos precisas para as tensões.

Seguindo então o roteiro do item II.3 apresentamos inicialmente as formulações clássicas para este problema efetuando sua análise para a seguir propor novas formulações que eliminam as desvantagens apresentadas por essas formulações clássicas

II.4.2 - Formulações Mistas Clássicas

II.4.2.1 - Formulação Mista Primal

Sejam os espaços U e V definidos por

$$U = \{\tau = [\tau_{ij}],\ \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega);\ i,j = 1,2\}$$

e

$$V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

A formulação mista primal para o problema proposto, em tensão e deslocamento, consiste em

Problema ME : Dado $\mathbf{f} \in V'$, espaço dual de V, achar o par $(\sigma, \mathbf{u}) \in U \times V$ tal que

$$(A\sigma, \tau) = b(\tau, \mathbf{u}) \quad \forall \tau \in U, \tag{II.131}$$

$$b(\sigma, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{II.132}$$

onde

$$(A\sigma, \tau) = \int_\Omega A\sigma : \tau \, d\Omega \quad \forall \sigma, \tau \in U\,, \tag{II.133}$$

$$b(\tau, \mathbf{v}) = \int_\Omega \tau : B\mathbf{v} \, d\Omega \quad \forall \tau \in U \quad \forall \mathbf{v} \in V\,, \tag{II.134}$$

$$f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in V\,, \quad \mathbf{f} \in V'\,, \tag{II.135}$$

que é equivalente a achar o ponto de sela do funcional lagrangiano

$$L(\tau, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(A\tau, \tau) + b(\tau, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}) \quad \forall \tau \in U \quad \forall \mathbf{v} \in V\,.$$

Para a aproximação de elementos finitos para o **Problema M** consideremos $V_h^k \subset V$ e $U_h^l \subset U$ espaços gerados pelos polinomios de graus k e l, respectivamente, com V_h^k de classe C^0 (funções de interpolação contínuas) e U_h^l de classe C^{-1} (funções de interpolação descontínuas nas interfaces dos elementos). A formulação de Galerkin para esse problema pode ser escrita como:

Problema ME$_h$: Achar $(\sigma_h, \mathbf{u}_h) \in U_h^l \times V_h^k$, tal que

$$(A\sigma_h, \tau_h) = b(\tau_h, \mathbf{u}_h) \quad \forall \tau_h \in U_h^l, \tag{II.136}$$

$$b(\sigma_h, \mathbf{v}_h) = f(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^k. \tag{II.137}$$

A análise numérica do **Problema ME$_h$** pode ser feita através do teorema de BREZZI (1974) - Teorema II.1, que requer a continuidade das formas lineares e bilineares envolvidas. Assim temos que assegurar a satisfação das hipóteses $(H1)$ e $(H2)$ deste teorema, ou seja:

$(H1)_h$: (K-elipticidade de A). Existe uma constante α_h independente de h tal que

$$(A\tau_h, \tau_h) \geq \alpha_h \|\tau_h\|^2 \quad \forall \tau_h \in K_h\,, \tag{II.138}$$

onde

$$K_h = \{\tau_h \in U_h^l, \quad b(\tau_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^k\}\,. \tag{II.139}$$

$(H2)_h$: (LBB Discreta para o campo de deslocamento) - Existe uma constante $\beta_h > 0$, independente de h, tal que

$$\sup_{\tau_h \in U_h^l} \frac{b(\tau_h, \mathbf{v}_h)}{\|\tau_h\|_U} \geq \beta_h \|\mathbf{v}_h\|_V \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^k\,. \tag{II.140}$$

Neste caso, como no problema de Poisson visto anteriormente, as hipóteses $(H1)_h$ e $(H2)_h$ são fácilmente verificadas adotando-se $l \geq k$, para elementos quadrilaterais, ou $l \geq k-1$, para elementos triangulares.

Satisfeitas as hipóteses do teorema de Brezzi temos imediatamente que

$$\|\sigma - \sigma_h\|_U + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq C\left(\|\sigma - \tau_h\|_U + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V\right) \quad \forall \tau_h \in U_h^l \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^k, \tag{II.141}$$

com C independente de h, que combinada com resultados da teoria de interpolação nos fornece

$$\|\sigma - \sigma_h\|_U + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq Ch^{l+1}|\sigma|_{l+1} + Ch^k|\mathbf{u}|_{k+1}\,. \tag{II.142}$$

Donde concluimos que estimativas ótimas para ambos os campos são obtidas quando $l = k-1$, o que podemos conseguir com elementos triangulares. Entretanto, é necessário notar que a convergência das tensões é na norma de U que envolve apenas produtos em L^2 das componentes de tensão, enquanto que a convergência dos deslocamentos é obtida em uma norma mais rigorosa envolvendo produtos em L^2 do gradiente dos deslocamentos. Esta é a razão pela qual esta formulação mista tende a se comportar, em termos de taxas de convergência, de modo idêntico a formulação cinemática.

II.4.2.2 - Formulação Mista Dual

Seja $W = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e

$$U(\mathrm{div}) = \{\sigma \in \mathrm{U}\,,\, \mathrm{div}\sigma \in \mathrm{W}\} \tag{II.143}$$

com norma

$$\|\sigma\|_{U(\mathrm{div})} = \{(\sigma,\sigma) + (\mathrm{div}\sigma, \mathrm{div}\sigma)\}^{1/2}\,. \tag{II.144}$$

A formulação mista dual para o problema em foco consiste em

Problema ME* : Dado $\mathbf{f} \in W$, determinar o par $\{\sigma, \mathbf{u}\} \in U(\mathrm{div}, \Omega) \times \mathrm{W}$ tal que

$$(A\sigma, \tau) = b^*(\tau, \mathbf{u}) \quad \forall \tau \in U(\mathrm{div}), \tag{II.145}$$

$$b^*(\sigma, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in W, \tag{II.146}$$

$$b^*(\tau, \mathbf{v}) = \int_\Omega B^*\tau \cdot \mathbf{v}\, d\Omega = -\int_\Omega \mathrm{div}\tau \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\Omega \quad , \tag{II.147}$$

que equivale a achar o ponto de sela $\{\sigma, \mathbf{u}\}$ em $U(\mathrm{div}) \times \mathrm{V}$ do lagrangiano

$$L(\tau, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(A\tau, \tau) + b^*(\tau, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}) \quad \forall \tau \in U(\mathrm{div}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{W}\,.$$

Nesta formulação dual a continuidade de $a(\cdot,\cdot)$, $b^*(\cdot,\cdot)$ e $f(\cdot)$ são preservadas em $U(\mathrm{div})$ e W. A LBB para $\mathbf{v}$ é também verificada, mas a elipticidade de $a(\cdot,\cdot)$ na norma $U(\mathrm{div})$ é restrita ao subespaço das tensões auto equilibradas.

Em princípio, poder-se-ia pensar numa formulação do tipo proposto por RAVIART e THOMAS,(1980) para o problema de Poisson com as tensões em $U(\mathrm{div})$ e os deslocamentos em $(L^2(\Omega))^2$. Entretanto esta formulação não se aplica imediatamente ao problema da elasticidade devido a simetria do tensor de tensões. Algumas formulações recentes relaxam a simetria do tensor de tensão reintroduzindo-a através de multiplicadores de Lagrange, permitindo assim a utilização das interpolações propostas por Raviart e Thomas .

II.4.3 - Fomulações Mistas de Petrov-Galerkin

Apresentamos aqui uma formulação mista para o problema da elasticidade bidimensional compressível baseada no princípio de Hellinger-Reissner, sem qualquer restrição na escolha dos espaços de elementos finitos, além da necessária conformidade. Como no caso anterior, adicionamos consistentemente à formulação clássica de Galerkin formas residuais das equações constitutiva e de equilíbrio, e

transformamos o problema original de ponto de sela em um problema de minimização nos dois campos. Desta forma, no modelo aproximado, eliminamos a exigência de satisfação das condições de Babuška-Brezzi e o requisito para estabilidade e convergência é de novo, únicamente a conformidade das aproximações dos dois campos. Temos apenas que construir aproximações conformes para os espaços onde estão definidas as tensões e os deslocamentos o que é possível quando utilizamos, por exemplo, interpolações contínuas de quaisquer ordens para os dois campos.

Seja X_h^l um subespaço de elementos finitos de $U(\mathrm{div})$. Em particular X_h^l pode ser um subespaço de $(H^1(\Omega))^3$, isto é, podemos adotar as interpolações lagrangianas usuais. Tendo em vista que para $f \in W$ e Ω regular, a solução $\{\sigma, \mathbf{u}\}$ do **Problema M** está em $U(\mathrm{div}) \times \mathrm{V}$ e que as aproximações de Galerkin para este problema em subespaços de $U(\mathrm{div}) \times \mathrm{V}$ podem ser instáveis, propomos a seguinte aproximação mista de Petrov-Galerkin para o **Problema M** nos espaços em $X_h^l \subset U(\mathrm{div})$ e $V_h^k \subset V$:

Problema $\mathbf{PG}_\delta^*$: Achar $\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$, tal que

$$A_\delta^*(\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) + F_\delta(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = 0 \quad \forall \{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$$

onde

$$A_\delta^*(\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = (A\sigma_h, \tau_h) + (\mathrm{div}\sigma_\mathrm{h}, \mathbf{v}_\mathrm{h}) + (\mathrm{div}\tau_\mathrm{h}, \mathbf{u}_\mathrm{h})$$

$$+\delta_1(\mathrm{div}\sigma_\mathrm{h}, \mathrm{div}\tau_\mathrm{h}) + \delta_2(\mathrm{A}\sigma_\mathrm{h} - \mathrm{B}\mathbf{u}_\mathrm{h}, \tau_\mathrm{h} - \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{h})$$

$$F_\delta(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = f(\mathbf{v}_h) + \delta_1(f, \mathrm{div}\tau_\mathrm{h}) .$$

Do mesmo modo que no problema de Poisson, o **Problema $\mathbf{PG}_\delta^*$** é equivalente ao seguinte problema de minimização:

Achar $\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$ tal que

$$J_\delta^*\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} \leq J_\delta^*(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) \quad \forall \{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X_h^l \times V_h^k ,$$

com

$$J_\delta^*(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = \frac{1}{2} A_\delta^*(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) + F_\delta(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}).$$

II.4.4 - Análise Numérica

A análise do **Problema PG$_\delta^*$** é imediata uma vez que temos:

1. **Consistência**:

A solução exata, $\{\sigma, \mathbf{u}\} \in U(\text{div}) \times \text{V}$, do **Problema M** também verifica **Problema PG$_\delta^*$**, isto é,

$$A_\delta^*(\{\sigma, \mathbf{u}\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) + F_\delta(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = 0 \quad \forall \{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X_h^l \times V_h^k \qquad (II.148)$$

já que o **Problema PG$_\delta^*$** é baseado em formas residuais das equações do problema.

2. **Continuidade de** $A_\delta^*(\cdot, \cdot) : (U(\text{div}) \times \text{V}) \times (\text{U(div)} \times \text{V}) \rightarrow \text{R}$:

Existe uma constante $M < \infty$, tal que

$$A_\delta^*(\{\sigma, \mathbf{u}\}, \{\tau, \mathbf{v}\}) \leq M \|\{\sigma, \mathbf{u}\}\|_{U(\text{div}) \times \text{V}} \|\{\tau, \mathbf{v}\}\|_{U(\text{div}) \times \text{V}}$$

$$\forall \{\sigma, \mathbf{u}\}, \{\tau, \mathbf{v}\} \in U(\text{div}) \times \text{V} \qquad (II.149)$$

com

$$\|\{\tau, \mathbf{v}\}\|_{U(\text{div}) \times \text{V}} = \|\tau\|_{U(\text{div})} + \|\mathbf{v}\|_V. \qquad (II.150)$$

Esta propriedade é facilmente provada com M tal que:

$$M = max\,\{\alpha(1 + \delta_2) + \delta_1\,,\, 1 + \delta_2\}. \qquad (II.151)$$

3. $X_h^l \times V_h^k$**-Elipticidade de** A_δ^*:

Existe uma constante $\alpha_h > 0$, independente de h, tal que

$$A_\delta^*(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) \geq \alpha_h \|\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}\|^2_{U(\text{div}) \times \text{V}} \quad \forall \{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X_h^l \times V_h^k \quad (II.152)$$

que é válida com α_h escolhido tal que:

$$2\alpha_h = \min\left\{\alpha(1+\delta_2),\ \frac{\delta_2\gamma}{2},\ \delta_1 - \frac{1+\delta_2}{\kappa},\ -\kappa(1+\delta_2) + \frac{\delta_2\beta\gamma}{2}\right\} \qquad (II.153)$$

onde $\kappa > 0$ é a constante da desigualdade (II.114) e β a constante da desigualdade de Poincaré (II.48) . Além disso neste caso devemos ainda ter

$$\delta_1 > -\frac{2(1+\delta_2)^2}{\delta_2\beta\gamma} \qquad (II.154)$$

4. Existência, Unicidade e Erro de Aproximação

Como consequência das Eqs.(II.148)-(II.152) temos pelo Lema de Lax existência e unicidade de solução e pelo Lema de Céa as as seguintes estimativas de erro :

$$\|\{\sigma - \sigma_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\}\|_{U(\mathrm{div})\times \mathrm{V}} \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha_h}}\|\{\sigma - \tau_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h\}\|_{U(\mathrm{div})\times \mathrm{V}}$$

$$\forall\{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X_h^l \times V_h^k\,. \qquad (II.155)$$

Admitindo-se $k = l$, e considerando a solução exata, $\{\sigma, \mathbf{u}\}$, suficientemente regular, de (II.155) temos:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 + h\|\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^{k+1}\,,$$

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{U(\mathrm{div})} \leq Ch^k\,.$$

Dessa forma melhores convergências são obtidas para σ_h sem comprometer as taxas de convergência de $\mathbf{u}_h$ como ocorre, por exemplo, com a formulação de Raviart-Thomas para o problema potencial .

Alternativamente podemos considerar a seguinte aproximação mista de Petrov-Galerkin para o **Problema M** em espaços de elementos finitos U_h^l e V_h^k.

Problema PG$_\delta$: Achar $\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$, tal que

$$A_\delta(\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) + F_\delta(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = 0 \quad \forall\{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X_h^l \times V_h^k \qquad (II.156)$$

com

$$A_\delta(\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = (A\sigma_h, \tau_h) - (\sigma_h, \nabla \mathbf{v}_h) - (\tau_h, \nabla \mathbf{u}_h)$$

$$+\delta_1(\mathrm{div}\sigma_\mathrm{h}, \mathrm{div}\tau_\mathrm{h}) + \delta_2(\sigma_\mathrm{h} - \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\mathbf{u}_\mathrm{h}, \mathrm{A}\tau_\mathrm{h} - \mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{h}).$$

$$F_\delta(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = f(\mathbf{v}_h) + \delta_1(f, \mathrm{div}\tau_\mathrm{h}).$$

Que tambem é equivalente ao seguinte problema de minimização: Achar $\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$ tal que

$$J_\delta\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} \leq J_\delta(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) \quad \forall\{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X_h^l \times V_h^k,$$

com

$$J_\delta(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = \frac{1}{2} A_\delta(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) + F_\delta(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}).$$

CAPÍTULO III

PROBLEMAS COM RESTRIÇÃO INTERNA

III.1 - Introdução

É bem sabido que restrições volumétricas impõem sérias limitações na construção de aproximações de elementos finitos para a resolução de problemas incompressíveis, frequentemente encontrados em mecânica dos sólidos (elasticidade incompressível, fluência, plasticidade) e mecânica dos fluidos (escoamentos de Stokes, escoamentos não-newtonianos, etc.). Formulações em deslocamentos, baseadas no método de Galerkin, são quase sempre instáveis e não convergentes podendo exibir oscilações espúrias dos campos de tensões e trancamento dos campos de deslocamentos. A principal dificuldade com os modelos de deslocamento para a análise desta categoria de problemas é o fato deles estarem definidos apenas em um subespaço daquele no qual o problema é posto. A construção de aproximações nesse subespaço é uma tarefa não trivial, e o que encontramos na literatura são, em geral, métodos de penalização obtidos através da introdução de um termo de regularização em que a incompressibilidade é substituida por uma "quase incompressbilidade". Esta técnica tem sido utilizada, por exemplo, no caso do problema de Stokes em deslocamento e pressão (que é semelhante ao problema da elasticidade incompressível). Entretanto, nem sempre é possível mostrar que a solução do problema discreto regularizado converge para a solução do problema original. Em geral a simples discretização do problema contínuo penalizado não é convergente. Torna-se então necessário a construção de "penaltis" discretos. BERCOVIER(1978) estudou e determinou condições para que isto se dê. MALKUS e HUGHES(1978)

e ODEN e KIKUCHI(1982) obtêm aproximações convergentes com o emprego de integrações reduzidas ou seletivas para o termo de penalidade.

Modelos de equilíbrio podem também ser utilizados. Aqui, no entanto, nos defrontamos com dificuldades na construção das aproximações conformes, satisfazendo a priori a equação de equilíbrio. A alternativa nesse caso tem sido, novamente, o uso de métodos de penalização que exigem uma regularidade adicional para o campo de tensões difícil de ser satisfeita. Além disso nestes modelos é bastante complicado o cálculo dos deslocamentos que são então obtidos via integração das equações constitutivas.

Uma outra opção para a resolução deste tipo de problema é a utilização de modelos mistos onde a restrição de incompressibilidade é incorporada à formulação através da técnica de multiplicadores de Lagrange. Dessa forma uma das formulações usadas tem sido o modelo misto em deslocamento e pressão, onde a restrição de incompressibilidade é introduzida na formulação sendo a pressão o multiplicador. Contudo não temos de imediato garantia de existência, unicidade e estabilidade dessas aproximações . Finalmente podemos empregar formulações mistas de Galerkin em deslocamentos e tensões. Novamente nos deparamos com os problemas descritos no capítulo anterior: poucas combinações de interpolações para os campos de tensões e deslocamentos são capazes de satisfazer aos critérios de convergência (condições de Babuska-Brezzi) requeridos por esses métodos mistos. Em particular, interpolações de igual ordem com tensões descontínuas e deslocamentos contínuos, que são muito convenientes do ponto de vista computacional, são instáveis e não convergentes ou convergentes com taxas sub-ótimas.

Admitindo a existência de um potencial de tensões e adotando interpolações contínuas para as tensões e para os deslocamentos, utilizando a mesma metodologia empregada para os problemas sem restrição interna (Problema de Poisson

e Elasticidade Compressível), propomos e analisamos aqui novas formulações de Petrov-Galerkin para o problema da elasticidade incompressível. Como no capítulo anterior transformamos o problema de ponto de sela da formulação mista clássica em um problema de minimização, eliminando a necessidade da satisfação das condições de compatibilidade entre os espaços de aproximação para as tensões e os deslocamentos (LBB). Dessa forma torna-se possível, no caso do problema de fluência, como no caso do problema da elasticidade, a escolha de aproximações cujo único requisito é serem aproximações conformes para os espaços $U(\mathrm{div})$ (onde estão definidas as tensões) e H_0^1 (onde estão definidos os deslocamentos) o que é possível utilizando-se interpolações contínuas, de quaisquer ordens, para os dois campos, por exemplo.

III. 2 - Elasticidade Linear Incompressível

O problema aqui tratado consiste em:

Para uma dada força de volume $\mathbf{f}$ achar o tensor de tensões de Cauchy $\sigma = \sigma^T : \Omega \to R^2 \times R^2$ e o campo de deslocamentos $\mathbf{u} : \Omega \to R^2$, satisfazendo

$$\mathrm{div}\sigma + \mathbf{f} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega$$

$$A\sigma = B\mathbf{u} \quad \text{em} \quad \Omega,$$

com condições de contorno tipo Dirichlet $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$ em Γ (de modo similar ao problema de Poisson, condições de contorno mais gerais também podem ser consideradas), onde $A\sigma$ neste caso é uma função linear da componente desviadora do tensor de tensão

$$\mathbf{S} = \sigma - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\sigma\mathbf{I} = \sigma - p\mathbf{I} \qquad (III.1)$$

sendo p a pressão hidrostática e $B\mathbf{u} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$, o tensor de deformações.

No caso de materiais isotrópicos incompressíveis $A\sigma$ é dado por

$$A\sigma = 2\mu \mathbf{S},$$

e o operador A está sujeito a restrição interna $\mathrm{trA} = \mathrm{A{:}\,I} = 0$ resultante do fato de estarmos considerando o problema da elasticidade incompressível onde

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\,, \tag{III.2}$$

que é responsável pelas principais dificuldades na construção de aproximações de elementos finitos para este tipo de problema. Apresentamos e discutimos inicialmente as diferentes formulações variacionais que têm sido propostas para este problema. Para tanto definimos adequadamente espaços para os campos de tensão e deslocamentos.

III.2.1 Formulações Mistas Clássicas

Seja U conforme definido em II.4.2.1. Definimos ainda

$$U_0 = \{\tau \in U\,;\ (\mathrm{tr}\,\tau, 1) = 0\}\,, \tag{III.3}$$

espaço das tensões com traço médio nulo, e

$$U_T = \{\mathbf{T} \in U\,;\ \mathrm{tr}\,\mathbf{T} = 0\}\,, \tag{III.4}$$

espaço das tensões desviadoras (com traço nulo). Seja ainda, como anteriormente

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega)\,,\ f = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma\}$$

e

$$V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\,, \tag{III.5}$$

espaço dos deslocamentos.

1 - Formulação Primal

A formulação mista primal para o problema proposto, em tensão e deslocamento, consiste em

Problema MI : Dado $\mathbf{f} \in V'$, espaço dual de V, achar o par $(\sigma, \mathbf{u}) \in U_0 \times V$ tal que

$$-(A\sigma, \tau) + (\tau, \nabla \mathbf{u}^s) = 0 \quad \forall \tau \in U_0, \tag{III.6}$$

$$(\sigma, \nabla \mathbf{v}^s) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{III.7}$$

onde $\nabla \mathbf{u}^s$ denota a parte simétrica do gradiente dos delsocamentos e

$$(A\sigma, \tau) = \int_\Omega A\sigma : \tau \, d\Omega \quad \forall \sigma, \tau \in U_0 \,, \tag{III.8}$$

$$f(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in V \,, \quad \mathbf{f} \in V' \,. \tag{III.9}$$

A definição do **Problema MI** em $U_0 \times V$, e não em $U \times V$ como no caso do **Problema ME**, visa garantir unicidade para a pressão. Sendo o campo de tensões derivado de um potencial podemos assegurar que o **Problema MI** é equivalente a achar o ponto de sela do seguinte lagrangiano

$$L(\tau, \mathbf{v}) = \int_\Omega \phi(\tau) \, d\Omega + b(\tau, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}) \quad \forall \tau \in U_0 \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

onde $\phi(\tau)$ é o potencial das tensões. A análise do **Problema MI** no caso geral, pode ser feita pelo Teorema de Brezzi que estabelece as condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade de solução . A análise de existência e unicidade para as formulações acima apresentadas é feita de modo similar ao caso dos problemas sem restrição, verificando-se as hipóteses discretas $(H0)$ a $(H2)$ do Teorema de Brezzi. Com relação a hipótese $(H0)$, se empregamos aproximações conformes as continuidades de $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ e $f(\cdot)$ são preservadas. Ressaltamos que nestes casos a elipticidade não é válida em todo espaço onde estão definidas as

tensões, como acontece com o problemas de Poisson e da elasticidade compressível. Isto se deve a que nos problemas incompressíveis o tensor A verifica apenas

$$(A\mathbf{T},\mathbf{T}) \geq \gamma\|\mathbf{T}\|^2 \quad \forall \mathbf{T} \in U_T\,, \tag{III.10}$$

com $\gamma > 0$. Como consequência deste fato a elipticidade da forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ não é estabelecida tão facilmente como apresentado anteriormente para os problemas sem restrição. Torna-se então necessário o exame da K-Elipticidade exigida pelo teorema de Brezzi onde, para esta formulação primal, K está definido por:

$$K = \{\{\mathbf{T},q\}\,|\,(\mathbf{T},\nabla\mathbf{v}^s) + (q,\mathrm{div}\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{V}\}. \tag{III.11}$$

Com o emprego de um resultado de Ladyszhenkaya é possível assegurar que esta formulação satisfaz a hipótese da K-elipticidade, ficando este resultado dependente de uma nova condição LBB para o campo de pressões:

($H3$) **LBB** para a pressão:

Existe $\beta_p > 0$ tal que

$$\sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{(q,\mathrm{div}\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq \beta_p\|q\| \quad \forall q \in Q_0\,, \tag{III.12}$$

sendo

$$Q_0 = \{q \in L^2(\Omega), \quad (q,1) = 0\}\,. \tag{III.13}$$

A primeira vista poderiamos pensar em construir aproximações de elementos finitos para o **Problema ME**, correspondente a elasticidade compressível, isto é: **Problema** MI_h:

Achar $(\sigma_h,\mathbf{u}_h) \in U_h^l \times V_h^k$, tal que

$$(A\sigma_h,\tau_h) = b(\tau_h,\mathbf{u}_h) \quad \forall \tau_h \in U_h^l, \tag{III.14}$$

$$b(\sigma_h,\mathbf{v}_h) = f(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^k. \tag{III.15}$$

Entretanto o **Problema** MI_h é sempre instável uma vez que para $l \geq k$ a hipótese $(H2)_h$ é verificada mas não $(H3)_h$ e consequentemente $(H1)_h$. Para $l < k$ podemos verificar a hipótese $(H3)_h$ e $(H1)_h$ mas não a hipótese $(H2)_h$ que governa a estabilidade do multiplicador de Lagrange que neste caso é o campo de deslocamento. A construção de aproximações estáveis de Galerkin para este tipo de problema com restrição é feita segregando-se o campo de pressão da componente desviadora do tensor de tensão, e interpolando-se a pressão, as tensões desviadoras e o campo de deslocamentos independentemente de modo a satisfazer as hipóteses $(H0)_h$ a $(H3)_h$. Isto, naturalmente, impõe severas limitações nas aproximações para este tipo de problemas com utilização da formulação clássica de Galerkin.

A violação de qualquer uma das hipóteses $(H0)_h$ a $(H3)_h$ pode resultar na não unicidade da solução para o **Problema** MI_h. Uma das causas mais comuns de perda de unicidade deve-se a violação da condição LBB discreta para o campo de pressão, ou hipótese $(H3)_h$. Podemos ver que se $\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\}$ é uma solução do **Problema** M_h, então qualquer outro par $\{\sigma_h + p_h\mathbf{I}, \mathbf{u}_h\}$, com $p_h \in Q_h$, satisfazendo

$$(p_h, \mathrm{div}\mathbf{v_h}) = 0 \quad \forall \mathbf{v_h} \in \mathrm{V_h}\,, \tag{III.16}$$

também é solução do **Problema** MI_h. Campos de pressão não nulos p_h, que satisfazem (III.16) são usualmente referidos como modos espúrios de pressão . Para interpolações de igual ordem com pressão descontínua e deslocamento contínuo a equação (III.16) tem muitas soluções não nulas especialmente com interpolações de baixa ordem. Esses modos espúrios são os responsáveis pela instabilidade das aproximações de Galerkin.

2 - Formulação Dual

Consideremos os espaços $W = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $U(\mathrm{div})$ com norma $\|\cdot\|_{U(\mathrm{div})}$ conforme definidos em II.4.2.2. A formulação mista dual para o problema em foco

consiste em

Problema MI^* : Dado $\mathbf{f} \in W$, determinar o par $(\sigma, \mathbf{u}) \in U(\mathrm{div}, \Omega) \times \mathrm{W}$ tal que

$$(A\sigma, \tau) + (\mathrm{div}\tau, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \tau \in \mathrm{U(div)}, \tag{$III.17$}$$

$$(\mathrm{div}\sigma, \mathbf{v}) = \mathrm{f}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{W}, \tag{$III.18$}$$

que é equivalente a achar o ponto de sela $\sigma, \mathbf{u}$ em $U(\mathrm{div}) \times \mathrm{W}$ do seguinte lagrangiano

$$L(\tau, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \phi(\tau)\, d\Omega + b^*(\tau, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}) \quad \forall \tau \in U(\mathrm{div}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{W}\,.$$

Com relação a formulação dual é importante ressaltar a exigência adicional de regularidade para o campo de tensões, já que neste caso $\sigma \in U(\mathrm{div})$. Desde que satisfizessemos as versões discretas das hipóteses do teorema de Brezzi para este caso, teríamos convergência para as tensões nesta norma, que é mais rigorosa que a norma de $L^2(\Omega)$, utilizada no modelo primal. No entanto é difícil a construção de aproximações neste espaço. Os espaços de aproximação $H(\mathrm{div})$ construídos por Raviart-Thomas, para o problema de calor, não são aplicáveis a esta formulação devido a simetria do tensor de tensões. Algumas tentativas têm sido feitas - ARNOLD e FALK(1988) e STENBERG(1988) - onde esta simetria é relaxada com a introdução de um outro multiplicador de Lagrange à formulação .

Para evitarmos as limitações apresentadas propomos aqui uma nova formulação do tipo Petrov-Galerkin para a elasticidade linear incompressível.

III.2.2 Formulação de Petrov-Galerkin

Seja $\tau = \mathbf{T} + q\mathbf{I} \in U_0$, com $\mathrm{T} \in U_{\mathbf{T}}$ e

$$q \in L^2_0(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), (1, q) = 0\}.$$

Seja

$$U^*(\mathrm{div}) = \{\tau = \mathbf{T} + \mathrm{q}\mathbf{I} \in \mathrm{U}_0, \mathbf{T} \in \mathrm{U}, \mathrm{div}\tau \in \mathrm{W}\}$$

com norma

$$\|\tau\|^2_{U^*(\mathrm{div})} = (\mathbf{T}, \mathbf{T}) + (\mathrm{div}\tau, \mathrm{div}\tau).$$

Seja X_h^l um subespaço conforme de elementos finitos de $U^*(\mathrm{div})$. Em particular X_h^l pode ser um subespaço de $(H^1(\Omega))^3$. Tendo em vista que para $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$ e Ω regular, a solução $\{\sigma, \mathbf{u}\}$ do **Problema** M^* está em $U^*(\mathrm{div}) \times (\mathrm{H}_0^1(\Omega))^2$ e que as aproximações de Galerkin para este problema em subespaços de $U^*(\mathrm{div})$ e $V = (H_0^1(\Omega))^2$ podem ser instáveis propomos a seguinte aproximação de Petrov-Galerkin para o **Problema** M^* nos espaços $X_h^l \subset U(\mathrm{div})$ e $V_h^k \subset (H_0^1(\Omega))^2$:

Problema $PG_{\sigma f}^*$: Achar $\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} = \{\mathbf{S}_h, p_h, \mathbf{u}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$, tal que para todo $\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} = \{\mathbf{T}_h, q_h, \mathbf{v}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$

$$A^*_{\sigma f}\left(\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}\right) + F_{\sigma f}\left(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}\right) = 0 \qquad (III.19)$$

onde

$$A^*_{\sigma f}\left(\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}\right) = (A\mathbf{S}_h, \mathbf{T}_h) + (\mathrm{div}\mathbf{S}_\mathrm{h} + \nabla \mathrm{p_h}, \mathbf{v}_\mathrm{h}) +$$

$$+(\mathrm{div}\mathbf{T}_\mathrm{h} + \nabla \mathrm{q_h}, \mathbf{u}_\mathrm{h}) + \delta_1(\mathrm{div}\mathbf{S}_\mathrm{h} + \nabla \mathrm{p_h}, \mathrm{div}\mathbf{T}_\mathrm{h} + \nabla \mathrm{q_h}) +$$

$$+\delta_2(A\mathbf{S}_h - \nabla \mathbf{u}_h^s, \mathbf{T}_h - A^{-1}\nabla \mathbf{v}_h^s) \qquad (III.20)$$

$$F_{\sigma f}\left(\{\sigma_h, \mathbf{v}_h\}\right) = f(\mathbf{v}_h) + \delta_1(f, \mathrm{div}\mathbf{T}_\mathrm{h}). \qquad (III.21)$$

O **Problema** $PG_{\sigma f}^*$ é equivalente ao seguinte problema de minimização:

Achar $\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$, tal que

$$J^*_{\sigma f}(\{\sigma, \mathbf{u}_h\}) \leq J^*_{\sigma f}(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) \quad \forall \{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X_h^l \times V_h^k\,,$$

com

$$J^*_{\sigma f}(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = \frac{1}{2} A^*_{\sigma f}(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) + F_{\sigma f}(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\})\,.$$

A análise do **Problema** $PG^*_{\sigma f}$ é imediata uma vez que temos:

1. **Consistência:**

A solução exata, $\{\sigma, \mathbf{u}\} \in U^*(\mathrm{div}) \times (\mathrm{H}^1_0(\Omega))^2$, do **Problema** MI^* também verifica o **Problema** $PG^*_{\sigma f}$, isto é para todo $\{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X^l_h \times V^k_h$

$$A^*_{\sigma f}(\{\sigma, \mathbf{u}\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) + F_{\sigma f}(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = 0 \qquad (III.22)$$

já que o **Problema** $PG^*_{\sigma f}$ é baseado em formas residuais das equações do problema.

2. **Continuidade de** $A^*_{\sigma f}(\cdot,\cdot) : U^*(\mathrm{div}) \times V \times U^*(\mathrm{div}) \times V \to R$:

Existe uma constante $M < \infty$, tal que para todo $\{\sigma, \mathbf{u}\}, \{\tau, \mathbf{v}\} \in H(\mathrm{div}) \times \mathrm{V}$

$$A^*_{\sigma f}(\{\sigma, \mathbf{u}\}, \{\tau, \mathbf{v}\}) \leq M \|\{\sigma, \mathbf{u}\}\|_{U^*(\mathrm{div})\times \mathrm{V}} \|\{\tau, \mathbf{v}\}\|_{U^*(\mathrm{div})\times \mathrm{V}} \qquad (III.23)$$

com

$$\|\tau, \mathbf{v}\|_{U^*(\mathrm{div})\times \mathrm{V}} = \|\tau\|_{U^*(\mathrm{div})} + \|\mathbf{v}\|_1 \qquad (III.24)$$

sendo, como definido anteriormente,

$$\|\tau\|^2_{U^*(\mathrm{div})} = \|\tau\|^2 + \|\mathrm{div}\mathbf{T} + \nabla \mathrm{p}\|^2. \qquad (III.25)$$

3.–**Elipticidade de** $A^*_{\sigma f}$:

Existe uma constante $\alpha_h > 0$, independente de h, tal que para todo $\{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X^l_h \times V^k_h$

$$A^*_{\sigma f}(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) \geq \alpha_h \|\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}\|^2_{U^*(\mathrm{div})\times \mathrm{V}}. \qquad (III.26)$$

4. **Estimativa de erro**

Como consequência das Eqs.(III.22)-(III.26) temos o seguinte resultado sobre a existência e unicidade e estimativas de erro para o **Problema** $PG^*_{\sigma f}$:

O **Problema** $PG^*_{\sigma f}$ tem solução única $\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$ tal que para todo $\{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$

$$\|(\sigma - \sigma_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{U^*(\mathrm{div})\times \mathrm{V}} \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha_h}} \|(\sigma - \tau_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{U^*(\mathrm{div})\times \mathrm{V}} \qquad (III.27)$$

Admitindo-se $k = l$, $V_h^k = (S_h^k)^2$ e $X_h^k = (S_h^k)^3 \cap U^*(\mathrm{div})$ e considerando a solução exata, $(\sigma, \mathbf{u})$, suficientemente regular, pelos **Teoremas II.2 e II.3** temos as estimativas:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 + h\|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^{k+1}\,, \qquad (III.28)$$

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{U^*(\mathrm{div})} \leq Ch^k\,. \qquad (III.29)$$

Considerando a definição de $\|\cdot\|_{U^*(\mathrm{div})\times \mathrm{V}}$ podemos expressar (III.27) como

$$\|\mathbf{S} - \mathbf{S}_h\|_U + \|\mathrm{div}(\mathbf{S} - \mathbf{S}_\mathrm{h}) + \nabla(\mathrm{p} - \mathrm{p_h})\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathrm{h}\|_1 \leq$$

$$\leq C\left\{\|\mathbf{S} - \mathbf{T}_h\|_U + \|\mathrm{div}(\mathbf{S} - \mathbf{T}_\mathrm{h}) + \nabla(\mathrm{p} - \mathrm{q_h})\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_\mathrm{h}\|_1\right\}$$

$$\forall \mathbf{T}_h + q_h \in X_h^l \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^k\,, \qquad (III.30)$$

donde concluimos que:

$$\|\mathbf{S} - \mathbf{S}_h\|_U \leq Ch^k\,, \qquad (III.31)$$

$$\|\mathrm{div}(\sigma - \sigma_\mathrm{h})\| \leq \mathrm{h^k}\,, \qquad (III.32)$$

$$\|\mathrm{div}(\mathbf{S} - \mathbf{S}_\mathrm{h})\| \leq \mathrm{Ch^{k-1}}\,, \qquad (III.33)$$

$$\|\nabla(p - p_h)\| \leq Ch^{k-1}\,, \qquad (III.34)$$

e, por dualidade,

$$\|p - p_h\| \leq Ch^k\,. \qquad (III.35)$$

III.3 - Fluência Estacionária

Analisamos a seguir um problema não linear incompressível pertencente a classe de problemas usualmente denominados de "creeping flow". Nesta categoria se enquadram os problemas de fluência, plasticidade incluindo problemas de escoamentos não Newtonianos, etc.

O problema aqui tratado inclui uma não linearidade física que corresponde ao chamado problema de fluência estacionária governado pela lei constitutiva de Odvquist-Norton,

$$A(\sigma) = \beta|\mathbf{S}|^{\mu-2}\mathbf{S}$$

onde β é uma constante positiva, e $1 < \mu < \infty$. O operador A está sujeito a restrição interna, como no caso anterior da elasticidade incompressível linear, ou seja $\mathrm{trA} = \mathrm{A}:\mathbf{I} = 0$, resultante do fato de estarmos considerando um problema onde:

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega$$

que responde pelas principais dificuldades na construção de aproximações de elementos finitos.

Percorremos aqui o mesmo roteiro dos casos anteriores, buscando definir adequadamente os espaços utilizados na análise de formulações já existentes para o caso em questão. Discutimos alguns resultados obtidos por LOULA e GUERREIRO(1990), onde uma formulação de Petrov-Galerkin com aproximações descontínuas para as tensões é proposta e analisada detalhadamente.

Para este problema em que A é um operador não linear do tipo monótonico torna-se necessário trabalhar em espaços de Banach. A análise deste problema no caso geral pode ser feita usando os resultados de SCHEURER(1977) que se aplicam ao caso de equações variacionais não lineares em espaços de Banach. O

resultado apresentado a seguir, sobre existencia e unicidade de solução para este problema em espaços de Hilbert é demonstrado em LOULA e GUERREIRO(1990)

Teorema III.1:

Sejam U e V espaços de Hilbert, e $A : U \rightarrow U^*$ um operador não linear, fortemente eliptico em U_T e Lipschitz contínuo em conjuntos limitados de U, i.e., existem constantes $\alpha > 0$ e $M(r)$ tais que para todo $\mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 \in U_T$,

$$(A(\mathbf{T}_2) - A(\mathbf{T}_1), \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1) \geq \alpha \|\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1\|_U^2, \qquad (III.36)$$

e para todo $\tau_1, \tau_2 \in Y(r)$, e para todo $\tau_3 \in U$

$$(A(\tau_2) - A(\tau_1), \tau_3) \leq M(r)\|\tau_2 - \tau_1\|_U \|\tau_3\|_U \qquad (III.37)$$

onde $Y(r) = \{\tau \in U;\ \|\tau\|_U < r\}$ é uma bola aberta de raio finito r. Então o **Problema M** tem solução única $(\sigma, \mathbf{u}) \in U_0 \times V$.

A prova deste teorema requer a satisfação das condições $(H0)$ a $(H2)$ acrescida da condição $(H3)$, apresentada em III.2.1. A existência e unicidade para o problema contínuo é então demonstrada com o uso das hipóteses acima citadas. A análise do problema discreto é feita de modo similar a do problema contínuo, acrescendo-se as versões discretas das hipóteses $(H0)$ a $(H3)$, que são demonstradas com o uso de estimativas inversas.

Com relação às aproximações de elementos finitos esses autores utilizam uma formulação de Petrov-Galerkin com interpolações descontínuas para os campos de tensão e pressão, junto com um algoritmo tipo Uzawa nas variáveis p_h e $\mathbf{u}_h$ e com o cálculo das tensões a nível de elemento, por esquemas do tipo Newton-Raphson e variantes deste. As estimativas obtidas para estas aproximações são então apresentadas numa norma dependente da malha.

Admitindo aqui tambem a existência de um potencial de tensões e utilizando interpolações contínuas para as duas variáveis apresentamos a mesma metodolo-

gia para transformarmos o problema de ponto de sela, associado ao problema de fluência, em um problema de minimização .

Dessa forma torna-se possível, no caso do problema de fluência, a escolha de aproximações cujo único requisito é serem aproximações conformes para os espaços $U(\mathrm{div},\Omega)$ (onde estão definidas as tensões) e $H_0^1(\Omega)$ (onde estão definidos os deslocamentos) o que é possível utilizando-se interpolações contínuas, de quaisquer ordens, para os dois campos.

III.3.1 Formulação de Petrov-Galerkin

Consideramos aqui a seguinte aproximação mista de Petrov-Galerkin para o **Problema M** em espaços de elementos finitos X_h^l e V_h^k tais que $X_h^l \subset U^*(\mathrm{div})$ e $V_h^k = (S_h^k \cap H_0^1(\Omega))^2$:

Problema $PG_{\sigma f}$: Achar $\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$, tal que para todo $\{\tau_h, \mathbf{v}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$

$$A_{\sigma f}(\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\})(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\})) + F_{\sigma f}(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = 0 \qquad (III.38)$$

onde

$$A_{\sigma f}(\{\sigma, \mathbf{u}_h\}, \{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = (A(\mathbf{S}_h), \mathbf{T}_h) + (\mathrm{div}\mathbf{S}_\mathrm{h} + \nabla \mathrm{p_h}, \mathbf{v}_\mathrm{h}) + (\mathrm{div}\mathbf{T}_\mathrm{h} + \nabla \mathrm{q_h}, \mathbf{u}_\mathrm{h}) +$$

$$+\delta_1(\mathrm{div}\mathbf{S}_\mathrm{h} + \nabla \mathrm{p_h}, \mathrm{div}\mathbf{T}_\mathrm{h} + \nabla \mathrm{q_h}) + \delta_2(\mathrm{A}(\mathbf{S}_\mathrm{h}) - \nabla \mathbf{u}_\mathrm{h}^\mathrm{s}, \mathrm{T_h} - \mathrm{A}^{-1}(\nabla \mathbf{v}_\mathrm{h}^\mathrm{s})), \quad (III.39)$$

$$F_{\sigma f}(\{\tau_h, \mathbf{v}_h\}) = f(\mathbf{v}_h) + \delta_1(f, \mathrm{div}\mathbf{T}_\mathrm{h}). \qquad (III.40)$$

Assim como nos casos anteriores, o **Problema** $PG_{\sigma f}$ é equivalente a um problema de minimização em τ_h e $\mathbf{v}_h$, e é válido o seguinte resultado:

Teorema III.2: Para $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, o **Problema** $PG_{\sigma f}$ tem solução ùnica $\{\sigma_h, \mathbf{u}_h\} \in X_h^l \times V_h^k$ e vale a seguinte estimativa:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{U^*(\mathrm{div})} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq C \left\{ \|\sigma - \tau_h\|_{U^*(\mathrm{div})} + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V \right\}$$

$$\forall \tau_h \in X_h^l, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^k.$$

Neste caso, entretanto a prova deste teorema não depende da satisfação das hipóteses $(H1)$ a $(H3)$. Assim estamos novamente inseridos no contexto da aplicação de um Lema de Lax generalizado para problemas não lineares.

Resta finalmente mencionar que os algoritmos iterativos propostos por GUERREIRO não se aplicam a este caso, e outras opções devem ser examinadas para a obtenção de soluções numéricas para este problema.

III.4. Exemplos Numéricos

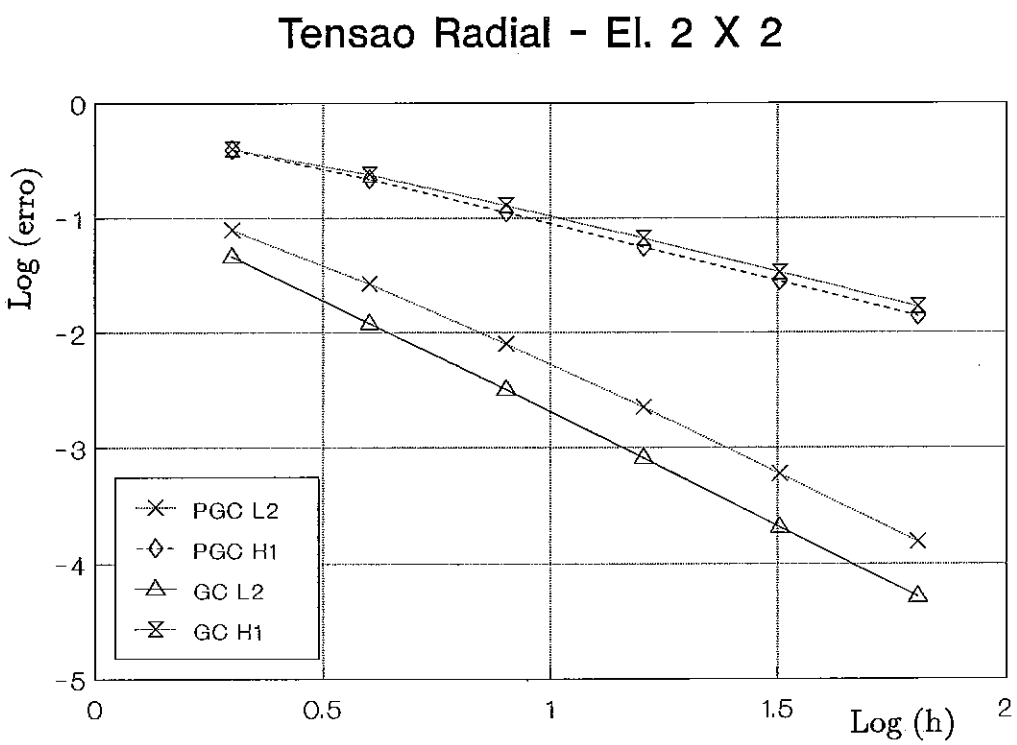
Analisamos aqui os resultados obtidos para o problema de um cilindro incompressível de comprimento infinito com raio interno igual a 1.0 e raio externo igual a 2.0, submetido a uma pressão interna unitária. Este exemplo pode ser tratado com um modelo unidimensional e tem solução exata como apresentada por GUERREIRO(1988).

Nos gráficos da Fig. III.3 comparamos diversas taxas de convergencia para o elemento com interpolações lineares para deslocamentos e tensões - elemento 2×2. Observamos nos gráficos dessa figura comportamentos semelhantes para as ordens de convergência para ambas componentes de tensão, seja na norma L2 ou na norma H1. Até mesmo a aproximação de Galerkin 2×2 com interpolações contínuas, neste caso particular, apresenta resultados convergentes. Já as aproximações obtidas com um esquema de Galerkin com esta ordem e descontínuo não apresenta resultados convergentes quer para o deslocamento radial quer para o tensor de tensões, conforme o esperado e mostrado nos gráficos da Fig. III.4. Ainda

com relação a esta interpolação , 2×2, observamos na Fig. III.5 a instabilidade da solução da aproximação de Galerkin para a tensão radial. O que é importante ressaltar nessas comparações é o comportamento sempre estável das formulações aqui propostas com interpolações contínuas ou descontínuas.

Em seguida analisamos as taxas obtidas para o elemento 3×2, i.e. interpolando quadráticamente os deslocamentos e linearmente as tensões. Neste caso, a aproximação de Galerkin contínua apresenta resultados instáveis como podemos ver nos gráficos da Fig. III.6, tanto para o deslocamento quanto para a tensão radiais.

Por último apresentamos nas figuras III.7 e III.8 as ordens de convergencia obtidas quando empregamos na discretização elementos 3×3 - quadrático para ambos os campos. Mais uma vez os resultados demonstram a convergência da formulação proposta com interpolações contínuas ou descontínuas. Devemos notar nessas figuras que a solução obtida com o esquema de Galerkin com aproximações descontínuas tende a se estabilizar a medida que refinamos a malha, provavelmente devido ao aumento da relação ϵ/h, em que ϵ é o parâmetro de regularização adotado para possibilitar a condensação das tensões a nível dos elementos. Neste caso adotamos $\epsilon = 10^{-6}$.



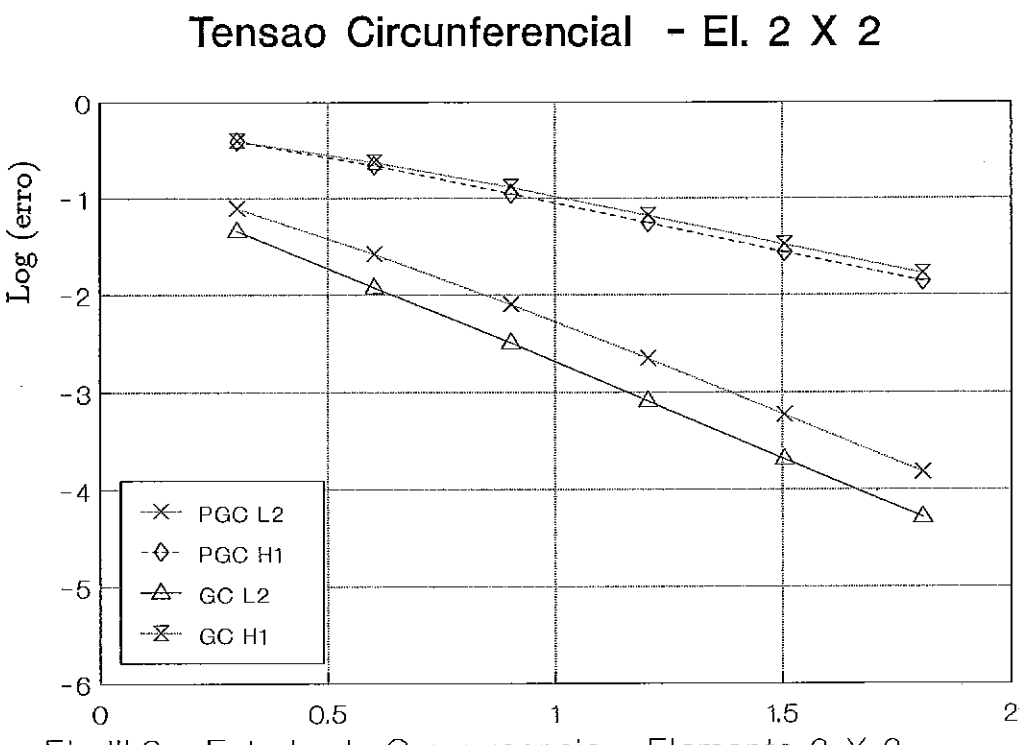
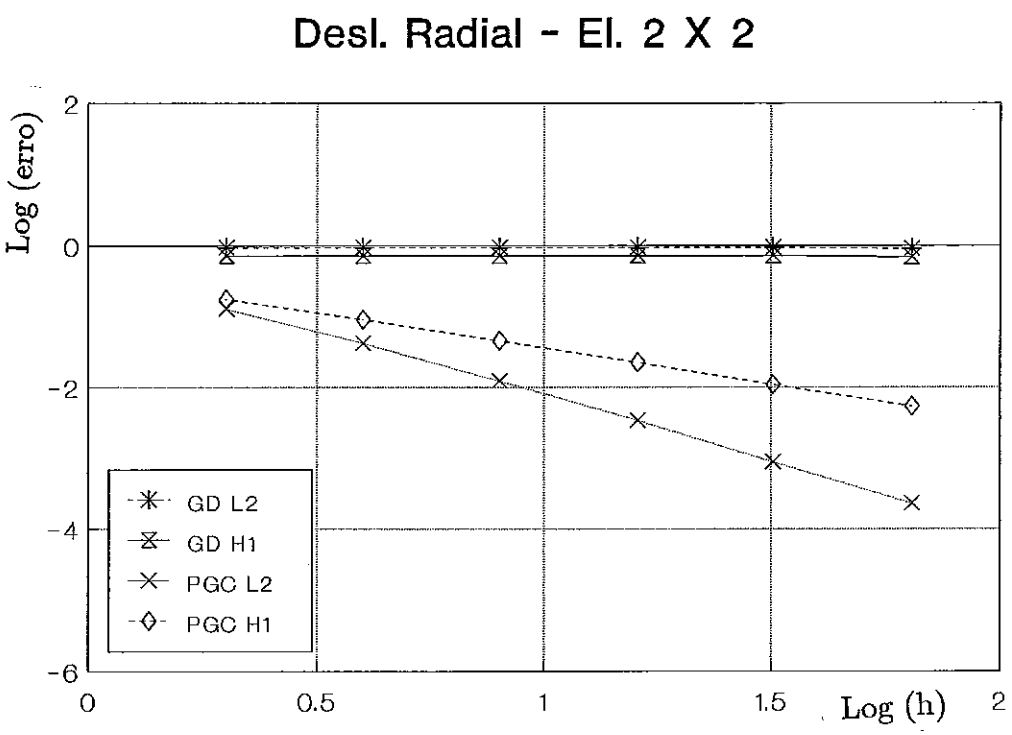


Fig. III.3 - Estudo de Convergencia - Elemento 2 X 2



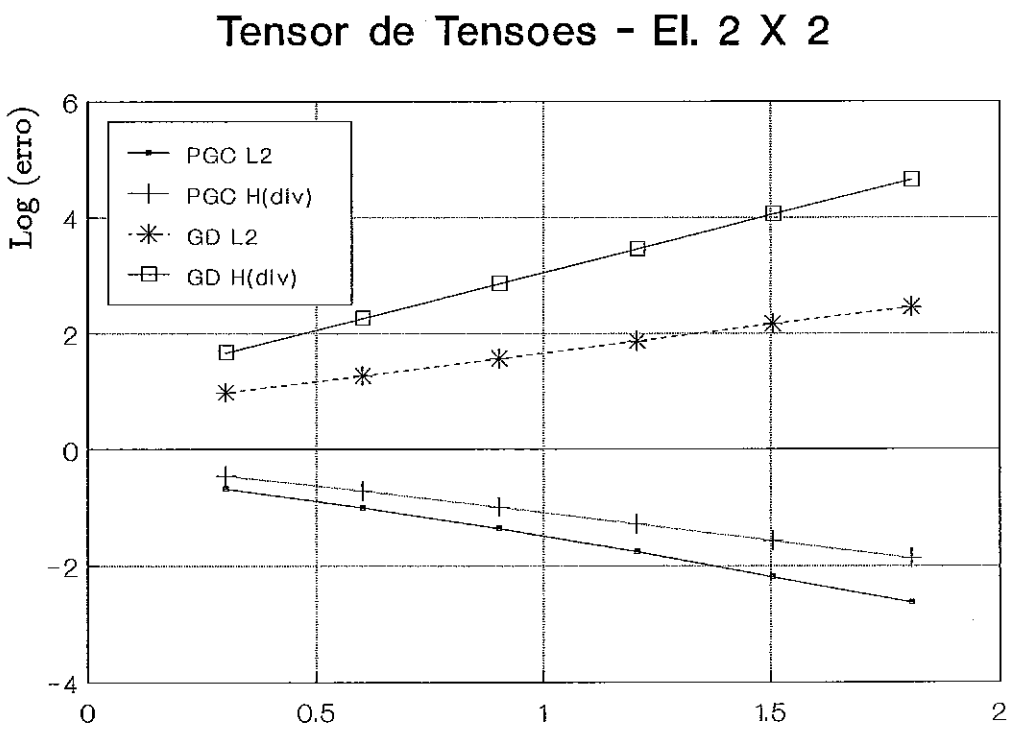
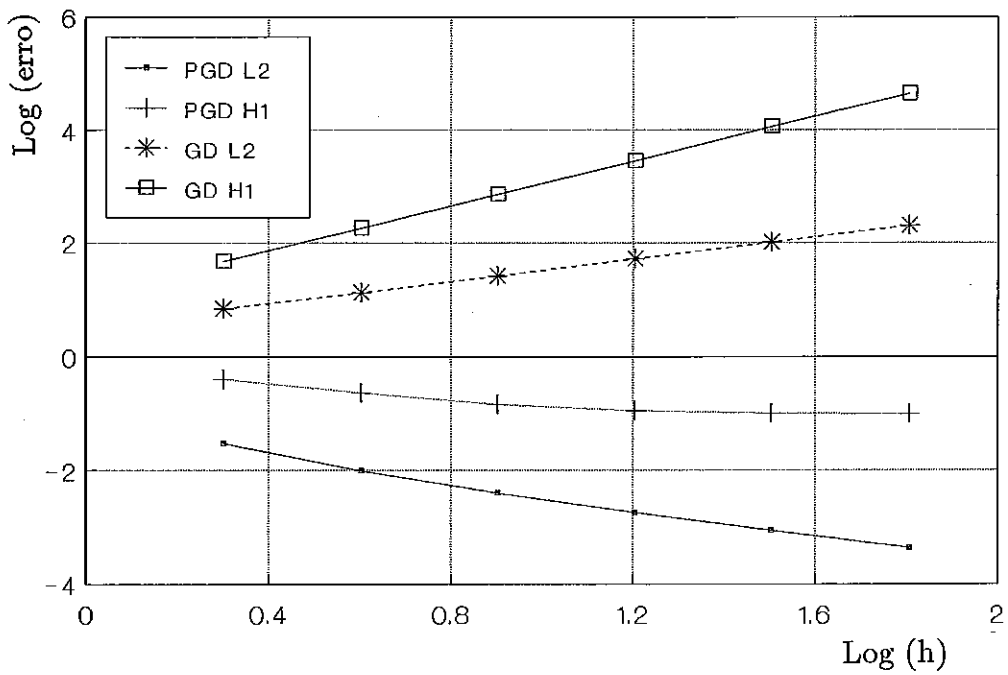


Fig.III.4 - Estudo de Convergencia - Elemento 2 X 2



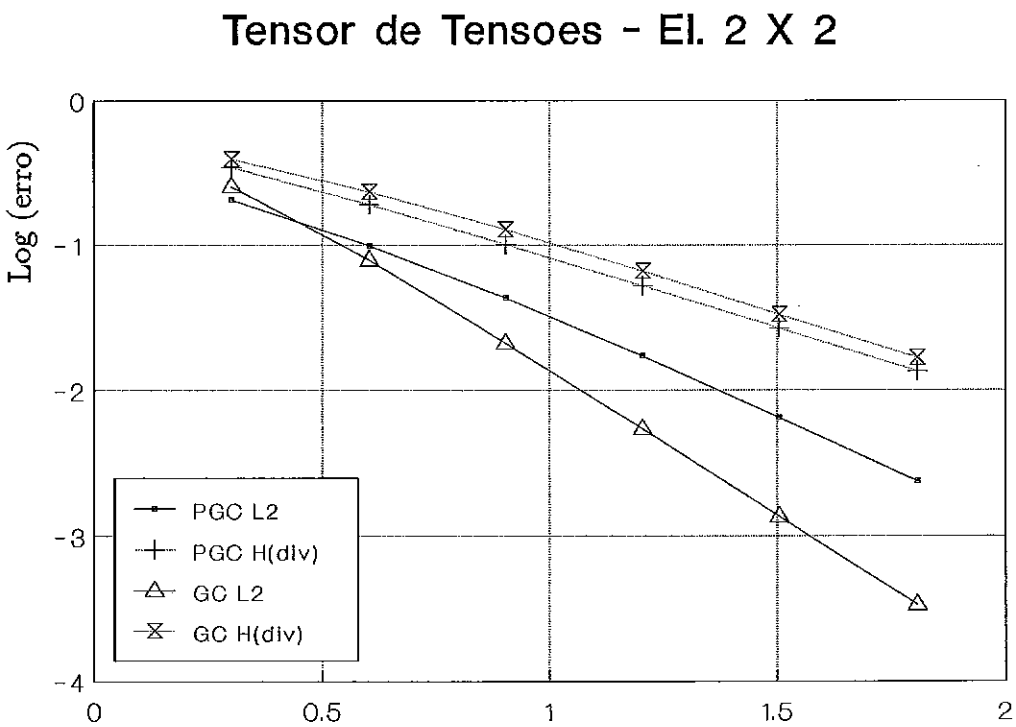
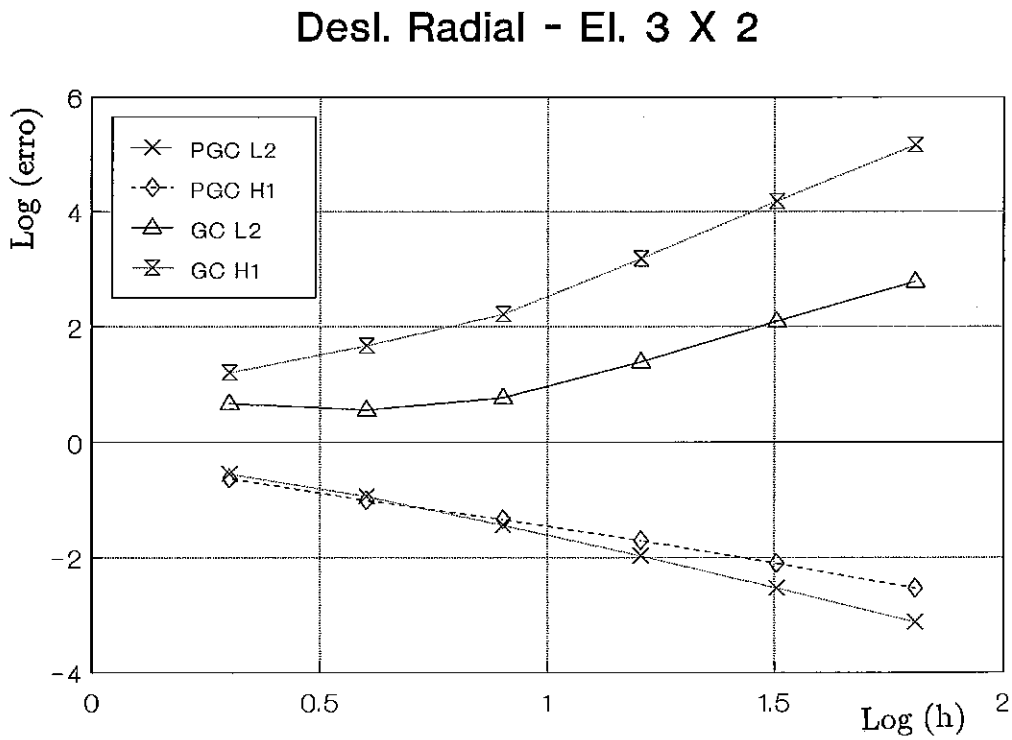


Figura III.5 - Estudo de Convergencia - Elemento 2 X 2



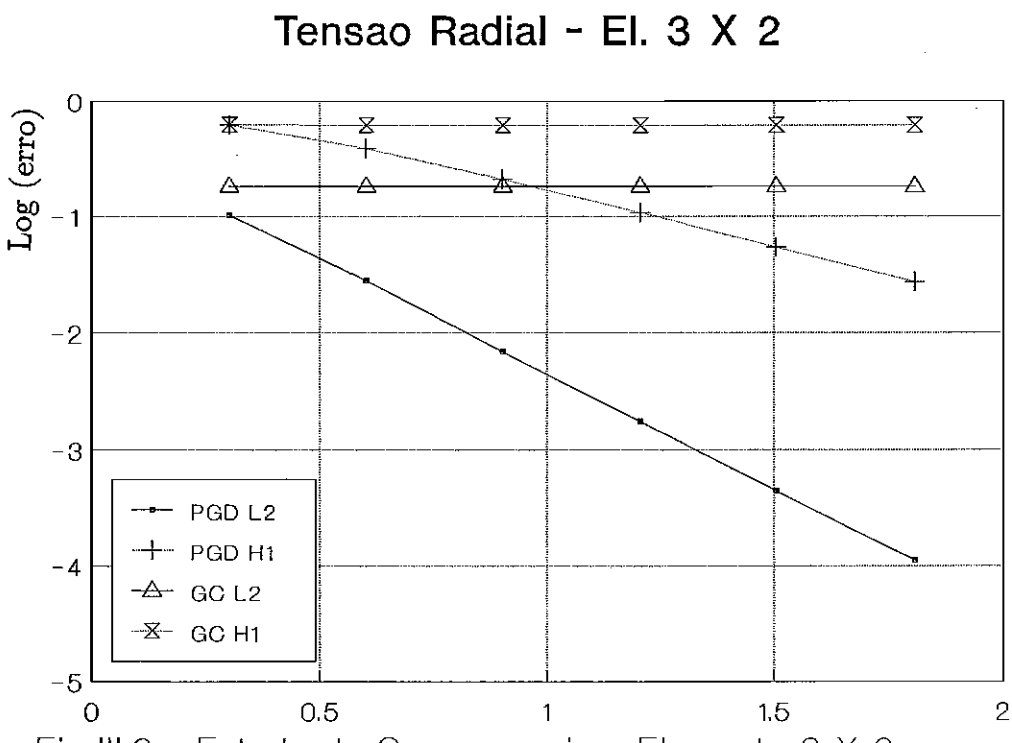
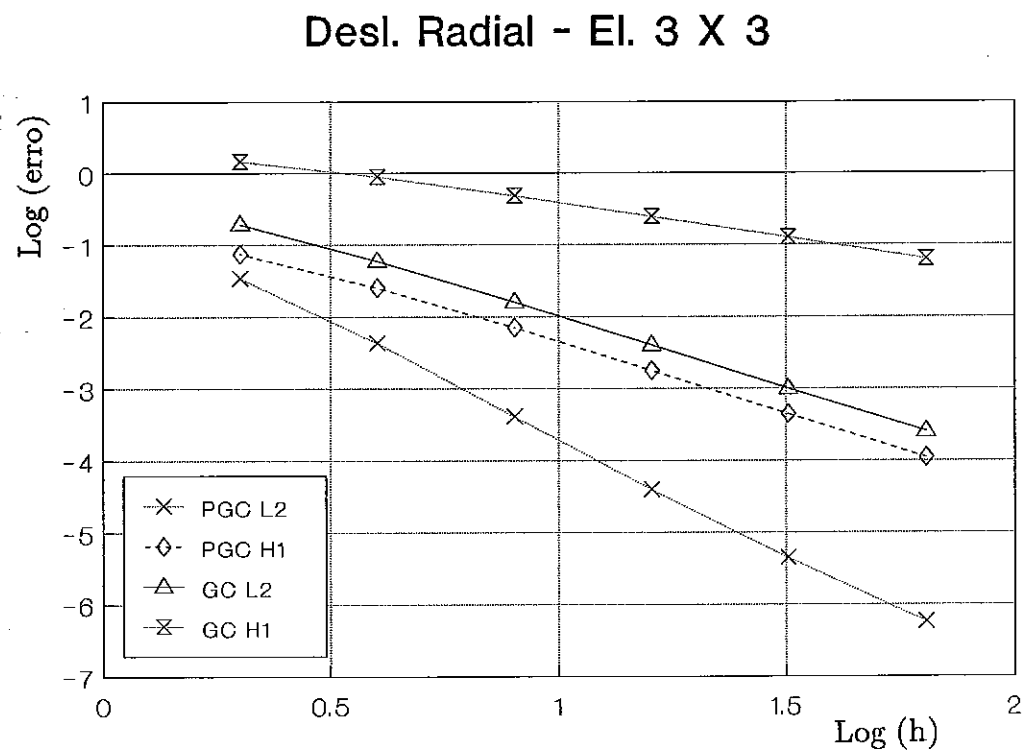


Fig. III.6 - Estudo de Convergencia - Elemento 3 X 2



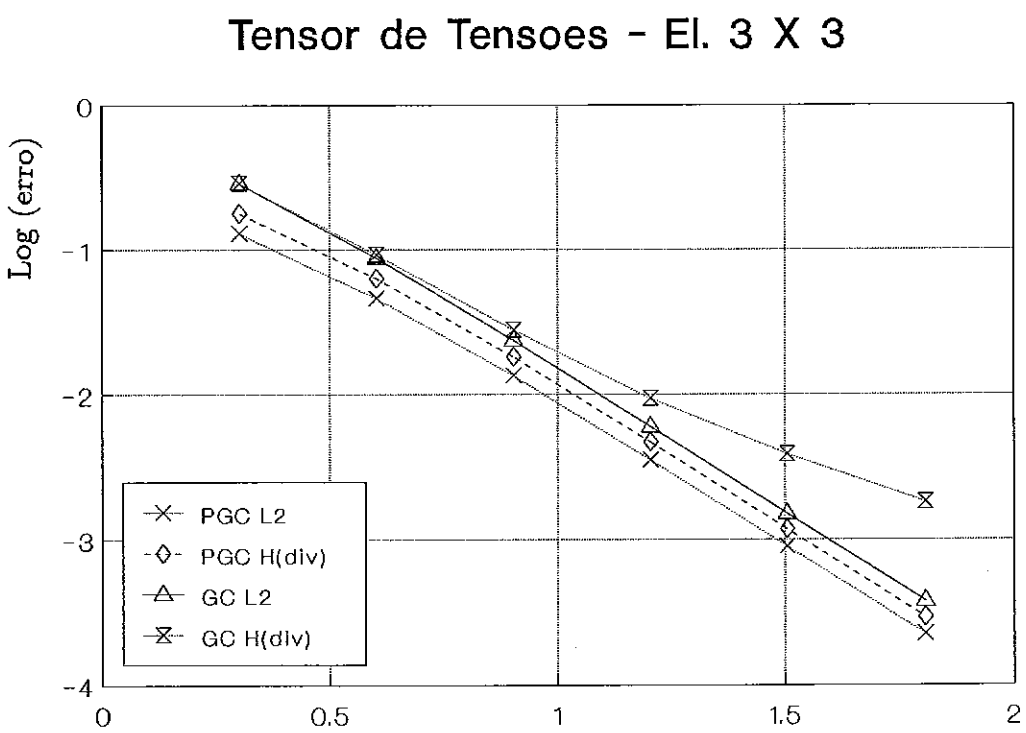
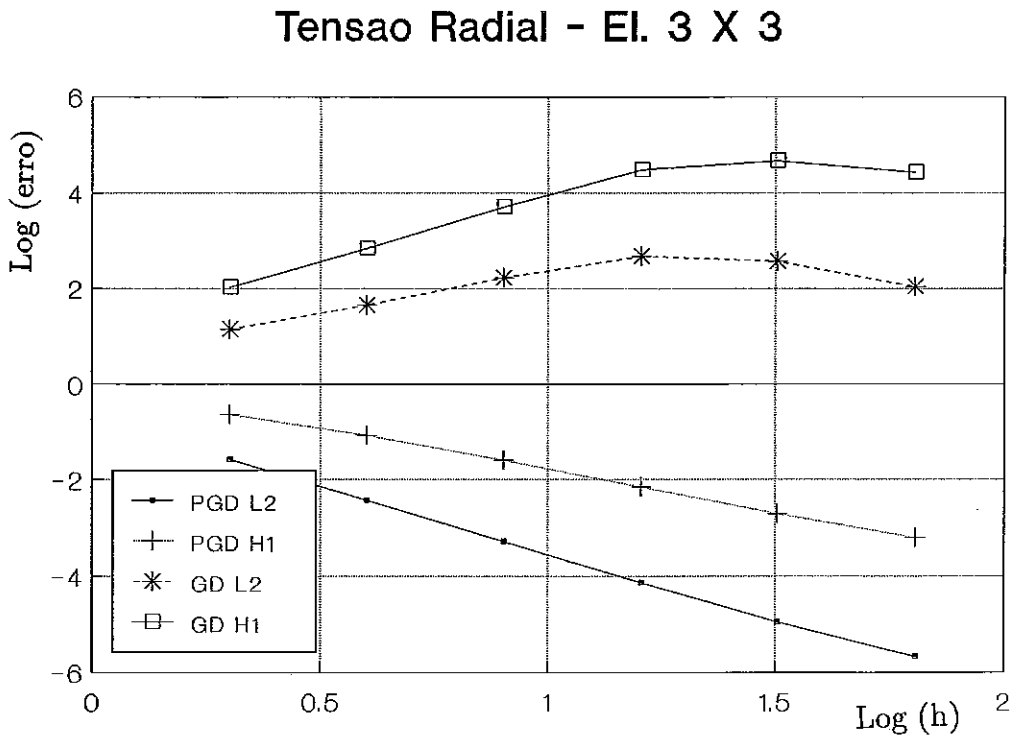


Fig. III.7 - Estudo de Convergencia - Elemento 3 X 3



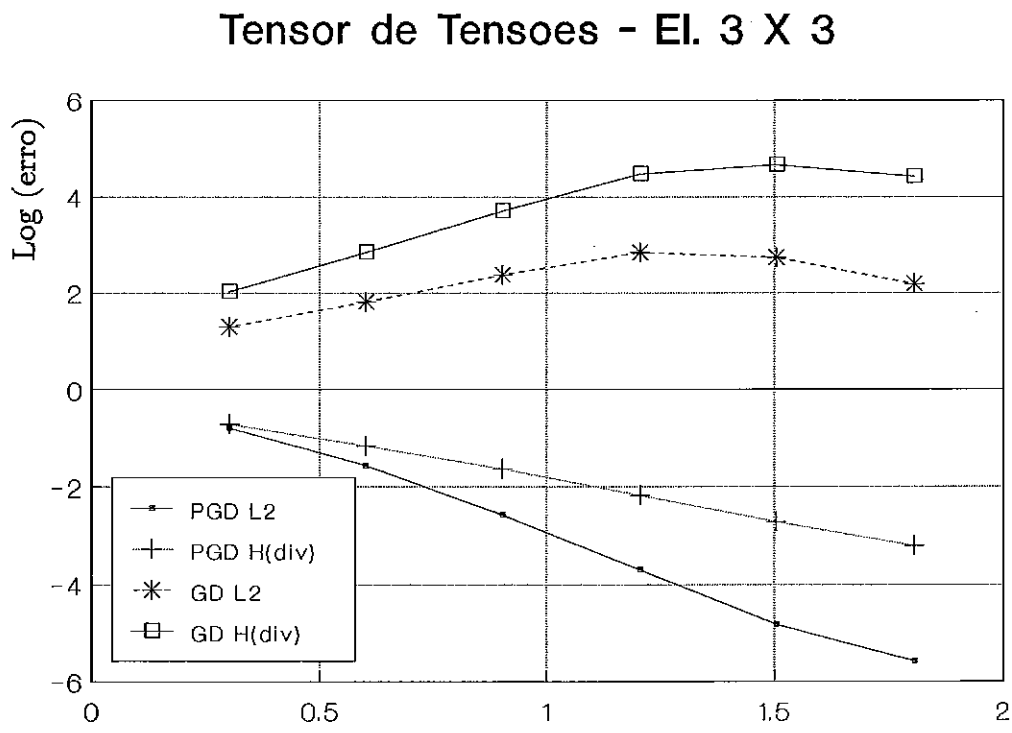


Fig. III.8 - Estudo de Convergencia - Elemento 3 X 3

CAPÍTULO IV

FORMULAÇÕES COM PÓS-PROCESSAMENTO

IV.1. Introdução

Neste capítulo propomos, discutimos e analisamos formulações alternativas para o cálculo dos fluxos ou tensões a partir de uma aproximação obtida para o campo de temperatura ou deslocamentos. Empregamos, para tal, a técnica desenvolvida nos capítulos anteriores para elaboração das formulações de Petrov-Galerkin, aplicadas aos problemas de Poisson e de elasticidade compressível ou incompressível, bem como ao problema de fluência. Dessa forma a partir da adição de termos residuais das equações de balanço ou equilíbrio do problema, a uma forma variacional da equação constitutiva montamos um esquema de pós-processamento que nos permite obter melhoras, em termos de taxas de convergência para essas variáveis.

A vantagem de um procedimento desse tipo reside no fato de podermos utilizar qualquer uma das formulações apresentadas nos capítulos anteriores, a que for mais conveniente, para o cálculo dos campos de temperatura ou deslocamentos para então proceder ao cálculo das variáveis de maior interesse para a engenharia - fluxos e tensões - de uma forma tão precisa quanto possível.

IV.2 - Formulação de Pós-Processamento - Problema de Calor

Seja $\theta_h \in V_h^k$ uma aproximação de elementos finitos para o campo θ. Por exemplo, no caso em que o operador constitutivo A é inversível, θ_h pode ser a

solução do **Problema** $\mathbf{PU}_h$ - formulação cinemática - que como vimos apresenta taxas de convergência de ordem $k+1$, ou seja

$$\|\theta - \theta_h\|_0 \leq Ch^{k+1}|\theta|_{k+1}\,. \qquad (IV.1)$$

Em lugar de calcular $\mathbf{p}_h$ via equação constitutiva, como é usual na formulação cinemática, propomos recuperar $\mathbf{p}_h$ através de um pós-processamento em $X_h^l \subset U(\mathrm{div})$, envolvendo simultaneamente os resíduos das equações constitutivas e de balanço, ou seja,

$$(A\mathbf{p}_h + \nabla\theta_h, \mathbf{q}_h) + \delta(\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h} + \mathrm{f}, \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) = 0 \quad \forall \mathbf{q}_\mathrm{h} \in \mathrm{X}_\mathrm{h}^\mathrm{l}\,. \qquad (IV.2)$$

Integrando por partes o termo envolvendo $\nabla\theta_h$, resulta o seguinte método para determinação de $\mathbf{p}_h$

Problema $\mathbf{Pp}_h$: Dado $\theta_h \in V_h^k$ achar $\mathbf{p}_h \in X_h^l$ tal que

$$A_\sigma(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) = F_\sigma(\mathbf{q}_h) \quad \forall \mathbf{q}_h \in X_h^l \qquad (IV.3)$$

onde

$$A_\sigma(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) = (A\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) + \delta(\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}, \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) \quad \forall \mathbf{p}_\mathrm{h}, \mathbf{q}_\mathrm{h} \in \mathrm{X}_\mathrm{h}^\mathrm{l},$$

$$F_\sigma(\mathbf{q}_h) = -\delta(f, \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) - (\theta_\mathrm{h}, \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) \quad \forall \mathbf{q}_\mathrm{h} \in \mathrm{X}_\mathrm{h}^\mathbf{l}.$$

IV.2.1 - Análise Numérica

i - "Consistencia"

A consistência neste caso representa a satisfação da seguinte igualdade

$$A_\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}_h) = -(f, \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) - (\theta, \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) \quad \forall \mathbf{q}_\mathrm{h} \in \mathrm{X}_\mathrm{h}^\mathrm{l} \qquad (IV.4)$$

ii - **Elipticidade**

A forma bilinear $A_\sigma(\cdot,\cdot)$ é eliptica em $H(\mathrm{div})$, isto é, para $\delta > 0$, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$A_\sigma(\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h) \geq \alpha_h \|\mathbf{q}_h\|^2_{H(\mathrm{div})} \quad \forall \mathbf{q} \in X^l_h \subset H(\mathrm{div}). \qquad (IV.5)$$

Da definição de $A_\sigma(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h)$ temos que:

$$A_\sigma(\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h) = (A\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h) + \delta(\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}, \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h})$$

Como A é positivo definido

$$A_\sigma(\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h) \geq \alpha\|\mathbf{q}_h\|^2 + \delta\|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\|^2$$

Obtemos então:

$$A_\sigma(\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h) \geq \alpha_h \|\mathbf{q}_h\|^2_{H(\mathrm{div})}$$

Ficando demonstrada a elipticidade com

$$\alpha_h = \min\{\alpha, \delta\}. \qquad (IV.6)$$

iii - **Continuidade**

A forma bilinear $A_\sigma(\cdot,\cdot)$ é contínua em $H(\mathrm{div})$, isto é, existe uma constante $M < \infty$ tal que

$$A_\sigma(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) \leq M\|\mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div})}\|\mathbf{q}_h\|_{H(\mathrm{div})} \quad \forall \mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h \in X^l_h, \qquad (IV.7)$$

Pela definição de $A_\sigma(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h)$ temos que:

$$A_\sigma(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) = (A\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) + \delta(\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}, \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) \quad \forall \mathbf{p}_\mathrm{h}, \mathbf{q}_\mathrm{h} \in \mathrm{X}^\mathrm{l}_\mathrm{h}.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$A_\sigma(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) \leq M_1\|\mathbf{p}_h\|\,\|\mathbf{q}_h\| + \delta\|\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}\|\,\|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\|$$

Adicionando-se termos positivos no segundo membro, ficamos com:

$$A_\sigma(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) \leq M_1 \|\mathbf{q}_h\|(\|\mathbf{p}_h\| + \|\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}\|) + \delta\|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\|(\|\mathbf{p}_\mathrm{h}\| + \|\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}\|)$$

Podemos escrever então que

$$A_\sigma(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) \leq \max\{\mathrm{M}_1, \delta\}\,(\|\mathbf{p}_\mathrm{h}\| + \|\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h}\|)(\|\mathbf{q}_\mathrm{h} + \|\mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}\|)\,. \qquad (IV.8)$$

obtemos

$$A_\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \leq M\|\mathbf{q}\|_{H(\mathrm{div})}\|\mathbf{q}\|_{H(\mathrm{div})}$$

com

$$M = \max\{\mathrm{M}_1, \delta\}$$

iv - **Erro de Aproximação**

Da "consistencia", como descrito no item (i) e da equação variacional do problema obtemos:

$$(\mathbf{p}_h - \mathbf{p}, \mathbf{q}_h) + \delta(\mathrm{div}\mathbf{p}_\mathrm{h} - \mathrm{div}\mathbf{p}, \mathrm{div}\mathbf{q}_\mathrm{h}) = (\theta - \theta_\mathrm{h}, \mathbf{q}_\mathrm{h})$$

Por outro lado temos, por definição , que:

$$\|\mathbf{p}_h - \mathbf{q}_h\|^2 + \|\mathrm{div}(\mathbf{p}_\mathrm{h} - \mathbf{q}_\mathrm{h})\|^2 = (\mathbf{p}_\mathrm{h} - \mathbf{q}_\mathrm{h}, \mathbf{p}_\mathrm{h} - \mathbf{q}_\mathrm{h}) + \delta(\mathrm{div}(\mathbf{p}_\mathrm{h} - \mathbf{q}_\mathrm{h}), \mathrm{div}(\mathbf{p}_\mathrm{h} - \mathbf{q}_\mathrm{h}))$$

De onde obtemos imediatamente a seguinte estimativa:

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div})} \leq (1 + \frac{M}{\alpha_h})\|\mathbf{p} - \mathbf{q}_h\|_{H(\mathrm{div})} + \frac{1}{\alpha}\|\theta - \theta_h\|_0 \quad \forall \mathbf{q}_h \in X_h^l. \qquad (IV.9)$$

Usando resultados clássicos da teoria de interpolação obtemos

$$\|\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_h\|_{H(\mathrm{div})} \leq Ch^l|\mathbf{p}|_{l+1} + Ch^{k+1}|\theta|_{k+1}. \qquad (IV.10)$$

IV.3 - Formulação de Pós-Processamento - Problema da Elasticidade

Seja $\mathbf{u}_h \in V_h^k$ uma aproximação de elementos finitos para o campo $\mathbf{u}$. Por exemplo, no caso em que o operador constitutivo A é inversível, $\mathbf{u}_h$ pode ser a solução do **Problema** $\mathbf{PU}_h$, que como vimos é tal que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^{k+1}|\mathbf{u}|_{k+1}\,.$$

Propomos agora uma formulação semelhante a aquela do problema de calor para o caso da elasticidade. Nesse caso o campo de tensões σ_h será obtido através de um pós-processamento em $X_h^l \subset U(\mathrm{div})$, envolvendo simultaneamente os resíduos das equações constitutivas e de equilíbrio, ou seja,

$$(A\sigma_h - \nabla \mathbf{u}_h, \tau_h) + \delta(\mathrm{div}\sigma_\mathrm{h} + \mathbf{f}, \mathrm{div}\tau_\mathrm{h}) = 0 \quad \forall \tau_\mathrm{h} \in \mathrm{X}_\mathrm{h}^\mathrm{l}\,. \qquad (IV.11)$$

Integrando por partes o termo envolvendo $\nabla \mathbf{u}_h$, resulta o seguinte método para determinação de σ_h

Problema $\mathbf{P}\sigma_h$: Dado $\mathbf{u}_h \in V_h^k$ achar $\sigma_h \in X_h^l$ tal que

$$A_\sigma(\sigma_h, \tau_h) = F_\sigma(\tau_h) \quad \forall \tau_h \in X_h^l \qquad (IV.12)$$

onde

$$A_\sigma(\sigma_h, \tau_h) = (A\sigma_h, \tau_h) + \delta(\mathrm{div}\sigma_\mathrm{h}, \mathrm{div}\tau_\mathrm{h}) \quad \forall \sigma_\mathrm{h}, \tau_\mathrm{h} \in \mathrm{X}_\mathrm{h}^\mathrm{l},$$

$$F_\sigma(\tau_h) = -\delta(\mathbf{f}, \mathrm{div}\tau_\mathrm{h}) + (\mathbf{u}_\mathrm{h}, \mathrm{div}\tau_\mathrm{h}) \quad \forall \tau_\mathrm{h} \in \mathrm{X}_\mathrm{h}^\mathrm{l}.$$

IV.3.1 - Análise Numérica

i - "Consistencia"

São válidas aqui as mesmas considerações para o caso do problema anterior.

ii - Elipticidade

A forma A_σ é eliptica em $H(\mathrm{div})$, isto é, para $\delta > 0$, existe uma constante $\alpha_h > 0$ tal que

$$A_\sigma(\tau_h, \tau_h) \geq \alpha_h \|\tau_h\|^2_{U(\mathrm{div})} \quad \forall \tau_h \in X_h^l \subset U(\mathrm{div}). \qquad (IV.13)$$

iii - **Continuidade**

A forma A_σ é contínua isto é, existe uma constante M tal que:

$$A_\sigma(\sigma_h, \tau_h) \leq M\|\sigma_h\|_{U(\mathrm{div})}\|\tau_h\|_{U(\mathrm{div})} \quad \forall \sigma_h, \tau_h \in X_h^l \subset U(\mathrm{div}), \qquad (IV.14)$$

iv - **Erro de Aproximação**

Podemos então demonstrar a seguinte estimativa para σ_h,

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{U(\mathrm{div})} \leq (1 + \frac{M}{\alpha})\|\sigma - \tau_h\|_{U(\mathrm{div})} + \frac{1}{\alpha}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \quad \forall \tau_h \in X_h^l. \qquad (IV.15)$$

Este resultado é também válido para elasticidade incompressível e para fluência na norma $\|\cdot\|_{U^*(\mathrm{div})}$, definida no Capítulo III.

Usando resultados clássicos da teoria de interpolação obtemos

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{U(\mathrm{div})} \leq Ch^l|\sigma|_{l+1} + Ch^{k+1}|\mathbf{u}|_{k+1}. \qquad (IV.16)$$

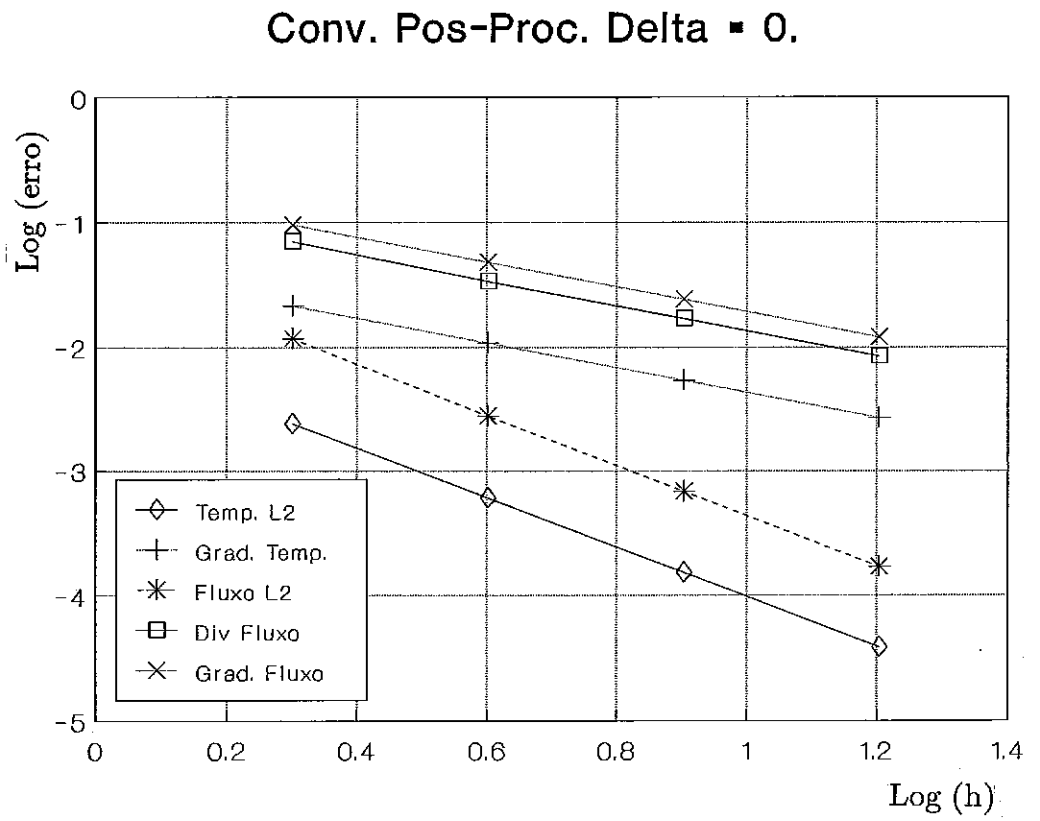
Donde concluimos que, com este pós-processamento, estimativas ótimas para o campo σ_h podem ser obtidas com $l = k + 1$, o que acarreta uma grande melhora na precisão desta aproximação.

IV.4 - Exemplos Numéricos

Exemplo 1 - Problema de Calor Estacionário

Aplicamos o esquema de pós-processamento ao mesmo problema de transferência de calor descrito no Capítulo II. Para as curvas de convergencia empregamos inicialmente malhas regulares de 4, 16, 64 e 256 elementos quadrilateros

lineares. Na Fig. IV.1 mostramos as taxas obtidas com $\delta = 0.$ e $\delta = 0.1$, para a temperatura e para os fluxos resultantes de um pós-processamento onde os fluxos foram interpolados também linearmente (opção $l = k$). As curvas de convergência para a temperatura em L2 e para seu gradiente são repetidas nos dois gráficos dessa figura com o objetivo de facilitar as comparações. Podemos constatar uma pequena sensibilidade na precisão das curvas de convergência para o divergente do fluxo quando passamos de $\delta = 0.$ para $\delta = 0.1$. É importante ressaltar que o esquema com $\delta = 0.$ apresenta taxas melhores para o fluxo em L2, o que é uma peculiaridade do exemplo analisado. Na figura seguinte (Fig. IV.2) apresentamos os resultados obtidos fazendo $\delta = 1.0$ e $\delta = h$. Para $\delta = 1.0$ conseguimos uma pequena melhoria para as taxas do divergente do fluxo contrabalançada pela piora do comportamento para o fluxo e seu gradiente. Para $\delta = h$ constatamos uma melhor convergência tanto para o fluxo quanto para seu gradiente. De modo a evidenciar a influencia da regularidade das malhas nos resultados obtidos anteriormente determinamos as taxas de convergência obtidas com as malhas distorcidas de 16, 64, e 256 elementos cujos quadrantes apresentamos na Fig. IV.3. Para $\delta = 0.$ o que constatamos do gráfico superior da Fig. IV.4 é uma perda de precisão e de ordem de convergência para o fluxo, seu divergente e seu gradiente. Para $\delta = 0.1$ o que observamos é a manutenção das taxas obtidas anteriormente com a sequencia de malhas regulares, o que mostra claramente que esses resultados não são afetados pela regularidade das malhas utilizadas nas discretizações. Finalmente na Fig. IV.5 são apresentados os resultados obtidos para essas malhas distorcidas quando adotamos $\delta = h$ e $\delta = h^2$. Neste caso ressaltamos as taxas identicas obtidas para o fluxo e temperatura e a melhora da convergência para o gradiente do fluxo.



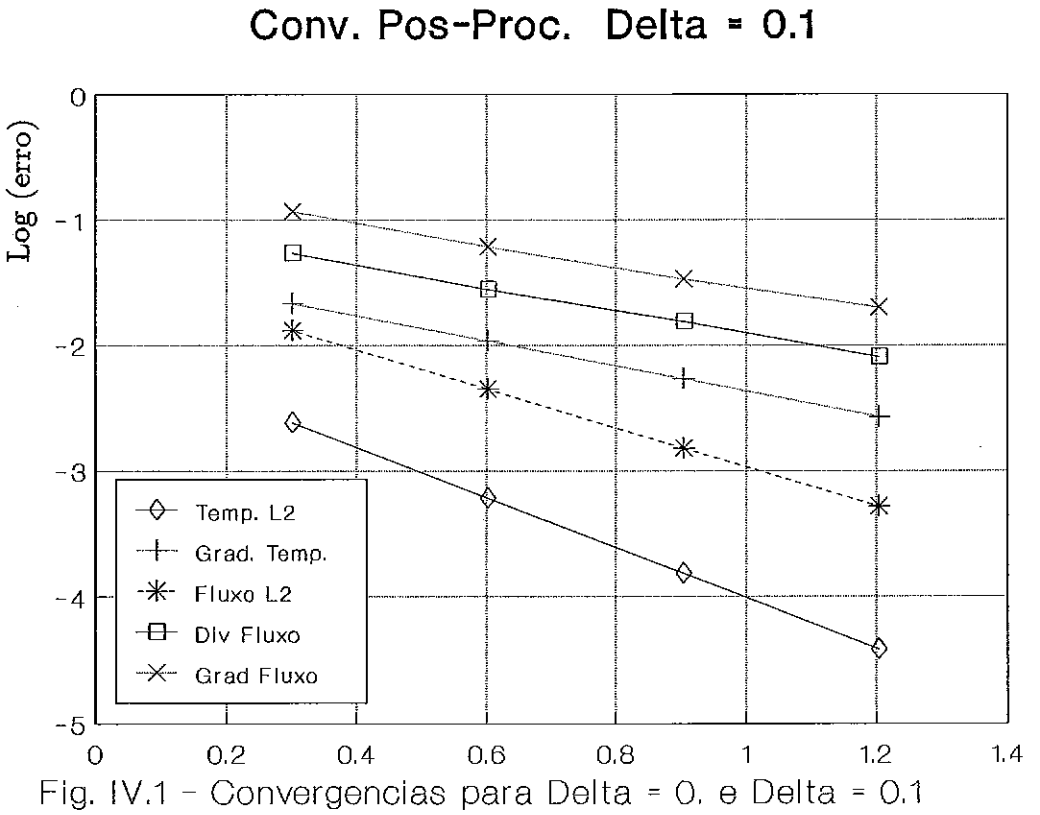
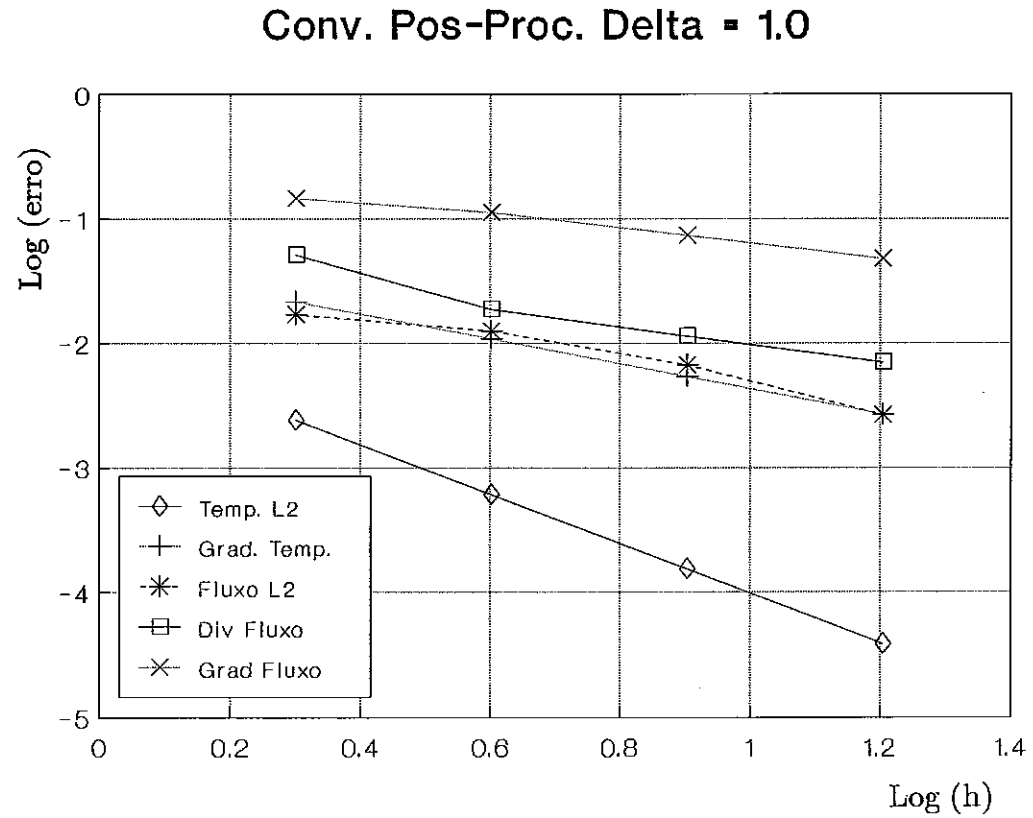


Fig. IV.1 - Convergencias para Delta = 0. e Delta = 0.1



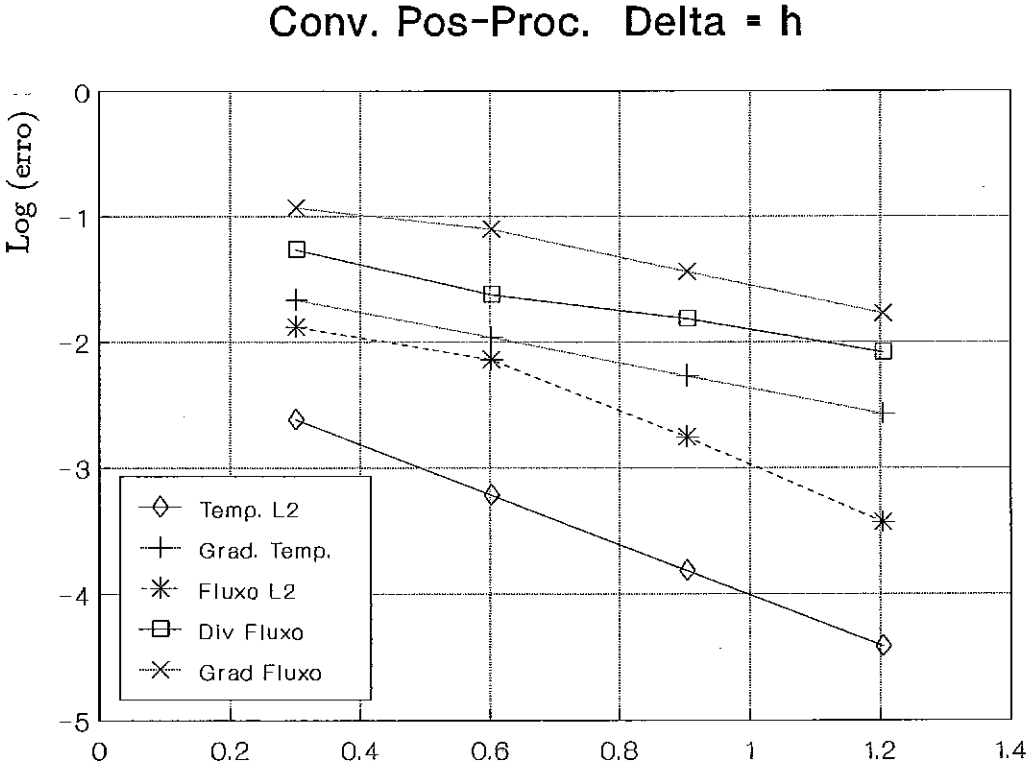
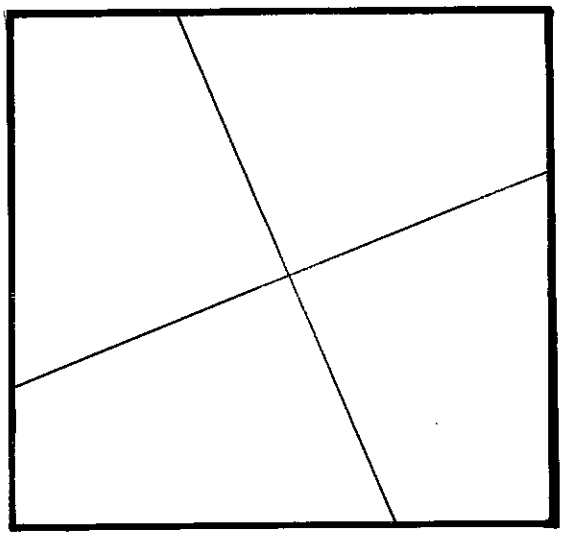
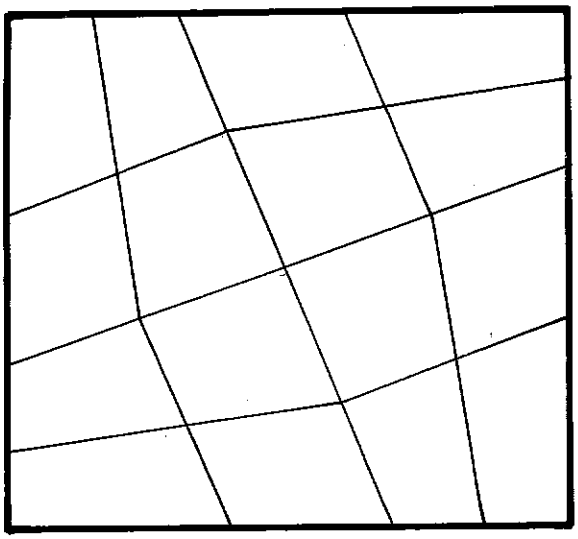


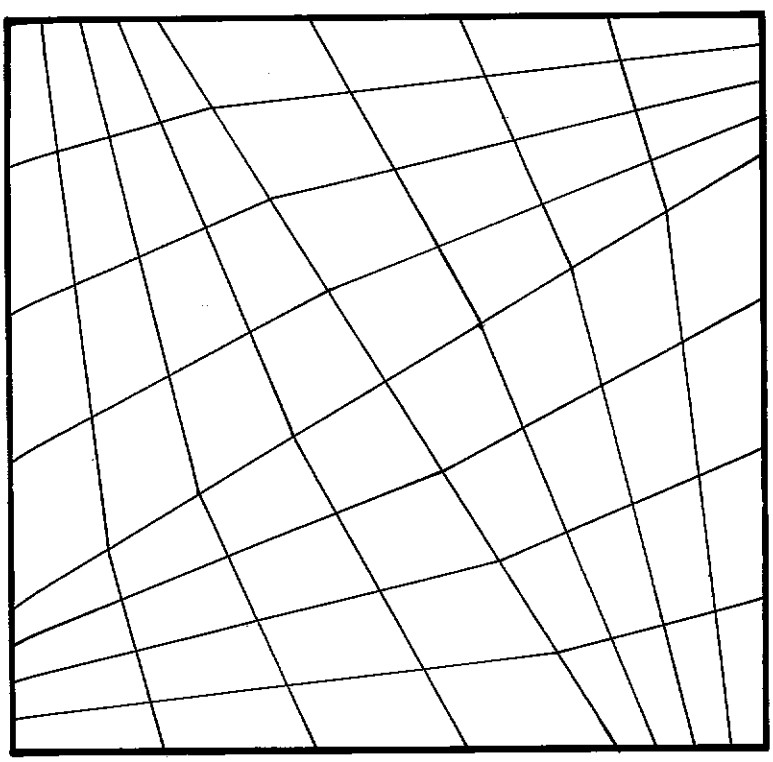
Fig. IV.2 - Convergencias para Delta = 1.0 e Delta = h



a) Malha M1

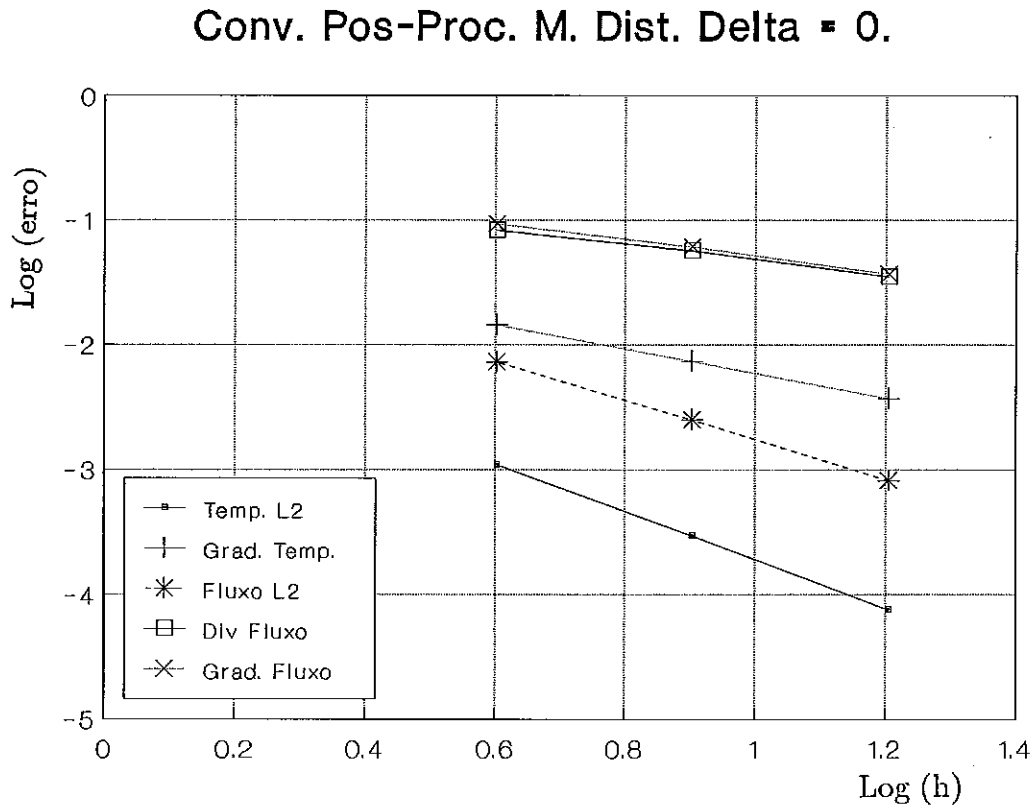


b) Malha M2



c) Malha M3

Fig. IV.3 Conjunto de Malhas Distorcidas - Quadrante



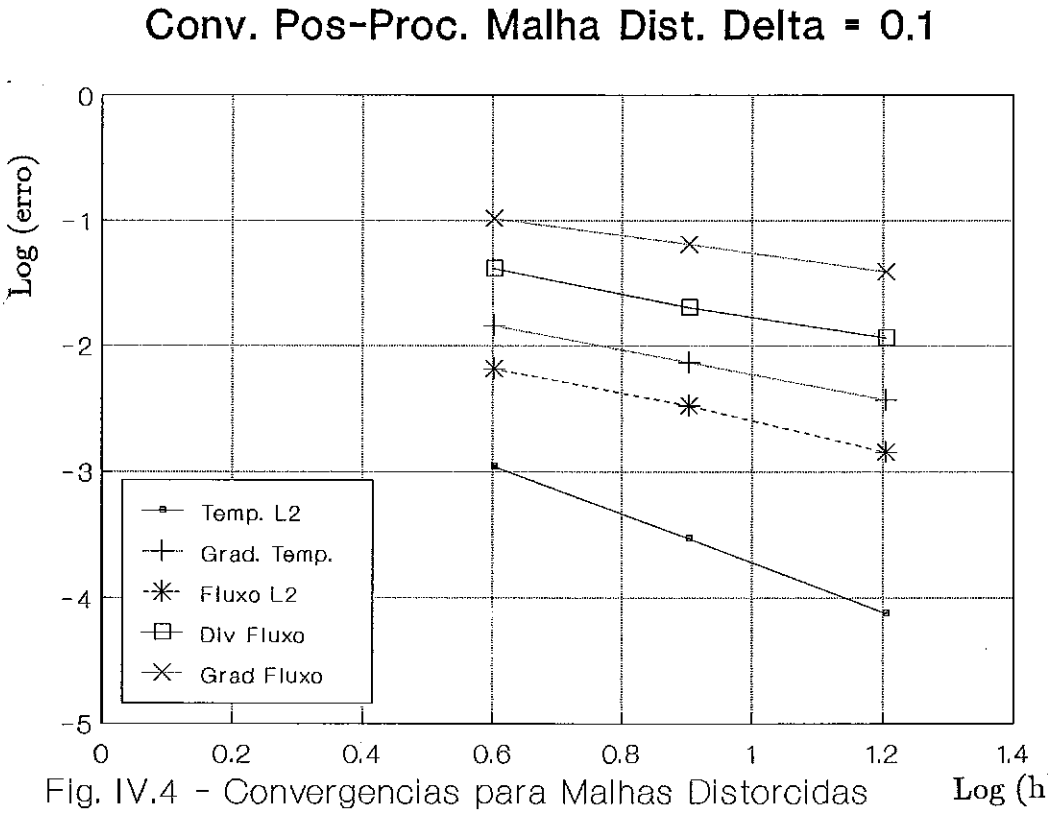
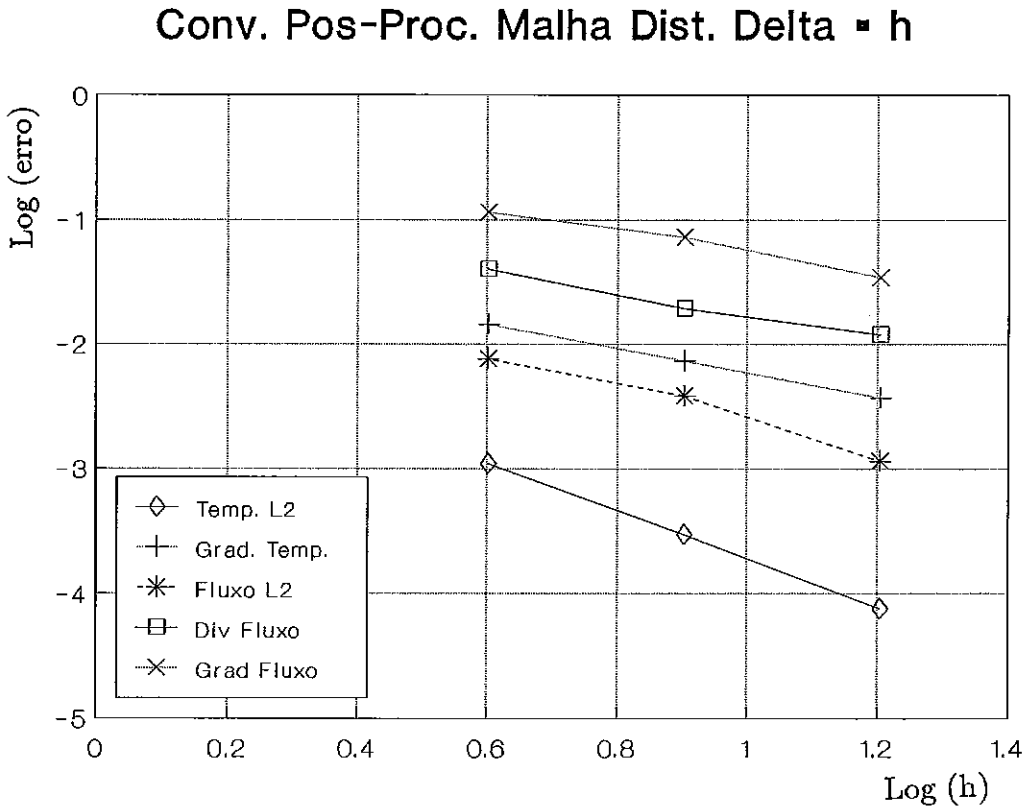


Fig. IV.4 - Convergencias para Malhas Distorcidas



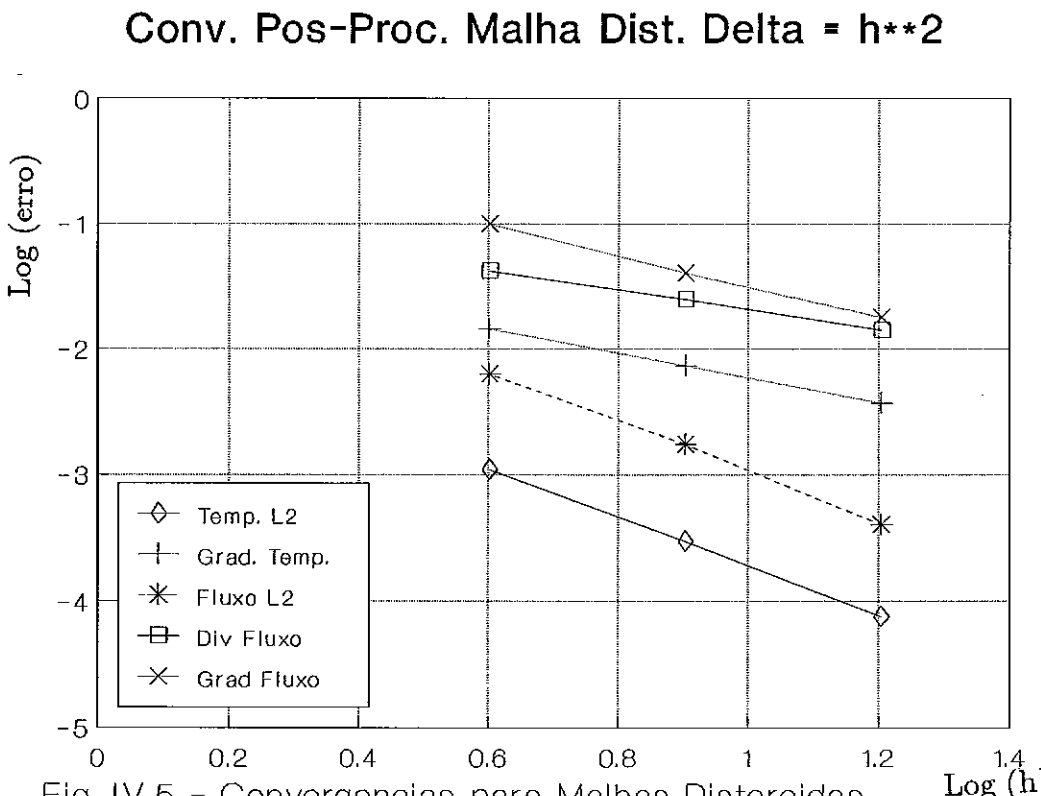


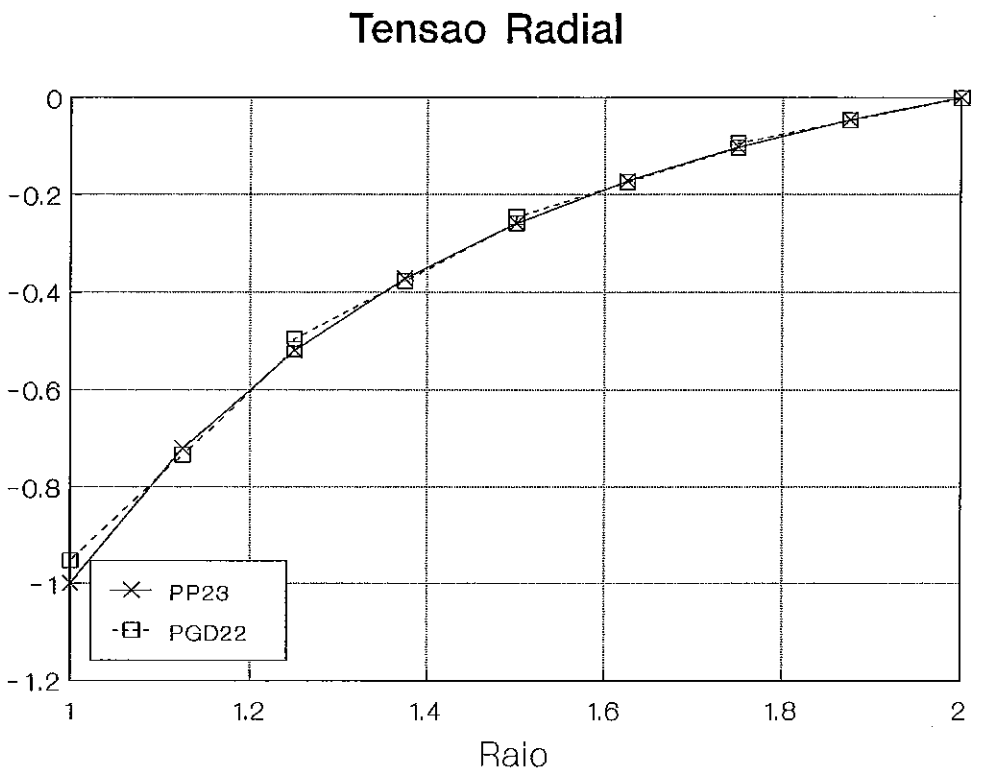
Fig. IV.5 - Convergencias para Malhas Distorcidas

Exemplo 2 - Cilindro Incompressível

Em seguida analisamos o problema do cilindro infinito incompressível descrito no Capítulo II. Nas figuras IV.6 e IV.7 apresentamos comparações das aproximações obtidas para as distribuições das tensões radial e circunferencial na parede do cilindro. Neste caso utilizamos uma malha uniforme de 4 elementos. As curvas indicadas como PP23 representam as aproximações obtidas com um esquema de pós-processamento com $\delta = 1.0$ e interpolações quadráticas (3 nós) para as tensões. O campo de deslocamentos utilizado no pós-processamento foi obtido com a formulação de Petrov-Galerkin ($\delta_1 = 1.0$ e $\delta_2 = 1.0$), com aproximações lineares descontínuas para as tensões e lineares para os deslocamentos, cujos resultados são designados nestes gráficos como PGD22. A outra solução apresentada nessas comparações - GD21 - designa a aproximação de Galerkin com tensões constantes por elemento e deslocamentos lineares. As comparações ilustram as melhoras conseguidas para ambas as tensões obtidas pelo presente esquema de pós-processamento, quando interpolamos essas com um grau acima das interpolações para os deslocamentos (caso $l = k + 1$).

Na Fig. IV.8 comparamos as convergências para o tensor de tensão em H(div) obtidas com os esquemas de Galerkin com aproximações contínuas quadráticas para as tensões e deslocamentos (GC33) e lineares (GC22), com as taxas encontradas utilizando um pós-processamento com tensões quadráticas a partir dos resultados determinados com aproximações lineares para os deslocamentos - PP23. Devemos notar a acentuada melhora para a taxa de convergencia em H(div) para o tensor de tensão com relação ao obtido empregando-se a opção GC22.

Em seguida na Fig. IV.9 apresentamos as taxas para o campo de deslocamento radial que são utilizadas no esquema de pós-processamento. Esse campo foi obtido com uma aproximação de Petrov-Galerkin com $\delta_1 = 1.0$ e



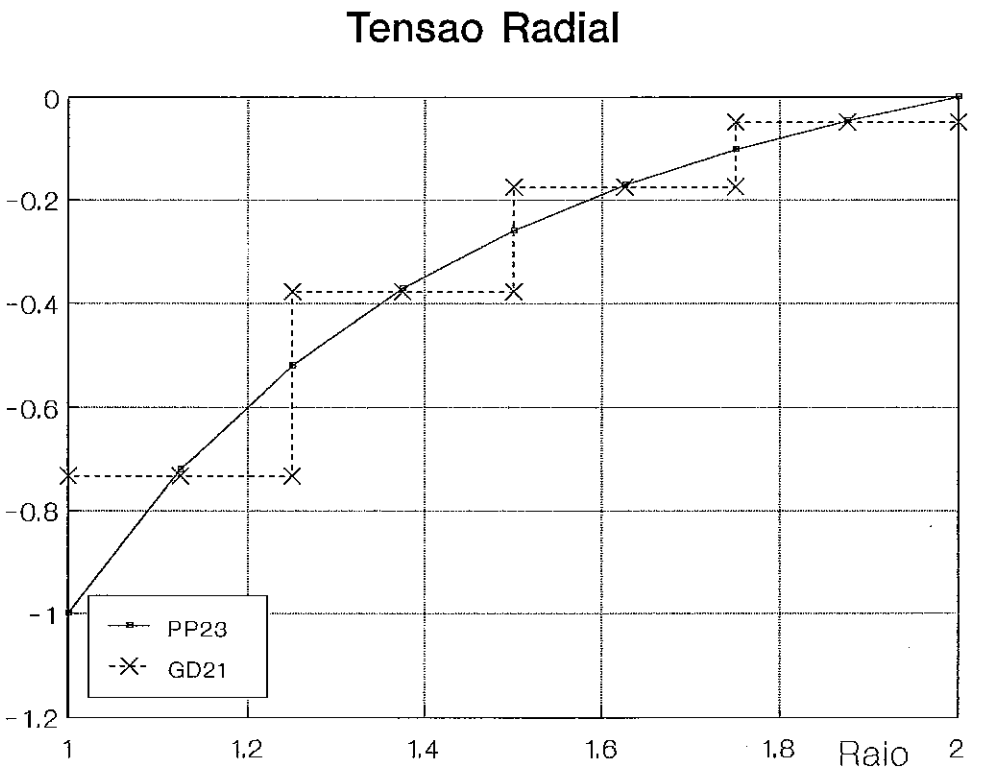
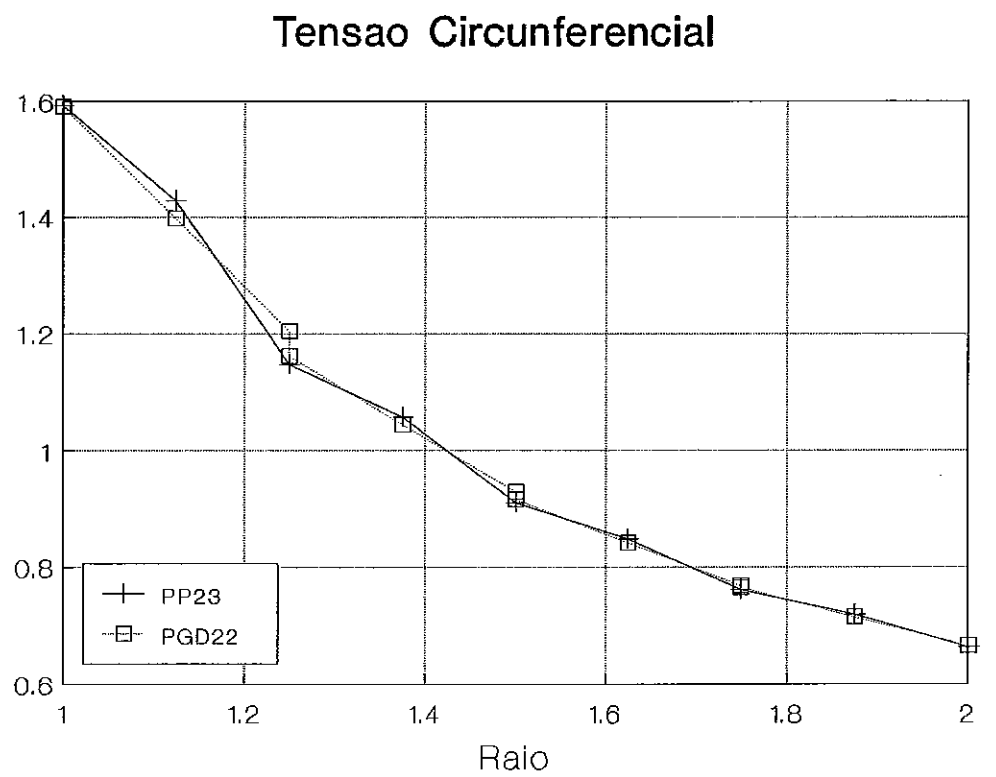


Fig. IV.6 - Campo de Tensao Radial



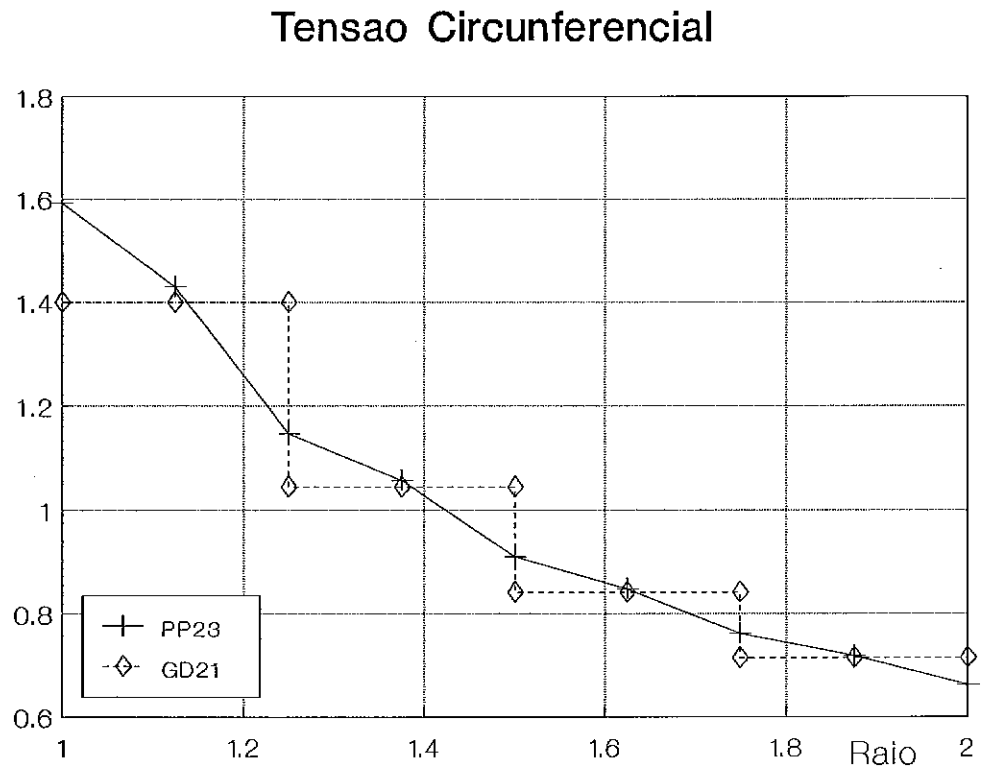
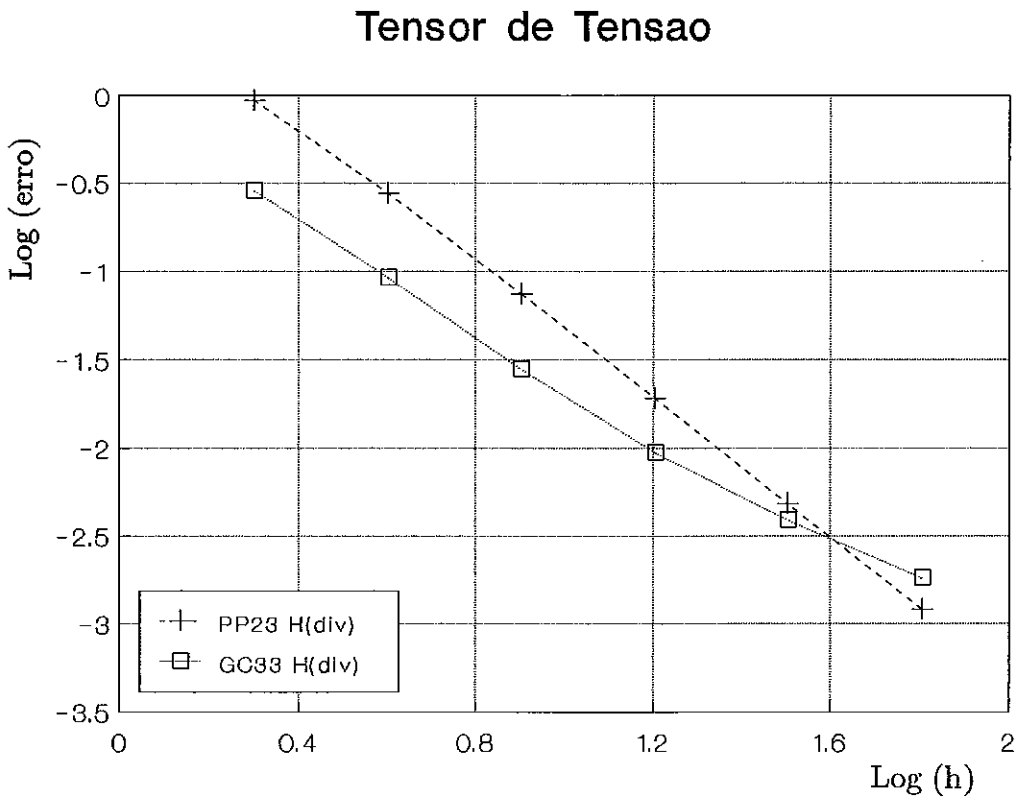


Fig. IV.7 - Campo de Tensao Circunferencial



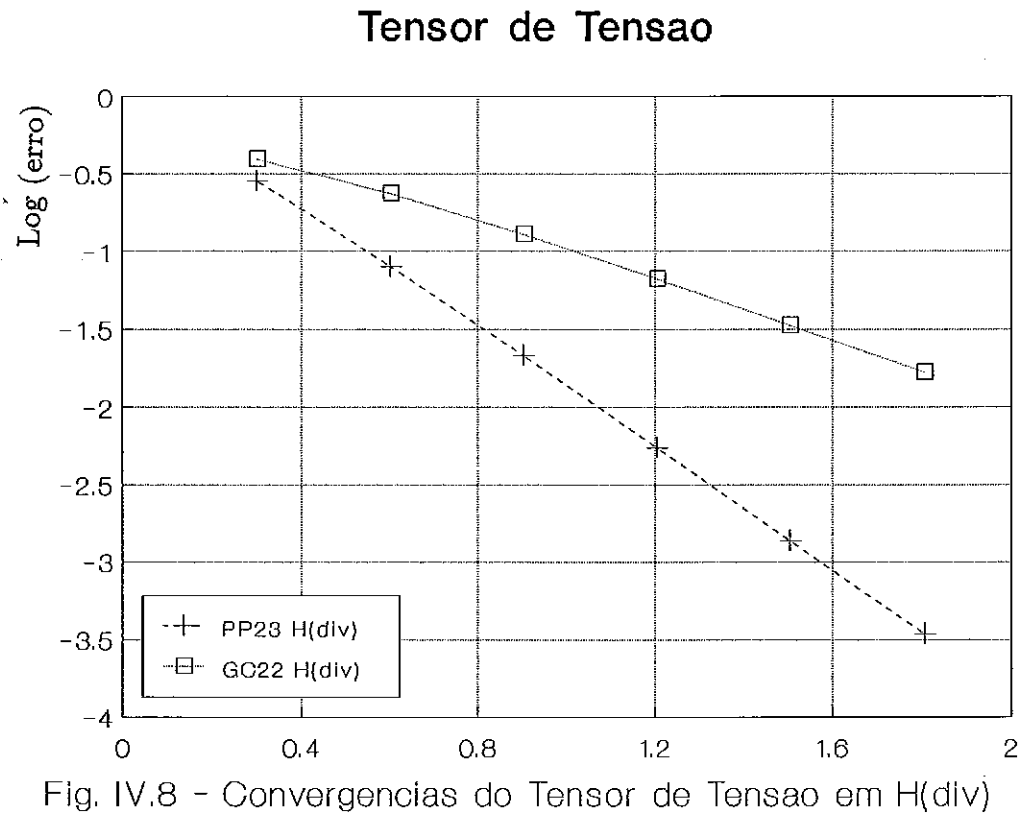
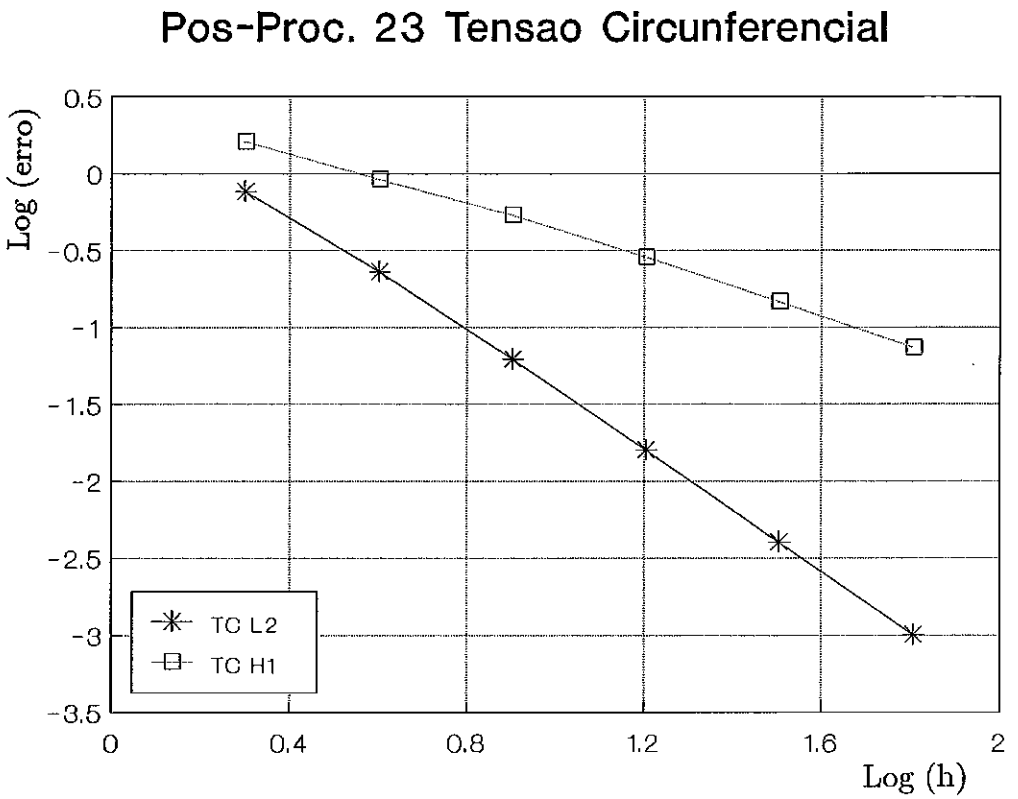


Fig. IV.8 - Convergencias do Tensor de Tensao em H(div)



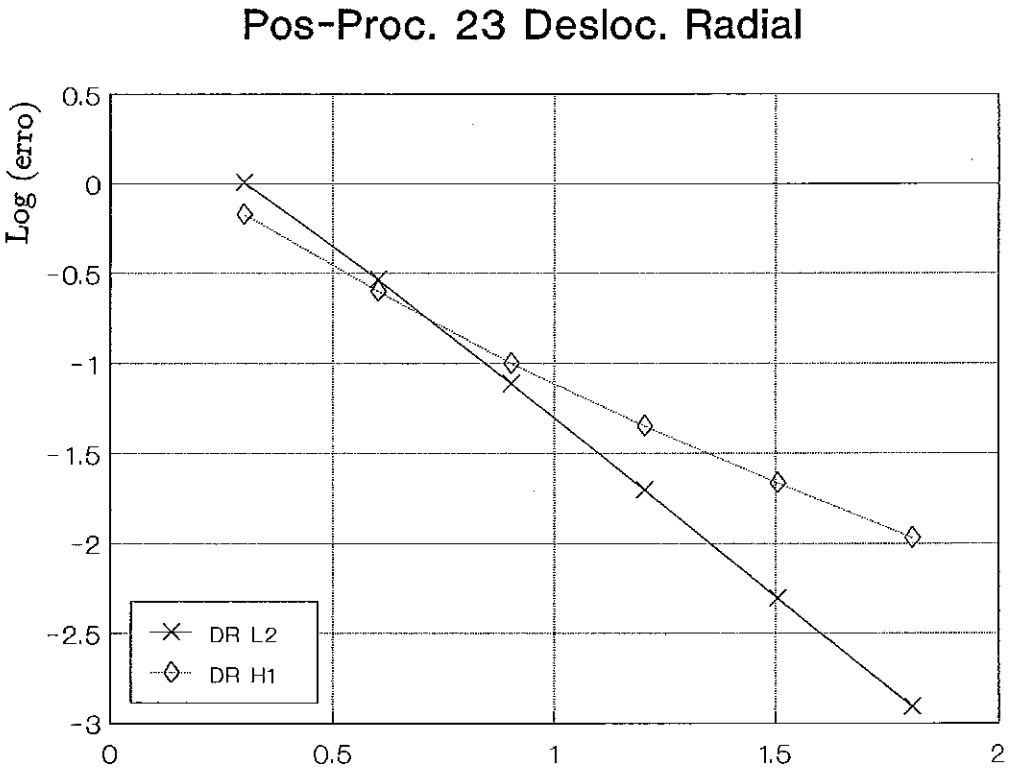
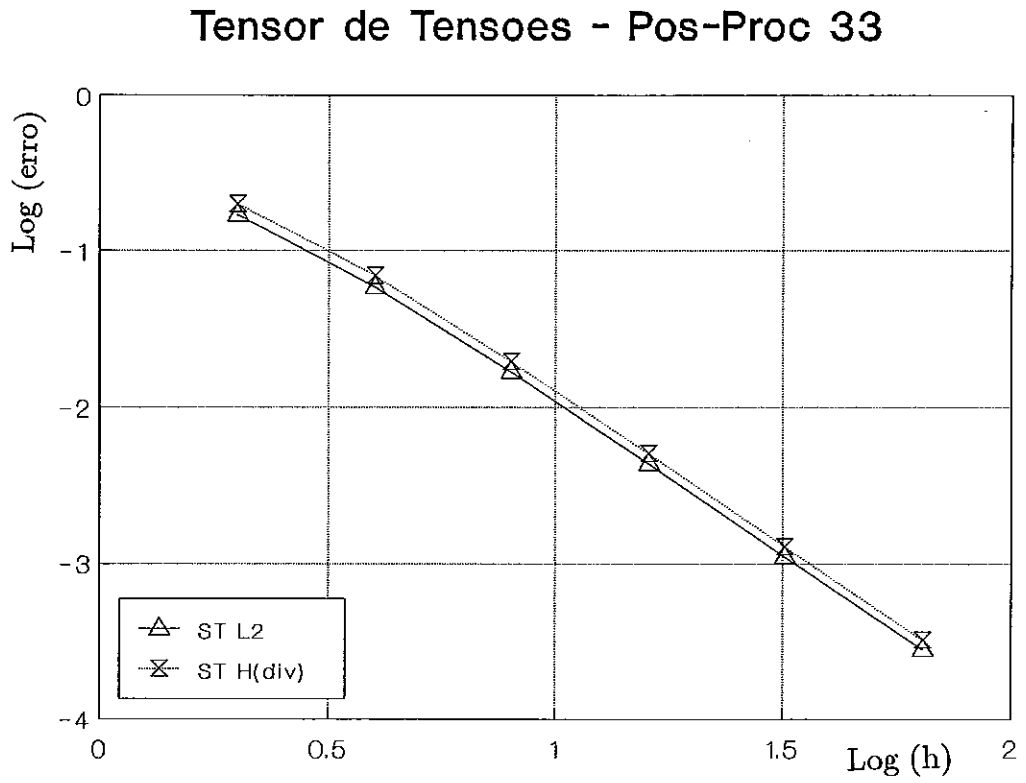


Fig. IV.9 - Convergencias Pos-Proc. 23



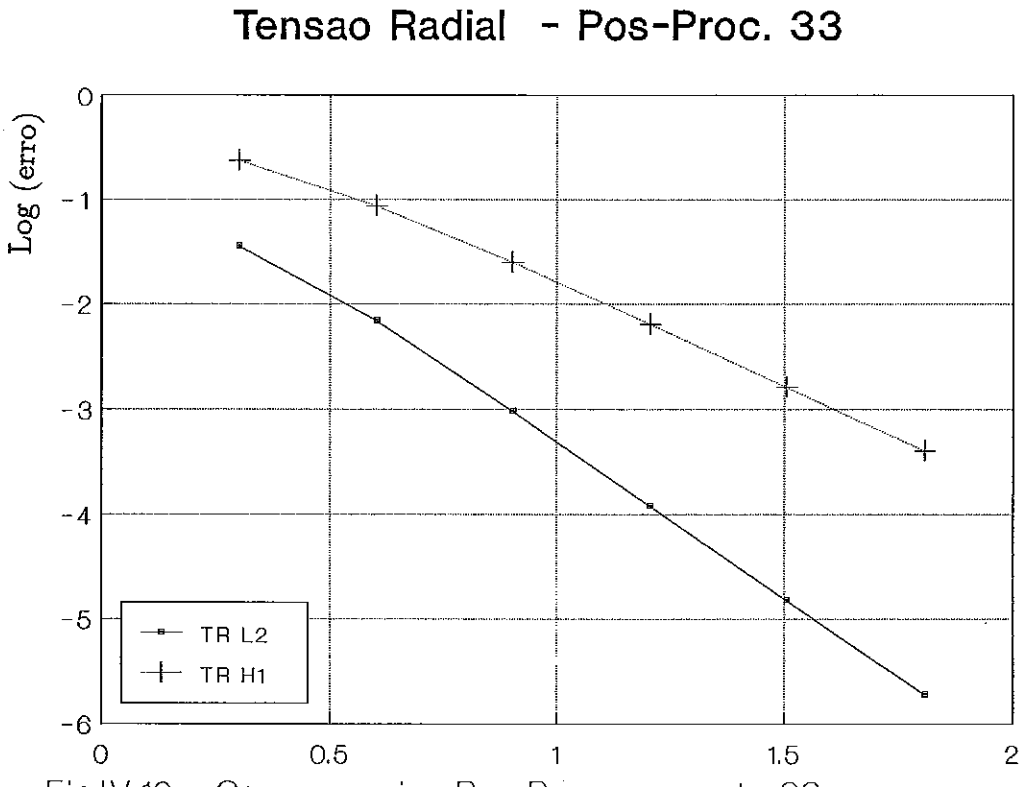


Fig.IV.10 - Convergencias Pos-Processamento 33

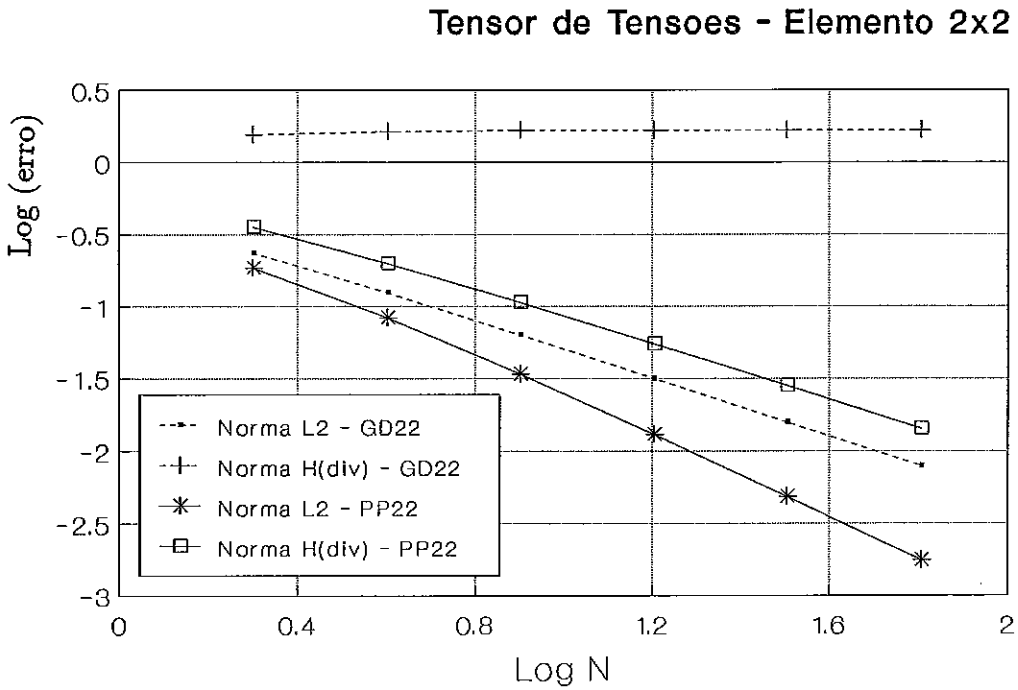
$\delta_2 = 1.0$ e aproximações lineares para os deslocamentos e constantes por elemento para as tensões. Na parte superior dessa figura indicamos as taxas obtidas para a tensão circunferencial.

Finalmente são apresentadas na Fig. IV.10 as taxas de convergência obtidas para o tensor de tensões e para a tensão radial quando empregamos o esquema PP33, isto é processamento com uma formulação de Perov-Galerkin quadrática para os deslocamentos e tensões (estas descontínuas), combinado com um pós-processamento com interpolações quadráticas para as tensões. É importante notar que neste caso o tensor de tensões converge com a mesma taxa em L2 e em H(div).

Exemplo 3 - Cilindro Compressível

O último exemplo analisado foi o cilindro infinito elástico compressível com coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e módulo de elasticidade $E = 1.0$. Na Fig. IV.11 comparamos em gráficos $\log(N) \times$ log(erro), onde N é o número de nós da malha menos 1 os resultados de convergência do esquema de pós-processamento de Petrov-Galerkin com as aproximações clássicas de Galerkin descontínuas. Neste estudo foram adotadas malhas uniformes com N igual a 2, 4, 8, 16, 32 e 64.

Para o elemento linear em tensão e deslocamento é importante notar que o campo de tensões obtido pela formulação clássica (GD22) não converge em H(div), o que não acontece com o campo obtido pelo pós-processamento, que aproxima melhor a equação de equílibrio. Para o elemento de 3 nós - gráfico inferior da Fig. IV.11 - confirmamos as taxas de convergência previstas na análise, isto é, $\|\sigma - \sigma_h\|_0 = o(h^2)$, para o modelo misto clássico (GD33), e $\|\sigma - \sigma_h\|_{H(\mathrm{div})} = o(h^2)$, para o modelo com pós-processamento com $l = k$ (PP33). Notar que neste caso o campo de tensões obtido com o modelo misto clássico é também convergente em $H(\mathrm{div})$, porém com uma taxa de ordem h apenas frente a uma taxa de ordem h^2 do modelo com pós-processamento.



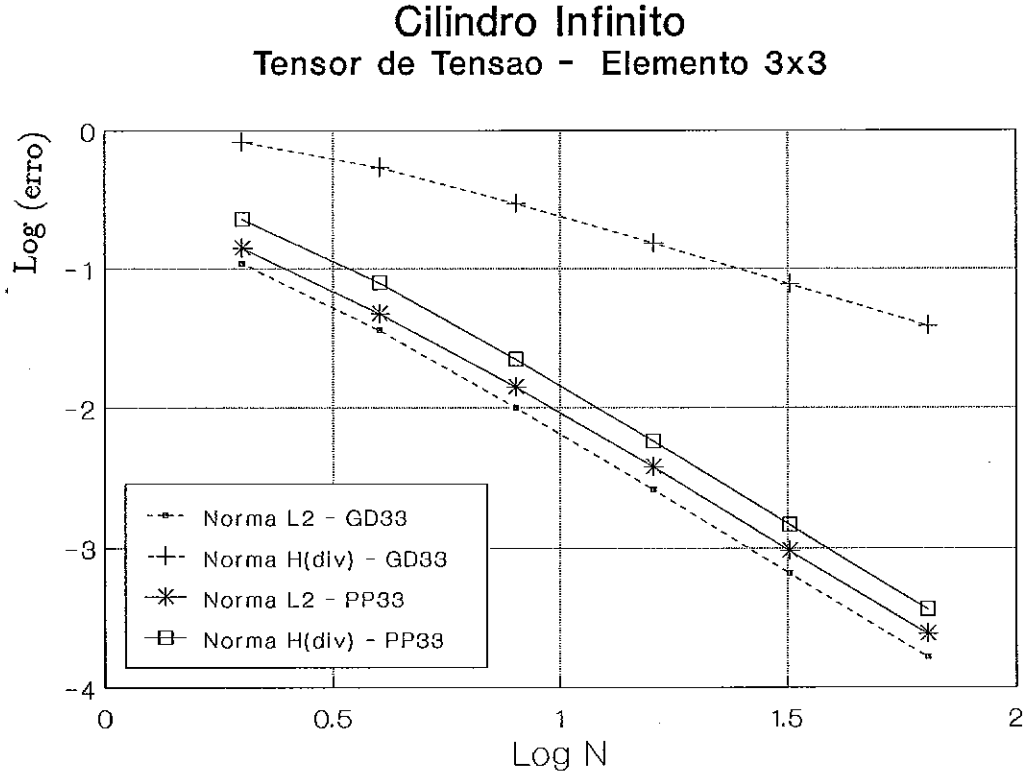


Figura IV.11 - Convergencias para o tensor de tensoes

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

A adição à formulação mista clássica de Galerkin de resíduos das equações que governam os problemas aqui tratados transformam problemas originais de ponto de sela em problemas de minimização sem restrição , como foi mostrado.

A importância e as vantagens desse fato, que foram explicitadas ao longo do trabalho, residem principalmente em eliminarmos as restrições naturais decorrentes das aplicações de formulações mistas derivadas do método de Galerkin, que limitam a escolha dos campos de aproximação para as variaveis envolvidas, que necessitam satisfazer a condição de Babuska-Brezzi.

Dessa forma as formulações de Petrov-Galerkin aqui propostas permitem o uso de combinações de aproximações que são instáveis quando se usam modelos mistos

São analisadas detalhadamente duas classes de problemas - problemas sem restrição interna - exemplificados aqui pelos problemas de Poisson e pelo problema da elasticidade compressível e problemas com restrição interna para a qual tomamos os problemas da elasticidade incompressível linear e não linear.

A divisão adotada é motivada pela diferente natureza do comportamento das aproximações mistas quando empregada em cada caso. Assim é que para a primeira classe de problemas - sem restrição - o problema maior, quando se utilizam modelos mistos é com a satisfação da LBB, que é responsável pelas principais dificuldades numéricas encontradas. Já nos problemas da elasticidade incompressível o

obstáculo maior é com a satisfação da elipticidade no espaço em que o problema é posto.

A potencialidade das formulações aqui propostas é claramente demonstrada pelas suas aplicações a essas duas classes de problemas sem nenhuma restrição para as combinações das aproximações das variáveis envolvidas.

Outro aspecto a ressaltar é a facilidade de implementação computacional dessas formulações em códigos já existentes que utilizem modelos mistos, já que para isso basta acrescentarmos aos termos das matrizes já existentes parcelas adicionais correspondentes aos resíduos acrescentados a formulação mista original.

Os resultados obtidos, em termos de taxas de convergência, demonstram claramente a melhora que se consegue na estabilidade e na precisão das tensões ou fluxos. Os resultados numéricos ilustram a validade das taxas obtidas na análise feita para as formulações apresentadas.

Vale lembrar novamente, que essas variáveis são, em geral, as de maior interesse físico para os problemas da engenharia: fluxos de calor - no caso do problema de Poisson - e as tensões - no caso da elasticidade. Existem diversas areas em que as formulações aqui desenvolvidas, poderiam ser utilizadas, tais como em problemas de flexão de placas onde temos problemas semelhantes ao da viga de Timoshenko já analisada satisfatóriamente por metodos de Petrov-Galerkin dessa natureza.

A técnica de pós-processamento parece ser mais indicada para se acoplar a um esquema com modelo de deslocamento. Neste caso entendemos ser este esquema como particularmente útil na determinação do campo de tensões em porções do domínio com concentração de tensões. Assim procedendo teríamos nessas regiões resultados mais precisos do que os calculados pela equação constitutiva, por exemplo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

ARNOLD, D. N., BREZZI, F. e FORTIN, M. (1984a), "A Stable Finite Element for Stokes Equation", **Calcolo**, Vol. XXI, Fasc. IV, pp. 337-344.

ARNOLD, D. N. , BREZZI, F. , DOUGLAS Jr., J.(1984b), " PEERS : A New Finite Element for Plane Elasticity " - Japan Journal of Appl. Math. Vol. 1, No. 2 , pp. 347-367.

ARNOLD, Falk, R. S.(1988), "A new Mixed Formulation for Elasticity", **Numerische Matematik**, vol. 53, pp.13-90

BABUŠKA, I. (1971), "Error Bounds for Finite Element Method", **Numerische Mathematik**, Vol. 16, pp. 322-333.

BABUŠKA, I. (1973a), "The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers", **Numerische Mathematik**, Vol. 20, pp. 179-192.

BABUŠKA, I. (1973b), "The Finite Element Method with Penalty", **Mathematics of Computation**, Vol. 27, 122, pp. 221-228.

BERCOVIER, M. (1978), "Perturbation of Mixed Variational Problems. Application to Mixed Finite Element Methods", **Revue Française d'Automatique Informatique et Recherche Opérationnelle** , Ser. Rouge Anal. Numer., Vol. 12, R-3, pp. 211-236.

BERCOVIER, M. e ENGELMAN, M. (1979), "A Finite Element for the Numerical Solution of Viscous Incompressible Flows", **Journal of Computational Physics**, Vol. 30, pp. 181-201.

BREZZI, F. (1974), "On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-point Problems Arising From Lagrange Multipliers", **Revue Française d'Automatique Informatique et Recherche Opérationnelle, Ser. Rouge Anal. Numér.**, Vol. 8, R-2, pp. 129-151.

BREZZI, F. (1987), "A Survey of Mixed Finite Element Methods", **NASA Contractor Report no. 87-15**, Hampton, Virginia.

BROOKS, A. e HUGHES, T. J. R. (1982), "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Enphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 32, pp. 199-259.

CAREY, G. F. e ODEN, J. T. (1986), **Finite Elements : Fluid Mechanics**, Vol. VI, Prentice-Hall Cliffs, New Jersey.

CIARLET, P. G. (1978), **The Finite Element Method for Elliptic Problems**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

FORTIN, M. (1981) "Old and New Finite Elements for Incompressible Flows", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Vol. 1, pp. 347-431.

FORTIN, M. e GLOWINSKI, R. (1983), **Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems**,

North-Holland.

FRANCA, L. P. (1987), **New Mixed Finite Element Methods**, Ph.D. Dissertation, Stanford University.

GALEÃO, A. C. e CARMO, E. G. D. (1988), "A Consistent Approximate Upwind Petrov-Galerkin Method for Convection-Dominated Problems", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 68, pp. 83-95.

GIRAULT, V. e RAVIART, P. A. (1986), **Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations**, Springer-Verlag.

GLOWINSKI, R. e PIRONNEAU, O. (1979), "On a Mixed Finite Element Approximation of the Stokes Problem", **Numerische Mathematik**, Vol. 33, pp. 397-424.

GUERREIRO, J. N. C. (1988), **Novos Métodos de Elementos Finitos Mistos para Análise Inelástica**, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

HOOD , P. e TAYLOR, C. (1974), "Navier-Stokes Equations Using Mixed Interpolation", **Finite Element Methods in Flow Problems**, pp. 121-132.

HUGHES, T. J. R. (1987), **The Finite Element Method**, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

IRONS, B. M. e RAZZAQUE, A. (1972), "Experience with the Patch Test for Convergence of Finite Element Methods", **Mathematical Foundations of the Finite Element Method**, Academic Press, pp. 557-587.

KARAM Fo., J. e LOULA, A. F. D. (1988a), "Stability of a Mixed Petrov-Galerkin Finite Element Formulation for Incompressible Flow", **Anais do XI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, Ouro Preto, MG, pp. 203-205.

KARAM Fo., J. e LOULA, A. F. D. (1988b), "New Mixed Finite Element Formulations for Incompressible Flows", **Anais do II Encontro Nacional de Ciências Térmicas**, Águas de Lindóia, SP, pp. 172-175.

KARAM Fo., J. (1989), "Uma Nova Formulação de Elementos Finitos Mistos Para Escoamentos Incompressíveis", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

LOULA, A. F. D., MIRANDA, I., HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P. (1986), "A Successful Mixed Formulation for Axissimetric Shell Analysis Employing Discontinuous Stress Fields of the Same Order of Displacement Field", **Anais do IV Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão**, Salvador, Vol. 2, pp. 581-599.

LOULA, A. F. D. (1988), "Introdução ao Método dos Elementos Finitos", **Anais do 28o. Seminário Brasileiro de Análise**, LNCC/CNPq, Rio de Janeiro, pp. 303-380.

LOULA, A. F. D., FRANCA, L. P. HUGHES, T. J. R. e MIRANDA, I. (1987), "Stability Convengence and Accuracy of a New Finite Element Method for the Circular Arch Problem", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 63, pp. 281-303.

LOULA, A. F. D. e GUERREIRO, J. N. C.,(1990) - " Finite Element Analysis of Nonlinear Creeping Flows" - **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol 79, pp. 87-109

LOULA, A. F. D., HUGHES, T. J. R. e FRANCA, L. P. (1987), "Petrov-Galerkin Formulations of the Timoshenko Beam Problema", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 63, pp. 115-132.

LOULA, A. F. D., HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P. e MIRANDA, I. (1987), "Mixed Petrov-Galerkin Method for the Timoshenko Beam", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 63, 133-154.

LOULA, A. F. D. e TOLEDO E. M.(1988), "Dual and Primal Mixed Petrov-Galerkin Finite Element Methods in Heat Transfer Problems" Anais ENCIT 88 - Aguas de Lindoia, São Paulo.

LOULA, A. F. D. e KARAM Fo., J. (1989), "Mixed Petrov-Galerkin Finite Element Methods for Stokes Problem with Discontinuous Pressure Interpolation of Any Order", **Proceedings of the I Pan-American Congress of Applied Mechanics**, Rio de janeiro, pp. 301-305.

LOULA, A. F. D.,GUERREIRO, J. N. C. e TOLEDO E. M. (1989), "Análise de Fluência Estacionária Através da Minimização de um Funcional em Tensão e Velocidade", **Anais X COBEM** , Rio de Janeiro, pp. 145-148.

MALKUS, D. S. e HUGHES, T. J. R. (1978), "Mixed Finite Element Methods- Reduced and Selective Integration Techniques : A Unification of Concepts", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol 15, pp. 63-81.

ODEN , J. T. e CAREY, G. F. (1982), **Finite Elements : Mathematical Aspects**, Vol. IV, Prentice-Hall, Englewood Press, New Jersey.

ODEN , J. T. e JACQUOTTE, O. P. (1984), "Stability of Some Mixed Finite Element Methods for Stokesian Flows", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 43, pp. 231-247.

ODEN , J. T. e KIKUCHI, N. (1982), "Finite Element Methods for Constrained Problems in Elasticity", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 18, 701-725.

ODEN , J. T., KIKUCHI, N. e SONG, Y. J. (1982), "Penalty-Finite Element Methods for The Analysis of Stokesian Flows", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 31, pp. 297-329.

PELLETIER, D., FORTIN, A. e CAMARERO, R. (1989), "Are FEM Solutions of Incompressible Flows Really Incompressible? (or How Simple Flows Can Cause Headaches!)", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Vol. 9, pp. 99-112.

RAVIART, P.A. e THOMAS, J. M.,(1975), A Mixed Finite Element Method for Second Order Elliptic Problems, Math. Aspects of the F. E. M., Lecture Notes in Mathematics 606, Springer-Verlag, Berlin, 292-315.

ROBERTS, J. E. e THOMAS, J. M. (1987), "Mixed and Hybrid Finite Element Methods, **Rapports de Recherche no. 737, INRIA**, France.

SANI , R. L., GRESHO, P. M., LEE, R. L. e GRIFFITHS, D. F. (1981a), "The Cause and Cure (?)of the Spurious Pressures Generated by Certain FEM Solu-

tions of the Incompressible Navier-Stokes Equations : Part 1", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Vol. 1, pp.17-43.

SANI , R. L., GRESHO, P. M., LEE, R. L. e GRIFFITHS, D. F. (1981b), "The Cause and Cure (!) of the Spurious Pressures Generated by Certain FEM Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations : Part 2", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Vol. 1, pp. 171-204.

SCHEURER, B.,(1977) "Existence et Approximation de Points Selles pour Certains Problems Non Lineaires", **Revue Francaise d'Automatique Informatique et Recherche Operationnelle, Analise Numerique**, Vol. 11, num. 4, PP. 369-400.

STENBERG, R.,(1988), "A family of Mixed Finite Elements for the Elasticity Problem". **Numerisch Matematik**, Vol.53 pp. 513-538

SOULAIMANI, A., FORTIN, M., DHATT, G., OUELLET, Y. e BERTRAND, F., "Simple Continuous Pressure Elements for Two and Three Dimensional Incompressible Flows", pré publicação.

TAYLOR, C. e HOOD, P. (1973), "A Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations Using the Finite Element Technique", **Computer and Fluids**, Vol. 1, pp. 73-100.

TAYLOR, R. L., SIMO, J. C., ZIENKIEWICZ, O. C. e CHAN, A. C. H. (1986), "The Patch Test - A Condition for Assessing FEM Convergence", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 22, pp. 39-62.

TOLEDO, E. M., LOULA, A. F. D. e GUERREIRO, J. N. C. (1989), "Formulações Mistas De Petrov-Galerkin Para Elasticidade Bidimensional", **Anais MECOM 89**, Porto, Portugal.

ZIENKIEWICZ, O. C. (1974), "Constrained Variational Principles and Penalty Function Methods in Finite Element Analysis", **Lecture Notes in Mathematics**, Springer Verlag.