

RESPOSTA DINÂMICA
DE UM SEMI-ESPAÇO VISCO-ELÁSTICO ESTRATIFICADO
SOB A AÇÃO DE CARGAS MÓVEIS

FRANCISCO CLÁUDIO PEREIRA DE BARROS

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D. Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovado por:



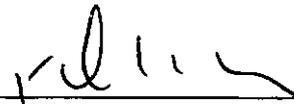
Prof. WEBE JOÃO MANSUR
(Presidente)



Prof. FERNANDO VENANCIO FILHO



Prof. JOÃO LUÍS PASCAL ROEHL



Prof. JOSÉ CLÁUDIO DE FARIA TELLES



Prof. ABIMAEEL FERNANDO DOURADO LOULA

RIO DE JANEIRO, RJ-BRASIL

DEZEMBRO DE 1990

BARROS, FRANCISCO CLAUDIO PEREIRA DE

Resposta Dinâmica do um Semi-espaco Visco-elástico
Estratificado sob a Ação de Carga Móveis [Rio de
Janeiro] 1990.

xii, 248 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia
Civil, 1990)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE

1. Dinâmica Visco-Elástica
2. Propagação de Onda
3. Funções de Green Móveis
4. Cargas Móveis
5. Resposta Dinâmica de
Semi-Espacos Estratificados

I. COPPE/UFRJ

II. TÍTULO (SÉRIE)

À ICLÉA,
FELIPE E MARIANA

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer ao Professor J. Enrique Luco, da Universidade da Califórnia em San Diego (UCSD), pelas idéias estimulantes, pela orientação contínua, paciente e encorajadora, sem a qual este trabalho não seria realizado. Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao Prof. Luco, orientador efetivo desta tese, não somente por sua orientação meticulosa como também pela ajuda despojada e pelo companheirismo dispensado. Fonte de inspiração e de ensinamento, no curso deste trabalho, pude presenciar em várias ocasiões, no trato de problemas complexos, a habilidade do Prof. Luco de exprimir, de maneira simples, sua forte intuição científica alicerçada em conhecimentos matemáticos sólidos e precisos. Foi um privilégio ter tido a oportunidade de poder trabalhar com o Prof. Luco na Universidade da Califórnia.

Aos Professores Fernando Venancio Filho e Webe João Mansur agradeço todo apoio e incentivo que me foi concedido quando de minha ida para a Universidade da Califórnia para desenvolvimento deste trabalho. Em particular, gostaria de ressaltar as visitas do Prof. Venancio à San Diego, que representaram, além do grande estímulo intrínseco, uma demonstração de apoio, acompanhamento e incentivo ao trabalho que estava sendo realizado; bem como toda a ajuda, compreensão e confiança depositada pelo Prof. Mansur quando de meu retorno ao país, na elaboração da versão final deste trabalho.

À Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN), pelo suporte financeiro durante minha estadia como *visiting scholar*, na Universidade da Califórnia (UCSD) desde 1987 a 1989, onde este trabalho foi desenvolvido.

Ao Centro de Supercomputação de San Diego pelo tempo cedido do Supercomputador Cray X-MP/48 utilizado na obtenção dos resultados apresentados neste trabalho.

Finalmente, mas não por último, agradeço aos meus filhos Felipe e Mariana, dádivas maiores de minha existência, as inúmeras horas de lazer que por direito lhes pertenciam e que foram sacrificadas em benefício deste trabalho. Agradeço, também, à minha esposa Icléa: fonte inexaurível de otimismo, apoio, compreensão, dedicação e amor, com quem compartilho todos os momentos de minha vida.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COOPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.).

RESPOSTA DINÂMICA DE UM SEMI-ESPAÇO VISCO-ELÁSTICO
ESTRATIFICADO SOB A AÇÃO DE CARGAS MÓVEIS

Francisco Claudio Pereira de Barros

Dezembro de 1990

Orientadores: Fernando Venancio Filho e Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho apresenta um procedimento para a obtenção dos campos estacionários de deslocamentos e de tensões em um semi-espaço visco-elástico estratificado, gerados por uma carga que se move, na superfície ou no interior do meio, com velocidade constante ao longo de uma direção horizontal retilínea. O método é fundamentado na representação integral da resposta em termos de números de onda. Os efeitos da consideração de múltiplas camadas são incluídos por meio da utilização de um esquema exato de fatoração dos campos de deformações e de tensões, na forma de coeficientes generalizados de reflexão e de transmissão. Os resultados no domínio do tempo são obtidos através da síntese de Fourier da resposta em frequência, que por sua vez é determinada por integração analítica ou numérica, sobre o domínio de um único número de onda horizontal. É apresentado um estudo paramétrico detalhado da resposta, incluindo os efeitos do amortecimento do material, da estratificação, e da posição da carga e do ponto de observação, para velocidades da carga nos regimes subsônico, transônico e supersônico.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COOPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCE (D.Sc.).

DYNAMIC RESPONSE OF A LAYERED VISCO-ELASTIC HALF-SPACE
TO MOVING LOADS

Francisco Claudio Pereira de Barros

December, 1990

Thesis Supervisors: Fernando Venancio Filho and Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

A procedure to obtain the steady-state displacements and stresses within a multi-layered visco-elastic half-space generated by a buried or surface load moving with constant speed parallel to the surface of a half-space is presented. Both line and point loads are included in the approach which is based on an integral representation of the complete response in terms of wavenumbers. The effects of layering are included by use of an exact factorization of the displacement and stress fields in terms of generalized transmission and reflection coefficients. The results in the time domain are obtained by Fourier synthesis of the frequency response which in turn is obtained by analytical (two-dimensional problems) and numerical (three-dimensional problems) integration over one horizontal wavenumber. Numerical results for the displacement and stress fields on the surface and within the half-space are presented for surface and buried loads moving with various subsonic, transonic and supersonic speeds.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. Motivação	001
1.2. Revisão da Literatura	003
1.3. Organização do Trabalho	005

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO GERAL

2.1. Equações Fundamentais	010
2.2. Equações do Campo Transformado Formuladas para Forças de Corpo Arbitrárias	014
2.2.1. Problemas Bidimensionais	015
2.2.2. Problemas Tridimensionais	020
2.2.3. Comparações entre as Formulações para os Problemas Bidimensionais e Tridimensionais.....	024
2.3. Solução Geral no Domínio Transformado para um Semi-espço Visco-elástico Estratificado	025
2.3.1. Modificação da Representação Integral da Solução para os Campos de Tensões e de Deslocamentos Associados às Ondas Polarizadas Verticalmente	032
2.3.2. Propagação Através das Camadas	038
2.3.3. Aplicação Geral do Esquema Iterativo ...	045
2.4. Avaliação das Integrais sobre o Número de Onda	048
2.4.1. Método de Bouchon-Aki	051
2.4.2. Quadratura de Filon	053
2.4.3. Aplicação e Comparações	056

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DINÂMICA BIDIMENSIONAL DE UM SEMI-ESPAÇOVISCO-ELÁSTICO ESTRATIFICADO SOB A AÇÃO DE CARGASMÓVEIS

3.1. Formulação Geral	064
3.2. Validação por Comparação de Resultados Numéricos com Analíticos	070
3.3. Estudo Paramétrico: Semi-espaço Visco-elástico Uniforme	077
3.3.1. Efeitos da Velocidade da Carga, da Profundidade de Observação e do Amortecimento, nos Valores Extremos das Respostas das Componentes do Campo de Velocidade	080
3.3.2. Efeito da Velocidade da Carga na Forma dos Pulsos das Respostas	086
3.3.3. Efeito do Amortecimento	106
3.3.4. Efeito da Profundidade do Ponto de Observação	112
3.3.5. Relações de Reciprocidade	115
3.4. Estudo Paramétrico: Uma Camada sobre o Semi-Espaço Visco-Elástico	124
3.4.1. Efeito da Velocidade da Carga e do Amortecimento do Material nos Valores Extremos do Movimento do Solo	124
3.4.2. Efeito de Velocidade de Carga na Forma dos Pulsos da Resposta	130
3.4.3. Relação de Reciprocidade	141
3.5. Resposta de um Semi-Espaço Estratificado com Múltiplas Camadas Sob a Ação de Cargas Móveis....	148

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DINÂMICA TRIDIMENSIONAL DE UM SEMI-ESPAÇOVISCO-ELÁSTICO ESTRATIFICADO SOB A AÇÃO DE CARGASMÓVEIS

4.1. Formulação Geral	155
4.2. Validação por Comparação com Resultados Analíticos e Numéricos	161
4.2.1. Comparação com a Solução para um Espaço Elástico Infinito	163
4.2.2. Comparação com os Resultados Apresentados por Eason (1965).....	167
4.2.3. Comparação com os Resultados Apresentados por Lansing (1966).....	174
4.3. Resposta de um Semi-Espaço Visco-Elástico sob a Ação de Cargas Móveis	186
4.3.1. Distribuição dos Componentes Verticais dos Deslocamentos para os Pontos da Superfície	186
4.3.2. Forma dos Pulsos das Respostas Dinâmicas	194
4.3.3. Relações de Reciprocidade.....	208
4.4. Resposta de um Semi-Espaço Estratificado com Múltiplas Camadas Sob a Ação de Cargas Concentradas Móveis	209

CAPÍTULO 5

<u>CONCLUSÕES</u>	217
-------------------------	-----

REFERÊNCIAS	220
-------------------	-----

APÊNDICE A

DESLOCAMENTOS E TENSÕES NO INTERIOR DE UM SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO PRODUZIDOS POR UMA LINHA DE CARGA QUE SE MOVE SOBRE A SUPERFÍCIE

A.1. Campos de Deslocamentos e de Tensões para o Caso Subsônico	228
A.1.1. Linha de Carga Horizontal	229
A.1.2. Linha de Carga Vertical	229
A.2. Campos de Deslocamentos e de Tensões para o Caso Transônico	230
A.2.1. Linha de Carga Horizontal	231
A.2.2. Linha de Carga Vertical	232
A.3. Campos de Deslocamentos e de Tensões para o Caso Supersônico	233
A.3.1. Linha de Carga Horizontal	233
A.3.2. Linha de Carga Vertical	234

APÊNDICE B

ANÁLISE FORA DO PLANO PARA UMA LINHA DE CARGA DE CISALHAMENTO QUE SE MOVE SOBRE A SUPERFÍCIE DE UM

<u>SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO UNIFORME</u>	235
B.1. Regime Subsônico	240
B.2. Regime Transônico e Supersônico	242

APÊNDICE C

FUNÇÕES DE GREEN BIDIMENSIONAIS PARA UM SEMI ESPAÇOVISCO-ELÁSTICO ESTRATIFICADO

C.1. Formulação do Problema	243
C.2. Validação	248

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. Motivação

O problema da determinação da resposta dinâmica de um meio sólido sob a ação de cargas móveis tem recebido atenção por muitos anos. Os trabalhos nesta área têm sido motivados, em parte, pela necessidade prática de se determinar o movimento vibratório do solo, na superfície ou a uma certa profundidade do subsolo, produzido pela ação das ondas de choque provenientes de explosões ou por veículos em movimento. Necessidades práticas à parte, a solução deste problema, onde estão envolvidos aspectos teóricos atraentes do fenômeno dinâmico fundamental bem como um desafio matemático intrínseco, exerce uma certa fascinação natural. O problema fundamental da determinação da resposta de um semi-espaco visco-elástico estratificado com múltiplas camadas sob a ação de uma carga concentrada, que se move com velocidade constante em uma dada direção, *i.e.*, o problema da determinação das funções de Green móveis, também abre as portas para um número de aplicações interessantes. Estas funções, acopladas com uma formulação de equações integrais de contorno, podem ser usadas na solução de uma variedade de problemas de radiação, espalhamento e de interação associados a perturbações móveis. Por exemplo, o estudo dos efeitos decorrentes da ação de cargas móveis no interior de um túnel (problema de radiação) e da resposta sísmica de um *canyon*, de um túnel ou de tubulações enterradas (problemas de espalhamento e interação) pode ser realizado por meio da utilização das funções de Green associadas a

cargas móveis. Este trabalho é motivado fundamentalmente pela necessidade de se desenvolver um método geral e eficiente para o cálculo das funções dinâmicas de Green associadas a cargas móveis em um semi-espço visco-elástico estratificado.

Com o objetivo de se obter uma solução para os problemas associados a cargas móveis, a configuração real necessita ser, de alguma forma, idealizada. Devido às complexidades envolvidas, a literatura técnica representativa concernente a este problema tem-se limitado somente à análise do semi-espço elástico, isotrópico e uniforme. O movimento da carga é também simplificado. No caso geral, a análise do problema de cargas móveis pode envolver o movimento de ondas transientes induzidas pelas condições iniciais de aplicação da carga, bem como os efeitos do movimento da carga em alguma direção arbitrária com uma velocidade dependente do tempo. O problema é tipicamente simplificado pela consideração do movimento de ondas transientes devido a uma carga que começa atuar em certo instante e então se move com velocidade constante em um modelo definido de propagação, ou pela consideração do movimento de ondas estacionárias devido a uma carga que se move com velocidade constante para todo o tempo. Este trabalho é dirigido para o estudo da resposta estacionária de um semi-espço visco-elástico estratificado sob a ação de uma carga, que se move na superfície ou no interior do meio, segundo uma direção horizontal retilínea com velocidade constante. O problema bidimensional correspondente a uma linha de carga móvel e o tridimensional associado a uma carga concentrada móvel são analisados separadamente.

A análise da resposta dinâmica de um semi-espço visco-elástico estratificado sob a ação de um carga concentrada que se move com velocidade constante, se apresenta difícil, mesmo para o caso simplificado de um semi-espço elástico uniforme, pelo fato de que em um semi-espço uniforme existem três velocidades de onda fundamentais: velocidade da onda de compressão (longitudinal), de cisalhamento (transversal) e de superfície (Rayleigh). As soluções teóricas

tomam formas diferentes dependendo da velocidade da carga relativa a estas três velocidades de ondas. Neste trabalho, a velocidade da carga é referida como **subsônica**, **supersônica** ou **transônica**, dependendo se a mesma é menor do que a velocidade da onda de cisalhamento, maior do que a velocidade da onda de compressão ou intermediária entre estas duas velocidades.

1.2. Revisão da Literatura

O problema bidimensional correspondente a uma linha de carga que se move com velocidade uniforme subsônica sobre a superfície de um semi-espaço elástico uniforme foi considerado primeiro por Sneddon (1951,1952). Cole e Huth (1958) consideraram o mesmo problema para uma linha de carga vertical e obtiveram soluções para os casos de cargas com velocidades nos regimes subsônico, transônico e supersônico. Um enfoque alternativo para este problema foi apresentado por Craggs (1960). A análise para uma carga bidimensional, com uma distribuição arbitrária, que se move na superfície de um semi-espaço elástico uniforme, foi apresentada por Niwa e Kobayashi (1966), e a solução para uma linha de carga oblíqua que se move na superfície foi dada por Eringen e Suhubi (1975). Fulton e Sneddon (1958) e Morley (1962) estudaram a resposta de uma placa com grande espessura sob a ação de uma linha de carga móvel. O problema transiente correspondente a uma linha de carga que aparece repentinamente na superfície de um semi-espaço elástico, e, então, se move com velocidade constante foi considerado por Ang (1960) e por Payton (1967).

O problema tridimensional relativo a uma carga concentrada em movimento uniforme em um sólido ilimitado foi considerado por Eason, Fulton e Sneddon (1956). Mandel e Avramesco (1961) investigaram o campo dos deslocamentos em um semi-espaço uniforme produzido por uma carga concentrada que se move com velocidade constante sobre sua superfície. Papadopoulos (1963a,b), Eason (1965)

e Lansing (1966) estudaram também o problema tridimensional estacionário para cargas concentradas móveis na superfície de um semi-espaco elástico uniforme. A resposta estacionária de um sólido semi-infinito sobreposto por um fluido semi-infinito, produzida por uma carga concentrada que se move no plano de interface dos meios sólido e fluido, foi apresentada por Kennedy e Herrman (1973a,b). Os movimentos que resultam no interior de um corpo elástico infinito associados a uma força concentrada que atua na direção da linha de seu movimento, bem como o movimento na superfície de um semi-espaco elástico uniforme causado por uma carga concentrada que se move na superfície, foram considerados por Payton (1964) para o caso no qual a carga é aplicada repentinamente e, então, se move com velocidade constante. Gakenheimer and Miklowitz(1969) obtiveram os deslocamentos transientes no interior de um semi-espaco elástico produzidos por uma carga normal concentrada que é aplicada subitamente em um ponto e em seguida, se move com velocidade constante na superfície livre.

A classe de problemas de semi-espacos elásticos, que envolve a ação de cargas com simetria radial, aplicadas verticalmente na sua superfície e que são supostas emanarem repentinamente de um ponto na superfície e se expandirem radialmente, foi considerada por Miles (1960), Baron e Lecht (1961), Ablow (1962), Baron e Check (1963), Graggs (1963), Aggarwal e Ablow (1965), Go (1965), Atkinson (1968), Tong (1968), Blowers (1969) e Gakenheimer (1969,1971). Problemas associados à ação de prensas móveis foram estudados por Galin(1961) e Suhubi(1973).

1.3. Organização do Trabalho

Neste trabalho, é apresentado um método para calcular a resposta dinâmica de um semi-espaço visco-elástico estratificado sob a ação de uma carga, que se move na superfície ou no interior do meio, segundo uma dada direção horizontal retilínea com velocidade constante. O procedimento proposto se alicerça na representação integral da resposta completa em termos de números de onda. Os efeitos decorrentes da estratificação do meio são considerados por meio da utilização de um esquema exato de fatoração desenvolvido em termos de coeficientes generalizados de reflexão e de transmissão, com base na técnica apresentada por Apsel (1979) e Luco e Apsel(1983). Os resultados numéricos no domínio da frequência são obtidos a partir da determinação de integrais semi-infinitas com relação ao número de onda horizontal. A resposta final no domínio do tempo é determinada pela síntese de Fourier da resposta em frequência, realizada por meio de um algoritmo de Transformadas Discretas Rápidas de Fourier. Neste estudo, os problemas bidimensionais e tridimensionais são tratados separadamente. O método proposto e os programas de computador associados, foram testados exaustivamente e validados através de comparações dos resultados obtidos com soluções analíticas e resultados numéricos publicados, os quais são disponíveis para casos limites simples (cargas móveis sobre a superfície de um semi-espaço elástico uniforme). É apresentado um estudo paramétrico detalhado da resposta, incluindo os efeitos do amortecimento do material, da estratificação do meio, e da posição da carga e do ponto de observação, para velocidades da carga nos regimes subsônico, transônico e supersônico. As respostas de alguns modelos de semi-espaços visco-elásticos estratificados, constituídos por múltiplas camadas, são apresentadas para ilustrar as características bastante complexas da resposta desses sistemas. Estes resultados servem também para demonstrar a capacidade e a generalidade do método proposto.

No Capítulo 2, são desenvolvidas as formulações gerais para os problemas bidimensionais e tridimensionais, que se caracterizam por um semi-espaco visco-elástico estratificado sob a ação de uma distribuição arbitrária de forças de corpo. Tais formulações resultam na representação integral da solução completa, incluindo deslocamentos e tensões, em termos da distribuição prescrita de forças de corpo. Os integrandos são determinados por meio de um processo de fatoraço, que envolve coeficientes generalizados de reflexão e de transmissão, que por sua vez são obtidos por meio de um esquema iterativo, nos moldes do procedimento proposto por Apsel (1979) e Luco e Apsel (1983). De acordo com que já havia sido discutido nestes trabalhos, identificou-se também que a representação dos integrandos necessita ser ajustada, de tal forma que os termos dominantes se aproximem dos valores estáticos correspondentes, à medida que o número de onda tende para infinito. Esta transformação dos integrandos é necessária para se evitarem problemas numéricos que surgem quando os integrandos são calculados para grandes valores do número de onda. Tal fato é particularmente importante, quando os cálculos são executados em computadores pessoais com número real de 32-bits em precisão simples. Foi constatado que a representação modificada dos integrandos se aplica igualmente bem para todos os valores do número de onda.

A determinação numérica das integrais sobre o número de onda requer a aplicação de procedimentos especiais para levar em conta as características oscilatórias dos integrandos. No Capítulo 2, com este propósito, são discutidos dois esquemas de integração numérica das integrais sobre o domínio do número de onda: o método da integração discreta sobre o número de onda proposto por Bouchon e Aki (1977) e um procedimento adaptativo da quadratura de Filon. A eficiência e validação de ambos os algoritmos de integração são investigadas com base na comparação de resultados analíticos e numéricos, publicados para as funções de Green bidimensionais, dentro das hipóteses do estado plano de

deformações, correspondentes a linhas de cargas harmônicas fixas no interior de um semi-espço. As funções bidimensionais de Green para linhas de cargas harmônicas fixas são usadas nas comparações, porque em sua determinação são envolvidas as mesmas dificuldades no que diz respeito à integração sobre o número de onda e porque não existem resultados disponíveis para as funções tridimensionais de Green móveis.

No Capítulo 3, com base nas hipóteses do estado plano de deformações é estudada a resposta dinâmica de um semi-espço visco-elástico estratificado sob a ação de uma linha de carga em movimento estacionário. A representação integral para a solução bidimensional geral correspondente a um semi-espço visco-elástico estratificado com forças de corpo arbitrárias, estabelecida no Capítulo 2, é apropriada para o caso de uma linha de carga móvel. Tal formulação leva a expressões para a resposta no domínio da frequência em termos de integrais sobre o número de onda, que podem ser resolvidas analiticamente. Finalmente, a resposta no domínio do tempo é obtida através da síntese de Fourier da resposta no domínio da frequência, realizada por meio de um algoritmo de Transformadas Rápidas de Fourier. A metodologia e os programas de computador associados são testados e validados por comparações com soluções analíticas correspondentes ao caso particular de um semi-espço elástico uniforme. Neste capítulo, é apresentado um amplo estudo paramétrico da resposta de modelos de subsolo correspondentes a semi-espços visco-elásticos uniformes e estratificados com uma camada sobreposta ao semi-espço, sob a ação de uma faixa de carga, que se move na superfície ou no interior do meio, com velocidade constante nos regimes subsônico, transônico e supersônico. Em particular, são investigados os efeitos da velocidade da carga, do amortecimento do material, das profundidades das fontes e dos pontos de observação, da estratificação e as relações de reciprocidade. Como ilustração da generalidade do método proposto para cálculo da solução completa de um

semi-espaco estratificado com múltiplas camadas, é apresentada a resposta de um modelo de subsolo que consiste de cinco camadas sobrepostas ao semi-espaco. Para efeito de comparação é apresentada também a resposta de um modelo equivalente com uma camada sobre o semi-espaco.

No Capítulo 4, é estudada a resposta tridimensional de um semi-espaco estratificado sob a ação de uma carga concentrada, que se move na superfície ou no interior do meio, ao longo de uma direção horizontal retilínea com velocidade constante. A representação integral para a solução tridimensional completa da resposta, apresentada no Capítulo 2, é adequada para representar cargas concentradas em movimento uniforme. Neste enfoque, os campos de deslocamento e de tensões no domínio da frequência são descritos por meio de integrais duplas semi-infinitas com relação aos dois números de onda horizontais. A integração sobre um dos números de onda pode ser determinada analiticamente, enquanto que a outra tem de ser calculada numericamente. Como resultado da análise apresentada no Capítulo 2, o algoritmo adaptativo da quadratura de Filon desenvolvido é aplicado na determinação numérica das integrais sobre o número de onda. A resposta no domínio do tempo é determinada pela síntese de Fourier das componentes no domínio da frequência. A presente formulação e os programas associados de computador são testados e validados com base na comparação com as poucas soluções publicadas, disponíveis unicamente para alguns casos limites. As características bastante complexas da resposta tridimensional sob várias condições são ilustradas por meio de um estudo paramétrico.

No Capítulo 5 são descritas as conclusões gerais do estudo apresentado. Um resumo das soluções bidimensionais analíticas no plano, para uma linha de carga vertical e horizontal, que se move com velocidade constante na superfície de um semi-espaco elástico uniforme é apresentado no Apêndice A. O caso particular da análise bidimensional fora do plano para linha de carga de cisalhamento, que se

move na superfície de um semi-espaço elástico uniforme, não pode ser encontrado na literatura disponível. Com o propósito de se ter um estudo completo, a solução analítica associada ao cisalhamento antiplano produzido por uma linha de carga que se move com velocidade constante na superfície de um semi-espaço elástico uniforme, foi desenvolvida no Apêndice B. Finalmente, no Apêndice C é obtida uma representação integral para as funções bidimensionais de Green correspondentes a linhas de cargas harmônicas fixas em um semi-espaço visco-elástico estratificado.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO GERAL

2.1. Equações Fundamentais

O sistema de equações, que governa o movimento de um corpo homogêneo, isotrópico e linearmente elástico, inclui, respectivamente, as equações de equilíbrio, a Lei de Hooke e as relações entre as deformações e os deslocamentos:

$$\sigma_{ij,j} + \chi_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2-1a)$$

$$\sigma_{ij} = \bar{\lambda} e_{kk} \delta_{ij} + 2\bar{\mu} e_{ij} \quad (2-1b)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2-1c)$$

onde σ_{ij} representa o tensor das tensões, e_{ij} o tensor das deformações lineares, u_i o vetor dos deslocamentos, χ_i a força de corpo por unidade de volume, δ_{ij} o delta de Kronecker, ρ a densidade de massa, $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ as constantes de Lamé e os pontos sobre as variáveis, as derivadas em relação ao tempo ($\dot{u}_i = \partial u_i / \partial t$). A convenção de somatório para índices repetidos é adotada a menos que seja indicada sua não adoção. Eliminando-se as tensões e deformações das equações (2-1a),(2-1b) e (2-1c), obtêm-se as equações de movimento de Navier:

$$\bar{\mu} u_{i,jj} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) u_{j,ji} + \chi_i = \rho \ddot{u}_i \quad . \quad (2-2)$$

As equações (2-1a,b,c) e (2-2) devem ser satisfeitas em cada um dos pontos interiores de um corpo indeformado B , que ocupa uma região regular no espaço,

com interior V e contorno S com normal \vec{n} . Na superfície S do corpo indeformado devem ser prescritas condições de contorno. Tais condições são normalmente deslocamentos, forças ou condições de contorno mistas. Nas condições de contorno em deslocamentos, as três componentes u_i são prescritas no contorno S enquanto que nas condições de contorno em forças, são prescritas as três componentes das forças de superfície t_i . As componentes das forças de superfície estão relacionadas com as componentes do tensor das tensões através da fórmula de Cauchy:

$$t_i = \sigma_{ji}n_j \quad . \quad (2-3)$$

Nos problemas com condições mistas de contorno, u_i são prescritos em S_1 e t_i em S_2 , onde $S_1 \cup S_2 = S$ e S_1 e S_2 são conjuntos disjuntos, *i.e.*, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, o conjunto vazio. Para completar a formulação do problema, devem-se ainda definir as condições iniciais em V , ou seja, para $t = 0$:

$$u_i(\vec{x}, 0) = u_i^0(\vec{x}) \quad (2-4a)$$

$$\dot{u}_i(\vec{x}, 0^+) = v_i^0(\vec{x}) \quad . \quad (2-4b)$$

Para análises no domínio da frequência, o princípio da correspondência (Bland, 1960) estabelece que o problema análogo de valores de contorno, para um corpo visco-elástico, é descrito pelas mesmas equações (2-1a,b,c) e (2-3), nas quais as duas constantes de Lamé $\bar{\mu}$ e $\bar{\lambda}$ devem ser substituídas por constantes complexas correspondentes, que podem ser dependentes da frequência. Várias relações tensão-deformação têm sido propostas com o objetivo de procurar levar em conta as diferenças existentes entre o comportamento real dos materiais e o dos materiais idealizados como perfeitamente elásticos. Os modelos de idealização mais comumente empregados são os sólidos de Kelvin-Voigt e Maxwell, nos quais o módulo de cisalhamento visco-elástico complexo pode ser escrito aproximadamente como:

$$\mu = \bar{\mu} \left(1 + \frac{i}{Q} \right) \quad (2-5)$$

onde $\bar{\mu}$ é o módulo de cisalhamento elástico (valor real) e Q é uma medida adimensional de dissipação de energia no meio. O fator de atenuação Q é inversamente proporcional à frequência para os sólidos de Kelvin-Voigt e proporcional à frequência para os sólidos de Maxwell (Knopoff, 1964). Todavia, testes no campo e em laboratórios, têm comprovado que Q é substancialmente independente da frequência de vibração (Knopoff, 1964). Para os meios visco-elásticos serão usadas constantes de Lamé complexas independentes da frequência, definidas por:

$$\mu = \bar{\mu}(1 + 2\xi_{\beta} i) \quad (2-6a)$$

$$\lambda + 2\mu = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})(1 + 2\xi_{\alpha} i) \quad (2-6b)$$

onde $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ são constantes de Lamé (valores reais), estabelecidas para os sólidos perfeitamente elásticos, e ξ_{α} e ξ_{β} são, respectivamente, os coeficientes de amortecimento do material associados às ondas de compressão e de cisalhamento. Estes coeficientes são considerados independentes da frequência (sólidos com histerese constante). Para o caso em que $\xi_{\alpha} \neq \xi_{\beta}$, o coeficiente de Poisson ν correspondente é complexo. Deve-se ressaltar que, no domínio do tempo, a consideração de coeficientes de amortecimento do material independentes da frequência é inconsistente com o princípio da causalidade (Futtermore, 1962).

No desenvolvimento deste trabalho, o meio é idealizado como homogêneo, isotrópico e visco-elástico. O amortecimento do material é considerado diretamente nas equações do movimento, já transformadas no domínio da frequência, por meio da substituição das constantes de Lamé do caso perfeitamente elástico por constantes complexas correspondentes, de acordo com princípio da correspondência. Desta forma pode-se considerar na formulação do problema, no domínio transformado, indiferentemente, tanto o caso de um meio visco-elástico com amortecimento do material dependente da frequência quanto o de um sólido

com histerese constante , equações (2-6a,b). A inclusão de amortecimento do material na formulação do problema, além de resultar em um modelo de análise mais realístico, implica também na simplificação da solução numérica do mesmo.

Em alguns problemas as forças de corpo e os componentes do tensor das tensões são independentes de uma das variáveis espaciais, por exemplo, x_3 . Fazendo-se igual a zero as derivadas parciais com relação à variável x_3 , nas equações expressas por (2-1a), obtêm-se, imediatamente, as equações de movimento para os problemas bidimensionais. Os dois sistemas de equações resultantes são desacoplados:

$$\sigma_{3\alpha,\alpha} + \chi_3 = \rho\ddot{u}_3 \quad (2-7a)$$

$$\sigma_{\beta\alpha,\alpha} + \chi_\beta = \rho\ddot{u}_\beta \quad . \quad (2-7b)$$

A convenção de somatório permanece válida com os índices Gregos tomando-se, somente, os valores 1 e 2 . Os movimentos descritos pelos deslocamentos $u_3(x_1, x_2, t)$ e $u_\alpha(x_1, x_2, t)$ são chamados, respectivamente, *movimentos fora do plano* e *movimentos no plano*.

As componentes das tensões e as equações de Navier, para os movimentos *fora do plano*, são escritas como:

$$\sigma_{3\alpha} = \bar{\mu}u_{3,\alpha} \quad (2-8)$$

$$\bar{\mu}u_{3,\alpha\alpha} + \chi_3 = \rho\ddot{u}_3 \quad . \quad (2-9)$$

Pode-se observar na equação (2-9) que $u_3(x_1, x_2, t)$ é governado por uma equação de onda escalar. Este movimento é comumente chamado de *ondas de cisalhamento polarizadas horizontalmente* (ondas-SH).

Para o caso de movimentos *no plano*, com as hipóteses de estado plano de deformações, *i.e.*, todas as variáveis são independentes de x_3 e os deslocamentos na

direção de x_3 são identicamente nulos, as componentes de tensões correspondentes são expressas por:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \bar{\lambda}u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + \bar{\mu}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad (2-10)$$

$$\sigma_{33} = \bar{\lambda}u_{\gamma,\gamma} \quad (2-11)$$

e as equações Navier por:

$$\bar{\mu}u_{\beta,\alpha\alpha} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu})u_{\alpha,\alpha\beta} + \chi_{\beta} = \rho\ddot{u}_{\beta} \quad (2-12)$$

Ao se analisar as equações (2-7a) até (2-12) pode-se identificar que os movimentos das ondas em duas dimensões correspondem à superposição dos movimentos fora do plano com os movimentos no plano, os quais são descritos por equações completamente desacopladas.

2.2. Equações do Campo Transformado Formuladas para Forças de Corpo Arbitrárias

Os métodos das transformadas integrais são ferramentas poderosas na solução de problemas do âmbito da elastodinâmica. Para se obter a solução de problemas de valores de contorno bidimensionais e tridimensionais é conveniente considerar, respectivamente, as Transformadas duplas e triplas de Fourier. Tal método se aplica às classes de problemas, nos quais as condições iniciais do movimento se localizam num passado suficientemente distante de maneira que sua influência no estado atual pode ser considerada completamente desprezível. As Transformadas dupla e tripla de Fourier são expressas por:

$$\tilde{f}(k, x_2, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, t) e^{i(kx_1 - \omega t)} dx_1 dt \quad (2-13)$$

$$\tilde{f}(k_1, k_2, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z, t) e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)} dx dy dt \quad (2-14)$$

e as fórmulas correspondentes das transformadas inversas, por:

$$f(x_1, x_2, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k, x_2, \omega) e^{i(\omega t - kx_1)} d\omega dk \quad (2-15)$$

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_1, k_2, z, \omega) e^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)} d\omega dk_1 dk_2 \quad (2-16)$$

nas quais a barra superior e o sinal gráfico til ($\tilde{}$) denotam, respectivamente, as Transformadas de Fourier com relação tempo e às coordenadas espaciais.

2.2.1. Problemas Bidimensionais

Seja o sistema Cartesiano de coordenadas retangulares com eixos x_1 , x_2 e x_3 e origem no ponto O de um corpo homogêneo, isotrópico, elástico, com interior V e contorno S (Figura 2.2-1a). Supõe-se que todas as quantidades de campo, a densidade de forças de corpo e as condições iniciais e de contorno são unicamente funções das variáveis espaciais x_1 and x_2 .

As equações de movimento, neste sistema Cartesiano de coordenadas, podem ser escritas a partir das equações (2-9) e (2-12), como:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \bar{\beta}^2 \nabla^2 u_1 + (\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + \frac{\chi_1}{\rho} \quad (2-17a)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \bar{\beta}^2 \nabla^2 u_2 + (\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + \frac{\chi_2}{\rho} \quad (2-17b)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \bar{\beta}^2 \nabla^2 u_3 + \frac{\chi_3}{\rho} \quad (2-17c)$$

e, analogamente, o campo de tensões, como:

$$\sigma_{11} = \bar{\lambda} \Theta + 2\bar{\mu} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (2-18a)$$

$$\sigma_{22} = \bar{\lambda} \Theta + 2\bar{\mu} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (2-18b)$$

$$\sigma_{21} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (2-18c)$$

$$\sigma_{33} = \bar{\lambda} \Theta \quad (2-18d)$$

$$\sigma_{31} = \bar{\mu} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad (2-18e)$$

$$\sigma_{32} = \bar{\mu} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (2-18f)$$

onde ∇^2 e Θ são, respectivamente, o operador Laplaciano e a dilatação. Para os problemas bidimensionais estas entidades são definidas por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (2-19)$$

$$\Theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (2-20)$$

Os símbolos $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ representam as velocidades das ondas de compressão e de cisalhamento (valores reais), definidas por:

$$\bar{\alpha} = [(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})/\rho]^{\frac{1}{2}} \quad (2-21)$$

$$\bar{\beta} = (\bar{\mu}/\rho)^{\frac{1}{2}} \quad (2-22)$$

Na solução das equações do movimento é utilizado o método das transformações integrais que tem por base a transformada dupla de Fourier expressa pela equação (2-13). Multiplicando-se cada uma das equações (2-17a,b,c) por $\exp[i(kx_1 - \omega t)]$ e integrando-se as equações resultantes por todo o espaço $x_1 t$, obtêm-se as equações do movimento transformadas para o domínio da frequência e do número de onda. A formulação correspondente para um corpo visco-elástico pode ser obtida diretamente, pelo princípio da correspondência, a partir das equações do movimento do caso elástico transformadas no domínio da frequência, substituindo-se as constantes de Lamé por constantes complexas correspondentes. Em consequência, as equações do movimento no domínio transformado para um meio visco-elástico são descritas pelas seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$-\omega^2 \tilde{u}_1 = \beta^2 \left(-k^2 \tilde{u}_1 + \frac{d^2 \tilde{u}_1}{dx_2^2} \right) - i(\alpha^2 - \beta^2)k\tilde{\Theta} + \frac{\tilde{\chi}_1}{\rho} \quad (2-23a)$$

$$-\omega^2 \tilde{u}_2 = \beta^2 \left(-k^2 \tilde{u}_2 + \frac{d^2 \tilde{u}_2}{dx_2^2} \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{d\tilde{\Theta}}{dx_2} + \frac{\tilde{\chi}_2}{\rho} \quad (2-23b)$$

$$-\omega^2 \tilde{u}_3 = \beta^2 \left(-k^2 \tilde{u}_3 + \frac{d^2 \tilde{u}_3}{dx_2^2} \right) + \frac{\tilde{\chi}_3}{\rho} \quad (2-23c)$$

nas quais $\alpha = \bar{\alpha}[1 + 2i\xi_\alpha]^{1/2}$ e $\beta = \bar{\beta}[1 + 2i\xi_\beta]^{1/2}$ são as velocidades complexas correspondentes das ondas de compressão e de cisalhamento, para o meio visco-elástico, e

$$\tilde{\Theta} = \frac{d\tilde{u}_2}{dx_2} - ik\tilde{u}_1 \quad . \quad (2-23d)$$

Substituindo-se transformações:

$$\tilde{u}_1 = iU_1 \quad (2-24a)$$

$$\tilde{u}_2 = U_2 \quad (2-24b)$$

$$\tilde{u}_3 = iU_3 \quad (2-24c)$$

nas equações (2-23a,b,c), chega-se a:

$$\left(\omega^2 - \alpha^2 k^2 + \beta^2 \frac{d^2}{dx_2^2} \right) U_1 - (\alpha^2 - \beta^2)k \frac{dU_2}{dx_2} + \frac{F_1}{\rho} = 0 \quad (2-25a)$$

$$\left(\omega^2 - \beta^2 k^2 + \alpha^2 \frac{d^2}{dx_2^2} \right) U_2 + (\alpha^2 - \beta^2)k \frac{dU_1}{dx_2} + \frac{F_2}{\rho} = 0 \quad (2-25b)$$

$$\left(\omega^2 - \beta^2 k^2 + \beta^2 \frac{d^2}{dx_2^2} \right) U_3 + \frac{F_3}{\rho} = 0 \quad (2-25c)$$

onde

$$F_1 = -i\tilde{\chi}_1 \quad (2-26a)$$

$$F_2 = \tilde{\chi}_2 \quad (2-26b)$$

$$F_3 = -i\tilde{\chi}_3 \quad . \quad (2-26c)$$

Os termos U_1 e U_2 são acoplados através das equações (2-25a,b) que são independentes de U_3 . O termo U_3 deve satisfazer a equação (2-25c). U_1 e U_2 são associados com as ondas P e SV polarizadas no plano vertical (movimentos no plano), enquanto que U_3 é associado com as ondas SH que são polarizadas horizontalmente (movimentos fora do plano).

A representação integral do campo de tensões correspondente pode ser obtida de maneira análoga, *i.e.*, aplicando-se a transformada dupla de Fourier

descrita pela equação (2-13). Multiplicando-se as equações (2-18a) até (2-18f) por $\exp[i(kx_1 - \omega t)]$, integrando-se o resultado assim obtido por todo o espaço $x_1 t$, e substituindo-se as constantes de Lamé do caso elástico pelas constantes complexas correspondentes do meio visco-elástico, e em seguida, introduzindo as transformações dadas pelas equações (2-24a,b,c), chega-se a:

$$\tilde{\sigma}_{11} = \Sigma_{11} \quad (2-27a)$$

$$\tilde{\sigma}_{22} = \Sigma_{22} \quad (2-27b)$$

$$\tilde{\sigma}_{21} = i\Sigma_{21} \quad (2-27c)$$

$$\tilde{\sigma}_{33} = \Sigma_{33} \quad (2-27d)$$

$$\tilde{\sigma}_{31} = \Sigma_{31} \quad (2-27e)$$

$$\tilde{\sigma}_{32} = i\Sigma_{32} \quad (2-27f)$$

onde

$$\Sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \left(kU_1 + \frac{dU_2}{dx_2} \right) - 2\mu \frac{dU_2}{dx_2} \quad (2-28a)$$

$$\Sigma_{22} = (\lambda + 2\mu) \left(kU_1 + \frac{dU_2}{dx_2} \right) - 2\mu kU_1 \quad (2-28b)$$

$$\Sigma_{21} = \mu \left(\frac{dU_1}{dx_2} - kU_2 \right) \quad (2-28c)$$

$$\Sigma_{33} = \lambda \left(kU_1 + \frac{dU_2}{dx_2} \right) \quad (2-28d)$$

$$\Sigma_{31} = \mu kU_3 \quad (2-28e)$$

$$\Sigma_{32} = \mu \frac{dU_3}{dx_2} \quad (2-28f)$$

A solução completa no domínio transformado é então obtida resolvendo-se o sistema de equações diferenciais (2-25a,b,c) em conjunto com as condições de contorno expressas no mesmo espaço transformado. Uma vez obtida a solução completa no espaço transformado, o campo real de tensões e de deformações

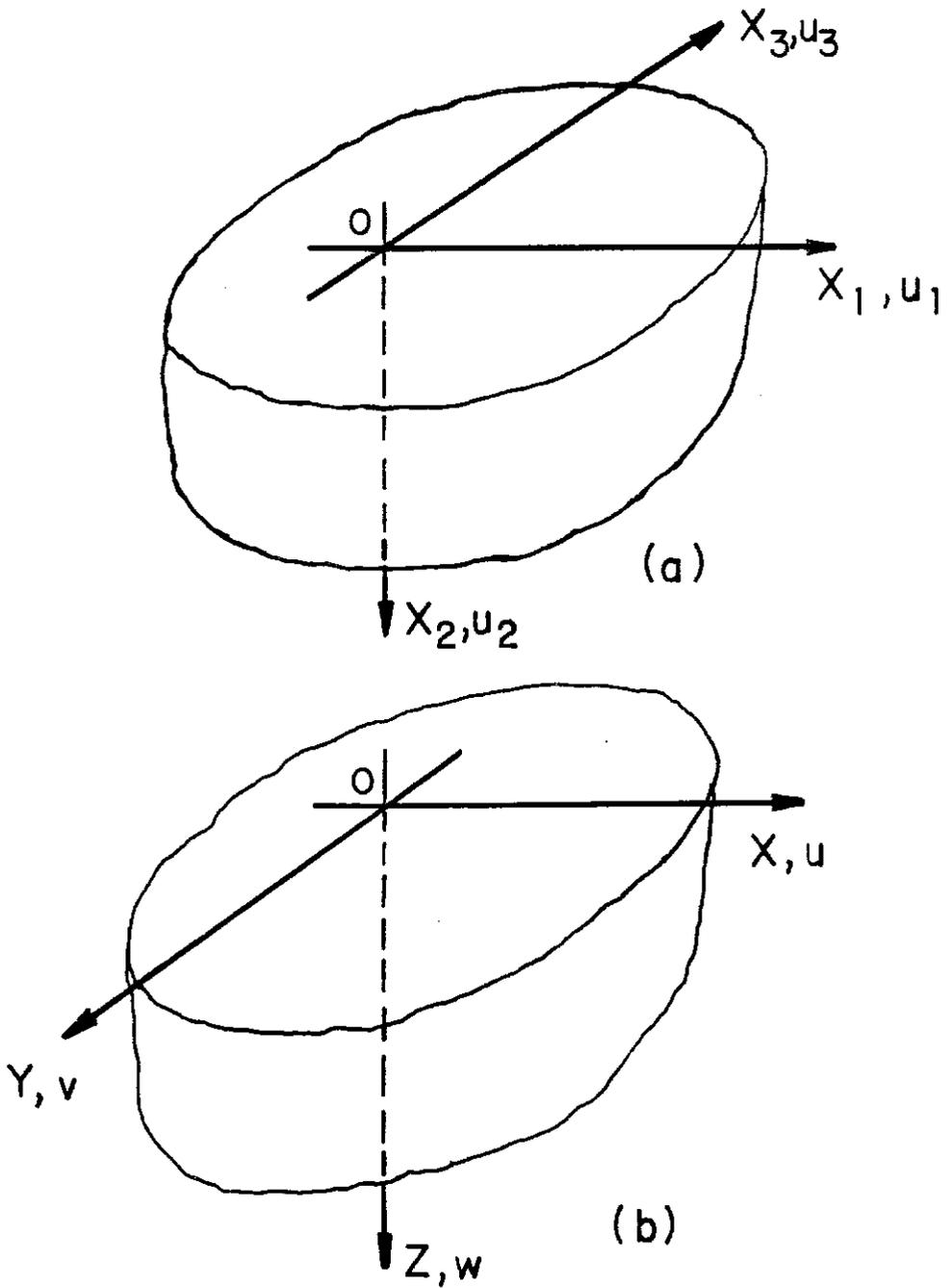


Figura 2.2-1 Sistema Coordenado e notações para as componentes do deslocamento. (a) Problemas bidimensionais; (b) Problemas tridimensionais.

pode ser determinado usando-se a transformada inversa de Fourier, descrita pela equação (2-15).

2.2.2. Problemas Tridimensionais

Seja o sistema Cartesiano de coordenadas retangulares com eixos x , y e z e origem no ponto O de um corpo homogêneo, isotrópico, elástico, com interior V e contorno S (Figura 2.2-1b).

A partir das equações de movimento de Navier, expressas por (2-2), pode-se escrever as equações do movimento, neste sistema Cartesiano de coordenadas, como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \bar{\beta}^2 \nabla^2 u + (\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{X}{\rho} \quad (2-29a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \bar{\beta}^2 \nabla^2 v + (\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{Y}{\rho} \quad (2-29b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \bar{\beta}^2 \nabla^2 w + (\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{Z}{\rho} \quad (2-29c)$$

e a partir das equações (2-1b) e (2-1c), o campo de tensões como:

$$\sigma_{xx} = \bar{\lambda} \Theta + 2\bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2-30a)$$

$$\sigma_{yy} = \bar{\lambda} \Theta + 2\bar{\mu} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2-30b)$$

$$\sigma_{zz} = \bar{\lambda} \Theta + 2\bar{\mu} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2-30c)$$

$$\sigma_{xy} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2-30d)$$

$$\sigma_{zx} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2-30e)$$

$$\sigma_{zy} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2-30f)$$

onde X , Y , e Z são as componentes do vetor das forças de corpo por unidade de volume. Os símbolos ∇^2 e Θ são, respectivamente, o operador Laplaciano e a

dilatação. Para os problemas tridimensionais estas entidades são definidas por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2-31)$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2-32)$$

A velocidade da onda de compressão ($\bar{\alpha}$) e da onda de cisalhamento ($\bar{\beta}$) são definidas, respectivamente, pelas equações (2-21) e (2-22).

Na solução das equações do movimento é utilizado o método das transformações integrais que tem por base a transformada tripla de Fourier expressa pela equação (2-14). Se as equações (2-29a,b,c) são multiplicadas por $\exp[i(k_1x + k_2y - \omega t)]$ e, em seguida, as equações resultantes são integradas sobre todo o espaço xyt , obtêm-se as equações do movimento transformadas para o domínio da frequência e do número de onda. Como no caso anterior, a formulação correspondente para um corpo visco-elástico pode ser obtida diretamente, pelo princípio da correspondência, a partir das equações do movimento do caso elástico transformadas no domínio da frequência, substituindo-se as constantes de Lamé por constantes complexas correspondentes. Em consequência, as equações do movimento no domínio transformado para um meio visco-elástico são descritas pelas seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$-\omega^2 \tilde{u} = \beta^2 \left(-k^2 \tilde{u} + \frac{d^2 \tilde{u}}{dz^2} \right) - ik_1(\alpha^2 - \beta^2) \tilde{\Theta} + \frac{\tilde{X}}{\rho} \quad (2-33a)$$

$$-\omega^2 \tilde{v} = \beta^2 \left(-k^2 \tilde{v} + \frac{d^2 \tilde{v}}{dz^2} \right) - ik_2(\alpha^2 - \beta^2) \tilde{\Theta} + \frac{\tilde{Y}}{\rho} \quad (2-33b)$$

$$-\omega^2 \tilde{w} = \beta^2 \left(-k^2 \tilde{w} + \frac{d^2 \tilde{w}}{dz^2} \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{d\tilde{\Theta}}{dz} + \frac{\tilde{Z}}{\rho} \quad (2-33c)$$

onde $\alpha = \bar{\alpha}[1 + 2i\xi_\alpha]^{1/2}$ e $\beta = \bar{\beta}[1 + 2i\xi_\beta]^{1/2}$ são as velocidades complexas correspondentes das ondas de compressão e de cisalhamento para o meio visco-elástico,

$$\tilde{\Theta} = \frac{d\tilde{w}}{dz} - i(k_1 \tilde{u} + k_2 \tilde{v}) \quad (2-33d)$$

e

$$k = [k_1^2 + k_2^2]^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (2-34)$$

Neste ponto, torna-se conveniente introduzir nas equações (2-33a,b,c), as transformações apresentadas por Luco e Anderson(1983), descritas a seguir:

$$\tilde{u} = \frac{i}{k} (k_1 U_1 + k_2 U_3) \quad (2-35a)$$

$$\tilde{v} = \frac{i}{k} (k_2 U_1 - k_1 U_3) \quad (2-35b)$$

$$\tilde{w} = U_2 \quad (2-35c)$$

obtendo-se o sistema de equações diferenciais:

$$\left(\omega^2 - \alpha^2 k^2 + \beta^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) U_1 - (\alpha^2 - \beta^2) k \frac{dU_2}{dz} + \frac{F_1}{\rho} = 0 \quad (2-36a)$$

$$\left(\omega^2 - \beta^2 k^2 + \alpha^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) U_2 + (\alpha^2 - \beta^2) k \frac{dU_1}{dz} + \frac{F_2}{\rho} = 0 \quad (2-36b)$$

$$\left(\omega^2 - \beta^2 k^2 + \beta^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) U_3 + \frac{F_3}{\rho} = 0 \quad (2-36c)$$

onde

$$F_1 = -\frac{i}{k} (k_1 \tilde{X} + k_2 \tilde{Y}) \quad (2-37a)$$

$$F_2 = \tilde{Z} \quad (2-37b)$$

$$F_3 = -\frac{i}{k} (k_2 \tilde{X} - k_1 \tilde{Y}) \quad . \quad (2-37c)$$

Os termos U_1 e U_2 são acoplados através das equações (2-36a,b) que são independentes de U_3 . O termo U_3 deve satisfazer a equação (2-36c). As quantidades U_1 , U_2 e U_3 podem ser interpretadas, neste espaço transformado, de maneira análoga à que foi dada para os problemas bidimensionais, *i.e.*, U_1 e U_2 são associados com as ondas P e SV polarizadas em um plano vertical (movimentos no plano), enquanto que U_3 é associado com as ondas SH polarizadas horizontalmente (movimentos fora do plano).

A representação integral para o campo de tensões correspondente pode ser obtida, de maneira similar, com a utilização das transformadas triplas de Fourier descritas pela equação (2-14). Multiplicando-se as equações (2-30a) até (2-30f) por $\exp[i(k_1x + k_2y - \omega t)]$, integrando-se as equações resultantes sobre todo o espaço xyt , substituindo-se as constantes de Lamé do caso elástico pelas constantes complexas correspondentes do meio visco-elástico, introduzindo-se em seguida as transformações dadas pelas equações (2-35a,b,c) e reagrupando-se os termos de maneira conveniente, chega-se a:

$$\tilde{\sigma}_{xx} = \Sigma_{33} - 2i\mu k_1 \tilde{u} \quad (2-38a)$$

$$\tilde{\sigma}_{yy} = \Sigma_{11} + 2i\mu k_1 \tilde{u} \quad (2-38b)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \Sigma_{22} \quad (2-38c)$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = \Sigma_{31} - 2i\mu k_1 \tilde{v} \quad (2-38d)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx} = \frac{i}{k} (k_1 \Sigma_{21} + k_2 \Sigma_{32}) \quad (2-38e)$$

$$\tilde{\sigma}_{zy} = \frac{i}{k} (k_2 \Sigma_{21} - k_1 \Sigma_{32}) \quad (2-38f)$$

onde

$$\Sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \left(kU_1 + \frac{dU_2}{dz} \right) - 2\mu \frac{dU_2}{dz} \quad (2-39a)$$

$$\Sigma_{22} = (\lambda + 2\mu) \left(kU_1 + \frac{dU_2}{dz} \right) - 2\mu kU_1 \quad (2-39b)$$

$$\Sigma_{21} = \mu \left(\frac{dU_1}{dz} - kU_2 \right) \quad (2-39c)$$

$$\Sigma_{33} = \lambda \left(kU_1 + \frac{dU_2}{dz} \right) \quad (2-39d)$$

$$\Sigma_{31} = \mu kU_3 \quad (2-39e)$$

$$\Sigma_{32} = \mu \frac{dU_3}{dz} \quad (2-39f)$$

A solução completa no domínio transformado é obtida resolvendo-se o sistema de equações diferenciais (2-36a,b,c) em conjunto com as condições de contorno expressas no mesmo espaço transformado. Uma vez obtida a solução completa no espaço transformado, os campos reais de tensões e de deformações podem ser determinados usando-se a transformada inversa de Fourier descrita pela equação (2-16).

2.2.3. Comparações entre as Formulações para os Problemas Bidimensionais e Tridimensionais

Comparando-se as equações de movimento no espaço transformado para problemas bidimensionais (2-25a,b,c) com as equações obtidas para os problemas tridimensionais (2-36a,b,c), pode-se observar que ambos os sistemas de equações diferenciais são formalmente análogos. O mesmo ocorre com as equações que descrevem os campos de tensões para as formulações correspondentes aos problemas bidimensionais [(2-28a) a (2-28f)] e tridimensionais [(2-39a) a (2-39f)]. Deve-se ressaltar, entretanto, as diferenças existentes na definição do parâmetro k para cada uma das formulações. Na formulação apresentada para os problemas bidimensionais k é um número real que pode assumir qualquer valor (positivo ou negativo) no domínio dos números reais \mathfrak{R} . Este mesmo parâmetro k na formulação tridimensional é definido a partir da equação (2-34).

A similitude entre as equações que governam a solução dos problemas bidimensionais e tridimensionais, no domínio transformado, obtidas com base nas formulações apresentadas nas Seções 2.2.1 e 2.2.2, implica que possa ser usada uma mesma solução geral para ambos os casos, resguardando-se, obviamente, as diferenças existentes entre os mesmos. Tal procedimento unificado será seguido na próxima seção. A formulação tridimensional será tomada como paradigma no desenvolvimento e obtenção da solução geral no espaço transformado, para

um sistema com uma distribuição arbitrária de forças de corpo, constituído por múltiplas camadas horizontais visco-elásticas sobre um semi-espaço visco-elástico.

2.3. Solução Geral no Domínio Transformado para um Semi-espaço Visco-elástico Estratificado

Seja o semi-espaço visco-elástico estratificado formado por N camadas horizontais constituídas por sólidos homogêneos, isotrópicos e visco-elásticos sobrepostas a um semi-espaço uniforme visco-elástico, conforme mostra a Figura 2.3-1. O meio j -ésimo é caracterizado pela velocidade complexa da onda de compressão α_j , pela velocidade complexa da onda de cisalhamento β_j , pela densidade de massa ρ_j e pela espessura da camada d_j . Pode-se supor, com o intuito de simplificação, sem perda de generalidade, que o carregamento está aplicado somente no meio l -ésimo.

Seguindo-se o procedimento apresentado por Luco and Apsel(1983), no meio j -ésimo, o campo dos deslocamentos transformados (U_1^j, U_2^j, U_3^j) deve satisfazer o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, homogêneas ($j \neq l$) ou não homogêneas ($j = l$), definido pelas equações (2-36a,b,c). Além disso, os campos de deslocamentos e o de tensões devem satisfazer as condições de contorno na superfície ($z = 0$), as condições de continuidade nas interfaces entre as camadas e a condição de radiação no infinito ($z \rightarrow \infty$).

A solução geral do sistema de equações (2-36a,b,c), para o meio j -ésimo, quando $j \neq l$ corresponde à solução homogênea que pode ser escrita como:

$$U_1^j = -kA_1^j e^{-\nu_j z} + \nu_j' A_2^j e^{-\nu_j' z} - kA_3^j e^{\nu_j z} + \nu_j' A_4^j e^{\nu_j' z} \quad (2-40a)$$

$$U_2^j = -\nu_j A_1^j e^{-\nu_j z} + kA_2^j e^{-\nu_j' z} + \nu_j A_3^j e^{\nu_j z} - kA_4^j e^{\nu_j' z} \quad (2-40b)$$

$$U_3^j = kA_5^j e^{-\nu_j' z} + kA_6^j e^{\nu_j' z} \quad (2-40c)$$

onde A_1^j , A_2^j e A_3^j são constantes que caracterizam as amplitudes, respectivamente, das ondas P, SV e SH, que se propagam para baixo no meio j -ésimo. Os termos

A_3^j , A_4^j e A_6^j são constantes que caracterizam as amplitudes, respectivamente, das ondas P, SV e SH, que se propagam para cima no meio j -ésimo. Estas constantes são determinadas pela condição de contorno correspondente a forças de superfície nulas em $z = 0$, pelas condições de continuidade nas interfaces das camadas e pela condição de radiação no infinito. Os termos ν_j e ν'_j são definidos por:

$$\nu_j = \left[k^2 - \frac{\omega^2}{\alpha_j^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-41)$$

$$\nu'_j = \left[k^2 - \frac{\omega^2}{\beta_j^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-42)$$

Do ponto de vista da computação numérica, é conveniente normalizar as funções exponenciais que aparecem nas equações (2-40a,b,c) de maneira que tais quantidades diminuam à medida que a coordenada z aumenta. Para os termos associados com as ondas que se propagam para cima no interior da camada j , a interface (z_{j-1}) correspondente ao limite superior desta camada é usada para definir o fator de normalização. Para os termos associados com as ondas que se propagam para baixo é usada a interface (z_j) correspondente ao limite inferior desta camada. A inversa destes fatores é absorvida pelas constantes A_m^j ($m = 1, \dots, 6$). Em consequência, a solução geral para os meios, que não contêm carregamento, é dada por:

$$U_1^j = -kA_1^j e^{-\nu_j(z-z_{j-1})} + \nu'_j A_2^j e^{-\nu'_j(z-z_{j-1})} - kA_3^j e^{\nu_j(z-z_j)} + \nu'_j A_4^j e^{\nu'_j(z-z_j)} \quad (2-43a)$$

$$U_2^j = -\nu_j A_1^j e^{-\nu_j(z-z_{j-1})} + kA_2^j e^{-\nu'_j(z-z_{j-1})} + \nu_j A_3^j e^{\nu_j(z-z_j)} - kA_4^j e^{\nu'_j(z-z_j)} \quad (2-43b)$$

$$U_3^j = kA_5^j e^{-\nu'_j(z-z_{j-1})} + kA_6^j e^{\nu'_j(z-z_j)} \quad (2-43c)$$

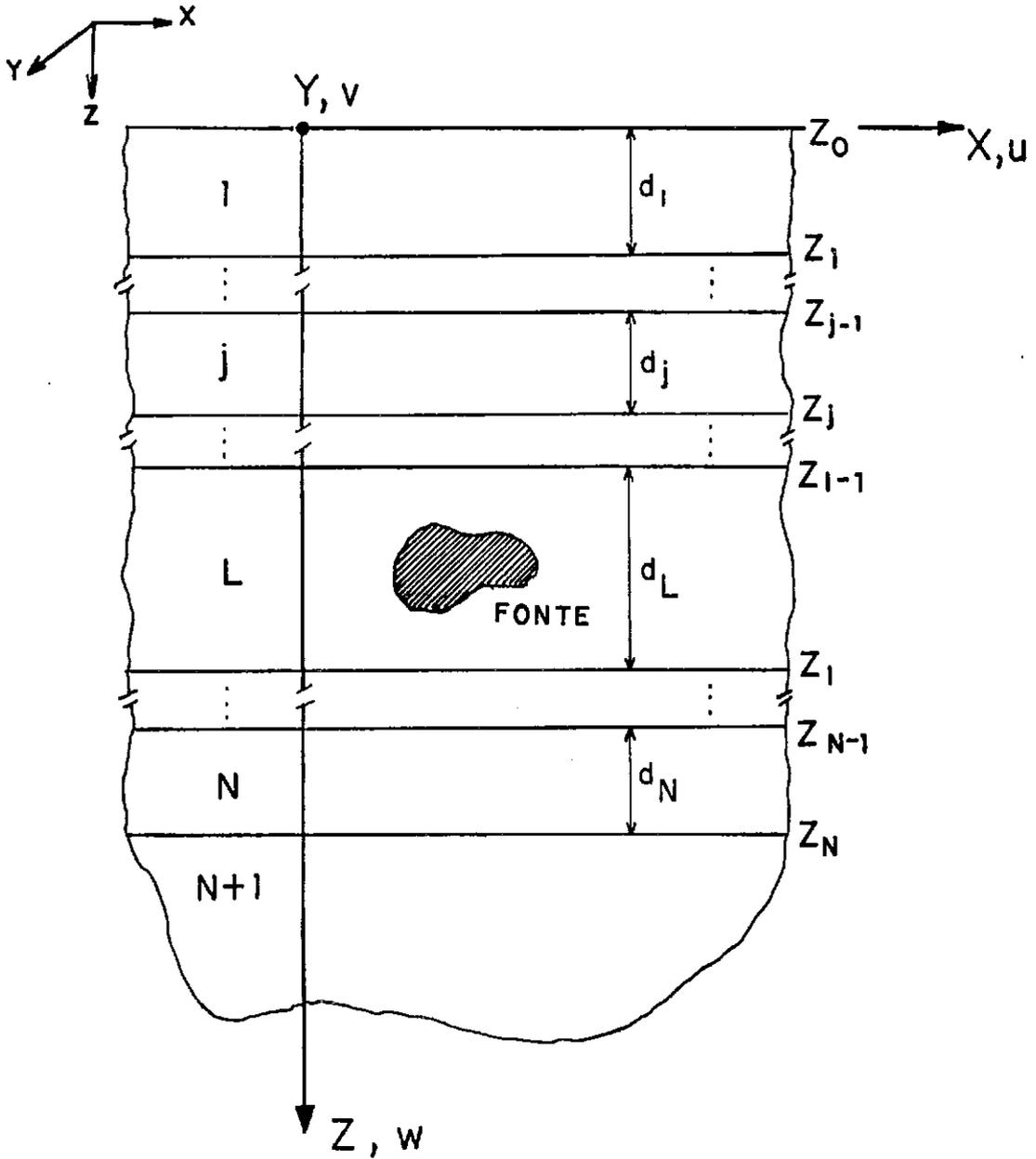


Figura 2.3-1 Geometria do modelo, sistema coordenado e notações para a análise tridimensional no semi-espaço visco-elástico estratificado.

A solução geral para o meio que contém o carregamento ($j = l$) pode ser obtida pelo método da variação de parâmetros. Este método importa na troca das constantes $A_m^j (m = 1, \dots, 6)$ da solução homogênea pelas funções $S_m^j(z)$. Tais funções são determinadas a partir da substituição das equações (2-43a,b,c) nas equações (2-36a,b,c) após terem sido substituídas as constantes A_m^j pelas funções $S_m^j(z)$. É necessário ainda impor-se três condições adicionais para obtenção da solução. Estas condições devem ser selecionadas de maneira que simplifiquem os cálculos envolvidos. Foram selecionadas as seguintes condições adicionais sobre $S_m^j(z)$:

$$-kS_1^{j'}(z)e^{-\nu_j(z-z_{j-1})} + \nu_j' S_2^{j'}(z)e^{-\nu_j'(z-z_{j-1})} - kS_3^{j'}(z)e^{\nu_j(z-z_j)} + \nu_j' S_4^{j'}(z)e^{\nu_j'(z-z_j)} = 0 \quad (2-44a)$$

$$-\nu_j S_1^{j'}(z)e^{-\nu_j(z-z_{j-1})} + kS_2^{j'}(z)e^{-\nu_j'(z-z_{j-1})} + \nu_j S_3^{j'}(z)e^{\nu_j(z-z_j)} - kS_4^{j'}(z)e^{\nu_j'(z-z_j)} = 0 \quad (2-44b)$$

$$kS_5^{j'}(z)e^{-\nu_j'(z-z_{j-1})} + kS_6^{j'}(z)e^{\nu_j'(z-z_j)} = 0 \quad (2-44c)$$

onde

$$S_m^{j'}(z) = \frac{dS_m^j(z)}{dz} \quad (m = 1, \dots, 6) \quad .$$

Substituindo-se as equações (2-43a,b,c) nas equações (2-36a,b,c) e usando-se as condições adicionais expressas pelas equações (2-44a,b,c), chega-se a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Uma vez resolvido tal sistema, pode-se escrever imediatamente a solução particular $S_m^l(z) (m = 1, \dots, 6)$, correspondente aos termos de carga para a camada que contém o carregamento aplicado ($j = l$),

como:

$$S_1^l(z) = \frac{\beta_l^2}{2\mu_l\nu_l\omega^2} \int_{z_{l-1}}^z (-kF_1^l + \nu_l F_2^l) e^{\nu_l(\hat{z}-z_{l-1})} d\hat{z} \quad (2-45a)$$

$$S_2^l(z) = \frac{\beta_l^2}{2\mu_l\nu_l'\omega^2} \int_{z_{l-1}}^z (-\nu_l'F_1^l + kF_2^l) e^{\nu_l'(\hat{z}-z_{l-1})} d\hat{z} \quad (2-45b)$$

$$S_3^l(z) = \frac{\beta_l^2}{2\mu_l\nu_l\omega^2} \int_z^{z_l} -(kF_1^l + \nu_l F_2^l) e^{-\nu_l(\hat{z}-z_l)} d\hat{z} \quad (2-45c)$$

$$S_4^l(z) = \frac{\beta_l^2}{2\mu_l\nu_l'\omega^2} \int_z^{z_l} -(\nu_l'F_1^l + kF_2^l) e^{-\nu_l'(\hat{z}-z_l)} d\hat{z} \quad (2-45d)$$

$$S_5^l(z) = \frac{1}{2\mu_l\nu_l'k} \int_{z_{l-1}}^z F_3^l e^{\nu_l'(\hat{z}-z_{l-1})} d\hat{z} \quad (2-45e)$$

$$S_6^l(z) = \frac{1}{2\mu_l\nu_l'k} \int_z^{z_l} F_3^l e^{-\nu_l'(\hat{z}-z_l)} d\hat{z} \quad (2-45f)$$

A solução geral para os componentes U_1 e U_2 do campo de deslocamentos associados com as ondas polarizadas no plano vertical (ondas P, SV e de Rayleigh) pode ser escrita como:

$$(U_1^j, U_2^j)^T = [I_{11}^j][E_d^j(z)]\{\eta_d^j(z)\} + [I_{12}^j][E_u^j(z)]\{\eta_u^j(z)\} \quad (2-46)$$

onde

$$\{\eta_d^j(z)\} = \begin{Bmatrix} \eta_1^j(z) \\ \eta_2^j(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1^j + \delta_{jl}S_1^l(z) \\ A_2^j + \delta_{jl}S_2^l(z) \end{Bmatrix} \quad (2-47a)$$

$$\{\eta_u^j(z)\} = \begin{Bmatrix} \eta_3^j(z) \\ \eta_4^j(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_3^j + \delta_{jl}S_3^l(z) \\ A_4^j + \delta_{jl}S_4^l(z) \end{Bmatrix} \quad (2-47b)$$

e

$$[I_{11}^j] = \begin{bmatrix} -k & \nu_j' \\ -\nu_j & k \end{bmatrix} \quad (2-48a)$$

$$[I_{12}^j] = \begin{bmatrix} -k & \nu_j' \\ \nu_j & -k \end{bmatrix} \quad (2-48b)$$

As matrizes diagonais $[E_d^j(z)]$ e $[E_u^j(z)]$ têm dimensão 2×2 e são definidas por:

$$[E_d^j(z)] = \text{diag} \left(e^{-\nu_j(z-z_{j-1})}, e^{-\nu'_j(z-z_{j-1})} \right) \quad (2-49a)$$

$$[E_u^j(z)] = \text{diag} \left(e^{\nu_j(z-z_j)}, e^{\nu'_j(z-z_j)} \right) \quad (2-49b)$$

Os vetores $\{\eta_d^j\}$ e $\{\eta_u^j\}$ têm dimensão 2×1 . Os componentes dos vetor $\{\eta_d^j\}$ são relacionados, respectivamente, com as ondas P e com as ondas SV que se propagam para baixo, enquanto que os componentes correspondentes do vetor $\{\eta_u^j\}$ são relacionados, respectivamente, com as ondas P e com as ondas SV que se propagam para cima. As constantes A_m^j ($m = 1, \dots, 4$) são determinadas pelas condições de contorno ou por outras condições. As funções S_m^j ($m = 1, \dots, 4$) são associadas com o campo de forças e determinadas pelas equações (2-45a,b,c,d).

A solução geral para a componente U_3 do campo de deslocamentos associados com as ondas polarizadas em um plano horizontal (ondas SH e de Love) pode se escrita como:

$$U_3^j = \check{I}_{11}^j e^{-\nu'_j(z-z_{j-1})} \eta_5^j(z) + \check{I}_{12}^j e^{\nu'_j(z-z_j)} \eta_6^j(z) \quad (2-50)$$

onde

$$\eta_5^j(z) = A_5^j + \delta_{jl} S_5^j(z) \quad (2-51a)$$

$$\eta_6^j(z) = A_6^j + \delta_{jl} S_6^j(z) \quad (2-51b)$$

e

$$\check{I}_{11}^j = \check{I}_{12}^j = k \quad (2-52)$$

Os escalares $\eta_5^j(z)$ e $\eta_6^j(z)$ da equação (2-50) são relacionados com as ondas SH que se propagam, respectivamente, para baixo e para cima. As constantes A_m^j ($m = 5, 6$) são determinadas pelas condições de contorno ou outras condições, enquanto que as funções S_m^j ($m = 5, 6$) são associadas com o campo de forças e determinadas pelas equações (2-45e,f).

A representação integral correspondente do campo de tensões para o meio j -ésimo pode ser obtida substituindo-se as equações (2-46) e (2-50) nas equações (2-39a) até (2-39f), observando-se as condições dadas pelas equações (2-44a,b,c).

Para os termos associados com as ondas P, SV e de Rayleigh, chega-se a:

$$(\Sigma_{21}^j, \Sigma_{22}^j, \Sigma_{33}^j, \Sigma_{11}^j)^T = \begin{bmatrix} [I_{21}^j] & [I_{22}^j] \\ [I_{31}^j] & [I_{32}^j] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_d^j(z)] & [0] \\ [0] & [E_u^j(z)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta_d^j(z)\} \\ \{\eta_u^j(z)\} \end{Bmatrix} \quad (2-53)$$

onde

$$[I_{21}^j] = \mu_j \begin{bmatrix} 2k\nu_j & -(2k^2 - \omega^2/\beta_j^2) \\ (2k^2 - \omega^2/\beta_j^2) & -2k\nu_j' \end{bmatrix} \quad (2-54a)$$

$$[I_{22}^j] = \mu_j \begin{bmatrix} -2k\nu_j & (2k^2 - \omega^2/\beta_j^2) \\ (2k^2 - \omega^2/\beta_j^2) & -2k\nu_j' \end{bmatrix} \quad (2-54b)$$

$$[I_{31}^j] = [I_{32}^j] = \mu_j \begin{bmatrix} (2\gamma_j^2 - 1)\omega^2/\beta_j^2 & 0 \\ ((2\gamma_j^2 - 1)\omega^2/\beta_j^2 - 2k^2) & 2k\nu_j' \end{bmatrix} \quad (2-54c)$$

As matrizes $[E_d^j(z)]$ e $[E_u^j(z)]$ são definidas pelas equações (2-49a,b), os vetores $\{\eta_d^j(z)\}$ e $\{\eta_u^j(z)\}$ pelas equações (2-47a,b), e $\gamma_j = \beta_j/\alpha_j$.

Para os termos associados com as ondas SH e de Love, chega-se a:

$$(\Sigma_{32}, \Sigma_{31})^T = \begin{bmatrix} \check{I}_{21}^j & \check{I}_{22}^j \\ \check{I}_{31}^j & \check{I}_{32}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\nu_j'(z-z_j-1)} & 0 \\ 0 & e^{\nu_j'(z-z_j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_5^j(z) \\ \eta_6^j(z) \end{Bmatrix} \quad (2-55a)$$

onde as funções escalares η_5^j e η_6^j são definidas pelas equações (2-51a,b) e os coeficientes \check{I}_{pq} ($p, q = 1, 2$) são dados por:

$$\check{I}_{21}^j = -\mu_j k\nu_j'$$

$$\check{I}_{22}^j = \mu_j k\nu_j' \quad (2-55b)$$

$$\check{I}_{31}^j = \check{I}_{32}^j = \mu_j k^2 \quad .$$

A representação integral do campo de deslocamentos e do campo de tensões apresentada, para uma distribuição arbitrária de forças de corpo, envolve a

determinação de seis funções incógnitas por camada. Tais funções devem ser determinadas com base nas condições de contorno prescritas na superfície (forças de superfície nulas), nas condições de continuidade através das interfaces entre as camadas e nas condições radiação para infinito.

2.3.1. Modificação da Representação Integral da Solução para os Campos de Tensões e de Deslocamentos Associados às Ondas Polarizadas Verticalmente

Os campos reais de deslocamentos e o de tensões são obtidos pela inversão das soluções determinadas no domínio transformado. Tais inversões são obtidas pela equação (2-15) ou (2-16) que exprimem as fórmulas de transformação inversa, respectivamente, para a formulação bidimensional e tridimensional.

Durante o processo de integração numérica torna-se necessário calcular os integrandos para grandes valores do parâmetro k , especialmente quando a fonte e o ponto de observação estão situados aproximadamente na mesma profundidade. Identificou-se que os integrandos correspondentes à solução no domínio transformado, obtidos a partir das equações (2-46) e (2-53) apresentam perda de precisão para grandes valores de k , quando os cálculos são efetuados com precisão simples em computadores com número real de 32-bits. Este problema já havia sido também comentado por Luco e Apsel(1983) que propuseram uma transformação da representação integral dos integrandos, de forma que os termos dominantes tendam para os valores estáticos correspondentes à medida que k tenda para infinito. O mesmo procedimento será aqui também seguido.

A representação integral geral da solução estática é obtida fazendo-se $\omega = 0$ na equação (2-36a,b), determinando-se a solução homogênea e aplicando-se, em seguida, o método da variação de parâmetros para a determinação da solução particular. O símbolo \diamond usado como superescrito é utilizado para denotar as

quantidades estáticas. A solução geral no domínio transformado do campo de deslocamentos estáticos assim obtida pode ser escrita como:

$$(U_1^{\circ j}, U_2^{\circ j})^T = [I_{11}^{\circ j}][E_d^{\circ j}(z)]\{\eta_d^{\circ j}(z)\} + [I_{12}^{\circ j}][E_u^{\circ j}(z)]\{\eta_u^{\circ j}(z)\} \quad (2-56)$$

onde

$$[I_{11}^{\circ j}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -(\kappa_j - 1) & 1 \end{bmatrix} \quad (2-57a)$$

$$[I_{12}^{\circ j}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (\kappa_j - 1) & 1 \end{bmatrix} \quad (2-57b)$$

$$[E_d^{\circ j}(z)] = e^{-k(z-z_{j-1})} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k(z-z_{j-1}) & 1 \end{bmatrix} \quad (2-58a)$$

$$[E_u^{\circ j}(z)] = e^{k(z-z_j)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k(z-z_j) & 1 \end{bmatrix} \quad (2-58b)$$

$$\{\eta_d^{\circ j}(z)\} = \left\{ \begin{array}{l} A_1^{\circ j} + \delta_{jl} S_1^{\circ l}(z) \\ A_2^{\circ j} + \delta_{jl} S_2^{\circ l}(z) \end{array} \right\} \quad (2-59a)$$

$$\{\eta_u^{\circ j}(z)\} = \left\{ \begin{array}{l} A_3^{\circ j} + \delta_{jl} S_3^{\circ l}(z) \\ A_4^{\circ j} + \delta_{jl} S_4^{\circ l}(z) \end{array} \right\} \quad (2-59b)$$

no qual

$$\kappa_j = \frac{(1 + \gamma_j^2)}{(1 - \gamma_j^2)} \quad (2-59c)$$

Os termos de carga $S_m^{\circ l}(z)$ ($m = 1, \dots, 4$) são determinados por:

$$S_1^{\circ l}(z) = \frac{1}{2\mu_l k(1 + \kappa_l)} \int_{z_{l-1}}^z (F_1^l - F_2^l) e^{k(\hat{z} - z_{l-1})} d\hat{z} \quad (2-60a)$$

$$S_2^{\circ l}(z) = \frac{1}{2\mu_l k(1 + \kappa_l)} \int_{z_{l-1}}^z \{F_1^l \kappa_l - (F_1^l - F_2^l)[1 - k(\hat{z} - z_{l-1})]\} e^{k(\hat{z} - z_{l-1})} d\hat{z} \quad (2-60b)$$

$$S_3^{\circ l}(z) = \frac{1}{2\mu_l k(1 + \kappa_l)} \int_z^{z_l} (F_1^l + F_2^l) e^{-k(\hat{z} - z_l)} d\hat{z} \quad (2-60c)$$

$$S_4^{\circ l}(z) = \frac{1}{2\mu_l k(1 + \kappa_l)} \int_z^{z_l} \{F_1^l \kappa_l - (F_1^l + F_2^l)[1 + k(\hat{z} - z_l)]\} e^{-k(\hat{z} - z_l)} d\hat{z} \quad (2-60d)$$

A representação integral correspondente do campo de tensões estáticas, para o meio j -ésimo, pode ser obtida substituindo-se a equação (2-56) nas equações (2-39a,b,c,d), observando-se as condições adicionais usadas na aplicação do método da variação de parâmetros para a determinação do campo de deslocamentos estáticos.

O resultado assim obtido pode ser escrito na seguinte forma:

$$(\Sigma_{21}^{\circ j}, \Sigma_{22}^{\circ j}, \Sigma_{33}^{\circ j}, \Sigma_{11}^{\circ j})^T = \begin{bmatrix} [I_{21}^{\circ j}] & [I_{22}^{\circ j}] \\ [I_{31}^{\circ j}] & [I_{32}^{\circ j}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_d^{\circ j}(z)] & [0] \\ [0] & [E_u^{\circ j}(z)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta_d^{\circ j}(z)\} \\ \{\eta_u^{\circ j}(z)\} \end{Bmatrix} \quad (2-61)$$

onde

$$[I_{21}^{\circ j}] = k\mu_j \begin{bmatrix} (\kappa_j - 3) & -2 \\ (\kappa_j - 1) & -2 \end{bmatrix} \quad (2-62a)$$

$$[I_{22}^{\circ j}] = k\mu_j \begin{bmatrix} -(\kappa_j - 3) & 2 \\ (\kappa_j - 1) & -2 \end{bmatrix} \quad (2-62b)$$

$$[I_{31}^{\circ j}] = [I_{32}^{\circ j}] = k\mu_j \begin{bmatrix} -(\kappa_j - 3) & 0 \\ -(\kappa_j - 5) & 2 \end{bmatrix} \quad (2-62c)$$

No caso dinâmico, a representação integral modificada pode ser obtida usando-se a matrix de transformação $[B^j]$ que é determinada com base na comparação

entre os resultados correspondentes da solução dinâmica original e os obtidos para a solução estática. A representação integral modificada do campo de deslocamentos e do campo de tensões pode ser escrita como:

$$(U_1^j, U_2^j)^T = [\bar{I}_{11}^j][\bar{E}_d^j(z)]\{\bar{\eta}_d^j(z)\} + [\bar{I}_{12}^j][\bar{E}_u^j(z)]\{\bar{\eta}_u^j(z)\} \quad (2-63)$$

$$(\Sigma_{21}^j, \Sigma_{22}^j, \Sigma_{33}^j, \Sigma_{11}^j)^T = \begin{bmatrix} [\bar{I}_{21}^j] & [\bar{I}_{22}^j] \\ [\bar{I}_{31}^j] & [\bar{I}_{32}^j] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{E}_d^j(z)] & [0] \\ [0] & [\bar{E}_u^j(z)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{\eta}_d^j(z)\} \\ \{\bar{\eta}_u^j(z)\} \end{Bmatrix} \quad (2-64)$$

onde

$$[\bar{I}_{pq}^j] = [I_{pq}^j][B^j]^{-1} \quad (p = 1, 2, 3; q = 1, 2) \quad (2-65)$$

$$[\bar{E}_d^j(z)] = [B^j][E_d^j(z)][B^j]^{-1} \quad (2-66)$$

$$[\bar{E}_u^j(z)] = [B^j][E_u^j(z)][B^j]^{-1} \quad (2-67)$$

$$\{\bar{\eta}_d^j(z)\} = [B^j]\{\eta_d^j(z)\} = \{\bar{A}_d^j\} + \delta_{jl}\{\bar{S}_d^l(z)\} \quad (2-68a)$$

$$\{\bar{S}_d^l(z)\} = [B^l]\{S_d^l(z)\} = [B^l] \begin{Bmatrix} S_1^l(z) \\ S_2^l(z) \end{Bmatrix} \quad (2-68b)$$

$$\{\bar{\eta}_u^j(z)\} = [B^j]\{\eta_u^j(z)\} = \{\bar{A}_u^j\} + \delta_{jl}\{\bar{S}_u^l(z)\} \quad (2-69a)$$

$$\{\bar{S}_u^l(z)\} = [B^l]\{S_u^l(z)\} = [B^l] \begin{Bmatrix} S_3^l(z) \\ S_4^l(z) \end{Bmatrix} \quad (2-69b)$$

no qual

$$[B^j] = -\frac{1}{\kappa_j} \begin{bmatrix} (k - \nu_j) & (k - \nu'_j) \\ (k\kappa_j + \nu_j - k) & (-\nu'_j\kappa_j + \nu'_j - k) \end{bmatrix} \quad (2-70)$$

e $[B^j]^{-1}$ é a inversa da matriz de transformação $[B^j]$. As matrizes $[\bar{I}_{pq}^j]$ são dadas por:

$$[\bar{I}_{11}^j] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -(\kappa_j - 1) & 1 \end{bmatrix} \quad (2-71a)$$

$$[\bar{I}_{12}^j] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (\kappa_j - 1) & 1 \end{bmatrix} \quad (2-71b)$$

$$[\bar{I}_{21}^j] = \mu_j \begin{bmatrix} (\kappa_j - 3)k - r_j & -(2k + \bar{\nu}_j) \\ (\kappa_j - 1)k + r'_j & -(2k + \bar{\nu}'_j) \end{bmatrix} \quad (2-71c)$$

$$[\bar{I}_{22}^j] = \mu_j \begin{bmatrix} -(\kappa_j - 3)k + r_j & (2k + \bar{\nu}_j) \\ (\kappa_j - 1)k + r'_j & -(2k + \bar{\nu}'_j) \end{bmatrix} \quad (2-71d)$$

$$[\bar{I}_{31}^j] = [\bar{I}_{32}^j] = \mu_j \begin{bmatrix} -(\kappa_j - 3)k - (2\gamma_j^2 - 1)r'_j & (2\gamma_j^2 - 1)\bar{\nu}'_j \\ -(\kappa_j - 5)k - (2\gamma_j^2 - 1)r'_j & 2k + (2\gamma_j^2 - 1)\bar{\nu}'_j \end{bmatrix} \quad (2-71e)$$

onde

$$\bar{\nu}_j = \frac{\omega^2(\nu_j - k)}{\beta_j^2(k^2 - \nu_j\nu'_j)} \quad (2-72)$$

$$\bar{\nu}'_j = \frac{\omega^2(\nu'_j - k)}{\beta_j^2(k^2 - \nu_j\nu'_j)} \quad (2-73)$$

$$r_j = a_j + \bar{\nu}_j; \quad r'_j = a_j + (\kappa_j - 1)\bar{\nu}'_j \quad (2-74)$$

$$a_j = k \left\{ \frac{\omega^2 \kappa_j}{\beta_j^2(k^2 - \nu_j\nu'_j)} - (\kappa_j + 1) \right\} \quad (2-75)$$

Os elementos da matriz $[\bar{E}_d^j(z)]$ são dados por:

$$[\bar{E}_d^j(z)] = \begin{bmatrix} m_{11}^d & m_{12}^d \\ m_{21}^d & m_{22}^d \end{bmatrix} e^{-\nu_j(z-z_j-1)} \quad (2-76)$$

$$m_{11}^d = 1 - \frac{\bar{\nu}'_j \beta_j^2}{\omega^2} \left(k + \frac{\nu_j - k}{\kappa_j} \right) E_j(z - z_{j-1}) \quad (2-77a)$$

$$m_{12}^d = -\frac{\bar{\nu}'_j \beta_j^2}{\omega^2} \left(\frac{\nu_j - k}{\kappa_j} \right) E_j(z - z_{j-1}) \quad (2-77b)$$

$$m_{21}^d = -\frac{\beta_j^2}{\omega^2} \left(k + \frac{\nu_j - k}{\kappa_j} \right) \{ (1 + \kappa_j)k + r'_j \} E_j(z - z_{j-1}) \quad (2-77c)$$

$$m_{22}^d = 1 - \frac{\bar{\nu}_j \beta_j^2}{\omega^2} \left\{ k + \left(\frac{\kappa_j - 1}{\kappa_j} \right) (\nu'_j - k) \right\} E_j(z - z_{j-1}) \quad (2-77d)$$

e, similarmente, os elementos da matriz $[\bar{E}_u^j(z)]$ por:

$$[\bar{E}_u^j(z)] = \begin{bmatrix} m_{11}^u & m_{12}^u \\ m_{21}^u & m_{22}^u \end{bmatrix} e^{\nu_j(z-z_j)} \quad (2-78)$$

$$m_{11}^u = 1 - \frac{\bar{\nu}'_j \beta_j^2}{\omega^2} \left(k + \frac{\nu_j - k}{\kappa_j} \right) E_j(z_j - z) \quad (2-79a)$$

$$m_{12}^u = -\frac{\bar{\nu}'_j \beta_j^2}{\omega^2} \left(\frac{\nu_j - k}{\kappa_j} \right) E_j(z_j - z) \quad (2-79b)$$

$$m_{21}^u = -\frac{\beta_j^2}{\omega^2} \left(k + \frac{\nu_j - k}{\kappa_j} \right) \{ (1 + \kappa_j)k + r'_j \} E_j(z_j - z) \quad (2-79c)$$

$$m_{22}^u = 1 - \frac{\bar{\nu}_j \beta_j^2}{\omega^2} \left\{ k + \left(\frac{\kappa_j - 1}{\kappa_j} \right) (\nu'_j - k) \right\} E_j(z_j - z) \quad (2-79d)$$

onde

$$E(z) = e^{(\nu_j - \nu'_j)z} - 1 \quad (2-80)$$

Pode-se verificar facilmente que quando $k \rightarrow \infty$, as matrizes $[\bar{I}_{pq}^j]$ tendem para as matrizes estáticas correspondentes $[I_{pq}^{\diamond j}]$ ($p = 1, 2, 3; q = 1, 2$), e que as matrizes $[\bar{E}_d^j(z)]$ e $[\bar{E}_u^j(z)]$ tendem, respectivamente, para $[E_d^{\diamond j}(z)]$ e $[E_u^{\diamond j}(z)]$.

Os elementos das matrizes correspondentes à solução modificada apresentados anteriormente, devem ser ainda cuidadosamente reescritos com o objetivo de se evitar perda de precisão durante os cálculos, que decorrem da aplicação

dos procedimentos numéricos no processo de obtenção da solução. Tal fato é particularmente importante quando os cálculos são realizados com precisão simples em computadores com número real de 32-bits. Embora a idéia original tivesse sido usar a representação integral modificada somente para grandes valores de k , verificou-se que a mesma se aplica igualmente bem para valores pequenos e intermediários k . Em consequência, por concisão, a representação modificada do campo de deslocamentos e do campo de tensões, no domínio transformado, associada às ondas polarizadas verticalmente, apresentada nesta seção, será usada para todos os valores de k .

2.3.2. Propagação Através das Camadas

A representação integral para o campo de deslocamentos e de tensões implica na determinação de seis funções incógnitas $\eta_k^j(z)$ ($k = 1, \dots, 6$) por camada. Existem vários procedimentos para a determinação destas funções. Pode-se encontrar no trabalho de Apsel(1979) uma avaliação crítica das vantagens e desvantagens apresentadas pelos diversos métodos. Um procedimento eficiente para a determinação das funções incógnitas $\eta_k^j(z)$ foi proposto por Luco e Apsel(1983) no qual são utilizadas as condições de continuidade, de contorno e de radiação. Neste trabalho, será seguida a metodologia apresentada por Luco e Apsel(1983) com a introdução de algumas modificações com o objetivo sentido de se evitar a ocorrência de *overflow* durante o cálculo dos termos de carga para grandes valores de k .

Com o intuito de simplificar e tornar conciso o desenvolvimento que se segue, uma nova notação será introduzida, na qual o campo de deslocamentos $\{U^j\}$, as componentes do campo de tensões necessárias para expressar as condições de continuidade através das interfaces entre as camadas $\{\Sigma_1^j\}$, e as demais componentes do campo de tensões $\{\Sigma_2^j\}$ podem ser escritas em conjunto, no

domínio transformado, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \{U^j\} \\ \{\Sigma_1^j\} \\ \{\Sigma_2^j\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{11}^j] & [I_{12}^j] \\ [I_{21}^j] & [I_{22}^j] \\ [I_{31}^j] & [I_{32}^j] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_d^j(z)] & [0] \\ [0] & [E_u^j(z)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta_d^j(z)\} \\ \{\eta_u^j(z)\} \end{Bmatrix} \quad (2-81)$$

onde

$$\{U^j\} = (U_1^j, U_2^j, U_3^j)^T \quad (2-82a)$$

$$\{\Sigma_1^j\} = (\Sigma_{21}^j, \Sigma_{22}^j, \Sigma_{32}^j)^T \quad (2-82b)$$

$$\{\Sigma_2^j\} = (\Sigma_{33}^j, \Sigma_{11}^j, \Sigma_{31}^j)^T \quad (2-82c)$$

Na nova notação, as matrizes $[I_{pq}^j]$ ($p = 1, 2, 3; q = 1, 2$) que aparecem na equação (2-81) são agora definidas por:

$$[I_{pq}^j]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} [\bar{I}_{pq}^j]_{2 \times 2} & \{0\}_{1 \times 2} \\ \{0\}_{2 \times 1}^T & \check{I}_{pq}^j \end{bmatrix} \quad (p = 1, 2, 3; q = 1, 2) \quad (2-83)$$

De maneira análoga, $[E_d^j(z)]$ e $[E_u^j(z)]$ são agora matrizes com dimensão 3×3 compostas por:

$$[E_d^j(z)]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} [\bar{E}_d^j(z)]_{2 \times 2} & \{0\}_{1 \times 2} \\ \{0\}_{2 \times 1}^T & e^{-\nu_j'(z-z_{j-1})} \end{bmatrix} \quad (2-84a)$$

$$[E_u^j(z)]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} [\bar{E}_u^j(z)]_{2 \times 2} & \{0\}_{1 \times 2} \\ \{0\}_{2 \times 1}^T & e^{\nu_j'(z-z_j)} \end{bmatrix} \quad (2-84b)$$

Os vectores $\{\eta_d^j(z)\}$ e $\{\eta_u^j(z)\}$ têm dimensão 3×1 e são definidos por:

$$\{\eta_d^j(z)\} = (\bar{\eta}_1^j(z), \bar{\eta}_2^j(z), \eta_5^j(z))^T = \{A_d^j\} + \delta_{jl} \{S_d^l(z)\} \quad (2-85a)$$

$$\{\eta_u^j(z)\} = (\bar{\eta}_3^j(z), \bar{\eta}_4^j(z), \eta_6^j(z))^T = \{A_u^j\} + \delta_{jl} \{S_u^l(z)\} \quad (2-85b)$$

onde as constantes $\{A_d^j\} = (A_1^j, A_2^j, A_5^j)^T$ e $\{A_u^j\} = (A_3^j, A_4^j, A_6^j)^T$ foram redefinidas e serão determinadas pelas condições de contorno ou outras condições.

Os vetores dos termos de carga $\{S_d^l(z)\}$ e $\{S_u^l(z)\}$, que aparecem nas equações (2-85a,b), têm agora dimensão 3×1 e são constituídos por:

$$\{S_d^l(z)\} = (S_1^l(z), S_2^l(z), S_5^l(z))^T = \begin{Bmatrix} \bar{S}_1^l(z) \\ \bar{S}_2^l(z) \\ S_5^l(z) \end{Bmatrix} \quad (2-86a)$$

$$\{S_u^l(z)\} = (S_3^l(z), S_4^l(z), S_6^l(z))^T = \begin{Bmatrix} \bar{S}_3^l(z) \\ \bar{S}_4^l(z) \\ S_6^l(z) \end{Bmatrix} \quad . \quad (2-86b)$$

As condições de contorno prescritas na superfície livre ($z = 0$) do semi-espço estratificado, correspondentes a forças de superfície nulas, são descritas por:

$$(\Sigma_{21}^j, \Sigma_{22}^j, \Sigma_{32}^j) = 0 \quad \text{para} \quad z = z_0 = 0 \quad (2-87)$$

e as condições de continuidade para cada uma das interfaces entre as camadas $z = z_j$ são expressas por:

$$(U_1^j, U_2^j, U_3^j) = (U_1^{j+1}, U_2^{j+1}, U_3^{j+1}) \quad \text{para} \quad z = z_j \quad (2-88a)$$

$$(\Sigma_{21}^j, \Sigma_{22}^j, \Sigma_{32}^j) = (\Sigma_{21}^{j+1}, \Sigma_{22}^{j+1}, \Sigma_{32}^{j+1}) \quad \text{para} \quad z = z_j \quad . \quad (2-88b)$$

A condição de radiação quando $z \rightarrow \infty$ implica que:

$$A_3^{N+1} = A_4^{N+1} = A_6^{N+1} = 0 \quad . \quad (2-89)$$

As condições de continuidade definidas pelas equações (2-88a,b) podem ser escritas, usando-se a equação (2-81), para cada uma das interfaces $z = z_j$ na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [I_{11}^j] & [I_{12}^j] \\ [I_{21}^j] & [I_{22}^j] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_d^j(z_j)] & [0] \\ [0] & [E_u^j(z_j)] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{\eta_d^j(z_j)\} \\ \{\eta_u^j(z_j)\} \end{array} \right\} = \\ \begin{bmatrix} [I_{11}^{j+1}] & [I_{12}^{j+1}] \\ [I_{21}^{j+1}] & [I_{22}^{j+1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_d^{j+1}(z_j)] & [0] \\ [0] & [E_u^{j+1}(z_j)] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{\eta_d^{j+1}(z_j)\} \\ \{\eta_u^{j+1}(z_j)\} \end{array} \right\} . \quad (2-90)$$

Reportando-se às definições das matrizes $[E_d^j(z)]$ e $[E_u^j(z)]$, pode ser verificado que $[E_d^{j+1}(z_j)]$ e $[E_u^j(z_j)]$ são matrizes identidades com dimensão 3×3 . As matrizes $[E_d^j(z_j)]$ e $[E_u^{j+1}(z_j)]$ podem ser escritas como:

$$[E_d^j(z_j)] = [\check{E}_d^j(z_j)] e^{-\nu'_j d_j} \quad (2-91a)$$

$$[E_u^{j+1}(z_j)] = [\check{E}_u^{j+1}(z_j)] e^{-\nu'_{j+1} d_{j+1}} \quad (2-91b)$$

onde

$$d_j = z_j - z_{j-1} \quad (2-92)$$

é a espessura da camada j -ésima. A equação (2-90) pode então ser reescrita na forma:

$$\begin{Bmatrix} \{\eta_d^{j+1}(z_j)\} \\ \{\eta_u^j(z_j)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_j^d] & [R_j^u] \\ [R_j^d] & [T_j^u] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta_d^j(z_j)\} e^{-\nu'_j d_j} \\ \{\eta_u^{j+1}\} e^{-\nu'_{j+1} d_{j+1}} \end{Bmatrix} \quad (2-93)$$

ou, para $(j = 1, \dots, N)$:

$$\{\eta_d^{j+1}(z_j)\} = [T_j^d] \{\eta_d^j(z_j)\} e^{-\nu'_j d_j} + [R_j^u] \{\eta_u^{j+1}(z_j)\} e^{-\nu'_{j+1} d_{j+1}} \quad (2-94a)$$

$$\{\eta_u^j(z_j)\} = [R_j^d] \{\eta_d^j(z_j)\} e^{-\nu'_j d_j} + [T_j^u] \{\eta_u^{j+1}(z_j)\} e^{-\nu'_{j+1} d_{j+1}} \quad (2-94b)$$

onde

$$\begin{bmatrix} [T_j^d] & [R_j^u] \\ [R_j^d] & [T_j^u] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[I_{11}^{j+1}] & [I_{12}^j] \\ -[I_{21}^{j+1}] & [I_{22}^j] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -[I_{11}^j] & [I_{21}^{j+1}] \\ -[I_{21}^j] & [I_{22}^{j+1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\check{E}_d^j(z_j)] & [0] \\ [0] & [\check{E}_u^{j+1}(z_j)] \end{bmatrix}. \quad (2-95)$$

As matrizes $[T_j^d]$ e $[T_j^u]$ têm dimensão 3×3 e são chamadas *matrizes de transmissão modificadas*. Semelhantemente, as matrizes $[R_j^d]$ e $[R_j^u]$ têm dimensão 3×3 e são chamadas *matrizes de reflexão modificadas*.

A aplicação da condição de contorno correspondente a forças de superfície nulas expressa pela equação (2-87) na equação (2-81), seguida da substituição das equações (2-91a,b) escritas para a interface $z_0 = 0$, conduz a:

$$\{0\} = [I_{21}^1] \{\eta_d^1(z_0)\} + [I_{22}^1] [\check{E}_u^1(z_0)] \{\eta_u^1(z_0)\} e^{-\nu'_1 d_1} \quad (2-96)$$

e

$$\{\eta_d^1(z_0)\} = [R_0^u]\{\eta_u^1(z_0)\} e^{-\nu_1^1 d_1} \quad (2-97)$$

onde

$$[R_0^u] = -[I_{21}^1]^{-1}[I_{22}^1][\check{E}_u^1(z_0)] \quad . \quad (2-98)$$

É importante salientar que as componentes dos vetores $\{\eta_d^j(z)\}$ e $\{\eta_u^j(z)\}$ são independentes de z para as camadas que não têm carregamento aplicado ($j \neq l$) [equações (2-85a,b)]. Na camada onde o carregamento está aplicado ($j = l$), *i. e.*, para $z_{l-1} \leq z \leq z_l$, têm-se que:

$$\{\eta_d^l(z)\} = \{\eta_d^l(z_{l-1})\} + \{S_d^l(z)\} \quad (2-99a)$$

$$\{\eta_u^l(z)\} = \{\eta_u^l(z_l)\} + \{S_u^l(z)\} \quad . \quad (2-99b)$$

As componentes dos vetores $\{\eta_d^j(z)\}$ e $\{\eta_u^j(z)\}$ são determinadas por meio do seguinte esquema de fatoração: para as camadas que se situam *acima* da camada onde o carregamento está aplicado ($j = 1, \dots, l-1$)

$$\{\eta_u^j(z)\} = [\hat{T}_j^u][\hat{T}_{j+1}^u] \dots [\hat{T}_{l-1}^u]\{\eta_u^l(z_{l-1})\} e^{-(\nu_{j+1}^1 d_{j+1} + \nu_{j+2}^1 d_{j+2} + \dots + \nu_l^1 d_l)} \quad (2-100)$$

$$\{\eta_d^j(z)\} = [\hat{R}_{j-1}^u][\hat{T}_j^u][\hat{T}_{j+1}^u] \dots [\hat{T}_{l-1}^u]\{\eta_u^l(z_{l-1})\} e^{-(\nu_j^1 d_j + \nu_{j+1}^1 d_{j+1} + \dots + \nu_l^1 d_l)} \quad (2-101)$$

e para as camadas localizadas *abaixo* da camada que contém o carregamento ($j = l+1, \dots, N+1$)

$$\{\eta_d^j(z)\} = [\hat{T}_{j-1}^d][\hat{T}_{j-2}^d] \dots [\hat{T}_l^d]\{\eta_d^l(z_l)\} e^{-(\nu_{j-1}^1 d_{j-1} + \nu_{j-2}^1 d_{j-2} + \dots + \nu_l^1 d_l)} \quad (2-102)$$

$$\{\eta_u^j(z)\} = [\hat{R}_j^d][\hat{T}_{j-1}^d][\hat{T}_{j-2}^d] \dots [\hat{T}_l^d]\{\eta_d^l(z_l)\} e^{-(\nu_j^1 d_j + \nu_{j-1}^1 d_{j-1} + \dots + \nu_l^1 d_l)} \quad . \quad (2-103)$$

As matrizes $[\widehat{T}_j^u]$, $[\widehat{T}_j^d]$, $[\widehat{R}_j^u]$ e $[\widehat{R}_j^d]$, que aparecem nas equações (2-100) a (2-103) têm dimensão 3×3 e são definidas para cada interface j . As matrizes $[\widehat{T}_j^u]$ e $[\widehat{T}_j^d]$ são chamadas *matrizes de transmissão generalizadas* e as matrizes $[\widehat{R}_j^u]$ e $[\widehat{R}_j^d]$ *matrizes de reflexão generalizadas*.

As relações de recorrência para as matrizes $[\widehat{T}_j^u]$ e $[\widehat{R}_j^u]$ são obtidas pela substituição das equações (2-100) e (2-101) nas equações (2-97) e (2-94a,b). As relações assim obtidas são tais que, a condição de contorno na superfície livre e as condições de continuidade em cada uma das interfaces acima da fonte ($1 \leq j \leq l-1$) são automaticamente satisfeitas. As relações de recorrência são dadas por:

$$[\widehat{R}_0^u] = [R_0^u] \quad (2-104)$$

$$[\widehat{T}_j^u] = \left[[I] - [R_j^d][\widehat{R}_{j-1}^u] e^{-2\nu_j' d_j} \right]^{-1} [T_j^u] \quad (2-105)$$

$$[\widehat{R}_j^u] = [R_j^u] + [T_j^d][\widehat{R}_{j-1}^u][\widehat{T}_j^u] e^{-2\nu_j' d_j} \quad (2-106)$$

onde $[I]$ é uma matriz identidade com dimensão 3×3 e

$$\{\eta_d^l(z_{l-1})\} = [\widehat{R}_{l-1}^u] \{\eta_u^l(z_{l-1})\} e^{-\nu_l' d_l} \quad (2-107)$$

Da mesma forma, as relações de recorrência para as matrizes $[\widehat{T}_j^d]$ e $[\widehat{R}_j^d]$ são obtidas pela substituição das equações (2-102) e (2-103) nas equações (2-94a,b). As relações que resultam são tais que, a condição de radiação no infinito e as condições de continuidade em cada uma das interfaces abaixo da fonte ($l \leq j \leq N$) são automaticamente satisfeitas. As relações de recorrência são dadas por:

$$[\widehat{R}_{N+1}^d] = [0] \quad (2-108)$$

$$[\widehat{T}_j^d] = \left[[I] - [R_j^u][\widehat{R}_{j+1}^d] e^{-2\nu_{j+1}' d_{j+1}} \right]^{-1} [T_j^d] \quad (2-109)$$

$$[\widehat{R}_j^d] = [R_j^d] + [T_j^u][\widehat{R}_{j+1}^d][\widehat{T}_j^d] e^{-2\nu_{j+1}' d_{j+1}} \quad (2-110)$$

e

$$\{\eta_u^l(z_l)\} = [\widehat{R}_l^d] \{\eta_d^l(z_l)\} e^{-\nu_l^l d_l} \quad . \quad (2-111)$$

As relações de recorrência expressas pelas equações (2-104) a (2-106) e (2-108) a (2-110) em conjunto com as equações obtidas a partir da expressão (2-95), para as matrizes de transmissão e reflexão modificadas, tornam possível a determinação das matrizes de transmissão e reflexão generalizadas. Uma vez que estas matrizes e o campo na camada que contém a fonte são conhecidos, o campo dentro de cada uma das camadas acima ou abaixo da camada que contém a fonte, pode ser facilmente determinado através da fatoração definida pelas equações (2-100) a (2-103).

O campo na camada que contém a fonte ($j = l$) pode ser determinado aplicando-se as equações (2-99a,b),(2-107) e (2-111), resultando em:

$$\{\eta_d^l(z_l)\} = \left[[I] - [\widehat{R}_{l-1}^u][\widehat{R}_l^d] e^{-2\nu_l^l d_l} \right]^{-1} \left\{ \{S_d^l(z_l)\} + [\widehat{R}_{l-1}^u] \{S_u^l(z_{l-1})\} e^{-\nu_l^l d_l} \right\} \quad (2-112)$$

$$\{\eta_u^l(z_{l-1})\} = \left[[I] - [\widehat{R}_l^d][\widehat{R}_{l-1}^u] e^{-2\nu_l^l d_l} \right]^{-1} \left\{ \{S_u^l(z_{l-1})\} + [\widehat{R}_l^d] \{S_d^l(z_l)\} e^{-\nu_l^l d_l} \right\} . \quad (2-113)$$

e no caso geral, para $z_{l-1} \leq z \leq z_l$

$$\{\eta_d^l(z)\} = \{S_d^l(z)\} + [\widehat{R}_{l-1}^u] \{\eta_u^l(z_{l-1})\} e^{-\nu_l^l d_l} \quad (2-114)$$

$$\{\eta_u^l(z)\} = \{S_u^l(z)\} + [\widehat{R}_l^d] \{\eta_d^l(z_l)\} e^{-\nu_l^l d_l} \quad . \quad (2-115)$$

O caso particular, no qual a fonte está localizada no interior do semi-espço ($l = N + 1$), é obtido diretamente a partir das equações (2-114),(2-115) e (2-108).

Neste caso, têm-se:

$$\{\eta_u^{N+1}(z)\} = \{S_u^{N+1}(z)\} \quad (2-116)$$

$$\{\eta_d^{N+1}(z)\} = \{S_d^{N+1}(z)\} + [\widehat{R}_N^u] \{S_u^{N+1}(z_N)\} e^{-\nu_{N+1}^l d_{N+1}} \quad . \quad (2-117)$$

Para os meios perfeitamente elásticos, as matrizes de transmissão e reflexão generalizadas são singulares para alguns valores do número de onda k . Quando a atenuação do material é considerada, as singularidades se situam fora do eixo real dos números de onda e, em consequência, o procedimento de fatoração apresentado pode ser aplicado, sem dificuldades numéricas, para o estudo de propagação de ondas em um semi-espço visco-elástico estratificado horizontalmente (Luco e Apsel, 1983).

2.3.3. Aplicação Geral do Esquema Iterativo

A título de ilustração do funcionamento do esquema iterativo proposto, pode-se considerar sem perda de generalidade, o caso particular no qual a fonte está aplicada no interior da camada l -ésima a uma profundidade $z = z_s$. Deseja-se determinar o campo de tensões e de deslocamentos, no domínio transformado, em um ponto de observação situado na camada j -ésima a uma profundidade $z = z_r$. A equação (2-81) pode se escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \{U^j(z_r)\} \\ \{\Sigma_1^j(z_r)\} \\ \{\Sigma_2^j(z_r)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{11}^j] & [I_{12}^j] \\ [I_{21}^j] & [I_{22}^j] \\ [I_{31}^j] & [I_{32}^j] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\widehat{E}_d^j(z_r)] & [0] \\ [0] & [\widehat{E}_u^j(z_r)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\widehat{\eta}_d^j(z_r)\} \\ \{\widehat{\eta}_u^j(z_r)\} \end{Bmatrix} \quad (2-118)$$

onde

$$[\widehat{E}_d^j(z_r)] = [E_d^j(z_r)] e^{\nu_j'(z_r - z_{j-1})} \quad (2-119a)$$

$$[\widehat{E}_u^j(z_r)] = [E_u^j(z_r)] e^{\nu_j'(z_j - z_r)} \quad (2-119b)$$

e

$$\{\widehat{\eta}_d^j(z_r)\} = \{\eta_d^j(z_r)\} e^{-\nu_j'(z_r - z_{j-1})} \quad (2-120a)$$

$$\{\widehat{\eta}_u^j(z_r)\} = \{\eta_u^j(z_r)\} e^{-\nu_j'(z_j - z_r)} \quad (2-120b)$$

Na equação (2-118) as únicas incógnitas são os vetores $\{\widehat{\eta}_d^j(z_r)\}$ e $\{\widehat{\eta}_u^j(z_r)\}$. Tais vetores podem ser obtidos usando-se as equações (2-112) a (2-115) em conjunto

com as equações (2-100) a (2-103). Torna-se conveniente redefinir as funções de cargas $\{S_d^l(z)\}$ e $\{S_u^l(z)\}$, com o objetivo de cancelar os fatores que são responsáveis pela ocorrência de *overflow* durante os cálculos computacionais para grandes valores de k . Os vetores $\{\widehat{S}_d^l(z)\}$ e $\{\widehat{S}_u^l(z)\}$ podem ser definidos como:

$$\{\widehat{S}_d^l(z)\} = \begin{Bmatrix} \widehat{S}_1^l(z) \\ \widehat{S}_2^l(z) \\ \widehat{S}_3^l(z) \end{Bmatrix} = \{S_d^l(z)\} e^{-\nu'_l(z_s - z_{l-1})} \quad (2-121a)$$

$$\{\widehat{S}_u^l(z)\} = \begin{Bmatrix} \widehat{S}_3^l(z) \\ \widehat{S}_4^l(z) \\ \widehat{S}_6^l(z) \end{Bmatrix} = \{S_u^l(z)\} e^{\nu'_l(z_s - z_l)} \quad (2-121b)$$

Quando o ponto de observação ($z = z_r$) está situado na camada j -ésima e esta camada está localizada acima da camada que contém a fonte (camada l -ésima), as equações (2-100), (2-101) e (2-113) em conjunto com as equações (2-120a,b) e (2-121a,b), conduzem a:

$$\begin{aligned} \{\widehat{\eta}_d^j(z_r)\} &= [\widehat{R}_{j-1}^u][\widehat{T}_j^u][\widehat{T}_{j+1}^u] \dots [\widehat{T}_{l-1}^u] \left[[I] - [\widehat{R}_l^d][\widehat{R}_{l-1}^u] e^{-2\nu'_l d_l} \right]^{-1} \\ &\quad \left\{ \{\widehat{S}^u(z_{l-1})\} + [\widehat{R}_l^d] \{\widehat{S}^d(z_l)\} e^{-2\nu'_l(z_l - z_s)} \right\} \\ &\quad e^{-[\nu'_l(z_s - z_{l-1}) + \nu'_{l-1} d_{l-1} + \dots + \nu'_{j+1} d_{j+1} + \nu'_j d_j + \nu'_j(z_r - z_{j-1})]} \end{aligned} \quad (2-122)$$

$$\begin{aligned} \{\widehat{\eta}_u^j(z_r)\} &= [\widehat{T}_j^u][\widehat{T}_{j+1}^u] \dots [\widehat{T}_{l-1}^u] \left[[I] - [\widehat{R}_l^d][\widehat{R}_{l-1}^u] e^{-2\nu'_l d_l} \right]^{-1} \\ &\quad \left\{ \{\widehat{S}^u(z_{l-1})\} + [\widehat{R}_l^d] \{\widehat{S}^d(z_l)\} e^{-2\nu'_l(z_l - z_s)} \right\} \\ &\quad e^{-[\nu'_l(z_s - z_{l-1}) + \nu'_{l-1} d_{l-1} + \dots + \nu'_{j+1} d_{j+1} + \nu'_j(z_j - z_r)]} \end{aligned} \quad (2-123)$$

Quando o ponto de observação ($z = z_r$) está situado na camada j -ésima e esta camada se localiza acima da camada que contém a fonte (camada l -ésima), as equações (2-102), (2-103) e (2-112) em conjunto com as equações (2-120a,b) e

(2-121a,b), conduzem a:

$$\begin{aligned} \{\hat{\eta}_d^j(z_r)\} &= [\hat{T}_{j-1}^d][\hat{T}_{j-2}^d] \dots [\hat{T}_{l+1}^d][\hat{T}_l^d] \left[[I] - [\hat{R}_{l-1}^u][\hat{R}_l^d] e^{-2\nu'_l d_l} \right]^{-1} \\ &\quad \left\{ \{\hat{S}^d(z_l)\} + [\hat{R}_{l-1}^u] \{\hat{S}^u(z_{l-1})\} e^{-2\nu'_l(z_s - z_{l-1})} \right\} \\ &\quad e^{-[\nu'_l(z_l - z_s) + \nu'_{l+1} d_{l+1} + \dots + \nu'_{j-2} d_{j-2} + \nu'_{j-1} d_{j-1} + \nu'_j(z_r - z_{j-1})]} \end{aligned} \quad (2-124)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{\eta}_u^j(z_r)\} &= [\hat{R}_j^d][\hat{T}_{j-1}^d][\hat{T}_{j-2}^d] \dots [\hat{T}_{l+1}^d][\hat{T}_l^d] \left[[I] - [\hat{R}_{l-1}^u][\hat{R}_l^d] e^{-2\nu'_l d_l} \right]^{-1} \\ &\quad \left\{ \{\hat{S}^d(z_l)\} + [\hat{R}_{l-1}^u] \{\hat{S}^u(z_{l-1})\} e^{-2\nu'_l(z_s - z_{l-1})} \right\} \\ &\quad e^{-[\nu'_l(z_l - z_s) + \nu'_{l+1} d_{l+1} + \dots + \nu'_{j-2} d_{j-2} + \nu'_{j-1} d_{j-1} + \nu'_j d_j + \nu'_j(z_j - z_r)]}. \end{aligned} \quad (2-125)$$

Finalmente considera-se o caso no qual o ponto de observação ($z = z_r$) está situado na mesma camada onde se localiza a fonte. A partir das equações (2-114) e (2-115) em conjunto com as equações (2-120a,b) e (2-121a,b) chega-se a:

$$\begin{aligned} \{\hat{\eta}_d^l(z_r)\} &= \{\hat{S}_d^l(z_r)\} e^{-\nu'_l(z_r - z_s)} + [\hat{R}_{l-1}^u] \left[[I] - [\hat{R}_l^d][\hat{R}_{l-1}^u] e^{-2\nu'_l d_l} \right]^{-1} \\ &\quad \left\{ \{\hat{S}^u(z_{l-1})\} + [\hat{R}_l^d] \{\hat{S}^d(z_l)\} e^{-2\nu'_l(z_l - z_s)} \right\} e^{-\nu'_l(z_r + z_s - 2z_{l-1})} \end{aligned} \quad (2-126)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{\eta}_u^l(z_r)\} &= \{\hat{S}_u^l(z_r)\} e^{-\nu'_l(z_s - z_r)} + [\hat{R}_l^d] \left[[I] - [\hat{R}_{l-1}^u][\hat{R}_l^d] e^{-2\nu'_l d_l} \right]^{-1} \\ &\quad \left\{ \{\hat{S}^d(z_l)\} + [\hat{R}_{l-1}^u] \{\hat{S}^u(z_{l-1})\} e^{-2\nu'_l(z_s - z_{l-1})} \right\} e^{-\nu'_l(2z_l - z_r - z_s)}. \end{aligned} \quad (2-127)$$

2.4. Avaliação das Integrais sobre o Número de Onda

Nas seções anteriores foram apresentados os procedimentos para a determinação do campo de deslocamentos e de tensões no domínio transformado (número de onda e frequência), para uma fonte localizada no interior de um semi-espço visco-elástico estratificado. Uma vez obtida esta parte da solução, a próxima etapa corresponde à determinação das transformações inversas de Fourier que são expressas pelas equações (2-15) e (2-16), respectivamente, para os problemas bidimensionais e tridimensionais. Se o interesse recai somente na determinação da resposta no domínio da frequência, é necessário calcular unicamente as integrais com relação aos números de onda horizontais. No caso em que a resposta no domínio do tempo é requerida, deve ser realizada uma síntese de Fourier adicional das componentes obtidas no domínio da frequência. Tal síntese pode ser realizada utilizando-se o algoritmo das Transformadas Discretas Rápidas de Fourier (FFT).

O maior problema na obtenção das transformações inversas reside no cálculo numérico das integrais sobre o número de onda. Se o meio é perfeitamente elástico, na determinação destas integrais, podem ser usadas as técnicas de integração de contorno de funções complexas. Por outro lado, em um modelo mais realístico de análise, em que o meio é considerado inelástico, a incorporação de constantes de Lamé complexas apropriadas, μ e λ , implica no deslocamento das singularidades complexas dos integrandos para fora do eixo real dos números de onda, no plano complexo k . Tal fato permite que as integrais sobre o número de onda possam ser obtidas diretamente por meio da aplicação de uma quadratura numérica adequada. Mesmo com esta grande simplificação, a avaliação das integrais sobre o número de onda, dentro de padrões aceitáveis de precisão, requer a utilização de procedimentos numéricos especiais com o objetivo de eliminar as dificuldades causadas pelas características peculiares dos integrandos. Não obstante, para certas aplicações particulares, como será visto nos capítulos que se seguem,

algumas integrais sobre o número de onda podem ser efetuadas analiticamente.

As integrais sobre o número de onda podem ser escritas de forma genérica como:

$$I(x, z, \dots, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k, z, \dots, \omega) e^{-ikx} dk \quad . \quad (2-128)$$

De um modo geral, estas integrais devem ser determinadas numericamente para cada frequência ω e para cada distância entre a fonte e o ponto de observação. Para simplificação da notação, $x = (x_r - x_s)$ denota a distância horizontal entre a fonte e o ponto de observação enquanto que $z = (z_r - z_s)$ representa a distância vertical. Uma das dificuldades fundamentais na determinação das integrais sobre o número de onda reside no fator $e^{-ik(x_r - x_s)}$, que introduz um comportamento oscilatório intenso do integrando. Quanto maior for a distância horizontal entre a fonte o ponto de observação, $(x_r - x_s)$, mais densas serão as oscilações. As funções complexas $F(k, z, \dots, \omega)$ apresentam também características oscilatórias além de outras peculiaridades, tais como a ocorrência de descontinuidades angulares acentuadas, em forma de picos, associadas à presença de polos e de pontos de ramificação (*branch points*) nas proximidades do eixo real. Todavia, as funções complexas $F(k, z, \dots, \omega)$ são bem comportadas para grandes valores do número de onda. Se a fonte e o ponto de observação estão situados em profundidades diferentes, o decaimento exponencial de $F(k, z, \dots, \omega)$ é suficiente para garantir que o limite superior infinito de integração possa ser substituído por um limite finito. Uma descrição detalhada bem como a ilustração do comportamento da função complexa $F(k, z, \dots, \omega)$, para o caso de cargas harmônicas concentradas aplicadas no interior de um semi-espaco visco-elástico estratificado tridimensional, podem ser encontradas no trabalho apresentado por Apsel e Luco (1983). A avaliação das integrais sobre o número de onda utilizando-se técnicas-padrão de integração numérica não conduzem, em geral, a valores corretos. Em consequência,

torna-se necessária a aplicação de procedimentos numéricos especiais de integração. Métodos numéricos apropriados para a determinação de tais integrais podem ser encontrados no trabalho de Davis e Rabinowich (1983) bem como nas referências ali citadas.

Bouchon e Aki (1977) e Bouchon (1981) propuseram um esquema para o cálculo numérico das integrais sobre o número de onda, no qual as integrais infinitas são transformadas em um somatório infinito sobre valores discretos de k , em analogia com o procedimento utilizado na aproximação de uma integral infinita de Fourier por uma expansão discreta de Fourier. Para calcular este somatório, os autores sugerem que se trabalhe com frequências complexas ω , para que sejam removidas as singularidades de $F(k, z, \dots, \omega)$ do eixo real k , assim como, para reforçar os efeitos da fonte real à medida que são minimizadas as influências das demais fontes fictícias vizinhas. O efeito advindo da parte imaginária que é adicionada à frequência pode ser removido da solução no domínio do tempo. Este processo foi aplicado com sucesso, no ambiente dos supercomputadores por, Mendez (1988).

Apsel (1979) e Apsel e Luco (1983) propuseram uma técnica alternativa para o cálculo numérico das integrais sobre o número de onda, que se baseia em um tipo de quadratura de Filon, no qual o kernel oscilatório dos integrandos é levado em conta de maneira rigorosa. Neste procedimento de integração numérica, a função complexa $F(k, z, \dots, \omega)$ é substituída por um polinômio de quarta ordem em cada subintervalo e em seguida as integrais assim resultantes são efetuadas analiticamente. Um método adaptativo de integração de Gauss foi usado por Kundu e Mal (1985). Xu e Mal (1987) e Dravinski e Mossessian (1987) aplicaram um método de Clenshaw-Curtis modificado (Clenshaw and Curtis, 1960; Xu and Mal, 1985) no qual a função $F(k, z, \dots, \omega)$ é representada por uma série de polinômios de Chebyshev e as integrais assim resultantes,

incluindo o kernel oscilatório, são determinadas analiticamente. Recentemente, Dravinski e Mossessian (1988) apresentaram um estudo comparativo das diferentes quadraturas que têm sido utilizadas na determinação numérica das integrais sobre o número de onda, tendo por base de comparação a avaliação destas integrais no processo de obtenção das funções de Green bidimensionais para um semi-espaço uniforme visco-elástico.

2.4.1. Método de Bouchon-Aki

O procedimento sugerido por Bouchon e Aki (1977) para a avaliação numérica das integrais sobre o número de onda torna-se atrativo devido a sua simplicidade inerente. Com o objetivo de se transformar as integrais em somatórios, é suposto que ao invés de se ter aplicada uma única fonte, tem-se um número infinito de fontes idênticas uniformemente aplicadas ao longo do eixo x com intervalos iguais de separação L . Em consequência, a equação (2-128), escrita para este carregamento em forma de pente, constituído por um número infinito de fontes igualmente espaçadas, torna-se:

$$I(x, z, \dots, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k, z, \dots, \omega) e^{-ik(x_r - x_s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imkL} dk \quad . \quad (2-129)$$

Com base na teoria das funções generalizadas (Jones, 1966), obtém-se o seguinte resultado:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imkL} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(kL - 2m\pi) \quad . \quad (2-130)$$

A partir da substituição da equação (2-130) na equação (2-129), e usando-se as propriedades da função delta de Dirac, a integral sobre a variável k é transformada na soma infinita sobre os valores discretos k_m :

$$I(x, z, \dots, \omega) = \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(k_m, z, \dots, \omega) e^{-ik_m(x_r - x_s)} \quad (2-131)$$

com

$$k_m = \frac{2m\pi}{L} \quad (2-132)$$

Se a série converge, a soma infinita pode ser aproximada por

$$I(x, z, \dots, \omega) = \frac{1}{L} \sum_{m=-N}^N F(k_m, z, \dots, \omega) e^{-ik_m(x_r - x_s)} \quad (2-133)$$

onde N é o número de termos a ser considerado na soma discreta sobre o número de onda, sendo que os valores de N e de L devem ser escolhidos de forma adequada.

Para certa classe de problemas, quando as funções complexas $F(k, z, \dots, \omega)$ apresentam a propriedade de simetria ou de antisimetria em relação à variável k , podem ser introduzidas algumas simplificações adicionais. Quando $F(k, z, \dots, \omega)$ é simétrica, a equação (2-133) pode ser escrita na forma:

$$I(x, z, \dots, \omega) = \frac{1}{L} F(0, z, \dots, \omega) + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^N F(k_m, z, \dots, \omega) \cos(k_m(x_r - x_s)) \quad (2-134)$$

Para o caso em que $F(k, z, \dots, \omega)$ é antisimétrica:

$$I(x, z, \dots, \omega) = -\frac{2i}{L} \sum_{m=1}^N F(k_m, z, \dots, \omega) \operatorname{sen}(k_m(x_r - x_s)) \quad (2-135)$$

As séries truncadas expressas pelas equações (2-133), (2-134) ou (2-135) fornecem uma aproximação para as integrais infinitas sobre o número de onda. A convergência da soma discreta truncada sobre o número de onda, para valores diferentes do espaçamento entre as fontes L , tem de ser testada por meio de comparações com resultados obtidos por outros autores.

2.4.2 Quadratura de Filon

Os campos de deslocamentos e de tensões, obtidos usando-se a metodologia apresentada neste trabalho, são expressos na forma de integrais sobre o número de onda horizontal, as quais podem ser representadas genericamente através da equação (2-128). Como já foi mencionado, as funções complexas $F(k, z, \dots, \omega)$ do integrando apresentam, para certa classe de problemas, a propriedade de simetria ou de antisimetria com relação à variável k . Se $F(k, z, \dots, \omega)$ é simétrica, a equação (2-128) pode ser escrita como:

$$I(x, z, \dots, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(k, z, \dots, \omega) \cos(kx) dk \quad (2-136)$$

e se $F(k, z, \dots, \omega)$ é antisimétrica, como:

$$I(x, z, \dots, \omega) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} F(k, z, \dots, \omega) \operatorname{sen}(kx) dk \quad . \quad (2-137)$$

Para uma avaliação numérica, o limite superior de integração que aparece nas equações (2-136) e (2-137) deve ser truncado para um valor finito. Tal truncamento pode ser feito sem problemas quando a fonte e o ponto de observação estão localizados em profundidades diferentes, devido ao decaimento exponencial experimentado pelas funções $F(k, z, \dots, \omega)$ para grandes valores de k . Deve-se ressaltar que quanto menor for a distância vertical entre a fonte e o ponto de observação tanto maior será o valor do limite superior de integração que deve ser considerado.

As fórmulas da quadratura de Filon podem ser obtidas para o caso em que o kernel oscilatório do integrando é a função exponencial (e^{-ikx}), que aparece na equação (2-128), bem como para os casos em que o kernel oscilatório corresponde às funções cosseno ou seno, conforme apresentado, respectivamente, nas equações (2-136) e (2-137), Tranter (1966). Um procedimento similar à quadratura de Filon

para a determinação de integrais sobre o número de onda, nas quais o kernel oscilatório são funções de Bessel, foi apresentado por Apsel and Luco (1983).

Para efeito de desenvolvimento do método, considera-se o caso em que as integrais sobre o número de onda são expressas na seguinte forma:

$$I^S = \int_a^b f(k) \cos(xk) dk \quad (2-138a)$$

$$I^A = \int_a^b f(k) \operatorname{sen}(xk) dk \quad . \quad (2-138b)$$

O intervalo de integração (a, b) é subdividido em p painéis, tendo cada um deles o comprimento $2h$. Em cada um destes painéis, $f(k)$ é aproximada com precisão suficiente por um polinômio do segundo grau, que é estabelecido de maneira que o mesmo coincida com $f(k)$ nos pontos extremos e no ponto central do painel. As integrais descritas pelas equações (2-138a,b), no caso em que $f(k)$ é um polinômio do segundo grau, podem se obtidas analiticamente em uma forma fechada, através de integração por partes. Este procedimento proposto por Filon (1928) conduz a fórmulas de quadratura que diferem da regra de Simpson por: no método de Filon somente $f(k)$ é aproximada por uma forma quadrática e o kernel oscilatório é levado em conta de maneira rigorosa, enquanto que na regra de Simpson todo o integrando $f(k)\cos(xk)$, ou $f(k)\operatorname{sen}(xk)$, é aproximado por uma forma quadrática.

As fórmulas da quadratura de Filon que resultam da integração por partes, apresentadas por Tranter (1966), são:

$$I^S \approx h \{ \varphi [f(b) \operatorname{sen}(xb) - f(a) \operatorname{sen}(xa)] + \vartheta C_{2p} + \zeta C_{2p-1} \} \quad (2-139a)$$

$$I^A \approx h \{ \varphi [f(a) \cos(xa) - f(b) \cos(xb)] + \vartheta S_{2p} + \zeta S_{2p-1} \} \quad . \quad (2-139b)$$

Nas equações (2-139a,b), C_{2p} e S_{2p} denotam, respectivamente, a soma de todas ordenadas pares das curvas $y = f(k)\cos(xk)$ e $y = f(k)\operatorname{sen}(xk)$ entre a e b

inclusive, menos a metade do primeira e da última ordenada; C_{2p-1} e S_{2p-1} denotam, respectivamente, a soma de todas as ordenadas ímpares . Estas somas são dadas por:

$$C_{2p} = \sum_{j=0}^p f_{2j} \cos(xk_{2j}) - \frac{1}{2} [f(a) \cos(xa) + f(b) \cos(xb)] \quad (2-140a)$$

$$C_{2p-1} = \sum_{j=1}^p f_{2j-1} \cos(xk_{2j-1}) \quad (2-140b)$$

$$S_{2p} = \sum_{j=0}^p f_{2j} \operatorname{sen}(xk_{2j}) - \frac{1}{2} [f(a) \operatorname{sen}(xa) + f(b) \operatorname{sen}(xb)] \quad (2-140c)$$

$$S_{2p-1} = \sum_{j=1}^p f_{2j-1} \operatorname{sen}(xk_{2j-1}) \quad (2-140d)$$

onde j é um número inteiro. Por conveniência, é usada a seguinte notação:

$$h = k_{j+1} - k_j \quad (2-141a)$$

$$k_j = a + jh \quad (2-141b)$$

$$f_j = f(k_j) \quad (2-141c)$$

$$k_0 = a \quad (2-141d)$$

$$k_{2p} = b \quad (2-141e)$$

As quantidades φ , ϑ e ζ são expressas em termos de $\theta = xh$, por:

$$\varphi = \frac{1}{\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\theta^2} - \frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{\theta^3} \quad (2-142a)$$

$$\vartheta = 2 \left(\frac{1 + \cos^2\theta}{\theta^2} - \frac{2\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\theta^3} \right) \quad (2-142b)$$

$$\zeta = 4 \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta^3} - \frac{\cos\theta}{\theta^2} \right) \quad (2-142c)$$

Algumas dificuldades numéricas aparecem quando φ , ϑ e ζ são computados para pequenos valores de θ , usando-se as expressões (2-142a,b,c). Para resolver este problema é necessário expandir φ , ϑ e ζ em séries de potência de θ e usar estas séries quando θ é pequeno. As expansões correspondentes são dadas por:

$$\varphi = \frac{2\theta^3}{45} - \frac{2\theta^5}{315} + \frac{2\theta^7}{4725} - \dots \quad (2-143a)$$

$$\vartheta = \frac{2}{3} + \frac{2\theta^2}{15} - \frac{4\theta^4}{105} + \frac{2\theta^6}{567} - \frac{4\theta^8}{22275} + \dots \quad (2-143b)$$

$$\zeta = \frac{4}{3} - \frac{2\theta^2}{15} + \frac{\theta^4}{210} - \frac{\theta^6}{11340} + \dots \quad (2-143c)$$

O valor limite de θ a partir do qual as equações (2-142a,b,c) cessam de ser precisas é dependente da máquina. Para os computadores do tipo compatível com o IBM PC/AT, trabalhando-se com precisão simples (número real de 32 bits), é recomendado um valor limite correspondente a $\theta = 0.58$.

2.4.3. Aplicação e Comparações

Com o objetivo de testar os algoritmos usados para determinar as integrais sobre o número de onda e de avaliar a eficiência relativa dos mesmos, seria desejável comparar os resultados obtidos pelo presente estudo com aqueles publicados por outros autores. Infelizmente, não existem disponíveis na literatura resultados gerais correspondentes à resposta tridimensional de um semi-espaco visco-elástico estratificado sujeito à ação de cargas móveis enterradas. Para validação e calibração dos métodos numéricos utilizados neste trabalho para a determinação das integrais sobre o número de onda, tornou-se necessário desenvolver a metodologia e os programas de computador associados para o cálculo das funções de Green bidimensionais (estado plano de deformações) correspondentes a linhas de cargas harmônicas fixas aplicadas no interior de um

semi-espaco visco-elástico estratificado. A formulação usada no desenvolvimento desta metodologia é baseada na formulação geral para problemas bidimensionais, apresentada nas seções anteriores deste capítulo em conjunto com as forças de corpo equivalentes e a solução completa correspondente no domínio transformado, descrita no Apêndice C. A determinação numérica destas funções de Green requer o cálculo de integrais sobre o número de onda. Duas versões do programa de computador que determina as funções de Green bidimensionais foram escritas: a primeira versão contém o esquema de quadratura proposto por Bouchon e Aki (1977) para a determinação das integrais sobre o número de onda; a segunda versão usa para integração numérica uma quadratura adaptativa com base na quadratura de Filon. Foram realizados testes adicionais, usando-se as funções bidimensionais de Green associadas ao cisalhamento anti-plano. A função bidimensional de Green de deslocamentos para o problema de cisalhamento anti-plano, com dependência no tempo $e^{i\omega t}$ em um semi-espaco uniforme visco-elástico, é dada por:

$$G_{33}(\vec{x}^r, \vec{x}^s) = -\frac{i}{4\mu} \left\{ H_0^{(2)}(q_1) + H_0^{(2)}(q_2) \right\} \quad (2-144)$$

e as funções de Green de tensões, correspondentes ao mesmo problema, são dadas por:

$$H_{133}(\vec{x}^r, \vec{x}^s) = \frac{i}{4} k_\beta \left\{ \frac{(x_1^r - x_1^s)}{|\vec{x}^r - \vec{x}^s|} H_1^{(2)}(q_1) + \frac{(x_1^r - x_1^s)}{|\vec{x}^r - \vec{x}^s|} H_1^{(2)}(q_2) \right\} \quad (2-145)$$

$$H_{233}(\vec{x}^r, \vec{x}^s) = \frac{i}{4} k_\beta \left\{ \frac{(x_2^r - x_2^s)}{|\vec{x}^r - \vec{x}^s|} H_1^{(2)}(q_1) + \frac{(x_2^r + x_2^s)}{|\vec{x}^r - \vec{x}^s|} H_1^{(2)}(q_2) \right\} \quad (2-146)$$

onde a função de tempo $e^{i\omega t}$ é omitida por simplicidade, e μ denota a constante complexa de Lamé definida pela equação (2.5a). O número complexo de onda k_β é definido por $k_\beta = \omega/\beta$, em que β é a velocidade complexa da onda de cisalhamento, que é dada por:

$$\beta = \bar{\beta} [1 + 2i\xi_\beta]^{1/2} \quad (2-147)$$

onde $\bar{\beta}$ é um valor real, que representa a velocidade da onda de cisalhamento definida para sólidos perfeitamente elásticos. Nas equações (2-144) até (2-146), $H_0^{(2)}(q)$ e $H_1^{(2)}(q)$ representam, respectivamente, as funções de Hankel de segunda espécie de ordem zero e um. Os vetores de posição do ponto de observação e da fonte estão representados nestas equações, respectivamente, por $\vec{x}^r = (x_1^r, x_2^r)$ e por $\vec{x}^s = (x_1^s, x_2^s)$, e $\vec{x}_*^s = (x_1^s, -x_2^s)$ indica o vetor de posição da imagem refletida da fonte em relação ao plano definido por $x_2 = 0$ (veja Figura 2.2-1). Os argumentos das funções Hankel, q_1 e q_2 , nas equações (2-144) a (2-146) são definidos como:

$$q_1 = k_\beta |\vec{x}^r - \vec{x}^s| \quad (2-148a)$$

$$q_2 = k_\beta |\vec{x}^r - \vec{x}_*^s| \quad (2-148b)$$

O último índice k em G_{ik} e H_{ijk} denota a direção em que a fonte é aplicada. Estas funções analíticas de Green são calculadas através de um programa de computador que foi desenvolvido com base nas fórmulas e nas aproximações polinomiais para as funções de Bessel e de Hankel, apresentadas por Abramowitz e Stegun (1972). O algoritmo de integração discreta sobre o número de onda, baseado no procedimento proposto por Bouchon e Aki, foi estudado a partir de um grande número de comparações dos resultados obtidos com aqueles calculados analiticamente por meio das equações (2-144) a (2-146), correspondentes as funções de Green associadas ao cisalhamento anti-plano em um semi-espaco visco-elástico. O número de termos, N , que deve ser incluído nas séries discretas sobre o número de onda, tem de ser definido, por meio de testes de convergência dos resultados para uma dada distância de espaçamento entre as forças fictícias, L . A distância horizontal de separação entre as forças, L , deve ser selecionada suficientemente grande em comparação com as distâncias, entre a fonte e os pontos de observação que estão

sendo consideradas na análise, com o objetivo de reduzir na resposta o efeito das forças fictícias adjacentes. Outro fator que deve ser levado em conta na definição dos parâmetros N e L é a quantidade de amortecimento do material considerado no meio. A título de ilustração, com base na investigação realizada, para semi-espacos uniformes visco-elásticos com coeficientes de amortecimento maiores do que 0.5%, é necessário usar $N = 2000$ e $L/d = 1000$ (onde d é a distância entre a fonte e o ponto de observação) para se obter erros menores do que 0.2%, tanto na parte real quanto na parte imaginária das funções de Green. Para modelos de sólidos, nos quais são atribuídos valores de coeficiente de amortecimento menores do que 0.5%, torna-se necessário aumentar consideravelmente o número de termos N bem como a distância horizontal de espaçamento entre as forças L . Por exemplo, para se manter o mesmo nível de precisão (menor do que 0.2%) para um meio com coeficientes de amortecimento iguais a $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.1\%$, é necessário considerar $N = 10000$ e $L/d = 5000$.

O procedimento de integração discreta sobre o número de ondas não se mostrou muito eficiente, principalmente, para os cálculos realizados no ambiente de micro-computadores. Tal fato se deve principalmente a dois fatores: (i) o grande número requerido de determinações das funções complexas do integrando, e (ii) a versão adaptativa deste método que foi desenvolvida, na qual o intervalo de integração é dividido em subintervalos desiguais com maior concentração de ordenadas nas regiões onde $F(k, z, \dots, \omega)$ apresenta grande variações, não acarretou uma redução significativa do número total requerido de avaliações das funções do integrando.

O algoritmo adaptativo de integração numérica baseado no método de Filon, se mostrou muito mais eficiente do que a versão que utiliza o procedimento de integração discreta sobre o número de onda. Para valores suficientemente grandes de k e quando a fonte e o ponto de observação estão localizados em profundidades

diferentes, as funções complexas $F(k, z, \dots, \omega)$ são bem comportadas e tornam-se negligíveis devido ao seu decaimento exponencial. Portanto, as integrais infinitas sobre o número de onda, representadas pela equação (2-136) ou (2-137), podem ser substituídas por integrais dentro de limites finitos. Com base em um número extensivo de comparações e testes, o limite superior de integração k_{max} pode ser selecionado em função da distância vertical entre a fonte e o ponto de observação, da frequência e das velocidades das ondas de cisalhamento dos meios. O procedimento adaptativo de Filon envolve a subdivisão do intervalo inteiro $(0, k_{max})$ das integrais sobre o número de onda truncadas em k_{max} , em vários subintervalos diferentes (a, b) selecionados com base no conhecimento das características das funções complexas $F(k, z, \dots, \omega)$. Em cada um dos subintervalos, é aplicado o esquema de integração proposto por Filon, apresentado na Seção 2.4.2, com um número suficiente de painéis para se atingir um limite aceitável de precisão. Tal procedimento concentra automaticamente um grande número de ordenadas, nas regiões onde ocorrem as oscilações densas e os picos acentuados nas funções complexas $F(k, z, \dots, \omega)$, e um pequeno número de ordenadas, onde estas funções são bem comportadas. Este procedimento adaptativo requer um número total menor de determinações das funções complexas dos integrandos para que seja atingido um dado nível de precisão estipulado.

As Tabelas 2.4-1 e 2.4-2 listam as funções bidimensionais de Green calculadas para o caso particular de um semi-espaco uniforme visco-elástico caracterizado por um coeficiente de Poisson $\nu = 0.333$ e por coeficientes de amortecimento material $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$. A fonte está situada em um ponto com coordenadas $\vec{x}^s = (0, a)$ e os resultados são obtidos, para uma frequência adimensional $a_o = \omega a / \bar{\beta} = 1.0$, em quatro pontos de observação: $\vec{x}^r = (0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, 2a)$ e $(a, 2a)$. A Tabela 2.4-1 apresenta a comparação das funções de Green de deslocamento e de tensões para o problema de cisalhamento anti-plano obtidas numericamente por este estudo

com as funções correspondentes calculadas por meio de expressões analíticas. Os resultados numéricos foram obtidos com base na metodologia proposta de cálculo, utilizando-se na determinação das integrais sobre o número de onda, tanto o método da integração discreta do número de onda quanto o algoritmo adaptativo da quadratura de Filon. O número de ordenadas usado por cada um destes métodos de integração, para se obter os resultados apresentados nestas tabelas, foi estabelecido com o objetivo de se ter o mesmo nível de precisão em ambos os casos. Para se atingir erros menores do que 0.2%, no cálculo das funções de Green para o caso do cisalhamento anti-plano, foi necessário realizar 10000 determinações para cada função complexa $F(k, z, \dots, \omega)$ com o procedimento de integração discreta do número de onda e 2000 determinações com o algoritmo adaptativo da quadratura de Filon. Estes resultados demonstram a eficiência do algoritmo adaptativo da quadratura de Filon comparada com o procedimento de integração discreta do número de onda.

A Tabela 2.4-2 mostra as comparações entre as funções bidimensionais de Green de deslocamentos no do plano, para o caso de um semi-espço uniforme visco-elástico ($\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$), obtidas pelo presente estudo com os resultados correspondentes, determinados para o caso de um semi-espço uniforme perfeitamente elástico equivalente, apresentados por Nakai et. al.(1984) e Mita (1986). Tais comparações servem como testes adicionais metodologia geral e dos procedimentos numéricos apresentados neste capítulo.

	(x_1^r, x_2^r)	Solução Analítica		Presente Estudo			
		Real	Imag.	Número de Onda Discreta		Adaptativo de Filon	
				Real	Imag.	Real	Imag.
μG_{33}	(0, 0)	-0.0447	-0.3821	-0.0446	-0.3821	-0.0447	-0.3821
	(a, 0)	-0.1725	-0.2789	-0.1725	-0.2789	-0.1725	-0.2789
	(0, 2a)	-0.1162	-0.1261	-0.1161	-0.1261	-0.1162	-0.1261
	(a, 2a)	-0.1661	-0.0621	-0.1661	-0.0620	-0.1661	-0.0621
H_{133}	(a, 0)	-0.1657	0.1923	-0.1657	0.1923	-0.1657	0.1923
	(a, 2a)	-0.0542	0.1179	-0.0542	0.1179	-0.0542	0.1179
H_{233}	(0, 2a)	-0.1141	0.1945	-0.1141	0.1945	-0.1141	0.1945
	(a, 2a)	0.0031	0.1615	0.0031	0.1615	0.0031	0.1615

Tabela 2.4-1 Comparações das funções de Green de deslocamento e de tensões para o problema do cisalhamento antiplano em um semi-espaço visco-elástico uniforme. O meio é caracterizado pelo coeficiente de Poisson $\nu = 0.333$ e pelos coeficientes de amortecimento do material $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$. A fonte se localiza no interior do semi-espaço pelas coordenadas $\vec{x}^s = (0, a)$ e os resultados são obtidos em quatro pontos de observações $\vec{x}^r = (0, 0), (a, 0), (0, 2a), (a, 2a)$, para uma frequência adimensional $a_0 = \omega a / \bar{\beta} = 1$, onde a é uma distância característica.

	(x_1^r, x_2^r)	Nakai et. al. (1984)		Mita (1986)		Presente Estudo			
		Real	Imag.	Real	Imag.	Número de Onda Discreto		Adaptativo de Filon	
						Real	Imag.	Real	Imag.
μG_{11}	(0, 0)	-0.0770	-0.1972	-0.0769	-0.1964	-0.0772	-0.1967	-0.0772	-0.1968
	(a, 0)	-0.0593	-0.1810	-0.0592	-0.1803	-0.0594	-0.1803	-0.0594	-0.1806
	(0, 2a)	-0.0749	-0.0888	-0.0748	-0.0888	-0.0748	-0.0886	-0.0749	-0.0886
	(a, 2a)	-0.0839	-0.0700	-0.0838	-0.0700	-0.0838	-0.0699	-0.0838	-0.0699
μG_{21}	(a, 0)	-0.0852	0.0495	-0.0853	0.0495	-0.0850	0.0497	-0.0850	0.0497
	(a, 2a)	0.0230	-0.0040	0.0231	-0.0040	0.0230	-0.0041	0.0230	-0.0041
μG_{12}	(a, 0)	-0.0658	0.1068	-0.0656	0.1068	-0.0648	0.1062	-0.0656	0.1066
	(a, 2a)	0.0325	-0.0685	0.0325	-0.0686	0.0322	-0.0684	0.0324	-0.0685
μG_{22}	(0, 0)	0.0761	-0.3065	0.0757	-0.3068	0.0744	-0.3053	0.0757	-0.3059
	(a, 0)	-0.1028	-0.1958	-0.1029	-0.1960	-0.1035	-0.1948	-0.1028	-0.1951
	(0, 2a)	-0.0580	-0.1989	-0.0583	-0.1990	-0.0591	-0.1978	-0.0580	-0.1984
	(0, 2a)	-0.1307	-0.1159	-0.1307	-0.1159	-0.1309	-0.1152	-0.1305	-0.1155

Tabela 2.4-2 Comparações das funções de Green de deslocamento, para o problema no plano, em um semi-espaço visco-elástico uniforme, com os resultados obtidos por Nakai et. al. (1984) e Mita (1986) para o caso correspondente de um semi-espaço perfeitamente elástico. O meio é caracterizado pelo coeficiente de Poisson $\nu = 0.333$ e pelos coeficientes de amortecimento do material $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$. A fonte se localiza no interior do semi-espaço pelas coordenadas $\vec{x}^s = (0, a)$ e os resultados são obtidos em quatro pontos de observação $\vec{x}^r = (0, 0), (a, 0), (0, 2a), (a, 2a)$, para uma frequência adimensional $a_0 = \omega a / \beta = 1$, onde a é uma distância característica.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DINÂMICA BIDIMENSIONAL DE UM SEMI-ESPAÇO VISCO-ELÁSTICO ESTRATIFICADO SOB A AÇÃO DE CARGAS MÓVEIS

Neste capítulo são estudadas, com base nas hipóteses do estado plano de deformações, as respostas dinâmicas de semi-espacos visco-elásticos, uniformes e estratificados, produzidas por uma linha ou por uma faixa de carga que se move horizontalmente, com velocidade constante, na superfície livre ou no interior destes semi-espacos. A formulação geral, apresentada no Capítulo 2, é aplicada na Seção 3.1 para o caso no qual a solicitação corresponde a uma linha de carga móvel. A formulação decorrente e os programas de computador associados são testados na Seção 3.2 por meio de comparações com soluções analíticas disponíveis para casos limites simples. Nas Seções 3.3 e 3.4 são apresentados estudos paramétricos detalhados das respostas de um semi-espaco visco-elástico uniforme e de um sistema estratificado composto por uma camada sobre o semi-espaco visco-elástico. Finalmente, na Seção 3.5 são apresentados alguns resultados típicos da resposta de um sistema estratificado, constituídos por várias camadas sobrepostas a um semi-espaco visco-elástico.

3.1. Formulação Geral

No capítulo anterior, foi apresentada uma representação integral da solução geral, para a resposta dinâmica de um semi-espaco visco-elástico estratificado sob a ação de forças de corpo arbitrarias. Será considerado agora o problema bidimensional

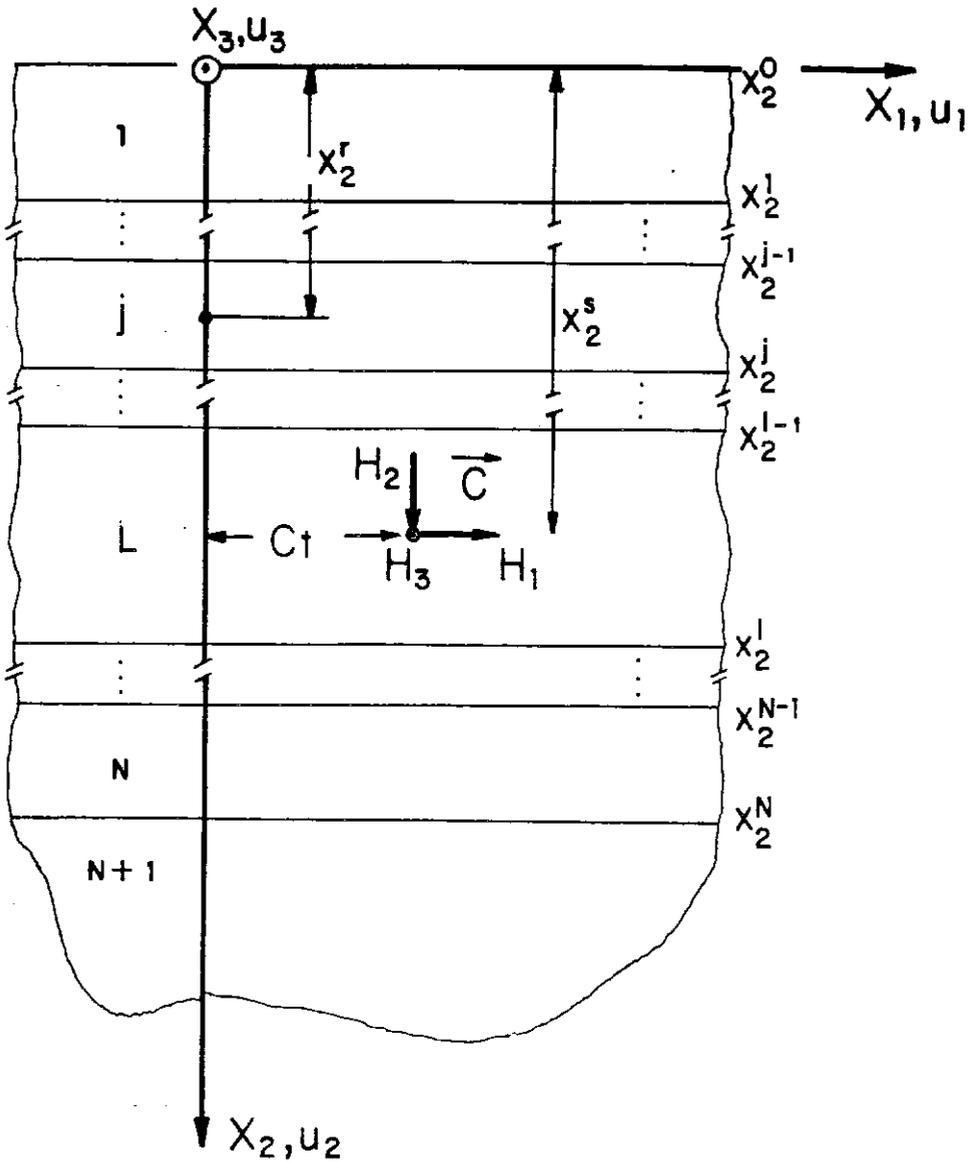


Figura 3.1-1 Sistema coordenado e notações. A carga bidimensional se localiza a uma profundidade $x_2 = x_2^s$, no interior da camada $j = l$, e se move na direção positiva do eixo x_1 com uma velocidade constante C .

no qual a excitação corresponde a uma linha de carga concentrada localizada a uma profundidade $x_2 = x_2^s$, no interior da camada $j=l$, que se move com velocidade constante C na direção positiva do eixo coordenado x_1 , é considerado neste capítulo. As componentes da carga, $H_i (i = 1, 2, 3)$, que correspondem a forças por unidade de comprimento, atuam segundo a direção positiva dos eixos coordenados $x_i (i = 1, 2, 3)$. A geometria do problema, as notações e o sistema Cartesiano de coordenadas adotados são mostrados nas Figuras 3.1-1 e 3.1-2a.

As forças de corpo por unidade de volume na camada l , associadas com este estado de carregamento, podem ser escritas como:

$$\chi_1^l = H_1 \delta(x_1 - Ct) \delta(x_2 - x_2^s) \quad (3-1a)$$

$$\chi_2^l = H_2 \delta(x_1 - Ct) \delta(x_2 - x_2^s) \quad (3-1b)$$

$$\chi_3^l = H_3 \delta(x_1 - Ct) \delta(x_2 - x_2^s) \quad . \quad (3-1c)$$

Aplicando-se a transformada dupla de Fourier, expressa pela equação (2-13) a estas forças de corpo e substituindo-se os resultados nas equações (2-26a,b,c), chega-se a:

$$F_1^l = -2\pi i H_1 \delta(kC - \omega) \delta(x_2 - x_2^s) \quad (3-2a)$$

$$F_2^l = 2\pi H_2 \delta(kC - \omega) \delta(x_2 - x_2^s) \quad (3-2b)$$

$$F_3^l = -2\pi i H_3 \delta(kC - \omega) \delta(x_2 - x_2^s) \quad . \quad (3-2c)$$

A solução geral no domínio transformado, apresentada na Seção 2.3, foi desenvolvida com base no sistema coordenado Cartesiano xyz mostrado na Figura 2.2-1(b). Como foi comentado na Seção 2.2.3, todos os resultados contidos na Seção 2.3, permanecem válidos para o problema bidimensional em estudo, com a mudança da coordenada vertical z pela coordenada vertical correspondente x_2 .

Substituindo-se as equações (3-2a,b,c) nas expressões (2-45a) a (2-45f) e, em seguida, modificando-se os termos associados com as ondas polarizadas no plano

vertical ($S_n^l(x_2), n = 1, \dots, 4$), através das transformações dadas pelas equações (2-68b) e (2-69b), obtêm-se as seguintes expressões para os termos de carga na camada que contém a fonte ($x_2^{l-1} \leq x_2 \leq x_2^l$):

$$S_1^l(x_2) = -\frac{\pi}{\kappa_l \mu_l} \delta(kC - \omega) H(x_2 - x_2^s) e^{\nu_l(x_2^s - x_2^{l-1})} \left[\psi_l \left(i \frac{H_1}{\nu_l} + \frac{H_2}{\nu_l'} \right) + \frac{1}{k + \nu_l'} \left(iH_1 + \frac{k}{\nu_l'} H_2 \right) E(x_2^{l-1} - x_2^s) \right] \quad (3-3a)$$

$$S_2^l(x_2) = -\frac{\pi}{\kappa_l \mu_l} \delta(kC - \omega) H(x_2 - x_2^s) e^{\nu_l(x_2^s - x_2^{l-1})} \left[\psi_l \left(i \frac{H_1}{\nu_l} (\kappa_l - 1) - \frac{H_2}{\nu_l'} \right) - \left(iH_1 + \frac{k}{\nu_l'} H_2 \right) \left(\frac{1}{k + \nu_l'} + \frac{\nu_l' \kappa_l \beta_l^2}{\omega^2} \right) E(x_2^{l-1} - x_2^s) \right] \quad (3-3b)$$

$$S_3^l(x_2) = -\frac{\pi}{\kappa_l \mu_l} \delta(kC - \omega) H(x_2^s - x_2) e^{\nu_l(x_2^l - x_2^s)} \left[\psi_l \left(i \frac{H_1}{\nu_l} - \frac{H_2}{\nu_l'} \right) + \frac{1}{k + \nu_l'} \left(iH_1 - \frac{k}{\nu_l'} H_2 \right) E(x_2^s - x_2^l) \right] \quad (3-3c)$$

$$S_4^l(x_2) = -\frac{\pi}{\kappa_l \mu_l} \delta(kC - \omega) H(x_2^s - x_2) e^{\nu_l(x_2^l - x_2^s)} \left[\psi_l \left(i \frac{H_1}{\nu_l} (\kappa_l - 1) + \frac{H_2}{\nu_l'} \right) + \left(\frac{k}{\nu_l'} H_2 - iH_1 \right) \left(\frac{1}{k + \nu_l'} + \frac{\nu_l' \kappa_l \beta_l^2}{\omega^2} \right) E(x_2^s - x_2^l) \right] \quad (3-3d)$$

$$S_5^l(x_2) = -\frac{i\pi H_3}{\mu_l \nu_l' k} \delta(kC - \omega) H(x_2 - x_2^s) e^{\nu_l'(x_2^s - x_2^{l-1})} \quad (3-3e)$$

$$S_6^l(x_2) = -\frac{i\pi H_3}{\mu_l \nu_l' k} \delta(kC - \omega) H(x_2^s - x_2) e^{\nu_l'(x_2^l - x_2^s)} \quad (3-3f)$$

onde $E(x)$ é definido pela equação (2-80), $H(x)$ denota a função degrau de Heaviside e

$$\gamma_l = \frac{\beta_l}{\alpha_l} \quad (3-4a)$$

$$\kappa_l = \frac{(1 + \gamma_l^2)}{(1 - \gamma_l^2)} \quad (3-4b)$$

$$\psi_l = \frac{k^2(\gamma_l^2 + 1) - \gamma_l^2 \omega^2 / \beta_l^2}{k^2 + \nu_l \nu_l'} \quad (3-4c)$$

Os termos de carga modificados, expressos pelas equações (3-3a) a (3-3f), correspondem aos termos de carga que devem ser aplicados nas equações (2-86a,b).

Uma vez determinadas as funções U_p^j e Σ_{pq}^j pelo procedimento descrito na Seção 2.3, o campo de deslocamentos e o campo de tensões correspondente no domínio transformado em um ponto de observação, situado na camada j -ésima a uma profundidade definida pela coordenada $x_2 = x_2^r$, podem ser obtidos usando-se as equações (2-24a,b,c) e (2-27a) a (2-27f).

Deve-se salientar que todas as componentes dos vetores $\{S_d^l(x_2)\}$ e $\{S_u^l(x_2)\}$ expressas pelas equações (3-3a) a (3-3f) e, conseqüentemente, o campo de deslocamentos e o de tensões no domínio transformado do tempo e do espaço $(\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}; i, j = 1, \dots, 3)$, têm como fator comum a função delta de Dirac $\delta(kC - \omega)$. Esta peculiaridade implica que as integrais sobre o domínio do número de onda k , que aparece na transformada inversa de Fourier (2-15), podem ser determinadas analiticamente usando-se as propriedades da função delta de Dirac. Finalmente, a resposta no domínio do tempo é obtida através da síntese de Fourier das componentes no domínio da freqüência, por meio de um algoritmo de Transformadas Discretas Rápidas de Fourier (FFT).

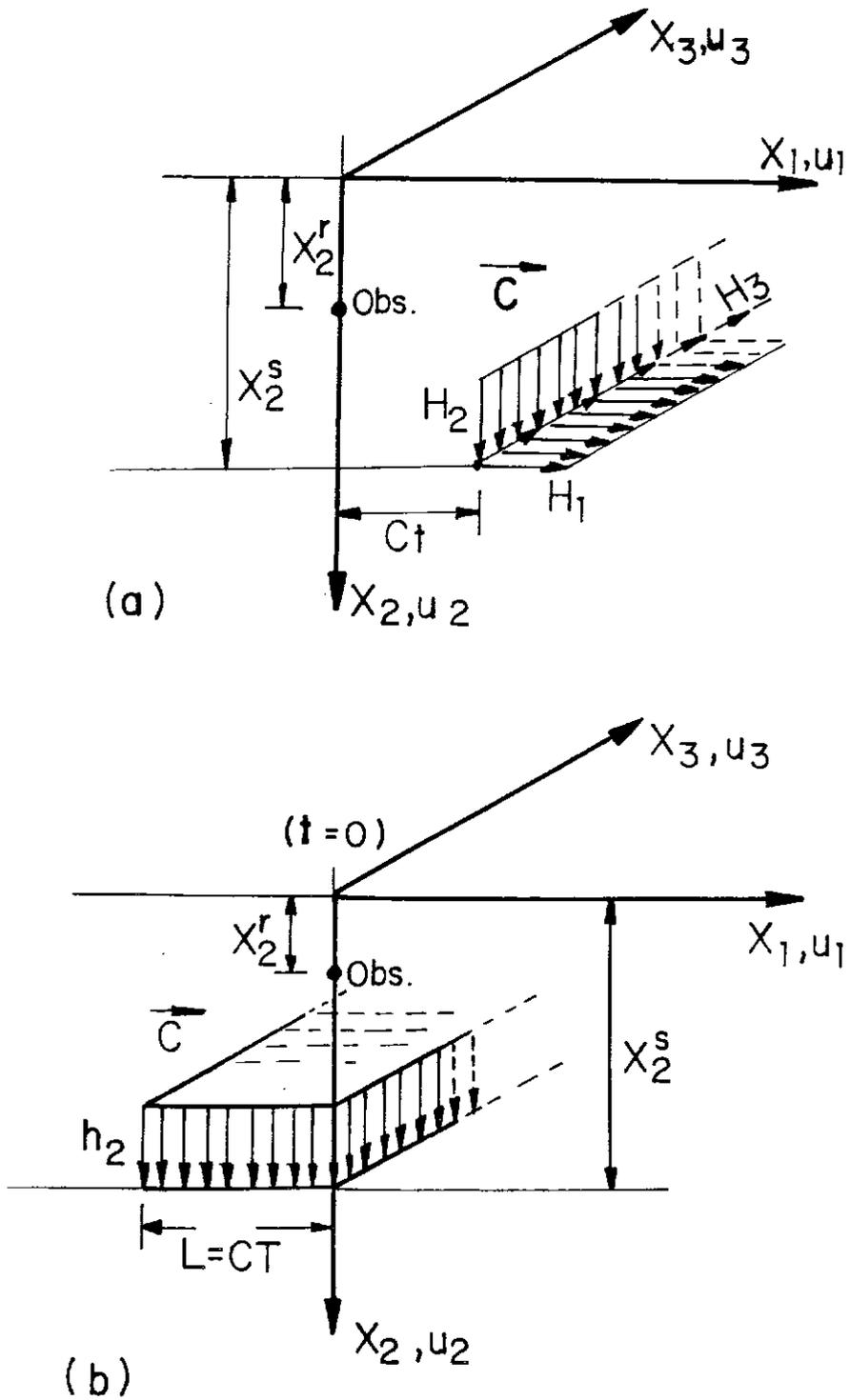


Figura 3.1-2 Representação esquemática e notações para as cargas móveis bidimensionais. (a) Linhas de cargas concentradas móveis. (b) Faixa de carga móvel.

3.2. Validação por Comparação de Resultados Numéricos com Analíticos

O procedimento apresentado neste trabalho para calcular a resposta de um semi-espaço visco-elástico estratificado sob a ação de uma linha de carga móvel, com base nas hipóteses do estado plano de deformações, é validado por comparação com soluções analíticas, para o caso particular de um semi-espaço perfeitamente elástico uniforme. Cole e Huth (1958) apresentaram soluções analíticas bidimensionais, para o problema com resposta no plano, correspondente à ação de uma linha de carga vertical, que se move na superfície livre de um semi-espaço elástico uniforme com velocidade subsônica, transônica e supersônica. Niwa e Kobayashi (1966) apresentaram as soluções no plano para todas as velocidades de cargas, considerando também o caso de uma linha de carga horizontal, que se move na superfície de um semi-espaço uniforme. As soluções analíticas no plano para uma linha de carga oblíqua, que se move na superfície livre de um semi-espaço elástico uniforme, foram apresentadas por Eringen e Suhubi (1975). Um resumo dos resultados obtidos nestes estudos é apresentado no Apêndice A. O caso particular bidimensional correspondente à resposta fora do plano produzida por uma linha de carga horizontal de cisalhamento, que se move na superfície de um semi-espaço elástico uniforme, não foi encontrado na literatura. Com a intenção de se completar a lacuna existente, a solução analítica para este caso é desenvolvida no Apêndice B.

Inicialmente, foram calculadas as componentes das velocidades e das tensões no interior de um semi-espaço elástico uniforme, produzidas por uma linha de carga aplicada segundo cada uma das três direções x_i ($i = 1, 2, 3$), que se move ao longo da direção positiva do eixo x_1 na superfície de um semi-espaço com velocidade constante, através do procedimento descrito na Seção 3.1. Como primeiro teste, os resultados assim obtidos foram comparados com os resultados

analíticos correspondentes determinados a partir das expressões apresentadas nos Apêndices A e B. As comparações foram realizadas para o caso de um semi-espaço elástico uniforme caracterizado pelo coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$, velocidade da onda de cisalhamento $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, velocidade da onda de compressão $\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$ e densidade de massa $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$. Foi pressuposto que as linhas de cargas concentradas se encontravam em movimento uniforme na direção positiva do eixo x_1 com as seguintes velocidades, descritas em números Mach: no caso subsônico com velocidades correspondentes a $M_\beta = 0.5$ e $M_\alpha = 0.25$; e no caso supersônico com $M_\beta = 2.2$ e $M_\alpha = 1.1$. O número Mach relativo às ondas P e S é definido por:

$$M_\alpha = \frac{C}{\bar{\alpha}} \quad (3-5a)$$

$$M_\beta = \frac{C}{\bar{\beta}} \quad (3-5b)$$

O ponto de observação se localiza no interior do semi-espaço pelas coordenadas $(x_1^r, x_2^r) = (0, 10 \text{ m})$. Os resultados numéricos no domínio do tempo foram calculados através da síntese de Fourier de 4096 valores de cada componente no domínio da frequência. A frequência de corte considerada foi de 200 Hertz. Os resultados numéricos obtidos no domínio do tempo foram transformados em valores adimensionais, através de normalizações apropriadas.

As componentes adimensionais da velocidade \dot{u}_{ij}^* , para o caso subsônico ($M_\beta = 0.5, M_\alpha = 0.25$), determinadas através dos procedimentos analítico e numérico, são representadas graficamente em função do tempo adimensional t^* e comparadas na Figura 3.2-1. O termo \dot{u}_{ij} representa a componente da velocidade na direção x_i devida à ação de uma linha de carga que atua na direção x_j e se move com velocidade constante segundo a direção positiva do eixo x_1 . Por conveniência,

são usadas as seguintes variáveis normalizadas:

$$\dot{u}_{ij}^* = \mu \frac{x_2^r}{H_j C} \dot{u}_{ij} \quad (3-6a)$$

$$t^* = \frac{C}{x_2^r} t \quad (3-6b)$$

onde a convenção de somatório sobre j não se aplica. As componentes adimensionais das tensões σ_{ijk}^* , obtidas pelos procedimentos analítico e numérico, para o mesmo caso subsônico, são mostradas na Figura 3.2-2, plotadas contra t^* . O último índice ($k = 1, 2, 3$) em σ_{ijk} representa a direção na qual a força é aplicada. A normalização utilizada é:

$$\sigma_{ijk}^* = \frac{x_2^r}{H_k} \sigma_{ijk} \quad (3-7)$$

onde a convenção de somatório sobre k não se aplica. Como pode ser observado nas Figuras 3.2-1 e 3.2-2, os resultados obtidos pelo procedimento numérico (linha contínua) concordam perfeitamente com aqueles calculados por meio das expressões analíticas (círculos pequenos). Os erros dos resultados numéricos são sempre inferiores a 0.2%.

No caso em que a velocidade da linha de carga concentrada é supersônica, as componentes das tensões e das velocidades se comportam como funções delta. Com o objetivo de testar as soluções numéricas, torna-se necessário neste caso, calcular as componentes dos deslocamentos ou usar uma carga na qual a dependência com o tempo é uma função degrau. Os componentes adimensionais do deslocamento u_{ij}^* , para uma linha de carga concentrada, no caso supersônico ($M_\beta = 2.2$, $M_\alpha = 1.1$), determinado através dos procedimentos analítico e numérico, são comparados na Figura 3.2-3. É usada a seguinte normalização:

$$u_{ij}^* = \frac{\mu}{H_j} u_{ij} \quad (3-8)$$

onde a convenção de somatório sobre j não se aplica. Para este caso, mais uma vez, foi obtida uma concordância excelente dos resultados.

O procedimento numérico proposto foi também testado por meio da comparação dos resultados analíticos e numéricos para um degrau de carga que se move com velocidade supersônica ($M_\beta = 2.2$, $M_\alpha = 1.1$), na superfície de um semi-espaço elástico ($\nu = 1/3$, $\bar{\alpha}/\bar{\beta} = 2$). Estas comparações resultaram também em excelente concordância entre os dois conjuntos de resultados.

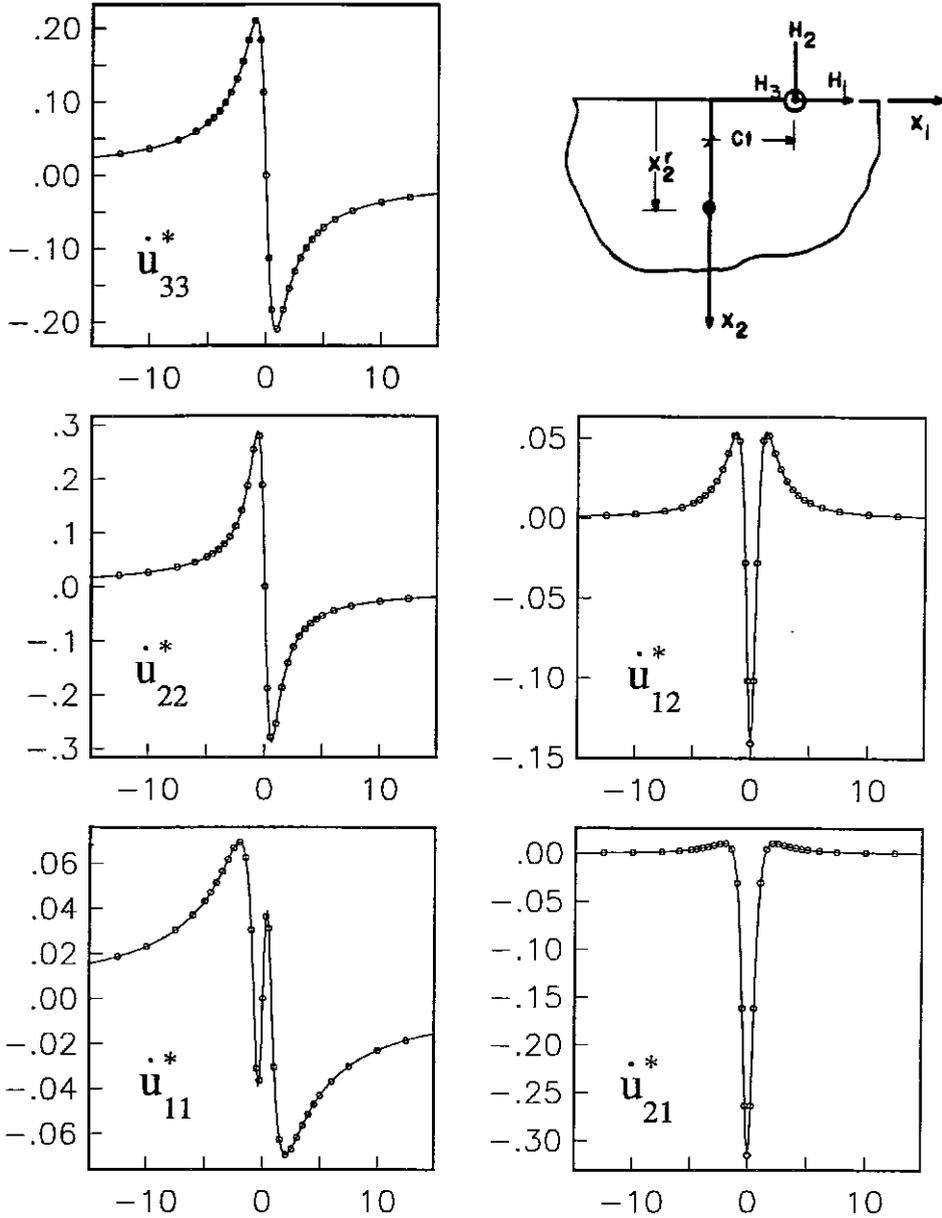


Figura 3.2-1 Componentes adimensionais das velocidades \dot{u}_{ij}^* (ordenadas) representadas graficamente contra a variável adimensional de tempo t^* (abscissas), para linhas de cargas que se movem com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.5$) na superfície de um semi-espaco elástico uniforme ($\nu = 1/3$, $\bar{\alpha}/\bar{\beta} = 2$). As linhas contínuas e os círculos pequenos representam, respectivamente, os resultados numéricos e os analíticos. O índice j em \dot{u}_{ij}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

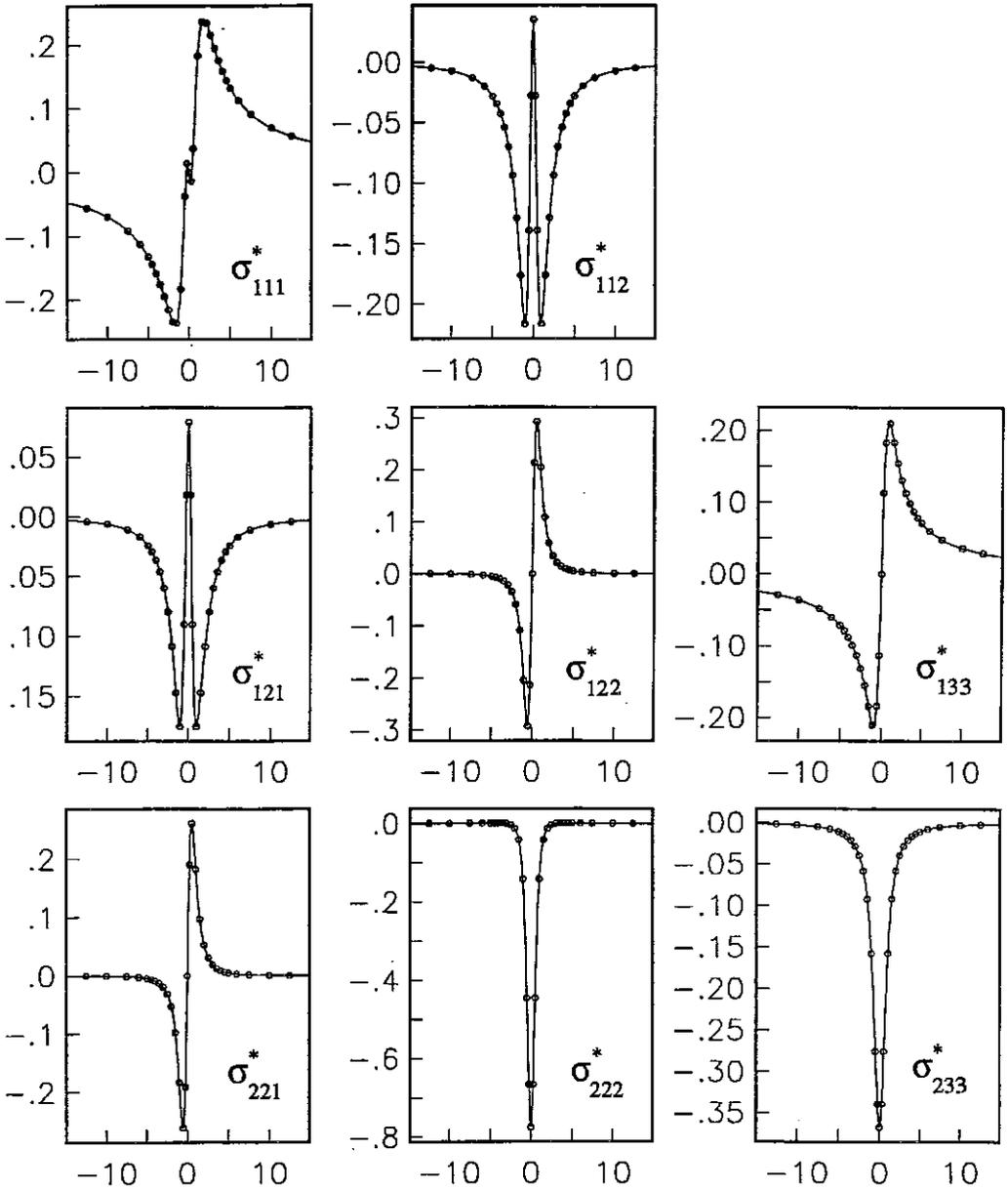


Figura 3.2-2 Componentes adimensionais das tensões σ_{ijk}^* (ordenadas) representadas graficamente contra a variável adimensional de tempo t^* (abscissas), para linhas de cargas que se movem com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.5$) na superfície de um semi-espaço elástico uniforme ($\nu = 1/3$, $\bar{\alpha}/\bar{\beta} = 2$). As linhas contínuas e os círculos pequenos representam, respectivamente, os resultados numéricos e os analíticos. O índice k em σ_{ijk}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

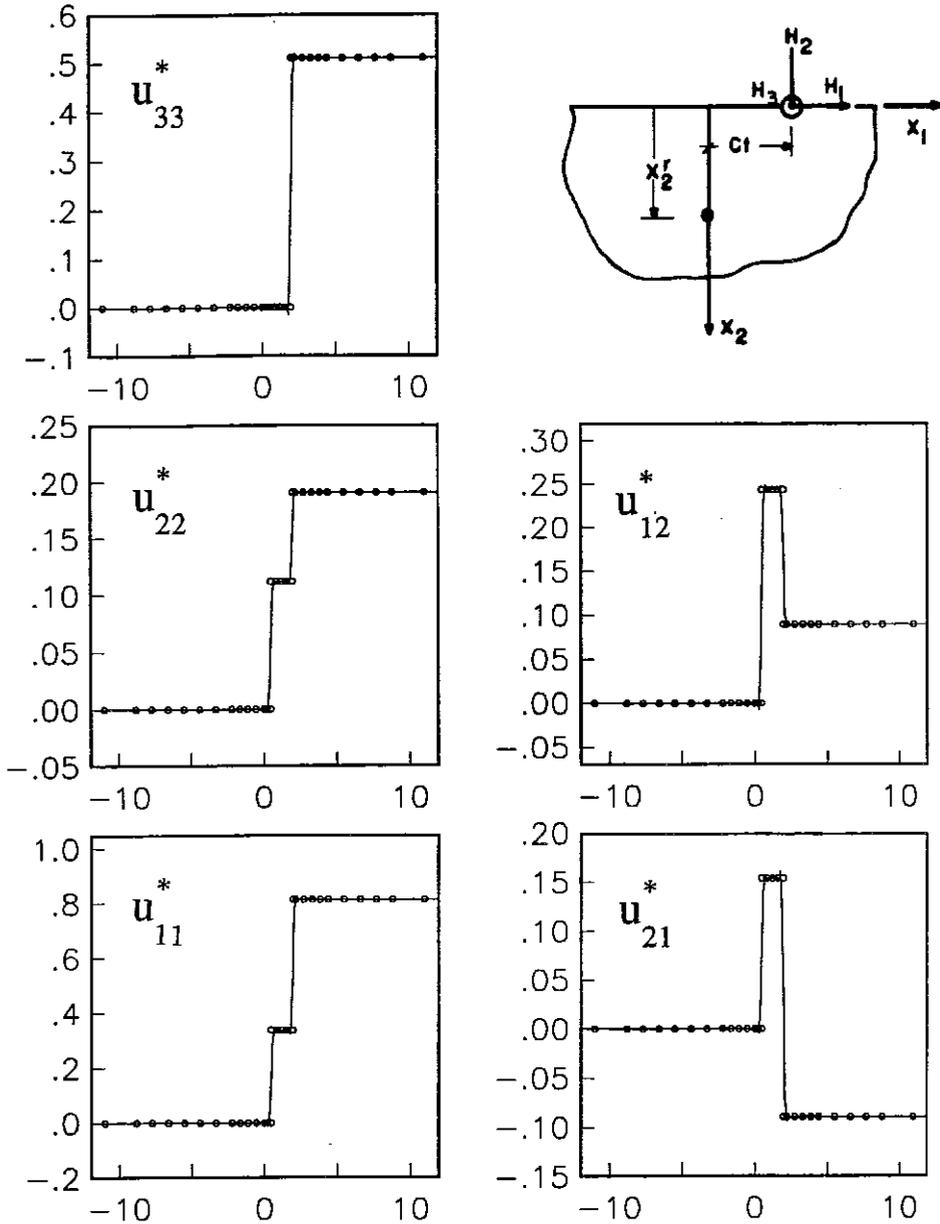


Figura 3.2-3 Componentes adimensionais dos deslocamentos u_{ij}^* (ordenadas) representadas graficamente contra a variável adimensional de tempo t^* (abscissas), para linhas de cargas que se movem com velocidade supersônica constante ($M_\beta = 2.2$) na superfície de um semi-espaco elástico uniforme ($\nu = 1/3$, $\bar{\alpha}/\bar{\beta} = 2$). As linhas contínuas e os círculos pequenos representam, respectivamente, os resultados numéricos e os analíticos. O índice j em u_{ij}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

3.3. Estudo Paramétrico: Semi-espço Visco-elástico Uniforme

Um estudo paramétrico da resposta dinâmica de um semi-espço visco-elástico uniforme sob a ação de uma linha de carga, localizada no seu interior e que se move com velocidade constante é apresentado nesta seção. Em particular, são discutidos os efeitos na resposta da velocidade da carga, do amortecimento do material e da profundidade dos pontos de observação. Pode-se observar nas expressões apresentadas nos Apêndices A e B, que os campos de velocidades e de tensões associados à ação de uma linha de carga concentrada, que se move com velocidade supersônica, exibem singularidades da função delta. Com o objetivo de se apresentar resultados numéricos sem singularidades, torna-se conveniente estudar o caso de uma faixa de carga que se move com velocidade constante ao invés do caso correspondente a uma linha de carga concentrada móvel. Os campos de velocidades e de tensões associados a uma faixa de carga móvel podem ser obtidos por meio da integração dos campos correspondentes determinados para uma linha de carga concentrada. Uma representação esquemática de uma faixa de carga que se move com velocidade constante C na direção positiva do eixo x_1 é mostrada na Figura 3.1-2b, para o caso particular em que a carga está aplicada na direção vertical. No caso geral, as componentes da carga h_i ($i = 1, 2, 3$) representam forças por unidade de área que são aplicadas segundo as direções positivas dos eixos x_i ($i = 1, 2, 3$); T é a duração e $L = CT$ é a largura da faixa de carga.

De acordo com o procedimento desenvolvido na formulação geral, apresentada na Seção 3.1, as forças de corpo por unidade de volume, para a camada l , associadas ao estado de carregamento correspondente a uma faixa de carga móvel descrita anteriormente, podem ser expressas por:

$$\chi_1^l = h_1 [H(Ct - x_1) - H(Ct - x_1 - L)] \delta(x_2 - x_2^s) \quad (3-9a)$$

$$\chi_2^l = h_2 [H(Ct - x_1) - H(Ct - x_1 - L)] \delta(x_2 - x_2^s) \quad (3-9b)$$

$$\chi_3^I = h_3 [H(Ct - x_1) - H(Ct - x_1 - L)] \delta(x_2 - x_2^s) \quad (3-9c)$$

onde $H(x)$ representa a função degrau de Heaviside.

A comparação entre as equações (3-1a,b,c) e (3-9a,b,c) implica que uma componente dos campos de velocidades ou de tensões para uma faixa de carga móvel unitária, representado genericamente por $R_{faixa}(x_1, x_2, t)$, pode ser obtida a partir da resposta correspondente $R_\delta(x_1 - Ct, x_2)$ para uma linha de carga móvel unitária, através da seguinte relação:

$$R_{faixa}(x_1^r, x_2^r, t) = \int_0^L R_\delta(x_1^r - Ct + x', x_2^r) dx' \quad . \quad (3-10)$$

Todos os resultados, mostrados nesta seção, foram obtidos para o caso de um semi-espaco visco-elástico uniforme caracterizado, no domínio da frequência, pelas constantes de Lamé complexas

$$\mu = \bar{\mu}(1 + 2i\xi_\beta) \quad (3-11a)$$

$$\lambda + 2\mu = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})(1 + 2i\xi_\alpha) \quad (3-11b)$$

e pelas velocidades complexas correspondentes das ondas de cisalhamento e compressão

$$\beta = \bar{\beta}(1 + 2i\xi_\beta)^{1/2} \quad (3-12a)$$

$$\alpha = \bar{\alpha}(1 + 2i\xi_\alpha)^{1/2} \quad (3-12b)$$

onde $\bar{\beta} = [\bar{\mu}/\rho]^{1/2}$ e $\bar{\alpha} = [(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})/\rho]^{1/2}$. No caso específico, valores de $\xi_\beta = \xi_\alpha = 0.01$, $\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, e $\bar{\alpha}/\bar{\beta} = 2$, que corresponde a um coeficiente Poisson real de $\nu = 1/3$, foram usados nos cálculos. Foram consideradas faixas de cargas com duração de $T = 0.2$ segundos que se movem horizontalmente, segundo a direção positiva do eixo x_1 no interior do semi-espaco, com velocidades constantes subsônicas, transônicas e supersônicas.

Os resultados numéricos foram determinados usando-se os procedimentos descritos na Seção 3.1 em conjunto com o esquema de superposição definido pela equação (3-10). A resposta no domínio do tempo foi calculada através de uma síntese de Fourier de um total de 4096 valores de cada componente no domínio da frequência. Um estudo de sensibilidade mostrou que uma frequência de corte de 200 Hertz é apropriada para faixa de parâmetros considerada na análise. Os resultados são descritos em termos dos números Mach $M_\alpha = C/\bar{\alpha}$ e $M_\beta = C/\bar{\beta}$, que exprimem a velocidade da carga.

As componentes adimensionais das velocidades e das tensões, representadas por \dot{u}_{ij}^* e σ_{ijk}^* , são calculadas em função da coordenada de tempo t . O tempo $t = 0$ corresponde ao instante em que a frente da faixa de carga passa exatamente através da coordenada $x_1 = 0$ (Figura 3.3-1). A componente adimensional da velocidade \dot{u}_{ij}^* é definida por:

$$\dot{u}_{ij}^* = \frac{\bar{\mu}}{h_j \bar{\beta}} \dot{u}_{ij} \quad (3-13)$$

onde a convenção de somatório sobre j não se aplica. O termo \dot{u}_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) representa a velocidade na direção x_i devida a uma faixa de carga h_j (força por unidade de área) aplicada na direção x_j , que se move com velocidade constante ao longo da direção positiva do eixo x_1 . Na componente adimensional do campo de tensões σ_{ijk}^* ($i, j, k = 1, 2, 3$), o último índice ($k = 1, 2, 3$) representa a direção na qual a faixa de carga h_k é aplicada. A seguinte normalização é usada:

$$\sigma_{ijk}^* = \frac{\sigma_{ijk}}{h_k} \quad (3-14)$$

onde a convenção de somatório sobre k não se aplica.

Na análise dos resultados deve-se ter em mente que as equações, que governam os campos de resposta, dependem diretamente dos valores dos números Mach. O caso subsônico é definido por $M_\alpha < M_\beta < 1$, o transônico por $M_\alpha < 1 < M_\beta$ e, finalmente, o caso supersônico por $1 < M_\alpha < M_\beta$. As equações que governam os

campos de resposta, obtidas com base na representação dos deslocamentos através dos potenciais de Lamé, são ambas elíticas no caso subsônico, uma elítica e a outra hiperbólica no caso transônico e no caso supersônico ambas são hiperbólicas (Eringen and Suhubi, 1975). Outro fato importante que deve ser evidenciado, ocorre quando a carga se propaga com uma velocidade igual à da onda de superfície de Rayleigh. Esta velocidade esta associada a um pólo situado no eixo real k do plano complexo k , e conseqüentemente a solução, neste caso, é singular ($R_1 = 0$ na Seção A-1, Apêndice A). Para um semi-espaço elástico uniforme definido por um coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$ ($\alpha/\beta = 2.0$, $M_\beta/M_\alpha = 2.0$), o número Mach $M_\beta \cong 0.932$ corresponde a uma carga que se move com a velocidade da onda de superfície de Rayleigh (Achenbach, 1973). No caso de um semi-espaço visco-elástico uniforme, os pontos de ramificação (*branch points*) associados com as velocidades das ondas P e S, bem como o pólo correspondente à velocidade da onda de superfície de Rayleigh, são deslocados do eixo real k . Mesmo neste caso, pode-se esperar que ocorra algum comportamento interessante ou transição na resposta, quando a velocidade da carga se situa na vizinhança destas velocidades características ($M_\beta \cong 0.932$; $M_\beta \cong 1.0$; $M_\beta \cong 2.0$). Todos os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos usando-se um computador do tipo compatível com o IBM PC/AT.

3.3.1. Efeitos da Velocidade da Carga, da Profundidade de Observação e do Amortecimento, nos Valores Extremos das Respostas das Componentes do Campo de Velocidades

Os efeitos da velocidade da carga, do amortecimento do material e da profundidade dos pontos de observação, nos valores extremos das respostas das componentes do campo de velocidades, para uma faixa de carga com duração de $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante na superfície de um semi-espaço visco-

elástico uniforme ($\nu = 1/3$, $\bar{\alpha}/\bar{\beta} = 2$), são ilustrados nas Figuras 3.3.1-1 e 3.3.1-2. Nestas figuras são mostradas, em escala logarítmica, as variações dos valores máximos das respostas das componentes adimensionais das velocidades, \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* , com a velocidade da carga em termos do número Mach $M_\beta = C/\bar{\beta}$. Os valores extremos da resposta de \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* foram calculados para 75 valores diferentes de velocidade da carga C , no intervalo compreendido entre $C = 200$ m/s a $C = 2200$ m/s. A parte real das velocidades das ondas P e S foram selecionadas, respectivamente, iguais a $\bar{\alpha} = 2000$ m/s e $\bar{\beta} = 1000$ m/s.

Os resultados apresentados na Figura 3.3.1-1 foram obtidos em um ponto de observação localizado pelas coordenadas $(x_1^r, x_2^r) = (0, 10 \text{ m})$. Dois conjuntos de coeficientes de amortecimento do material foram utilizados. O primeiro conjunto considerado, representado por linhas contínuas, corresponde a $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$ enquanto que o segundo conjunto, representado por linhas tracejadas, corresponde a $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$.

O valor extremo da resposta da componente da velocidade \dot{u}_{11}^* cresce continuamente com a velocidade da carga, atingindo um valor máximo em um número Mach correspondente à velocidade da onda de superfície de Rayleigh ($M_\beta \cong 0.93$). Depois deste ponto, o valor extremo da resposta de \dot{u}_{11}^* cai até atingir um valor mínimo relativo para uma velocidade da carga associada à velocidade da onda de cisalhamento ($M_\beta \cong 1.0$). No domínio transônico, o valor extremo da resposta de \dot{u}_{11}^* cresce com a velocidade da carga, e, finalmente, no domínio supersônico decresce assintoticamente à medida que a velocidade da carga aumenta. O valor extremo da resposta, da componente da velocidade \dot{u}_{22}^* apresenta um comportamento semelhante, sendo que o valor máximo ocorre em um número Mach $M_\beta \cong 0.93$. Para \dot{u}_{22}^* , o valor mínimo relativo ocorre para uma velocidade da carga associada à velocidade da onda de compressão ($M_\beta \cong 2.0$). Os resultados na Figura 3.3.1-1 mostram que os efeitos correspondentes à velocidade

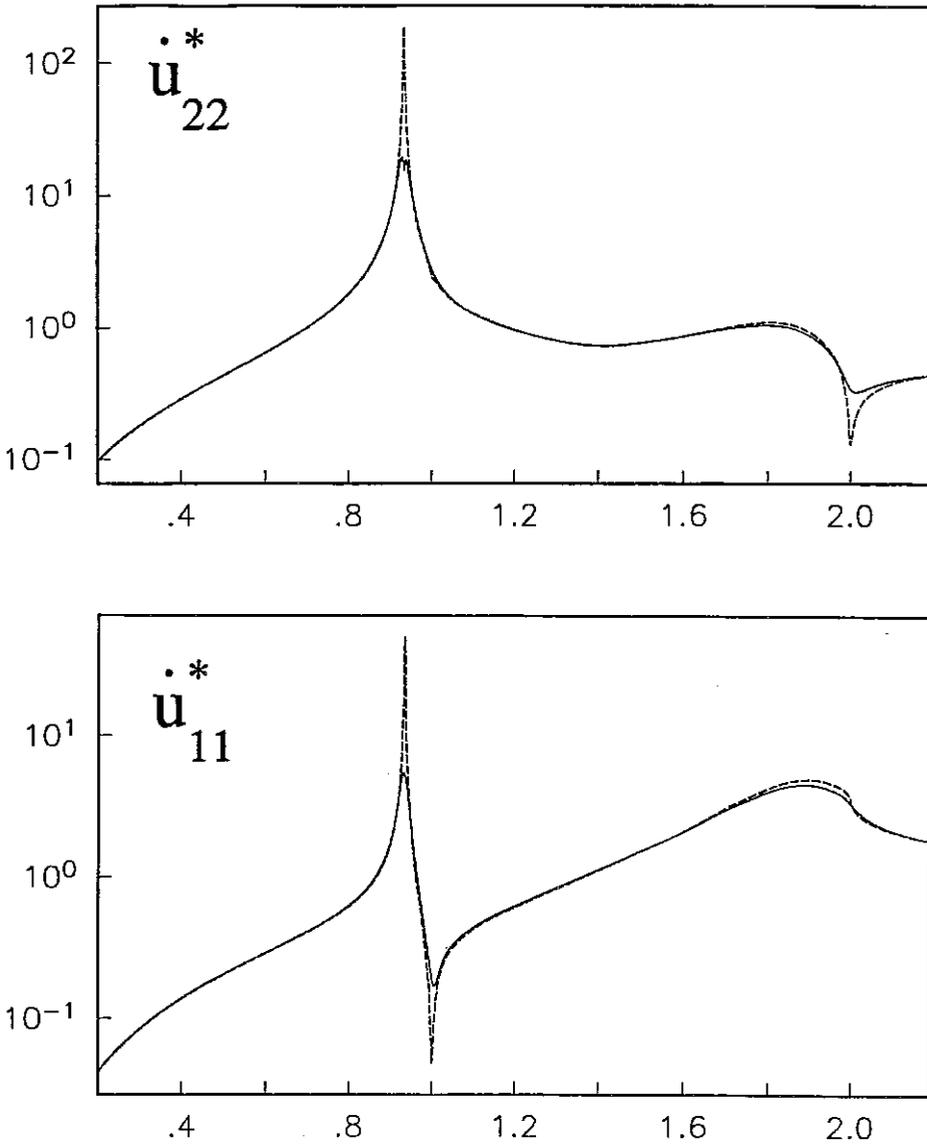
da carga são extremamente importantes. Uma variação de M_β de 0.2 a 0.93 é acompanhada por uma mudança na amplitude máxima da resposta por um fator de 10^2 a 10^3 , dependendo do amortecimento considerado.

Os efeitos do amortecimento do material nos valores extremos das respostas das componentes das velocidades, \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* , são também mostrados na Figura 3.3.1-1. São considerados dois semi-espacos visco-elásticos uniformes com as mesmas propriedades à exceção da quantidade de amortecimento material. O primeiro é caracterizado por coeficientes de amortecimento do material iguais a $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$ e o segundo por $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$. Como pode ser observado na Figura 3.3.1-1, o comportamento dos valores extremos das respostas de \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* é essencialmente o mesmo para quase todas as velocidades da carga, com exceção dos valores da velocidade da carga que se encontram na vizinhança dos números Mach associados às velocidades das ondas de Rayleigh, de compressão e de cisalhamento ($M_\beta \cong 0.93$, $M_\beta \cong 1.0$, $M_\beta \cong 2.0$). O efeito do amortecimento é maior nas proximidades de $M_\beta = 0.93$ (velocidade da onda de Rayleigh), onde o máximo dos valores extremos da resposta parece ser inversamente proporcional a $\xi_\alpha = \xi_\beta$. Na vizinhança de $M_\beta = 1.0$ e $M_\beta = 2.0$, uma redução no amortecimento implica em uma redução na resposta.

A Figura 3.3.1-2 mostra o efeito da profundidade do ponto de observação nos valores extremos das respostas das componentes da velocidade, \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* , para velocidades da carga com números Mach que se situam no intervalo compreendido entre $M_\beta = 0.2$ a $M_\beta = 2.2$. O semi-espaco visco-elástico uniforme tem coeficientes de amortecimento do material $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$. Os resultados obtidos em um ponto de observação localizado em $\vec{x}_1^r = (0, 2.5 m)$ são representados graficamente com linhas contínuas, enquanto que os resultados obtidos em um ponto de observação $\vec{x}_2^r = (0, 10 m)$ são representados por linhas tracejadas.

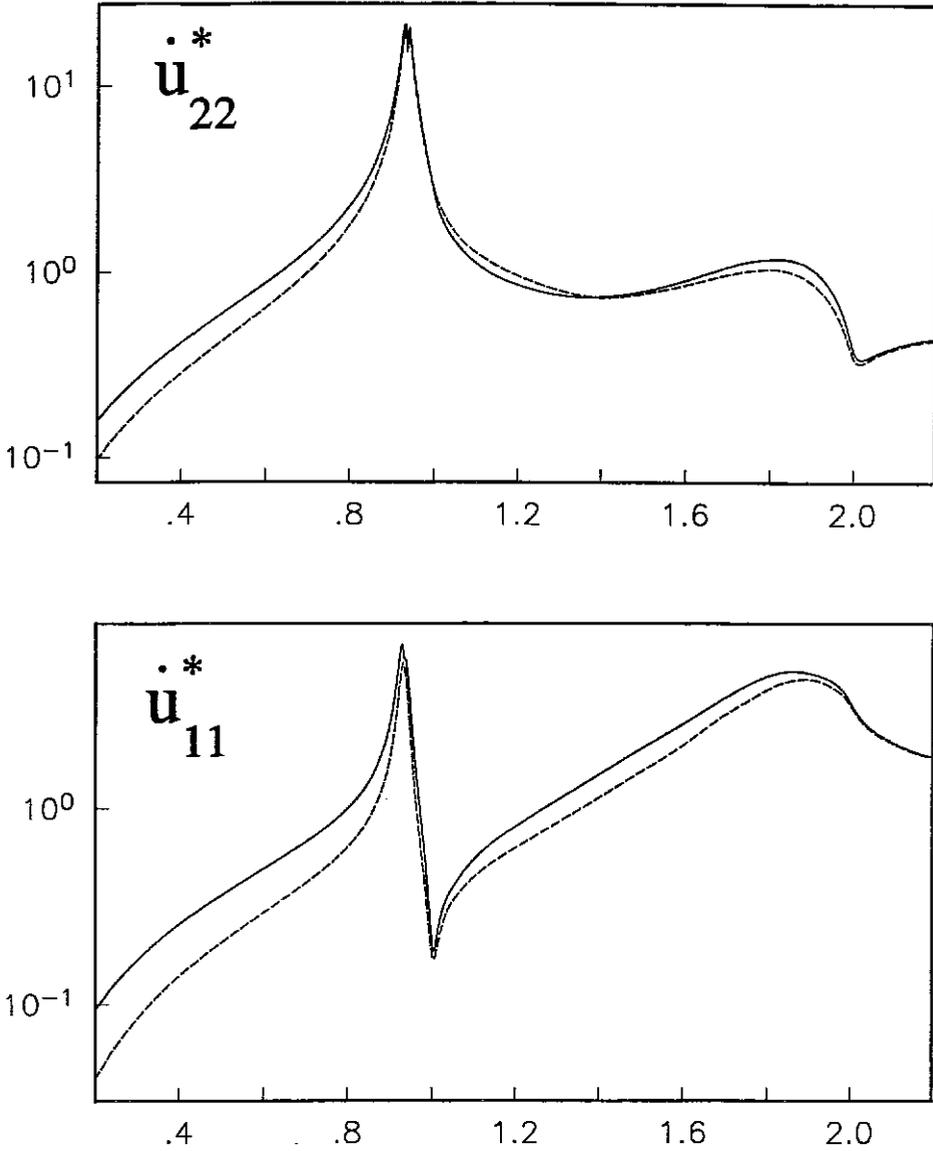
Os resultados apresentados na Figura 3.3.1-2, mostram que os efeitos

associados à profundidade dos pontos de observação são pequenos na vizinhança do máximo dos valores extremos das componentes da velocidade ($M_\beta \cong 0.93$) bem como nas proximidades dos números Mach associados às velocidades das ondas de compressão e de cisalhamento, respectivamente, $M_\beta \cong 2.0$ e $M_\beta \cong 1.0$. Também se verifica que estes efeitos são pequenos para as velocidades supersônicas da carga ($M_\beta > 2$). Para ambas as componentes adimensionais da velocidade, \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* , a resposta em \vec{x}_1^r para cargas com velocidade subsônica ($M_\beta < 0.9$) é substancialmente maior do que em \vec{x}_2^r . O valor extremo da resposta de \dot{u}_{11}^* no ponto de observação \vec{x}_1^r é de 2.4 ($M_\beta = 0.2$) a 1.5 ($M_\beta = 0.9$) vezes maior do que no ponto \vec{x}_2^r , que se localiza a uma profundidade maior. Para \dot{u}_{22}^* o fator varia desde cerca de 1.6 ($M_\beta = 0.2$) a 1.2 ($M_\beta = 0.9$). Para as velocidades da carga no regime transônico, os valores máximos da resposta de \dot{u}_{11}^* é aproximadamente 30% maior em \vec{x}_1^r do que em \vec{x}_2^r , enquanto que as diferenças para os valores extremos da resposta de \dot{u}_{22}^* é sempre menor que $\pm 15\%$.



Velocidade da Carga (M_β)

Figura 3.3.1-1 Efeitos da velocidade da carga e do amortecimento nos valores extremos das componentes adimensionais das velocidades \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* , em um ponto de observação $\vec{x}_1^T = (0, 10m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move na superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\nu = 1/3$, $\bar{\alpha}/\beta = 2$). Os valores extremos das velocidades são representados graficamente em escala logarítmica como uma função do número Mach $M_\beta = C/\beta$. As linhas contínuas e tracejadas representam os resultados para semi-espacos uniformes com coeficientes de amortecimento do material iguais, respectivamente, a $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$ e a $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$. O índice j em \dot{u}_{ij}^* indica a direção na qual a força é aplicada.



Velocidade da Carga (M_β)

Figura 3.3.1-2 Efeitos da velocidade da carga e da profundidade do ponto de observação nos valores extremos das componentes adimensionais das velocidades \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* , nos pontos de observação $\vec{x}_1^r = (0, 2,5 m)$ e $\vec{x}_2^r = (0, 10 m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move na superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\nu = 1/3$, $\bar{\alpha}/\bar{\beta} = 2$, $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). Os valores extremos das velocidades são representados graficamente em escala logarítmica como uma função do número Mach $M_\beta = C/\bar{\beta}$. As linhas contínuas e tracejadas representam, respectivamente, os resultados para os pontos de observação \vec{x}_1^r e \vec{x}_2^r . O índice j em \dot{u}_{ij}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

3.3.2. Efeito da Velocidade da Carga na Forma dos Pulsos das Respostas

Os efeitos da velocidade da carga na forma dos pulsos das componentes das velocidades e das tensões são ilustrados, respectivamente, nas Figuras 3.3.2-1 a 3.3.2-5 e nas Figuras 3.3.2-6 a 3.3.2-13. A excitação corresponde a uma faixa de carga bidimensional com duração $T = 0.2$ segundos que se move com velocidade constante C na superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme, caracterizado por $\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$. As componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ik}^* e das tensões σ_{ijk}^* são dadas, respectivamente, pelas equações (3-13) e (3-14), onde o índice k do subscrito denota a direção da faixa de carga distribuída h_k . Estas componentes, \dot{u}_{ik}^* e σ_{ijk}^* , foram calculadas, em um ponto de observação localizado pelas coordenadas $x_1 = 0$ e $x_2 = 10 \text{ m}$, para 20 valores de velocidade da carga compreendidos entre $C = 200 \text{ m/s}$ e $C = 3,000 \text{ m/s}$. Os valores correspondentes do número Mach M_β , definido em relação à velocidade da onda de cisalhamento, variam de $M_\beta = 0.2$ a 3.0.

É importante lembrar que a velocidade das ondas de superfície de Rayleigh para este semi-espaco é de $\bar{c}_R = 932 \text{ m/sec}$ ($M_\beta = 0.932$). As componentes adimensionais das velocidades e das tensões (ordenadas) são representadas graficamente contra o tempo em unidades de segundos (abcissas), onde o instante de tempo $t = 0 \text{ s}$ corresponde ao tempo no qual a frente da faixa de carga passa através de $x_1 = 0 \text{ m}$.

Os resultados obtidos mostram que a forma e a amplitude dos pulsos de resposta dependem significativamente da velocidade da carga. Pode-se observar que ocorrem mudanças drásticas nas formas dos pulsos para as velocidades da carga situadas nas proximidades das velocidades da onda de Rayleigh, da onda de cisalhamento e da onda de compressão.

Os efeitos da velocidade da carga C na forma dos pulsos de resposta das

componentes das velocidades são sintetizados nas Figuras 3.3.2-14 a 3.3.2-18. Nestas figuras, as componentes das velocidades normalizadas \dot{u}_{ik}^* são mostradas versus o tempo, em unidades de segundo, e versus o número Mach relativo à velocidade da onda de cisalhamento M_β . A posição da carga e do ponto de observação, bem como as características do meio sólido são as mesmas consideradas anteriormente, exceto para os valores dos coeficientes de amortecimento do material. Os resultados mostrados nas Figuras 3.3.2-14 a 3.3.2-18 foram obtidos para um semi-espaco visco-elástico no qual foram atribuídos coeficientes de amortecimento do material iguais a $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.05$.

Mudanças significantes na forma dos pulsos de resposta das componentes das velocidades podem ser observadas para os valores de $M_\beta = 0.93, 1.00, \text{ e } 2.00$ que correspondem, respectivamente, às velocidades das ondas de Rayleigh, S e P.

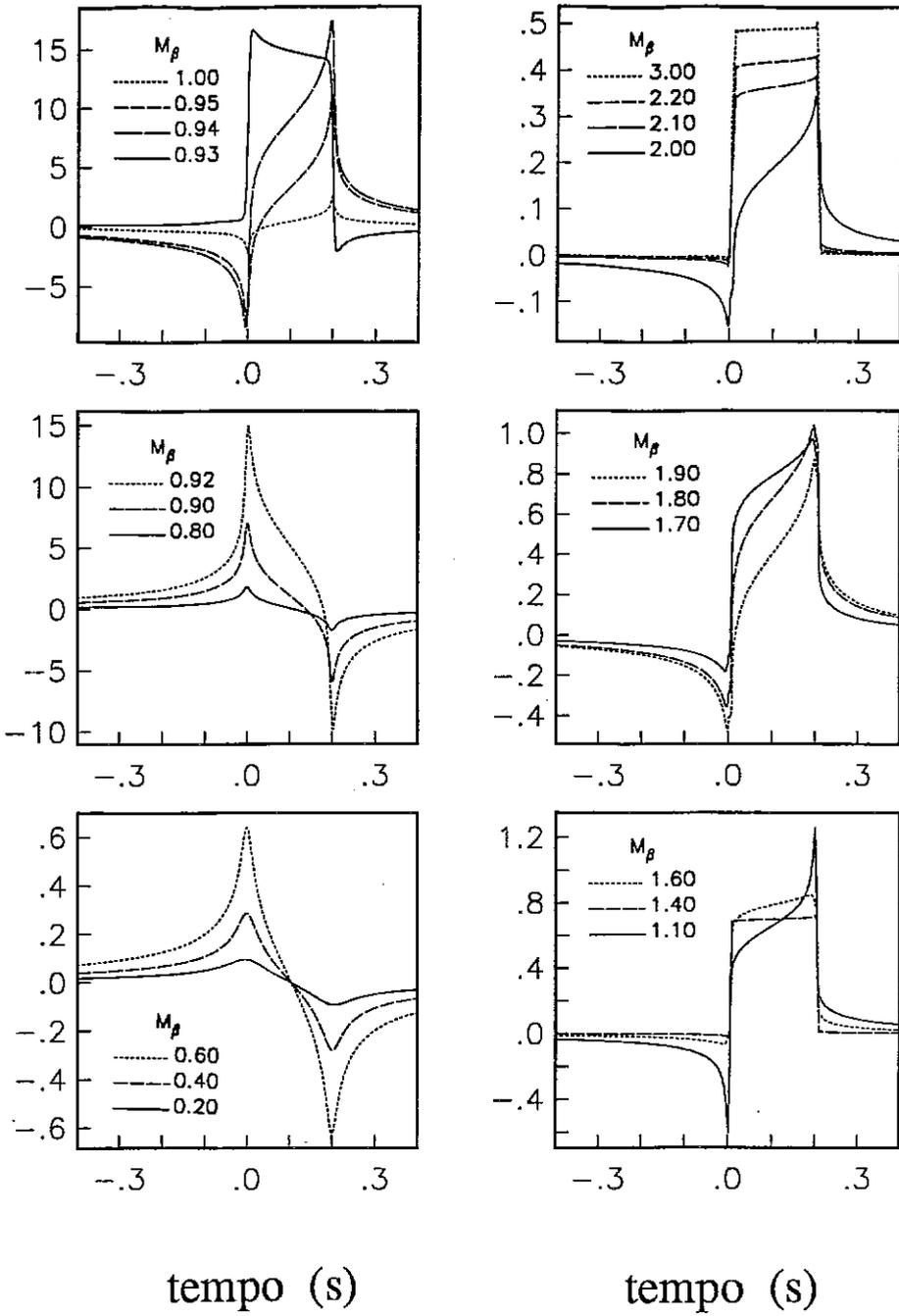


Figura 3.3.2-4 Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{22}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10 \text{ m})$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_2 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$).

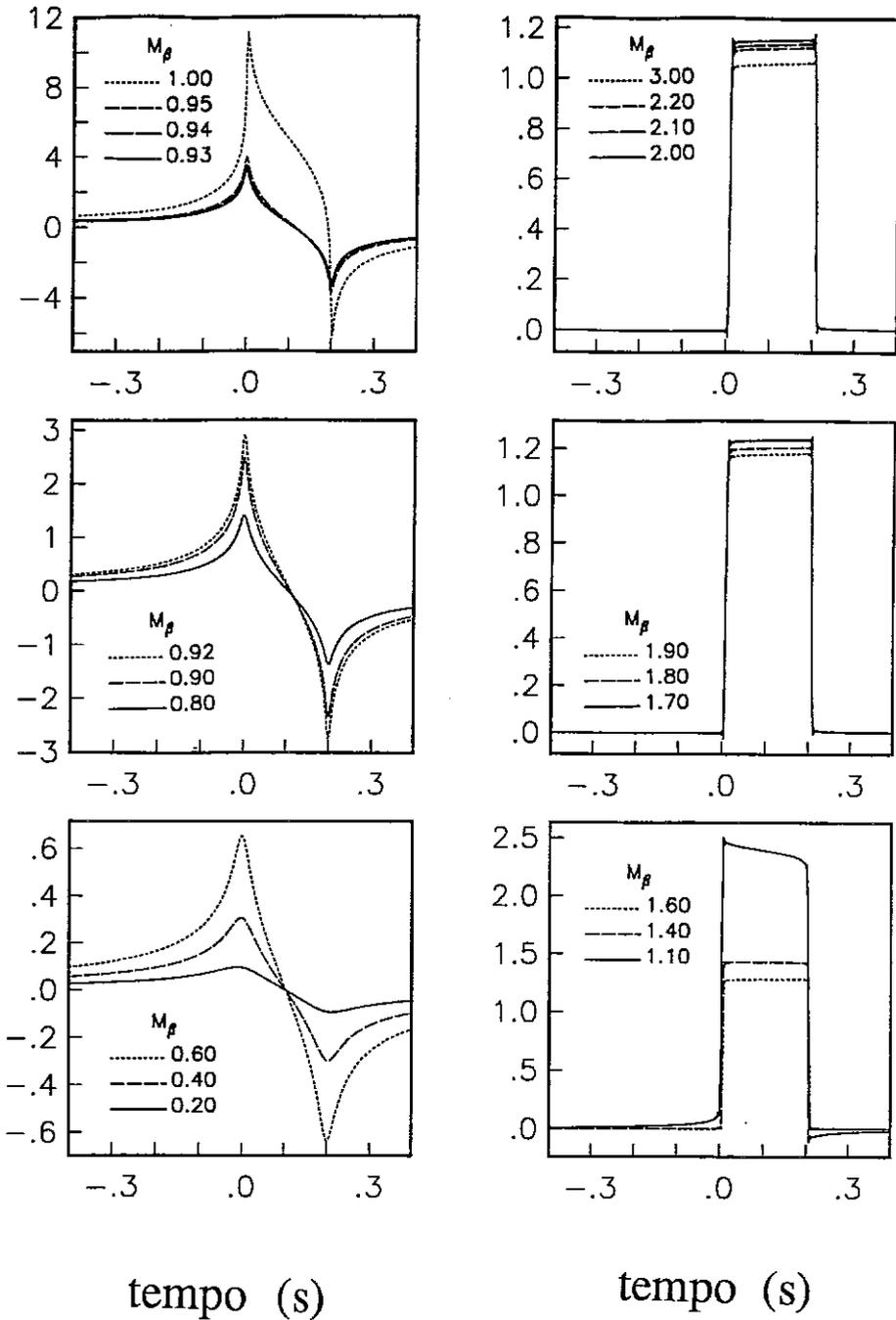


Figura 3.3.2-5 Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{33}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10 \text{ m})$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_3 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\beta$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$).

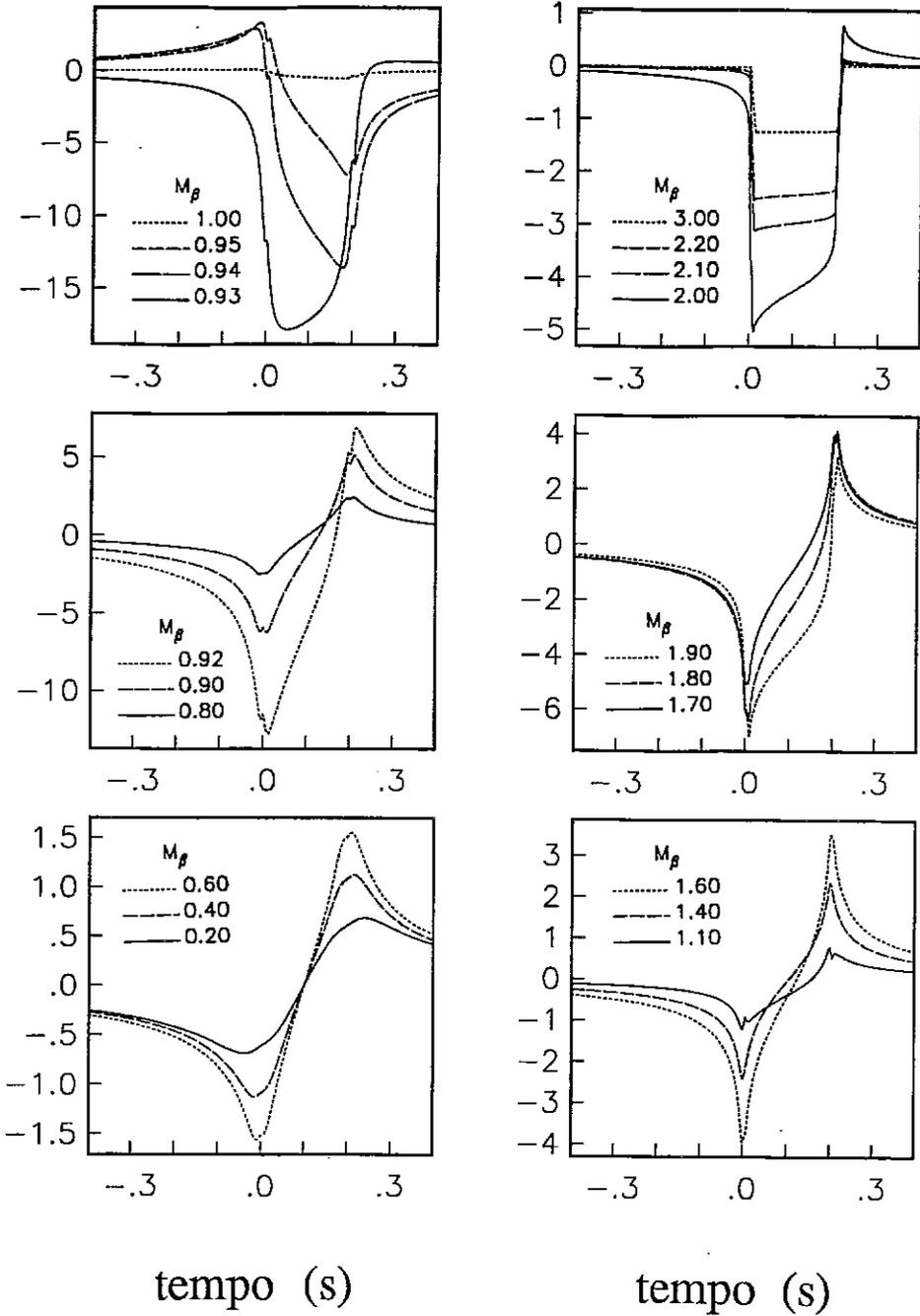


Figura 3.3.2-6 Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada das tensões σ_{111}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10 m)$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_1 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\beta$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 m/s$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$, $\rho = 2000 kg/m^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$).

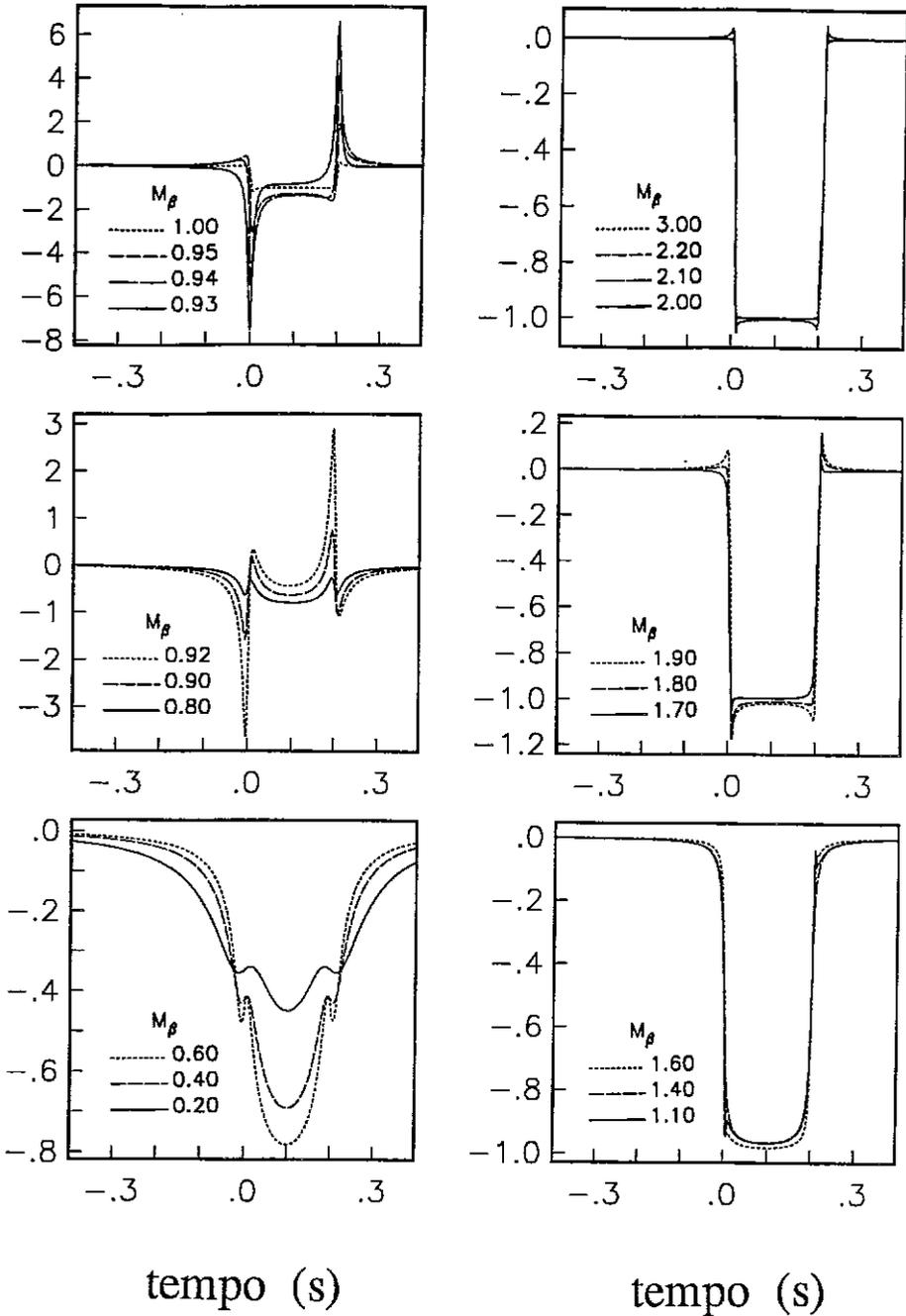


Figura 3.3.2-7 Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada das tensões σ_{121}^* em um ponto de observação $\vec{x}^T = (0, 10 \text{ m})$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_1 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\beta$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$).

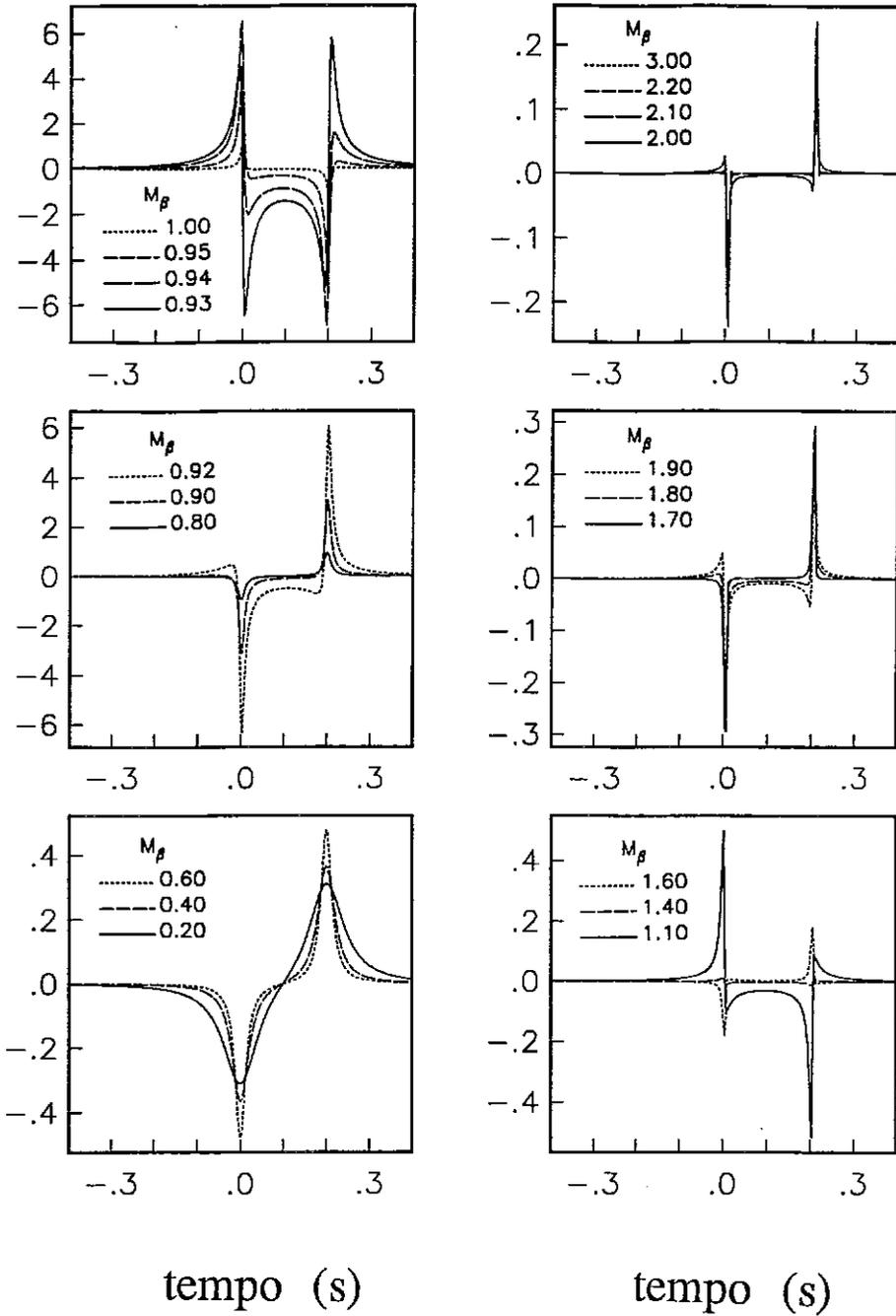


Figura 3.3.2-8 Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada das tensões σ_{221}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10 \text{ m})$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_1 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$).

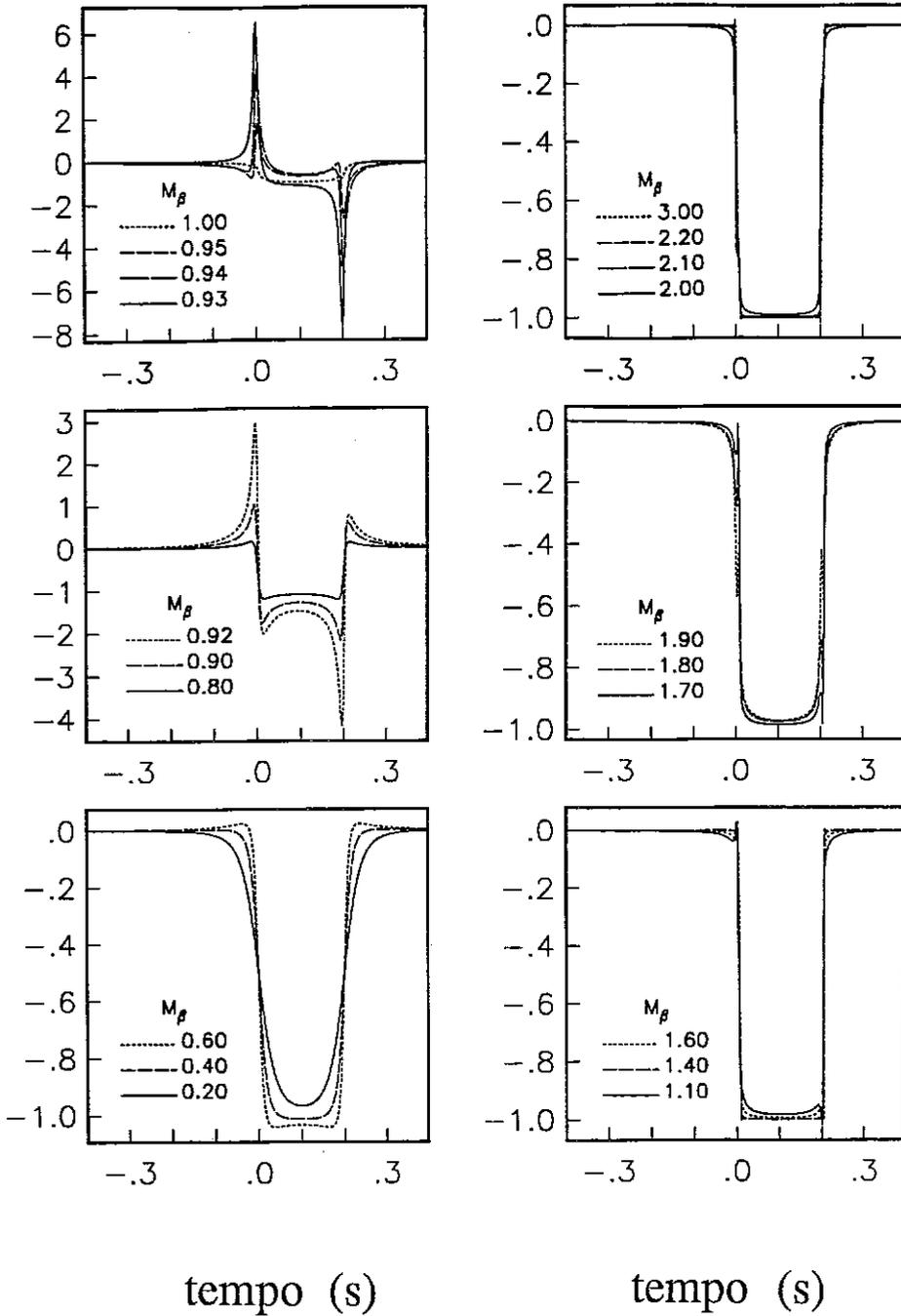


Figura 3.3.2-11 Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada das tensões σ_{222}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10 \text{ m})$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_2 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$).

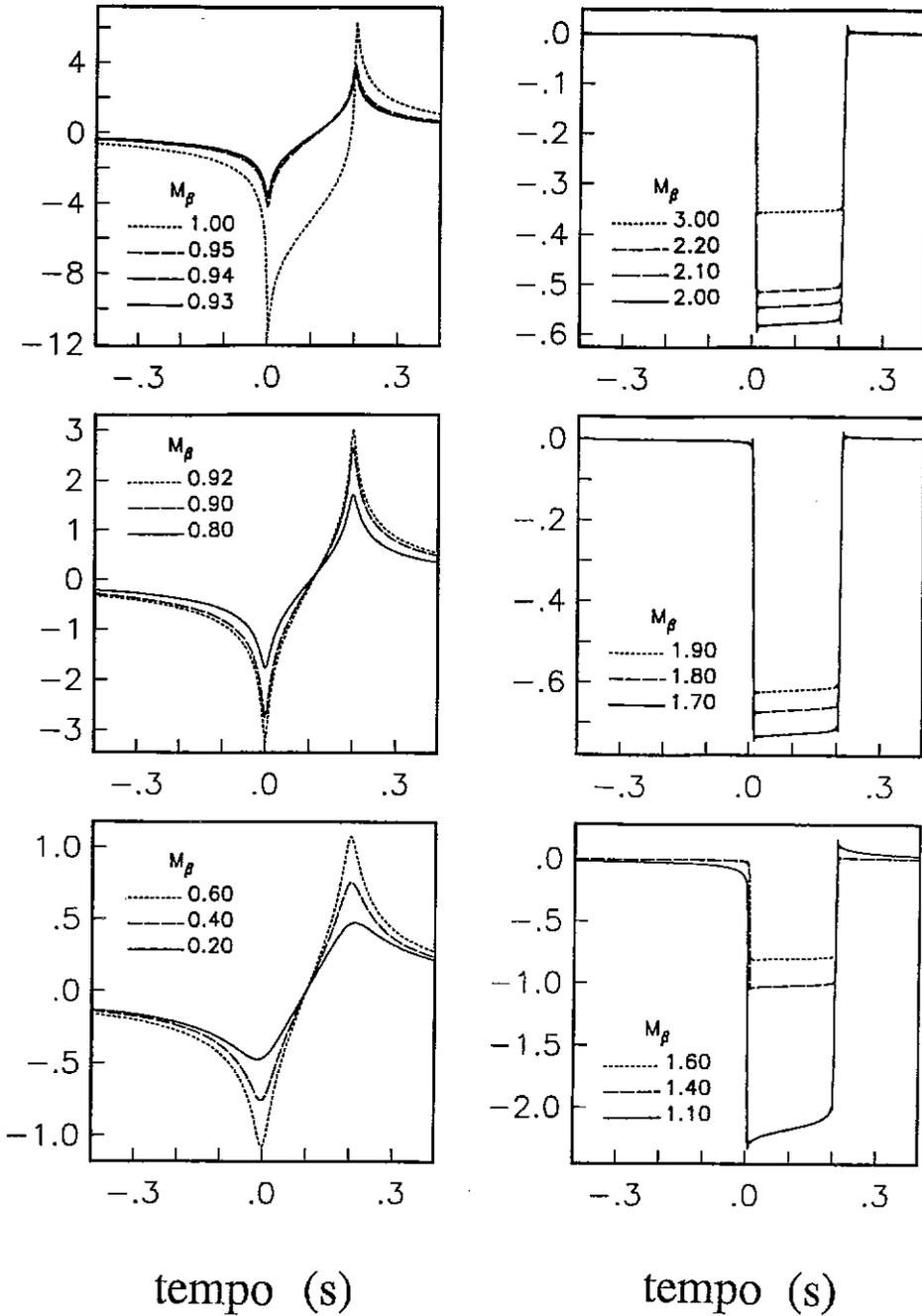


Figura 3.3.2-12 Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada das tensões σ_{133}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10\text{ m})$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_3 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$).

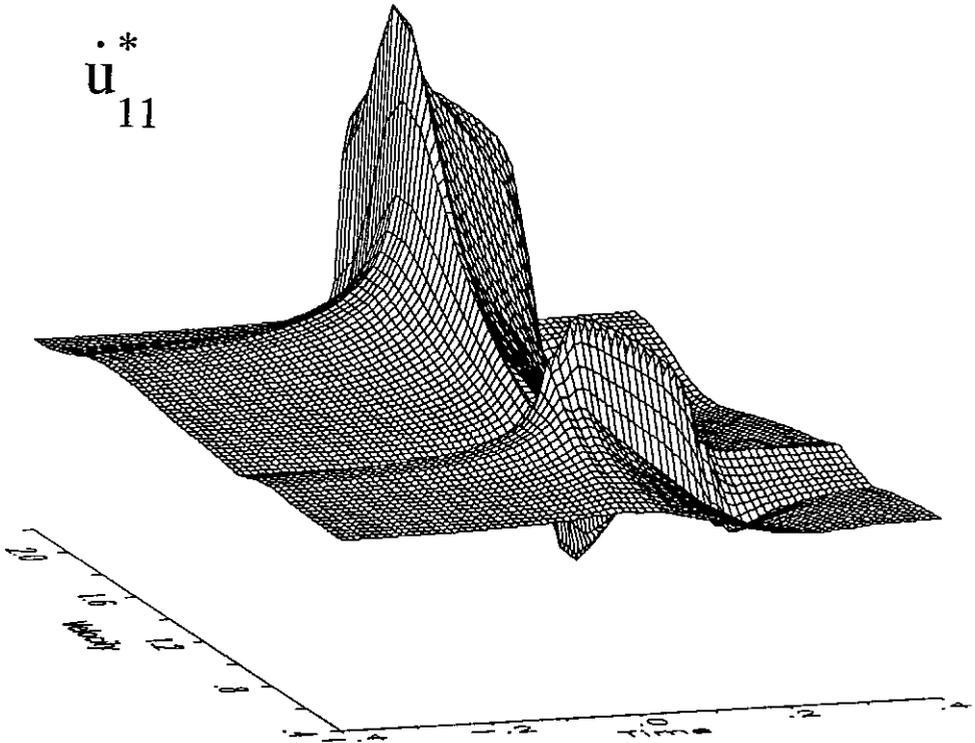


Figura 3.3.2-14 Síntese dos efeitos da velocidade da carga nas formas dos pulsos de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{11}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10 m)$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_1 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 m/s$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$, $\rho = 2000 kg/m^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.05$). A resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{11}^* é representada na coordenada vertical como uma função do tempo, em unidades de segundo, e como uma função do número Mach relativo à onda de cisalhamento M_β ($M_\beta = 0.4$ to $M_\beta = 2.2$).

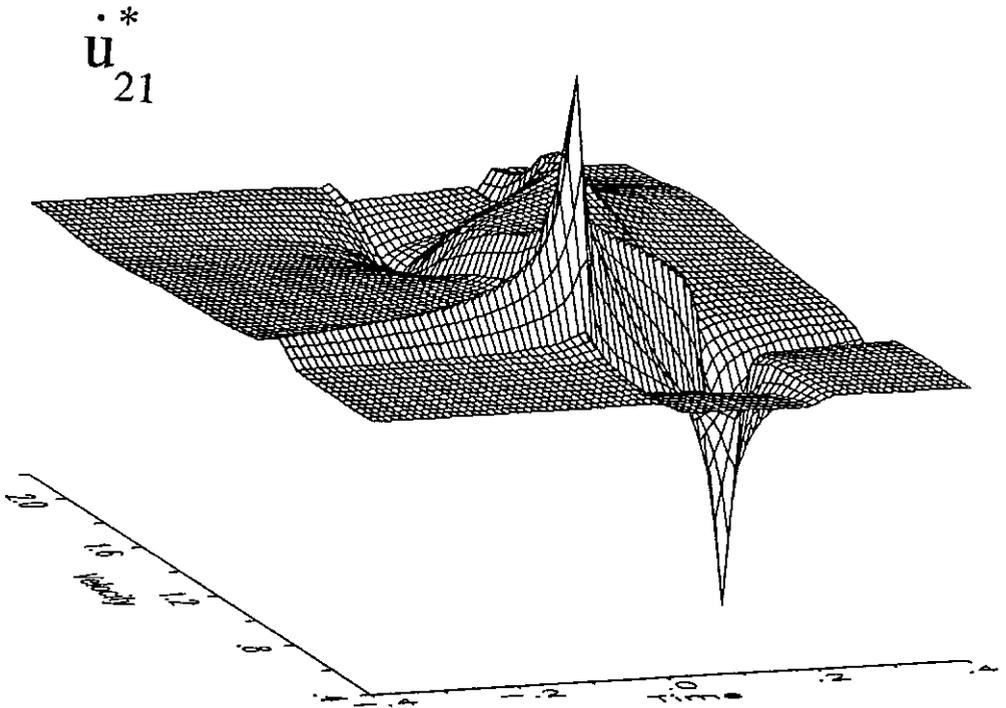


Figura 3.3.2-15 Síntese dos efeitos da velocidade da carga nas formas dos pulsos de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{21}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10 m)$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_1 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 m/s$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$, $\rho = 2000 kg/m^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.05$). A resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{21}^* é representada na coordenada vertical como uma função do tempo, em unidades de segundo, e como uma função do número Mach relativo à onda de cisalhamento M_β ($M_\beta = 0.4$ to $M_\beta = 2.2$).

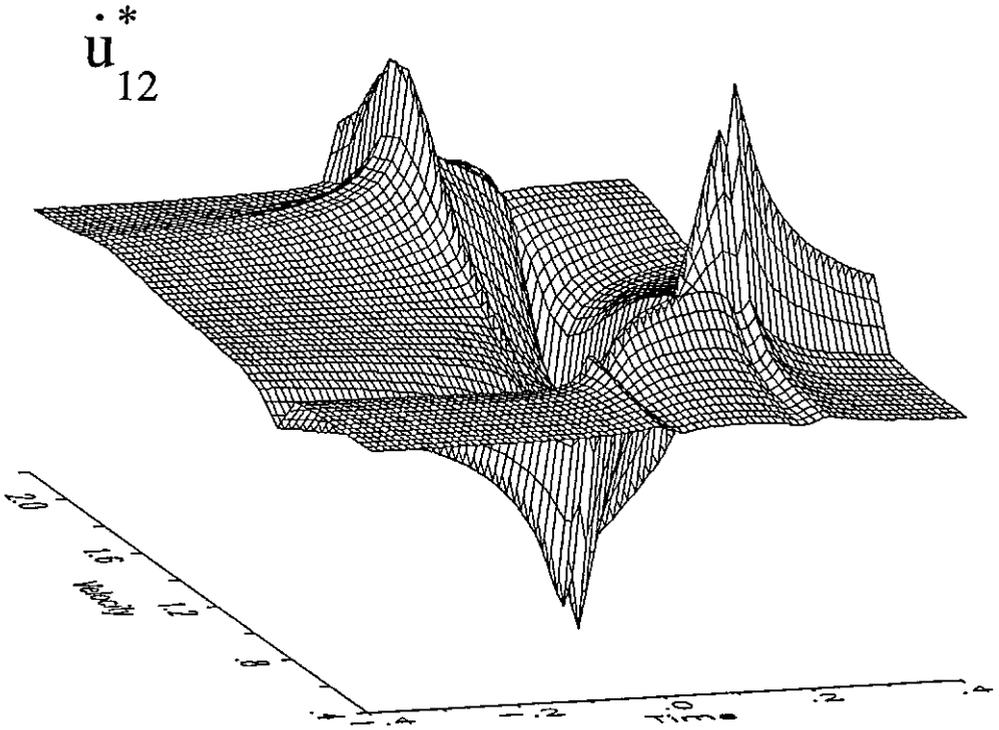


Figura 3.3.2-16 Síntese dos efeitos da velocidade da carga nas formas dos pulsos de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{12}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10 \text{ m})$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_2 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.05$). A resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{12}^* é representada na coordenada vertical como uma função do tempo, em unidades de segundo, e como uma função do número Mach relativo à onda de cisalhamento M_β ($M_\beta = 0.4$ to $M_\beta = 2.2$).

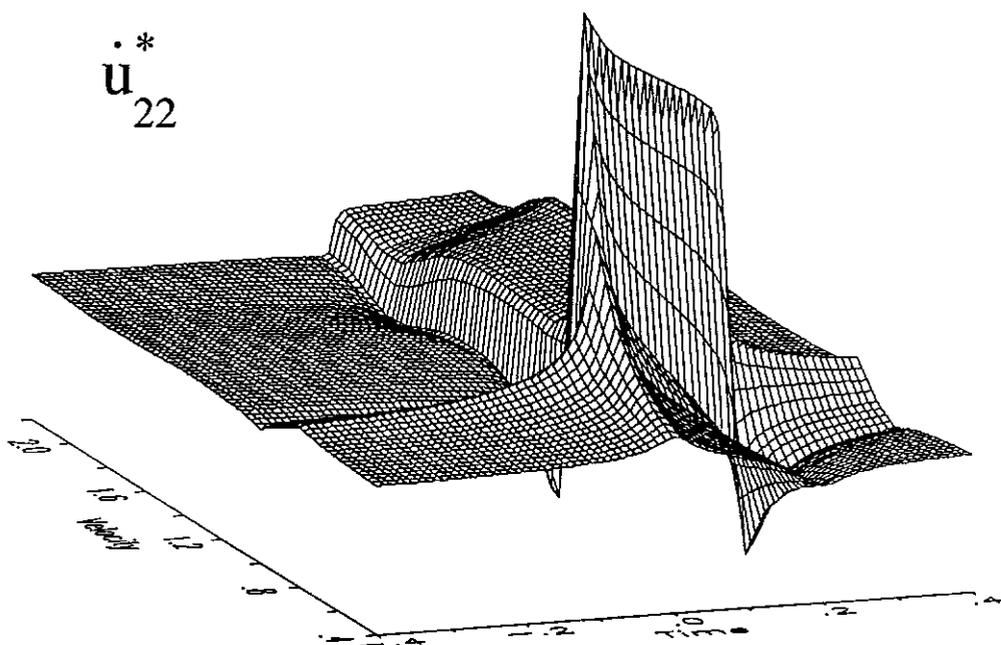


Figura 3.3.2-17 Síntese dos efeitos da velocidade da carga nas formas dos pulsos de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{22}^* em um ponto de observação $\bar{x}^r = (0, 10 \text{ m})$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_2 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.05$). A resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{22}^* é representada na coordenada vertical como uma função do tempo, em unidades de segundo, e como uma função do número Mach relativo à onda de cisalhamento M_β ($M_\beta = 0.4$ to $M_\beta = 2.2$).

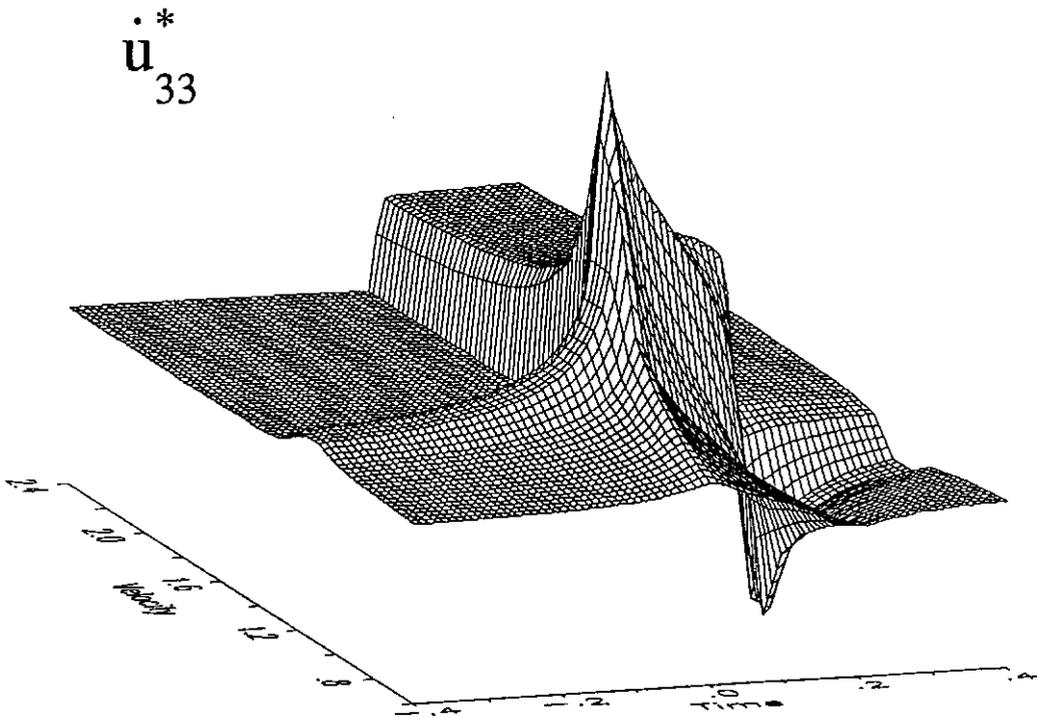


Figura 3.3.2-18 Síntese dos efeitos da velocidade da carga nas formas dos pulsos de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{33}^* em um ponto de observação $\bar{x}^r = (0, 10 m)$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_3 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 m/s$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$, $\rho = 2000 kg/m^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.05$). A resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{33}^* é representada na coordenada vertical como uma função do tempo, em unidades de segundo, e como uma função do número Mach relativo à onda de cisalhamento M_β ($M_\beta = 0.6$ to $M_\beta = 2.4$).

3.3.3. Efeito do Amortecimento

Os efeitos do amortecimento do material nas componentes adimensionais do campo de velocidades, correspondente à ação de uma faixa de carga que se move na superfície livre de um semi-espaco visco-elástico, são mostrados nas Figuras 3.3.3-1 a 3.3.3-5. O meio, a excitação e a localização do ponto de observação são os mesmos que foram utilizados nas investigações apresentadas na seção anterior, exceto que nesta seção foram considerados nos cálculos semi-espacos visco-elásticos caracterizados pelos seguintes valores de coeficientes de amortecimento do material, $\xi = 0.1\%$, 1.0% e 5.0% ($\xi = \xi_\alpha = \xi_\beta$). Os resultados foram determinados para valores de velocidade da carga correspondentes a $M_\beta = 0.80, 0.932, 1.00, 1.40, 2.00$ e 2.20 . Os efeitos do amortecimento são particularmente significantes quando $C \cong \bar{c}_R$ (para todos as componentes, exceto para \dot{u}_{33}^*), $C \cong \bar{\beta} (\dot{u}_{11}^*, \dot{u}_{33}^*)$ e $C \cong \bar{\alpha} (\dot{u}_{21}^*, \dot{u}_{22}^*)$.

Os resultados obtidos para os casos supersônicos ($M_\beta = 2.0$ e 2.2), revelam que a consideração do amortecimento histerético, independente da frequência, no modelo de análise, implica na ocorrência de alguns sinais de resposta não causal, que chegam antes do instante $t = 0$. Quanto menor o valor do amortecimento tanto menores os valores destes sinais de resposta não causal.

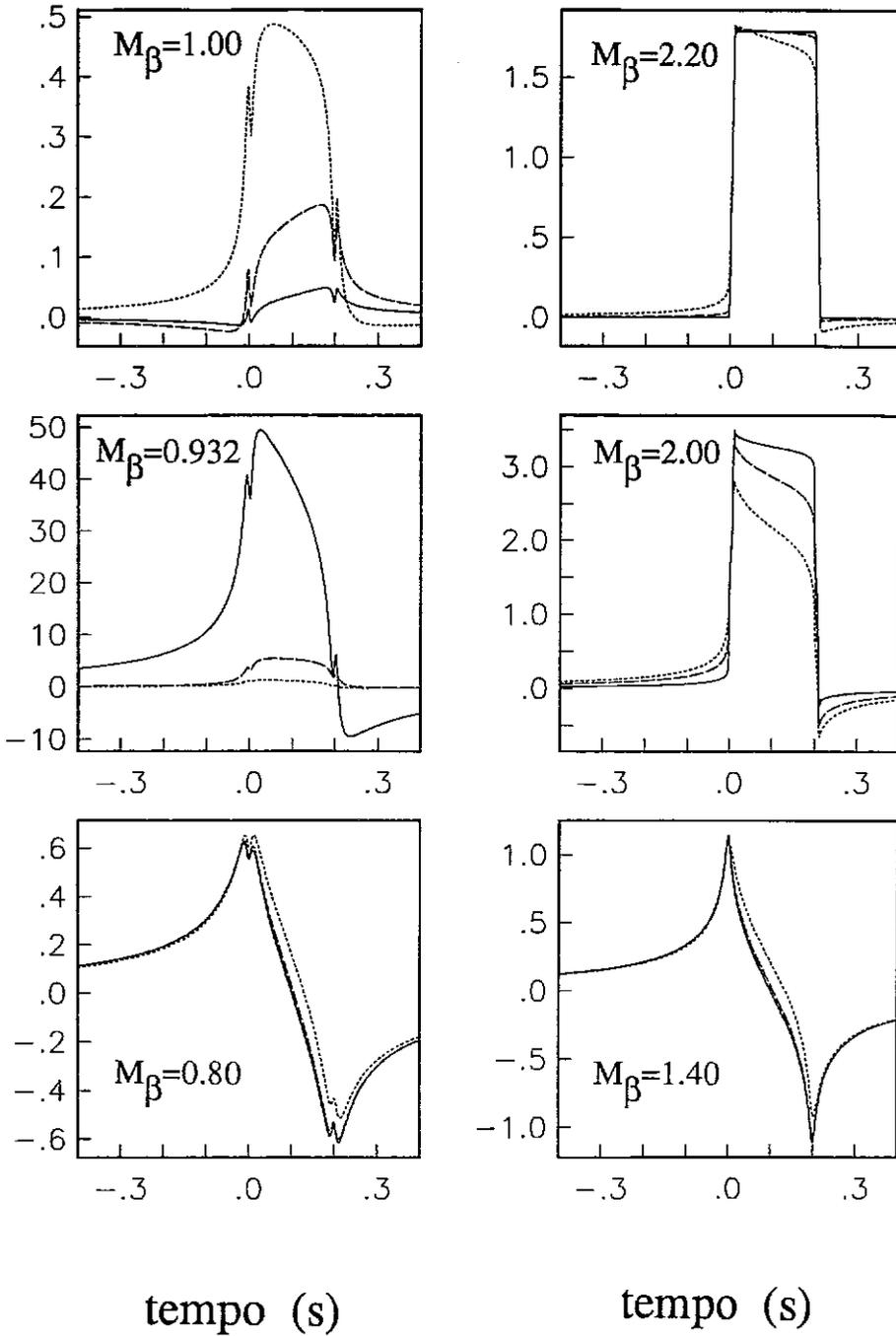


Figura 3.3.3-1 Efeito do amortecimento na resposta da componente normalizada da velocidade u_{11}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10\text{ m})$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_1 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$ e $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$). As linhas contínuas, tracejadas e pontilhadas indicam os resultados obtidos, respectivamente, nos semi-espaços uniformes com coeficientes de amortecimento do material $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$, $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.05$.

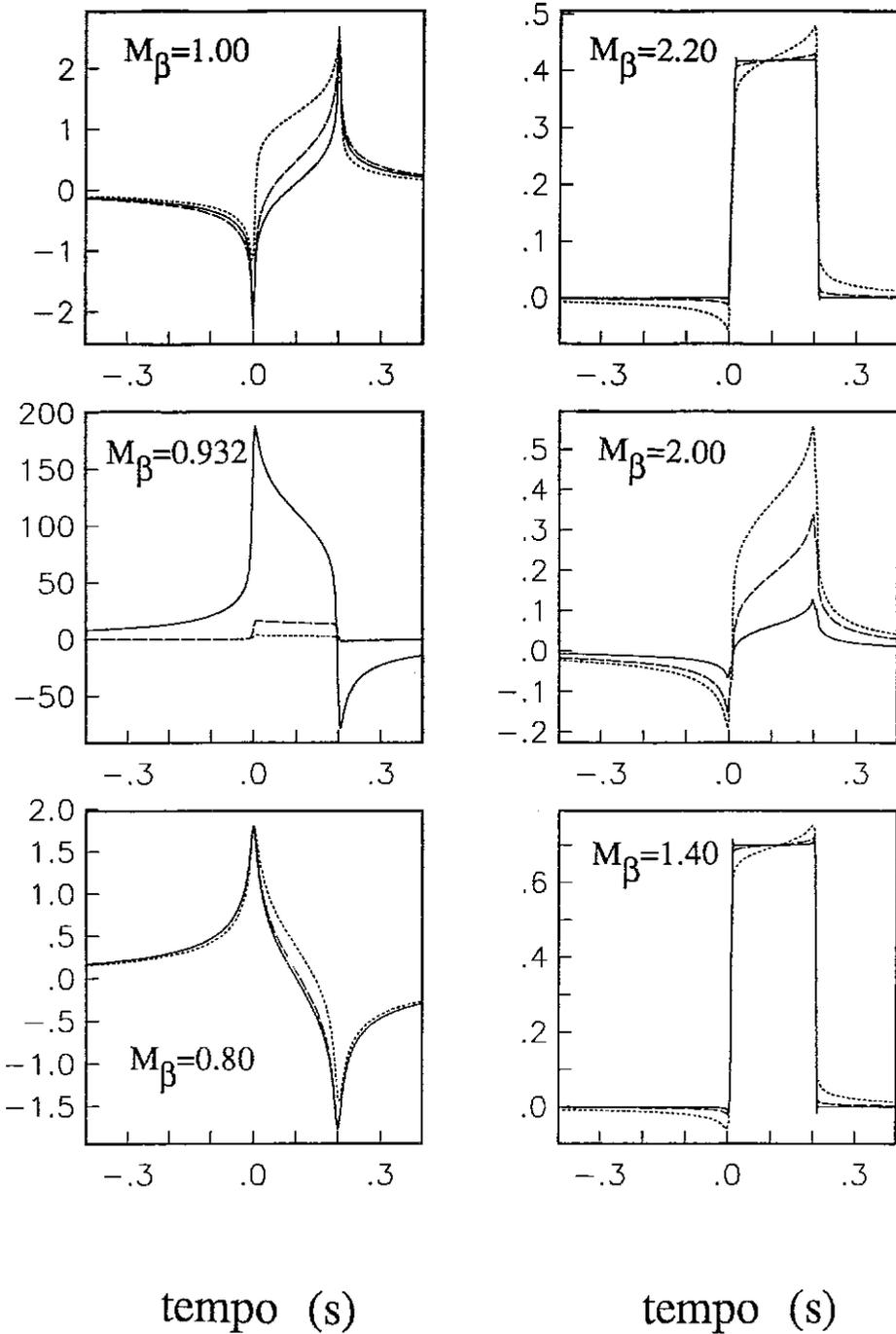


Figura 3.3.3-4 Efeito do amortecimento na resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{22}^* em um ponto de observação $\bar{x}^r = (0, 10 m)$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_2 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 m/s$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$ e $\rho = 2000 kg/m^3$). As linhas contínuas, tracejadas e pontilhadas indicam os resultados obtidos, respectivamente, nos semi-espaços uniformes com coeficientes de amortecimento do material $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$, $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.05$.

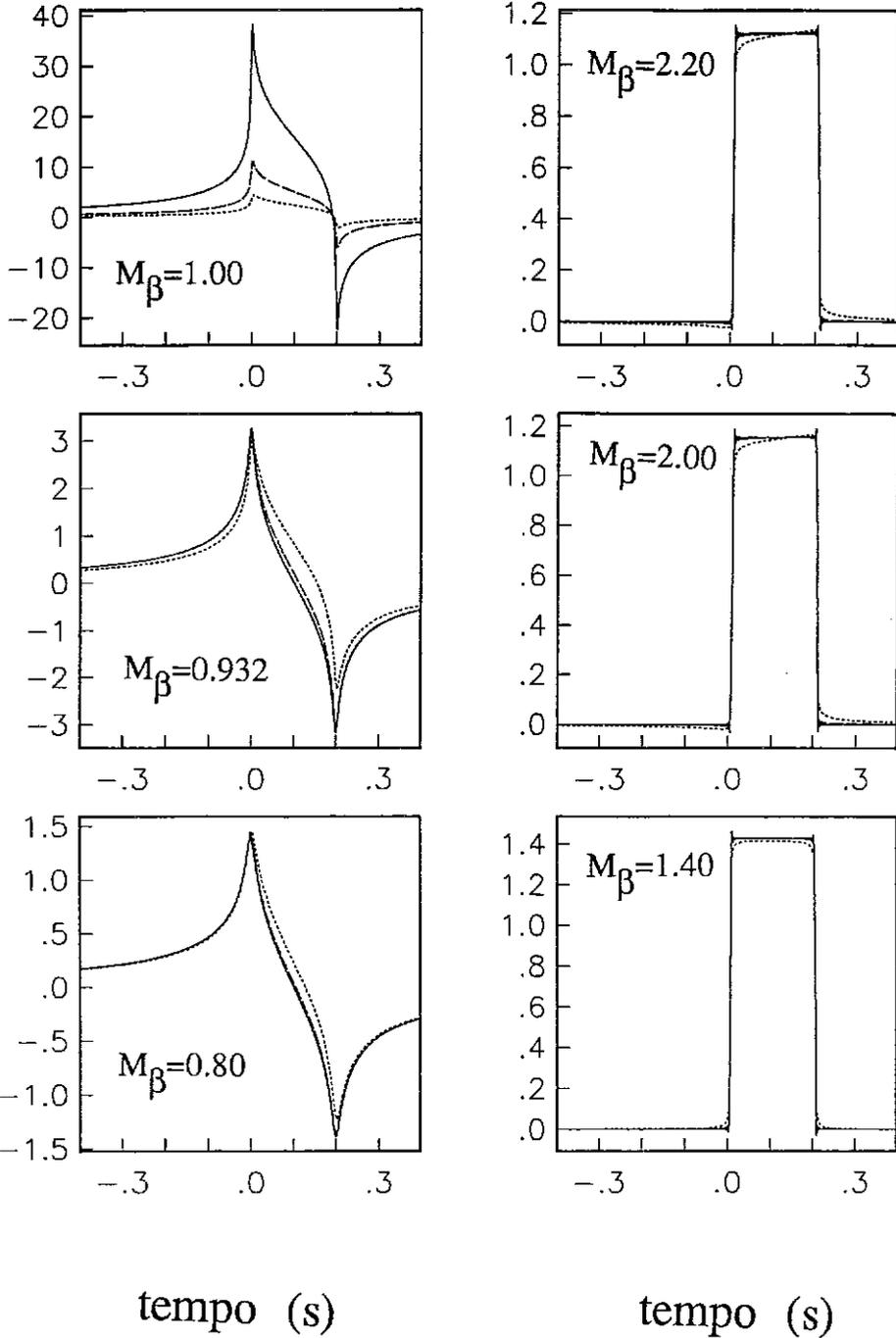


Figura 3.3.3-5 Efeito do amortecimento na resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{33}^* em um ponto de observação $\bar{x}^r = (0, 10 \text{ m})$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos é aplicada na direção x_3 e se move com velocidade constante C ($M_\beta = C/\bar{\beta}$), na direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$ e $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$). As linhas contínuas, tracejadas e pontilhadas indicam os resultados obtidos, respectivamente, nos semi-espaços uniformes com coeficientes de amortecimento do material $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$, $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.05$.

3.3.4. Efeito da Profundidade do Ponto de Observação

Os efeitos da profundidade do ponto de observação nas respostas das componentes adimensionais do campo de velocidades são ilustrados nas Figuras 3.3.4-1 e 3.3.4-2. Os resultados correspondem à ação de uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move na superfície livre de um semi-espaço visco-elástico, caracterizado por $\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 1\%$. Foram consideradas duas velocidades de carga, $C = 800 \text{ m/s}$ e 2200 m/s (respectivamente, $M_\beta = 0.8$ e 2.2) e três pontos de observação localizados ao longo do eixo x_2 , definidos pelas seguintes profundidades, $x_2 = 10.0, 30.0$ e 60.0 m .

Os resultados apresentados nas Figuras 3.3.4-1 e 3.3.4-2 indicam que os valores extremos da resposta das componentes normalizadas da velocidade \dot{u}_{11}^* , \dot{u}_{22}^* e \dot{u}_{33}^* , para o caso subsônico ($M_\beta = 0.80$), são inversamente proporcionais à profundidade do ponto de observação. No caso supersônico ($M_\beta = 2.20$), os valores extremos das amplitudes dos pulsos das componentes de velocidade são praticamente independentes da profundidade do ponto de observação. A forma dos pulsos das componentes da velocidade para o caso supersônico mostram claramente, na resposta, as contribuições associadas à chegada das frentes de onda P e S. Tal fato está em conformidade com o que é esperado a partir da análise das expressões analíticas apresentadas no Apêndice A, em conjunto com o esquema de superposição definido pela equação 3-10.

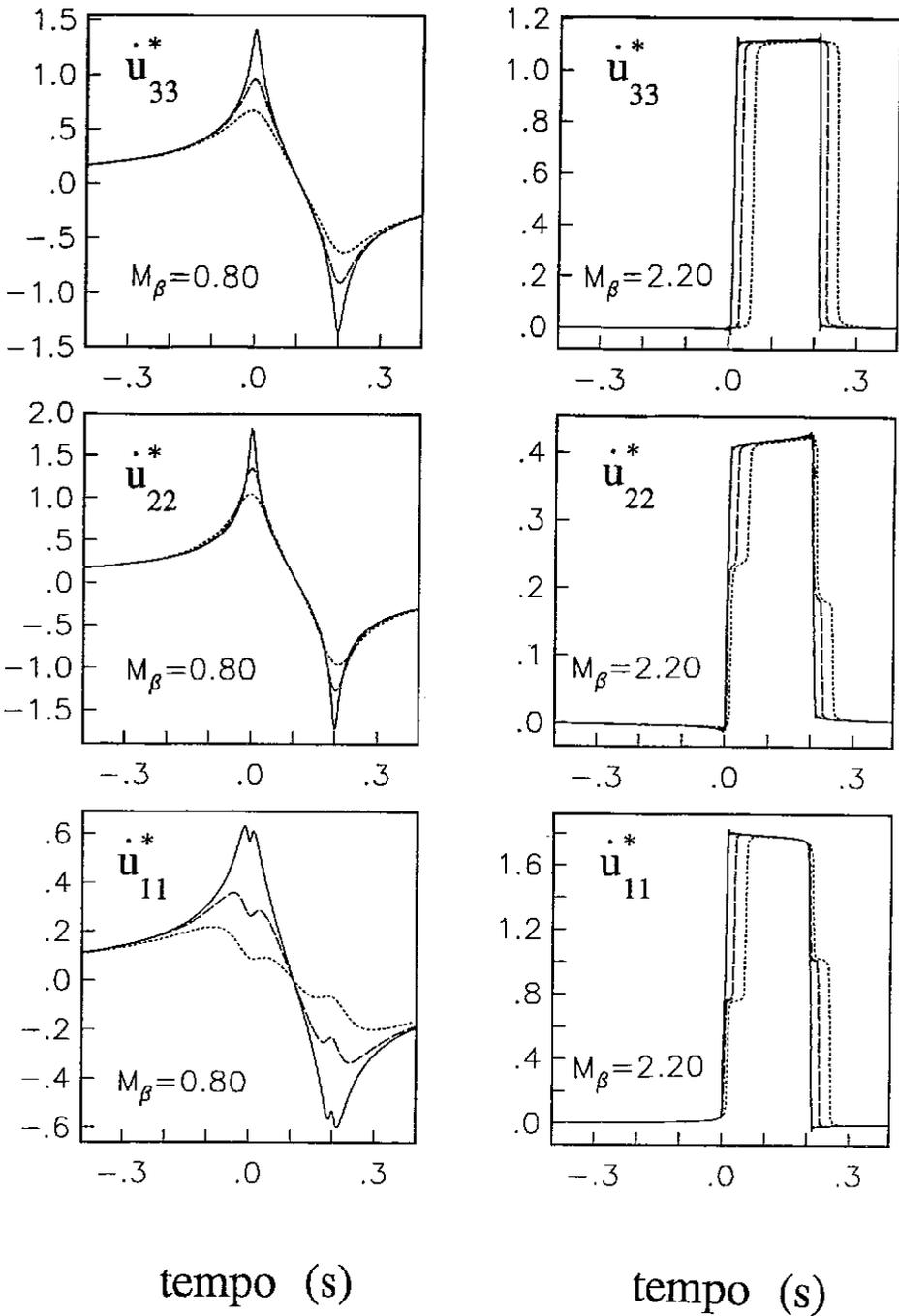


Figura 3.3.4-1 Efeito da profundidade do ponto de observação na resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* , para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos que se move sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). Os resultados para as cargas com velocidade subsônica ($M_\beta = 0.8$) e supersônica ($M_\beta = 2.2$) são mostrados, respectivamente, na coluna da esquerda e da direita da figura. As respostas das velocidades para os pontos de observação localizados nas profundidades 10, 30 e 60 metros são representados, respectivamente, por linhas contínuas, tracejadas e pontilhadas. O índice j em \dot{u}_{ij}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

3.3.5. Relações de Reciprocidade

Algumas relações de reciprocidade entre a resposta calculada para uma dada configuração das posições da fonte e do ponto de observação, e a resposta obtida quando a localização da fonte é alternada com a posição do ponto de observação, são ilustradas nas Figuras 3.3.5-1 a 3.3.5-8. Duas configurações de posição fonte-observação são levadas em consideração. Na configuração (A) a fonte está localizada a uma profundidade $x_2^s = 5 m$ e o ponto de observação se situa em $(x_1^r, x_2^r) = (0, 10 m)$; na configuração (B) as posições são alternadas, ou seja, $x_2^s = 10 m$ e $(x_1^r, x_2^r) = (0, 5 m)$.

As demais características da fonte e do semi-espaco visco-elástico são as mesmas definidas na Seção 3.3.2, exceto que, nesta seção, são consideradas uma velocidade subsônica para a carga igual a $C = 800 m/s$ e uma velocidade supersônica igual a $C = 2200 m/s$. Os resultados obtidos indicam que:

$$\dot{u}_{11}^*(A) = \dot{u}_{11}^*(B), \quad \dot{u}_{22}^*(A) = \dot{u}_{22}^*(B), \quad \dot{u}_{33}^*(A) = \dot{u}_{33}^*(B) \quad (3-15a)$$

$$\dot{u}_{12}^*(A) = -\dot{u}_{21}^*(B), \quad \dot{u}_{21}^*(A) = -\dot{u}_{12}^*(B) \quad (3-15b)$$

$$\sigma_{111}^*(A) = \sigma_{111}^*(B), \quad \sigma_{133}^*(A) = \sigma_{133}^*(B) \quad (3-15c)$$

Estas relações de reciprocidade servem como um teste adicional para os procedimentos numéricos propostos e para os programas de computador associados que foram desenvolvidos.

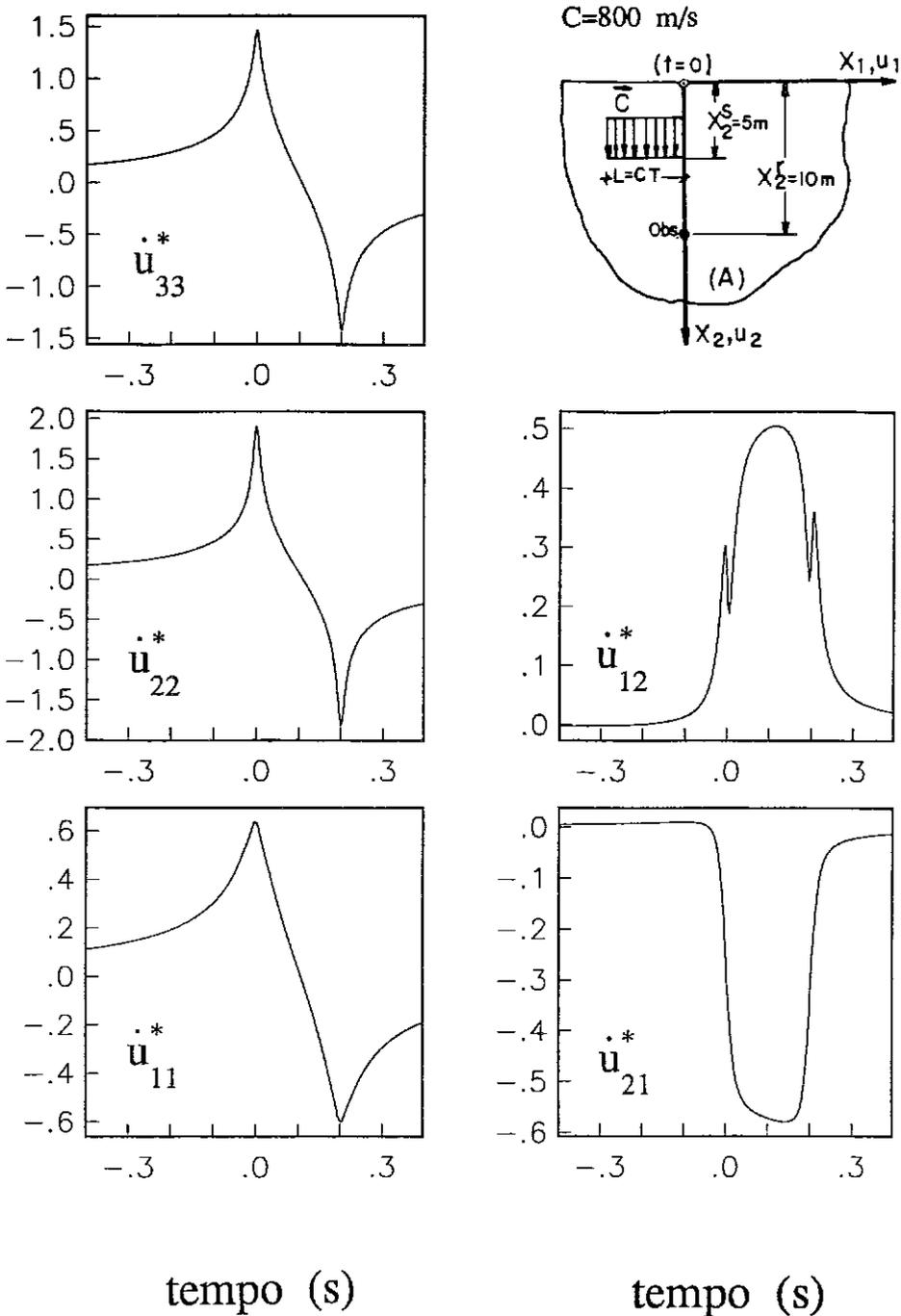


Figura 3.3.5-1 Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10 \text{ m})$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos que se move com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.8$) na direção positiva do eixo x_1 . A carga se move a uma profundidade $x_2^s = 5 \text{ m}$ em um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O índice j em \dot{u}_{ij}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

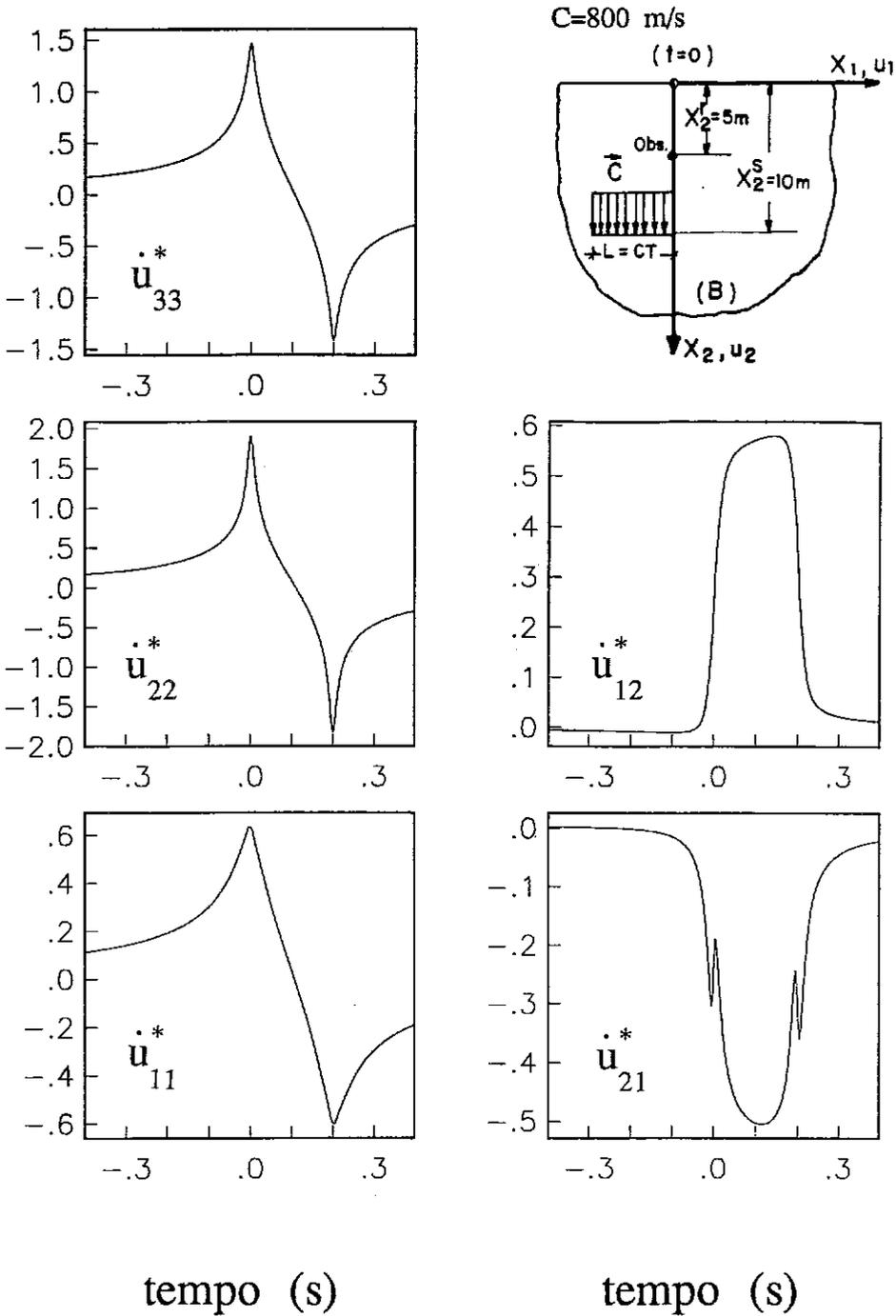


Figura 3.3.5-2 Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* , em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 5\text{ m})$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos que se move com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.8$) na direção positiva do eixo x_1 . A carga se move a uma profundidade $x_2^s = 10\text{ m}$ em um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O índice j em \dot{u}_{ij}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

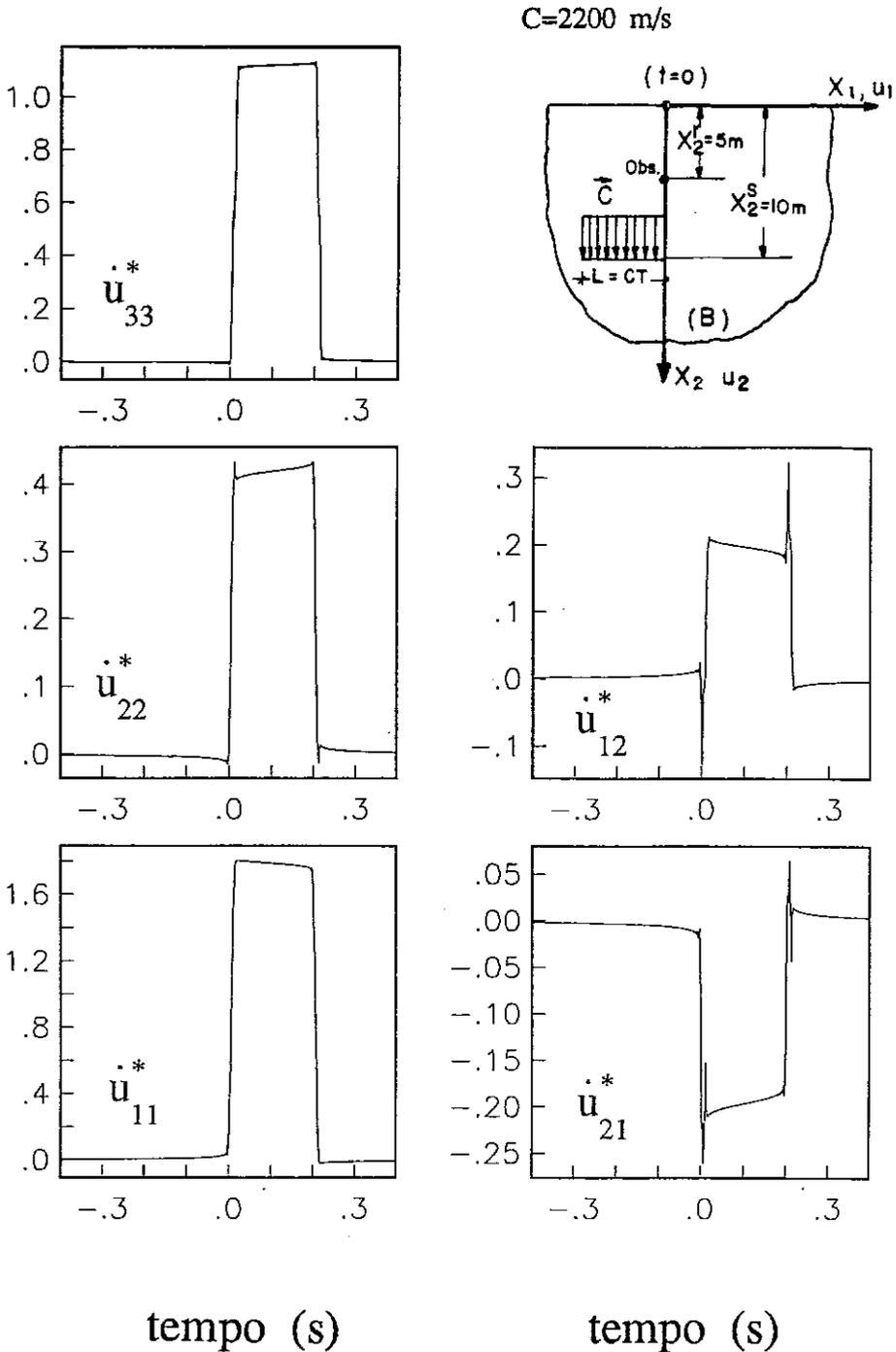


Figura 3.3.5-4 Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* em um ponto de observação $\bar{x}^r = (0,5 \text{ m})$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos que se move com velocidade supersônica constante ($M_\beta = 2.2$) na direção positiva do eixo x_1 . A carga se move a uma profundidade $x_2^s = 10 \text{ m}$ em um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\beta = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O índice j em \dot{u}_{ij}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

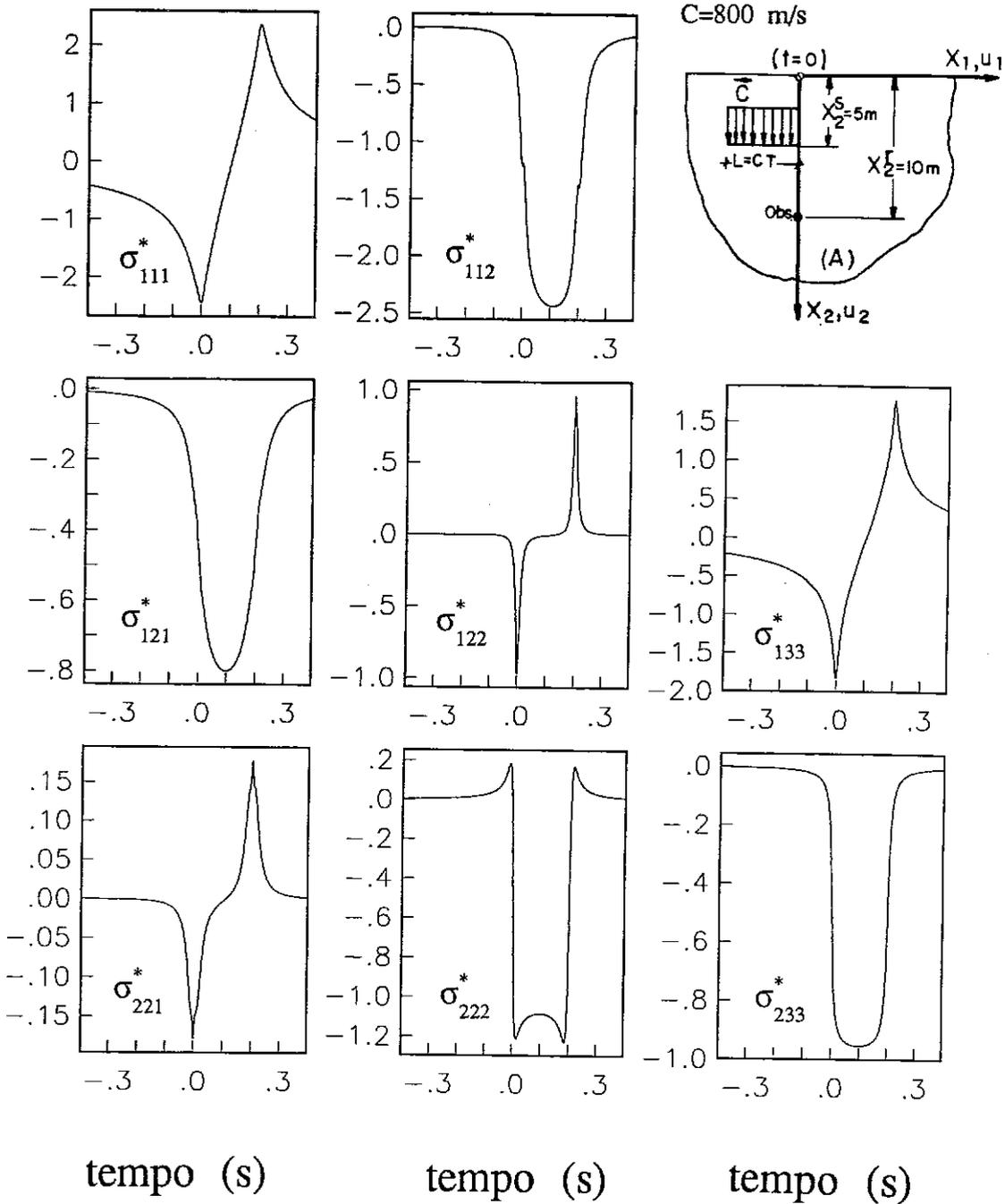


Figura 3.3.5-5 Resposta das componentes normalizadas das tensões σ_{ijk}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10\text{ m})$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos que se move com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.8$) na direção positiva do eixo x_1 . A carga se move a uma profundidade $x_2^s = 5\text{ m}$ em um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000\text{ m/s}$, $\beta = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O índice k em σ_{ijk}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

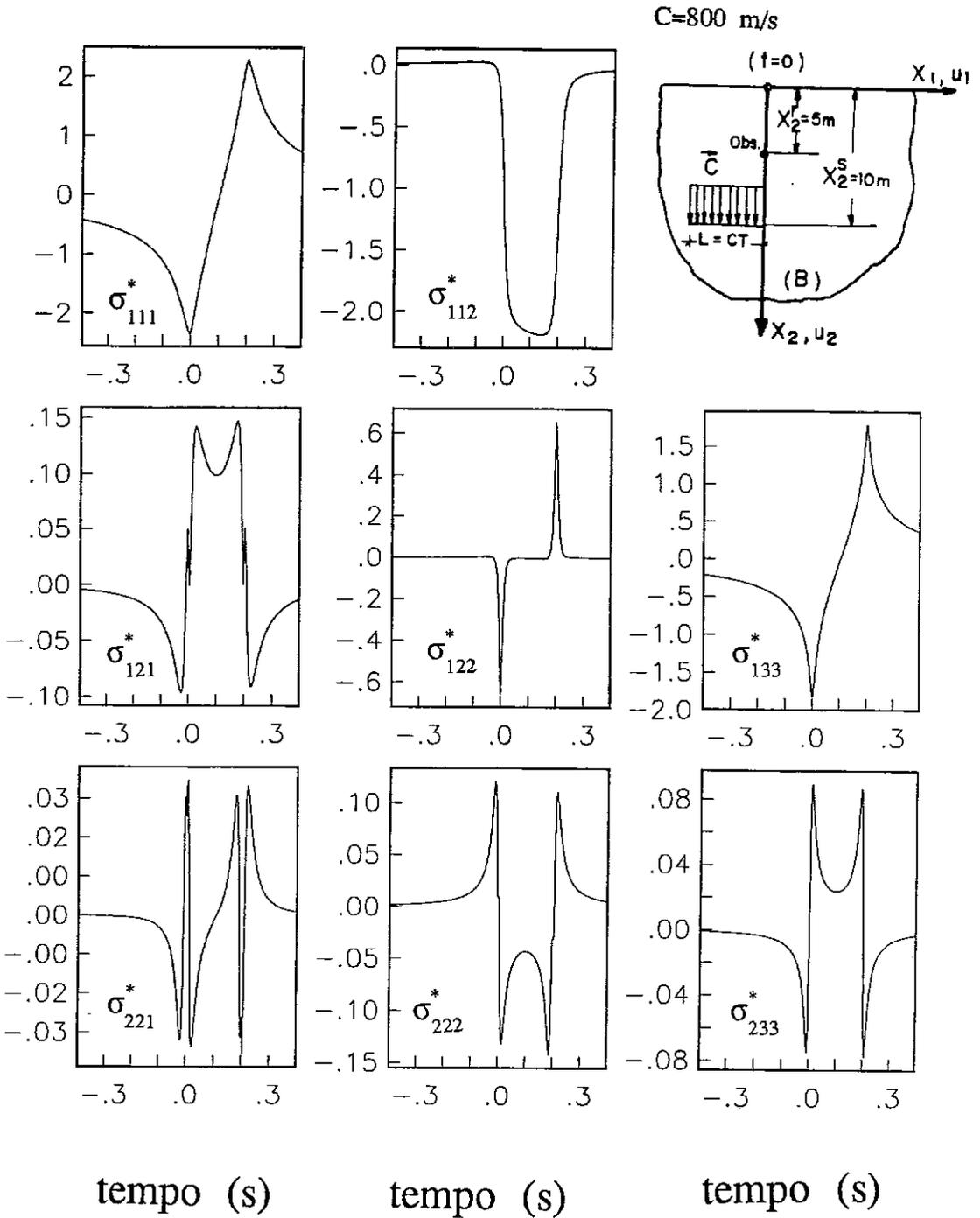


Figura 3.3.5-6 Resposta das componentes normalizadas das tensões σ_{ijk}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 5\text{ m})$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos que se move com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.8$) na direção positiva do eixo x_1 . A carga se move a uma profundidade $x_2^s = 10\text{ m}$ em um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O índice k em σ_{ijk}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

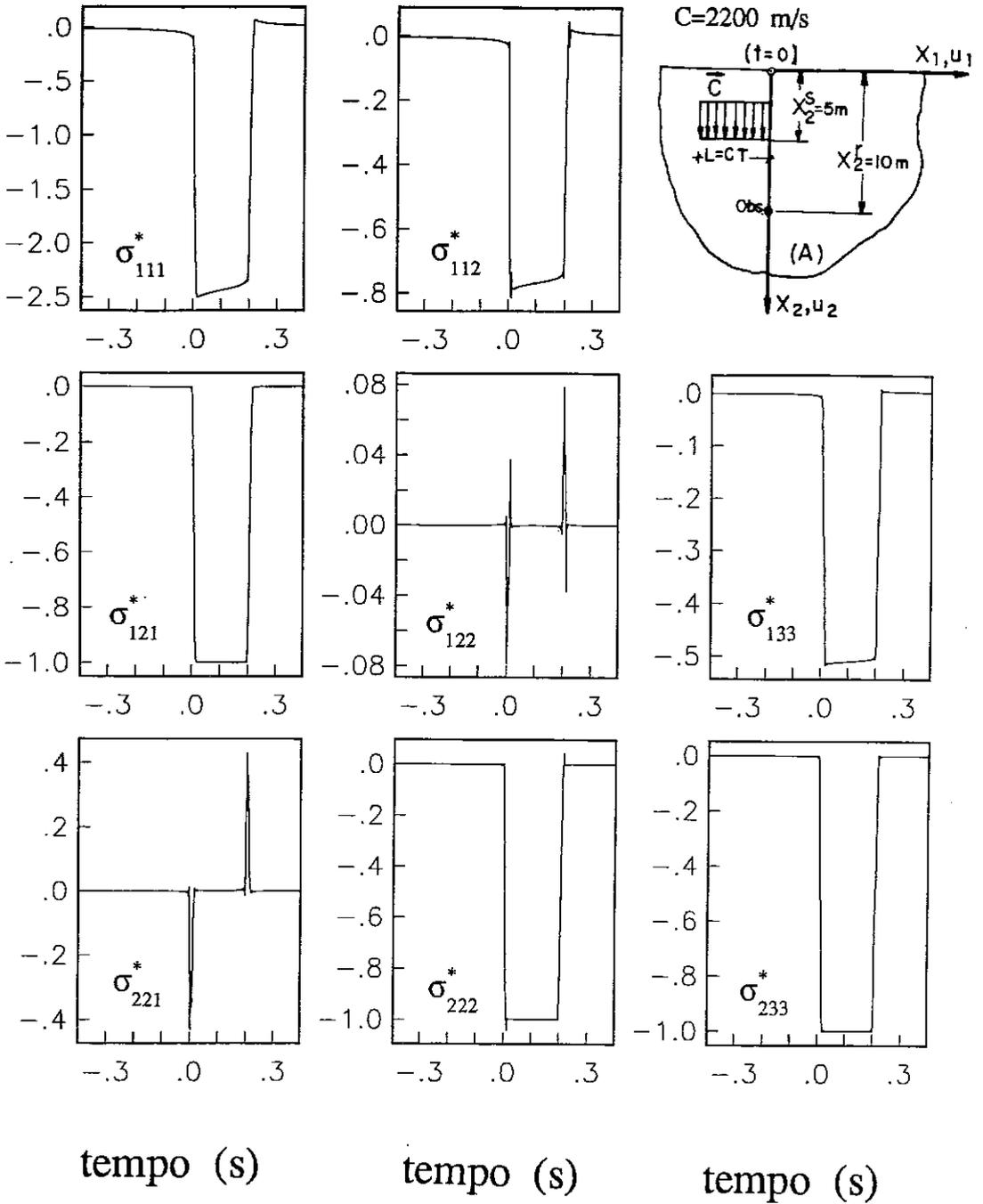


Figura 3.3.5-7 Resposta das componentes normalizadas das tensões σ_{ijk}^* em um ponto de observação $\bar{x}^r = (0, 10\text{ m})$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos que se move com velocidade supersônica constante ($M_\beta = 2.2$) na direção positiva do eixo x_1 . A carga se move a uma profundidade $x_2^s = 5\text{ m}$ em um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O índice k em σ_{ijk}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

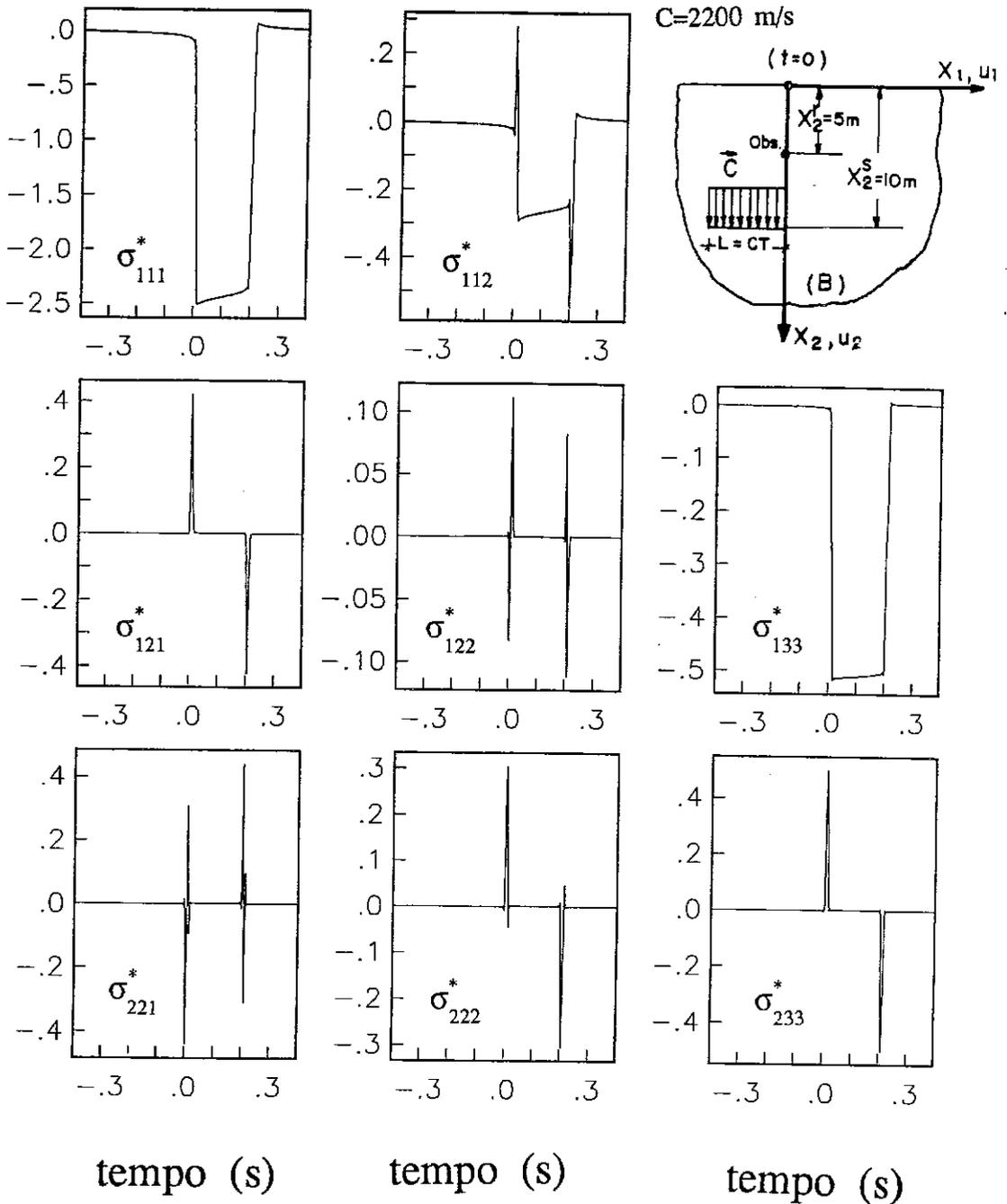


Figura 3.3.5-8 Resposta das componentes normalizadas das tensões σ_{ijk}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 5 \text{ m})$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos que se move com velocidade supersônica constante ($M_\beta = 2.2$) na direção positiva do eixo x_1 . A carga se move a uma profundidade $x_2^s = 10 \text{ m}$ em um semi-espaço viscoelástico uniforme ($\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\beta = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O índice k em σ_{ijk}^* indica a direção na qual a força é aplicada.

3.4. Estudo Paramétrico: Uma Camada sobre o Semi-espaço Visco-elástico

Os efeitos da estratificação na resposta dinâmica de um semi-espaço visco-elástico estratificado, são examinados, a partir de um modelo de análise do subsolo constituído por uma única camada horizontal sobre o semi-espaço. Em particular, são examinados os efeitos nos valores extremos do movimento do solo e nas formas dos pulsos de resposta. As relações de reciprocidade observadas para um semi-espaço visco-elástico uniforme são também testadas para o caso do modelo estratificado. Todas as componentes adimensionais das velocidades \dot{u}_{ij}^* , que estão apresentadas nesta seção, são normalizadas de acordo com a equação (3-13), usando-se, para facilitar as comparações, os parâmetros de um mesmo solo de referência, caracterizado por $\bar{\alpha} = 2000 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$ e $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$.

3.4.1. Efeito da Velocidade da Carga e do Amortecimento do Material nos Valores Extremos do Movimento do Solo

Como uma primeira avaliação dos efeitos da estratificação na resposta devido à ação de cargas móveis, é conveniente considerar os efeitos da estratificação nos valores extremos da velocidade do solo. O modelo do solo considerado que consiste de uma camada sobre o semi-espaço é apresentado na Figura 3.4.1-1(a). Os valores extremos das respostas das componentes das velocidades normalizadas \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* foram calculados, para uma faixa de carga com duração de $T = 0.2$ segundos, que se move na superfície livre do solo com velocidades compreendidas entre $C = 200 \text{ m/s}$ ($M_\beta = 0.2$) e 2200 m/s ($M_\beta = 2.2$), para dois pontos de observação situados no eixo x_2 a 10 m e 2.5 m de profundidade. Os valores extremos das componentes das velocidades \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* , para o ponto de observação que está localizado no interior do semi-espaço ($x_2^r = 10 \text{ m}$), são comparados na Figura 3.4.1-2 com os valores extremos das componentes de velocidades correspondentes,

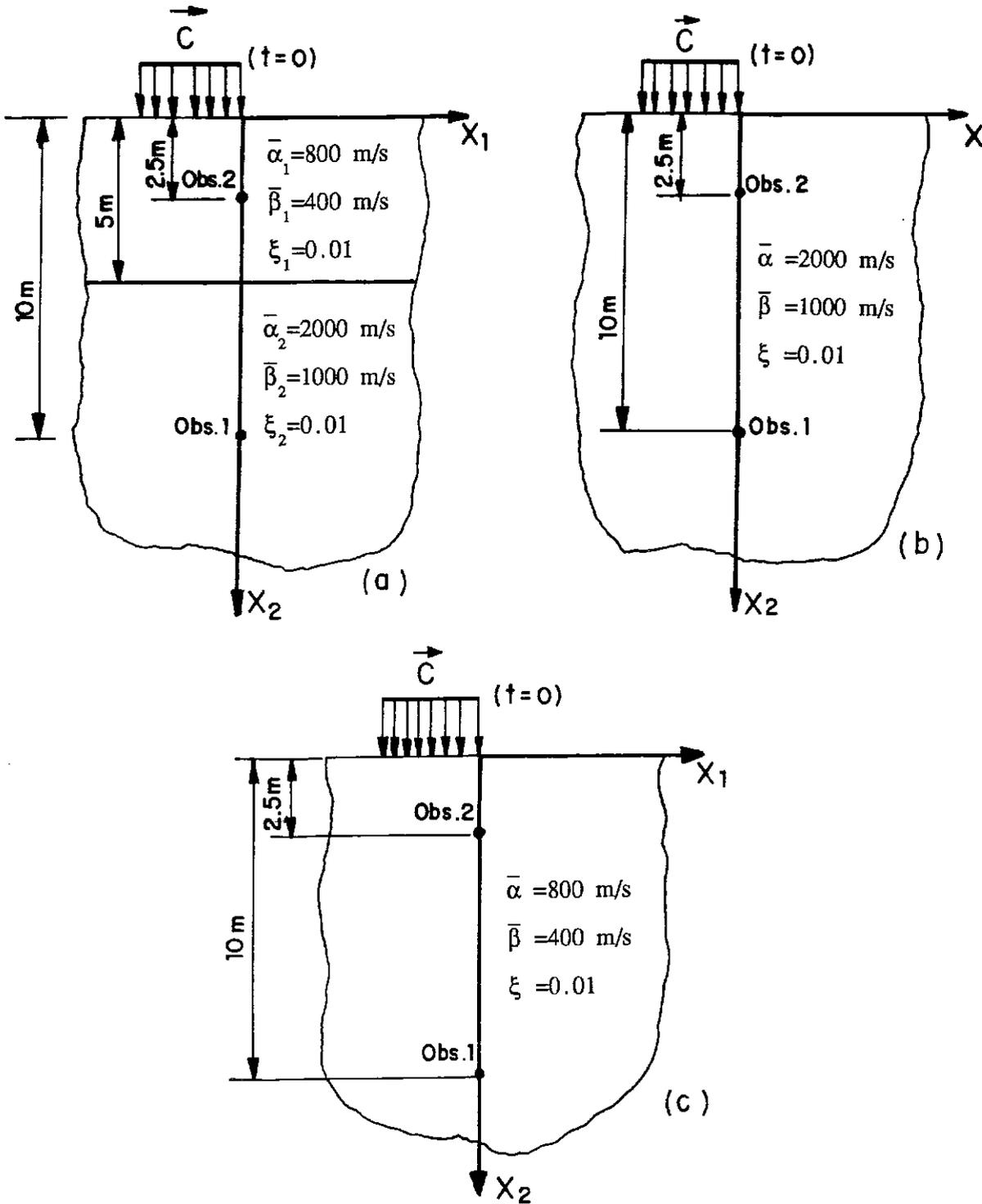
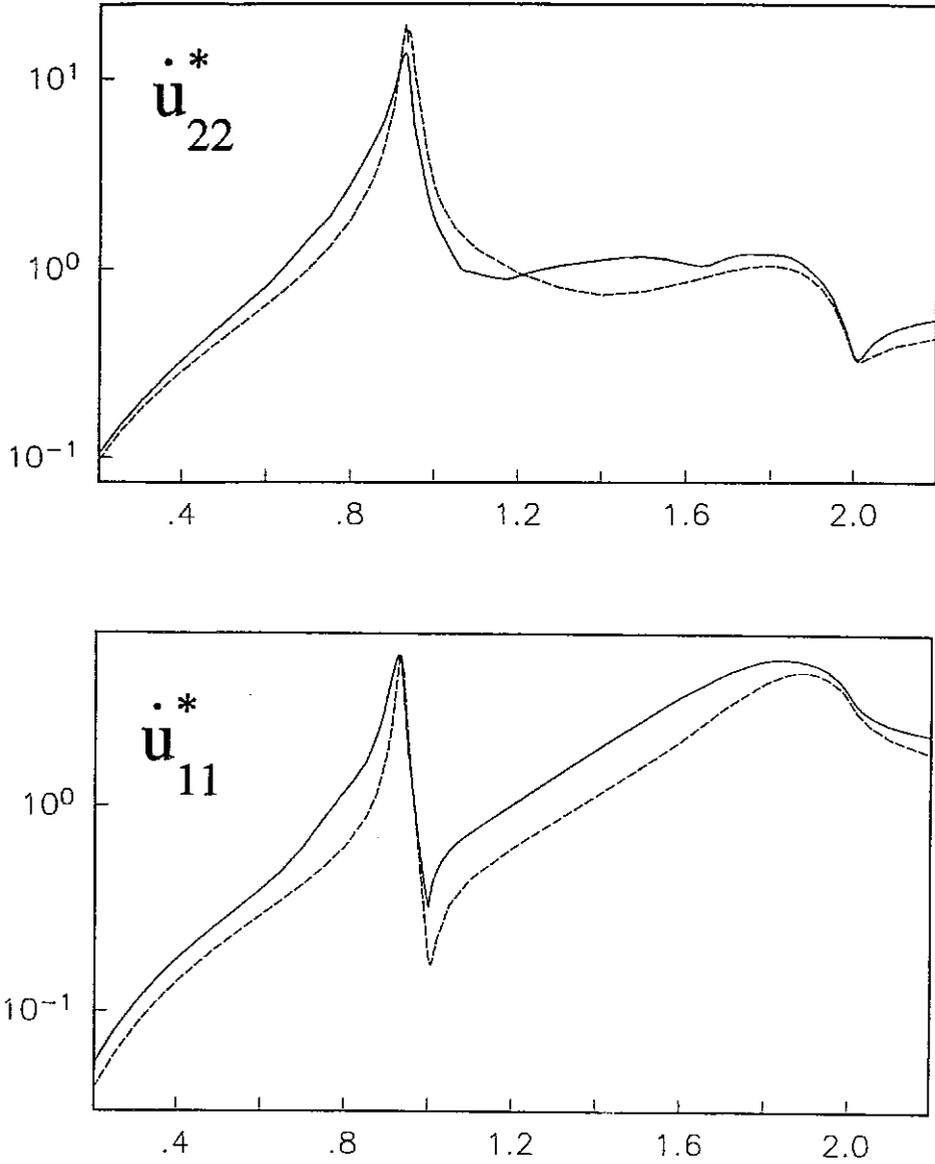


Figure 3.4.1-1 Modelos de solo usados para investigação dos efeitos da estratificação, na resposta de um meio estratificado sob a ação de cargas móveis. (a) Modelo com uma camada sobre um semi-espaço uniforme. (b) Semi-espaço uniforme com as mesmas propriedades do semi-espaço subjacente no modelo de solo mostrado em (a). (c) Semi-espaço visco-elástico uniforme com as mesmas propriedades da camada superior no modelo de solo mostrado em (a).

obtidas para o caso de um modelo de solo constituído unicamente por um semi-espaco uniforme, com as mesmas propriedades do semi-espaco subjacente do modelo estratificado (Figure 3.4.1-1(b)). Os resultados na Figura 3.4.1-2 indicam que os valores extremos da resposta para o meio estratificado podem diferir dos valores extremos correspondentes para o semi-espaco uniforme por um fator que pode ser da ordem de 2.

Os valores extremos das componentes das velocidades para um ponto de observação situado no interior da camada ($x_2^r = 2.5 m$) são mostrados na Figura 3.4.1-3, onde são comparados com os resultados correspondentes obtidos para o caso de um semi-espaco elástico uniforme, com as propriedades do semi-espaco subjacente do modelo estratificado (Figura 3.4.1-1(b)) ou com as propriedades da camada (Figura 3.4.1-1(c)). Pode-se concluir, a partir da análise da Figura 3.4.1-3, que os efeitos associados à estratificação são bastante significativos para estações de observação localizadas dentro da camada. Neste caso, verifica-se que diferenças por fatores da ordem de 10 podem ser obtidas para algumas velocidades da carga. Os efeitos da quantidade de amortecimento do material, considerada no interior da camada, nos valores extremos das velocidades do movimento do solo são ilustrados na Figura 3.4.1-4. Dois modelos são considerados: o primeiro modelo corresponde ao mostrado na Figura 3.4.1-1(a), o segundo modelo é idêntico ao primeiro, com exceção dos valores dos coeficientes de amortecimento na camada, para os quais são atribuídos os seguintes valores $\xi_{\alpha 1} = \xi_{\beta 1} = 0.05$. O ponto de observação está localizado no interior da camada a uma profundidade de $2.5 m$. Os resultados na Figura 3.4.1-4 indicam que os efeitos do amortecimento do material são mais significativos na vizinhança das velocidades das ondas de Rayleigh para a camada (considerada como um semi-espaco) e para o semi-espaco.



Velocidade da Carga (M_β)

Figura 3.4.1-2. Efeito da velocidade da carga nos valores extremos das respostas das componentes adimensionais das velocidades \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* , para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move na superfície de um meio estratificado constituído por uma camada sobre o semi-espaço (Fig. 3.4.1-1a) e na superfície de um semi-espaço uniforme (Fig. 3.4.1-1b). Os valores extremos das velocidades são representados graficamente em escala logarítmica versus o número Mach $M_\beta = C/\bar{\beta}$ ($\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$), para um ponto de observação localizado no semi-espaço subjacente $\vec{x}^r = (0, 10 \text{ m})$. Os resultados para o meio estratificado são mostrados com linhas contínuas. Os resultados correspondentes para um semi-espaço uniforme com as propriedades do semi-espaço subjacente do meio estratificado (Fig. 3.4.1-1b) são representados por linhas tracejadas.

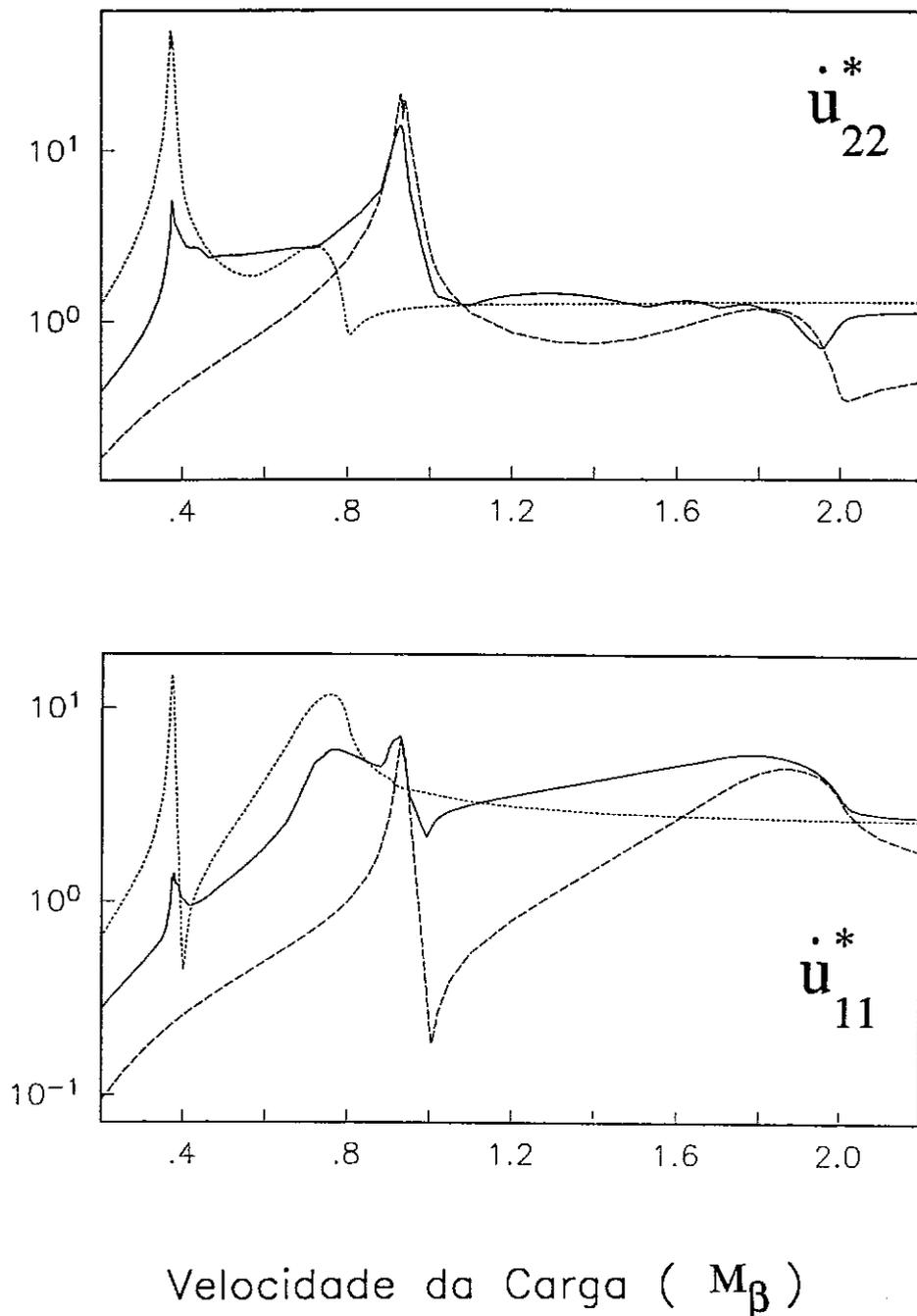


Figura 3.4.1-3. Efeito da velocidade da carga nos valores extremos das respostas das componentes adimensionais das velocidades \dot{u}_{11}^* e \dot{u}_{22}^* , para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move na superfície de um meio estratificado constituído por uma camada sobre o semi-espaço (Fig. 3.4.1-1a) e nas superfícies dos semi-espaços uniformes mostrados nas Figuras 3.4.1-1b e 3.4.1-1c. Os valores extremos das velocidades são representados graficamente em escala logarítmica com linhas contínuas versus o número Mach $M_{\beta} = C/\bar{\beta}$ ($\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$), para um ponto de observação localizado no interior da camada $\bar{x}^r = (0, 2.5 \text{ m})$ (Fig. 3.4.1-1a). Os resultados correspondentes para os semi-espaços uniformes com as propriedades do semi-espaço subjacente do meio estratificado (Fig. 3.4.1-1b) ou da camada (Fig. 3.4.1-1c) são mostrados, respectivamente, com linhas tracejadas e pontilhadas.

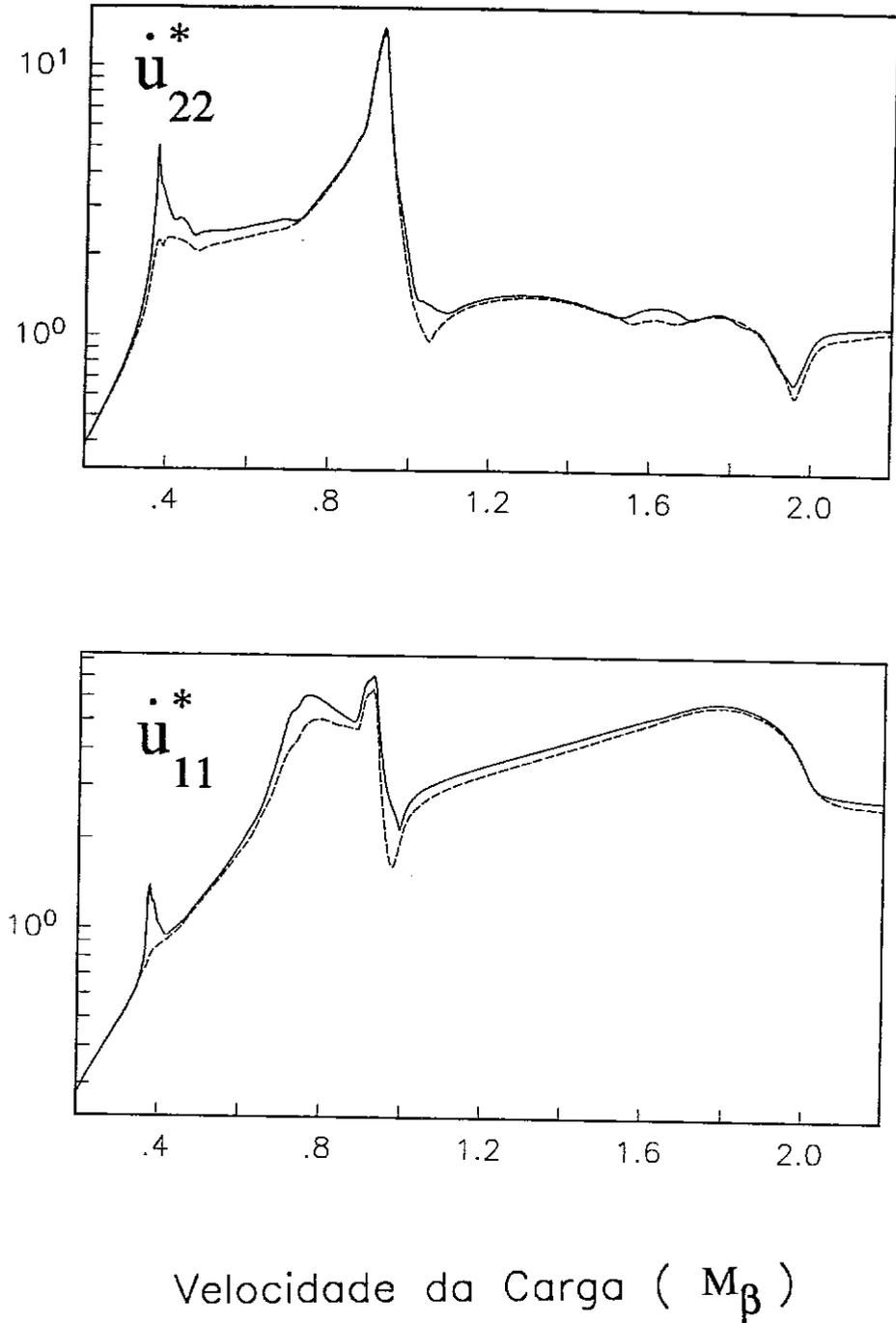


Figura 3.4.1-4. Efeito do amortecimento do material dentro da camada, nos valores extremos das respostas das componentes adimensionais das velocidades \dot{u}_{11}^* and \dot{u}_{22}^* , em um ponto de observação localizado no interior da camada $\vec{x}^r = (0, 2.5m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move na superfície de dois modelos de solos, constituídos por uma camada sobreposta a um semi-espaco. Os valores extremos das velocidades são representados graficamente em escala logarítmica com linhas contínuas versus o número Mach $M_\beta = C/\bar{\beta}$ ($\bar{\beta} = 1000m/s$). As linhas contínuas representam os resultados para o modelo de solo mostrado na Figura 3.4.1-1(a) com $\xi_{\alpha 1} = \xi_{\beta 1} = 0.01$. As linhas tracejadas correspondem a um modelo de solo idêntico ao anterior, exceto que $\xi_{\alpha 1} = \xi_{\beta 1} = 0.05$.

3.4.2. Efeito da Velocidade da Carga na Forma dos Pulsos das Respostas

Os efeitos da velocidade da carga na forma dos pulsos das componentes das velocidades são estudados para um semi-espaco estratificado, constituído por uma camada horizontal sobre o semi-espaco visco-elástico, igual ao considerado na seção anterior e mostrado na Figura 3.4.1-1(a). São consideradas várias velocidades de cargas, expressas em termos de números Mach, relativos à velocidade da onda de cisalhamento $M_\beta = C/\bar{\beta}$ (com relação ao semi-espaco subjacente), para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move sobre a superfície livre $x_2 = 0$ do meio estratificado. Os resultados são obtidos em pontos de observação localizados no interior do semi-espaco, $(x_1^r, x_2^r) = (0, 10\text{ m})$, e no centro da camada, $(x_1^r, x_2^r) = (0, 2.5\text{ m})$.

As componentes normalizadas das velocidades, determinadas em $x_2^r = 10\text{ m}$, para as velocidades da carga correspondentes a $M_\beta = 0.40, 0.80, 0.932, 1.0, 1.4$ e 2.0 , são mostradas com linhas contínuas, nas Figuras 3.4.2-1 a 3.4.2-5. Nestas figuras são também apresentados, com linhas pontilhadas, os resultados correspondentes ao caso de um semi-espaco visco-elástico uniforme com as propriedades do semi-espaco subjacente do meio estratificado, mostrado na Figura 3.4.1-1(b). Pode-se notar, que os resultados para o meio estratificado apresentam oscilações que não aparecem para o caso de um semi-espaco uniforme. Pode ser ainda observado que a forma dos pulsos depende fortemente da velocidade da carga.

Os resultados obtidos para o ponto de observação situado no interior da camada ($x_2^r = 2.5\text{ m}$), para velocidades da carga correspondentes a $M_\beta = 0.372, 0.40, 0.80, 0.932, 1.0$ e 2.0 , são apresentados nas Figuras 3.4.2-6 a 3.4.2-10. Estes resultados indicam que os componentes de alta frequência do movimento são mais expressivos na camada do que no semi-espaco.

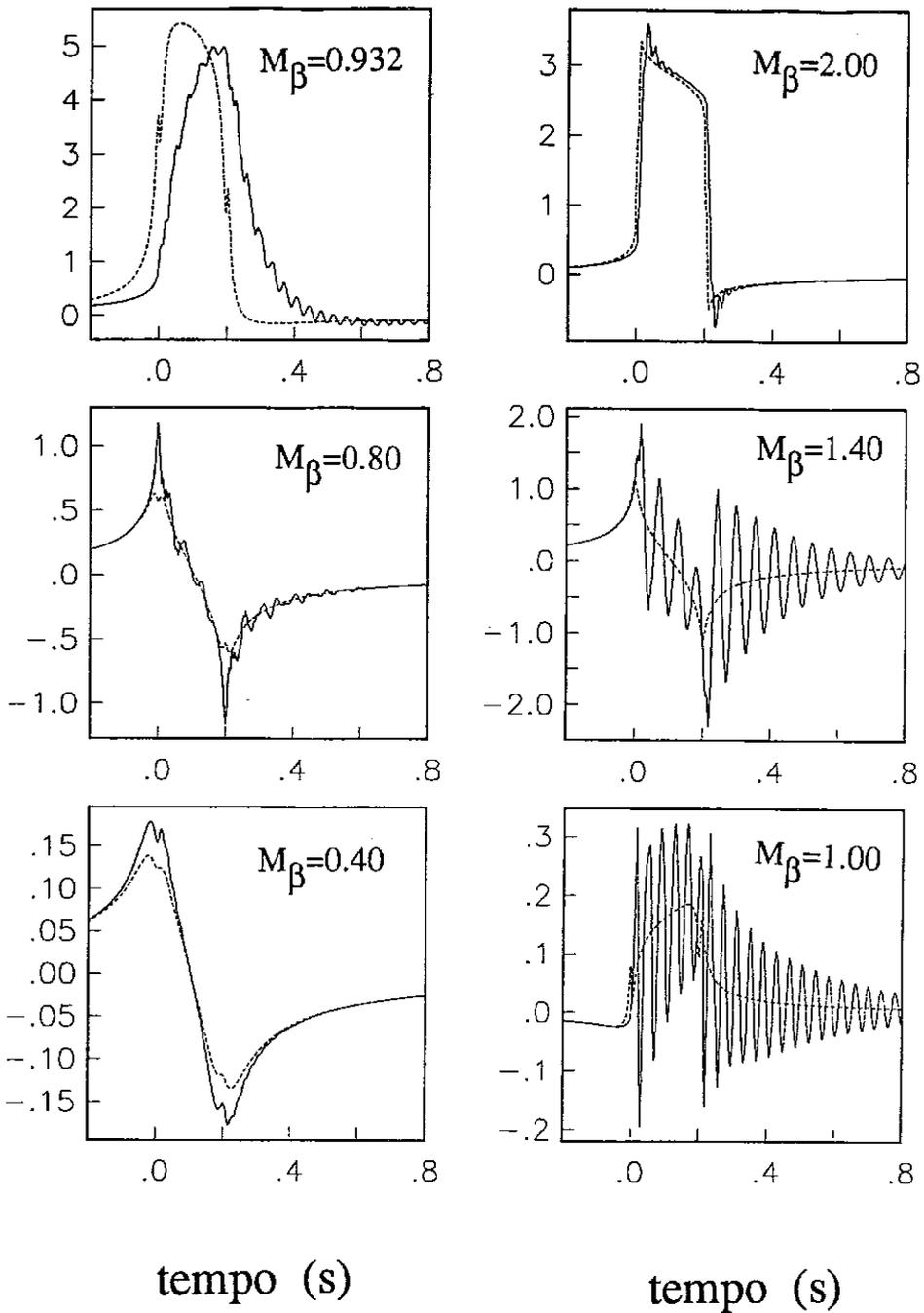


Figure 3.4.2-1. Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{11}^* , em um ponto de observação localizado no semi-espaco subjacente $\vec{x}^r = (0, 10 m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante ($M_\beta = C/\bar{\beta}$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$) na superfície de um meio estratificado constituído por uma camada sobre o semi-espaco. As linhas contínuas representam os resultados para o modelo de solo mostrado na Figura 3.4.1-1a. Os resultados correspondentes para um semi-espaco uniforme com as mesmas propriedades do semi-espaco subjacente do meio estratificado (Fig. 3.4.1-1b) são mostrados com linhas tracejadas.

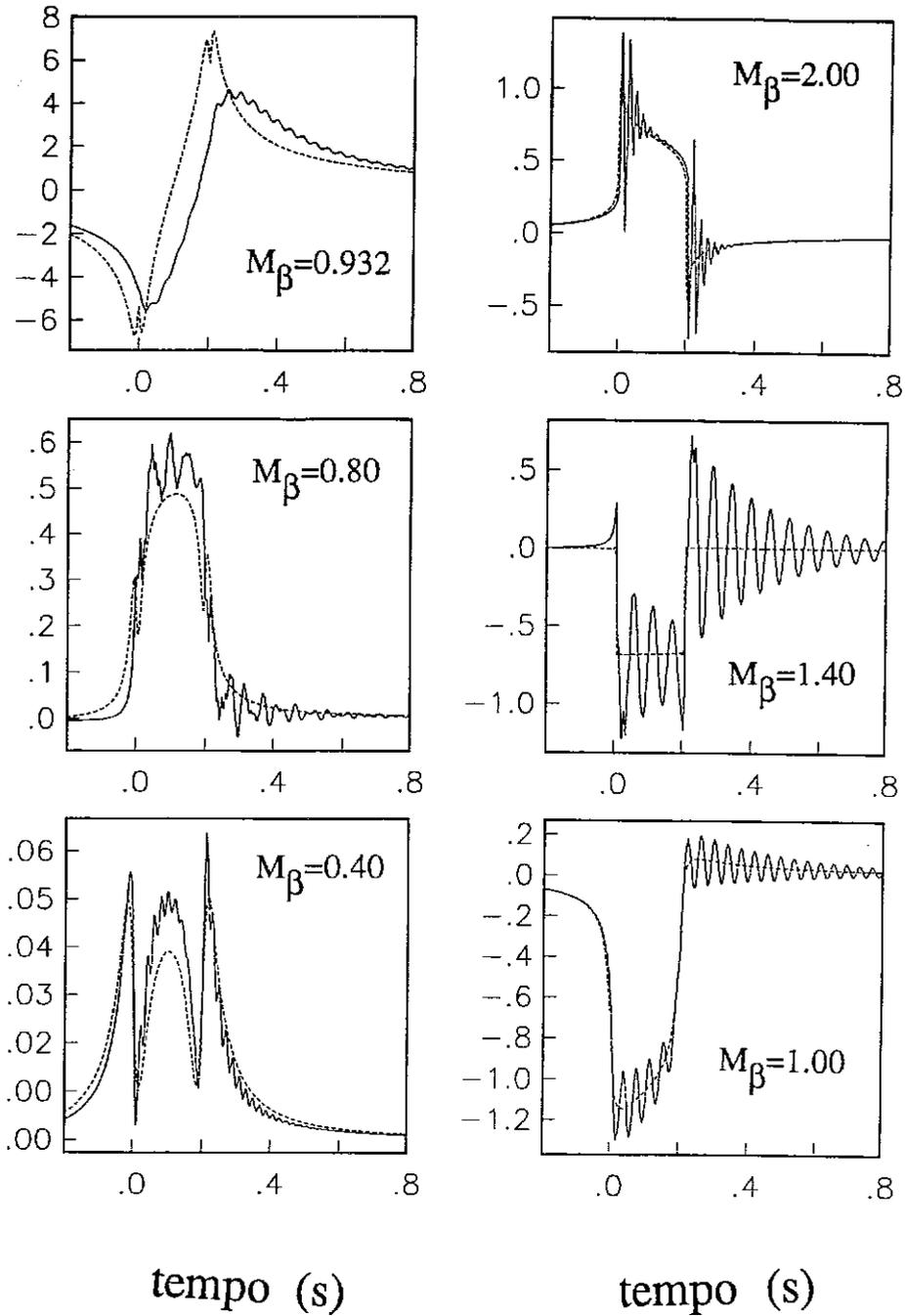


Figura 3.4.2-2. Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{12}^* , em um ponto de observação localizado no semi-espaço subjacente $\bar{x}^r = (0, 10 m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante ($M_\beta = C/\beta$, $\beta = 1000 m/s$) na superfície de um meio estratificado constituído por uma camada sobre o semi-espaço. As linhas contínuas representam os resultados para o modelo de solo mostrado na Figura 3.4.1-1a. Os resultados correspondentes para um semi-espaço uniforme com as mesmas propriedades do semi-espaço subjacente do meio estratificado (Fig. 3.4.1-1b) são mostrados com linhas tracejadas.

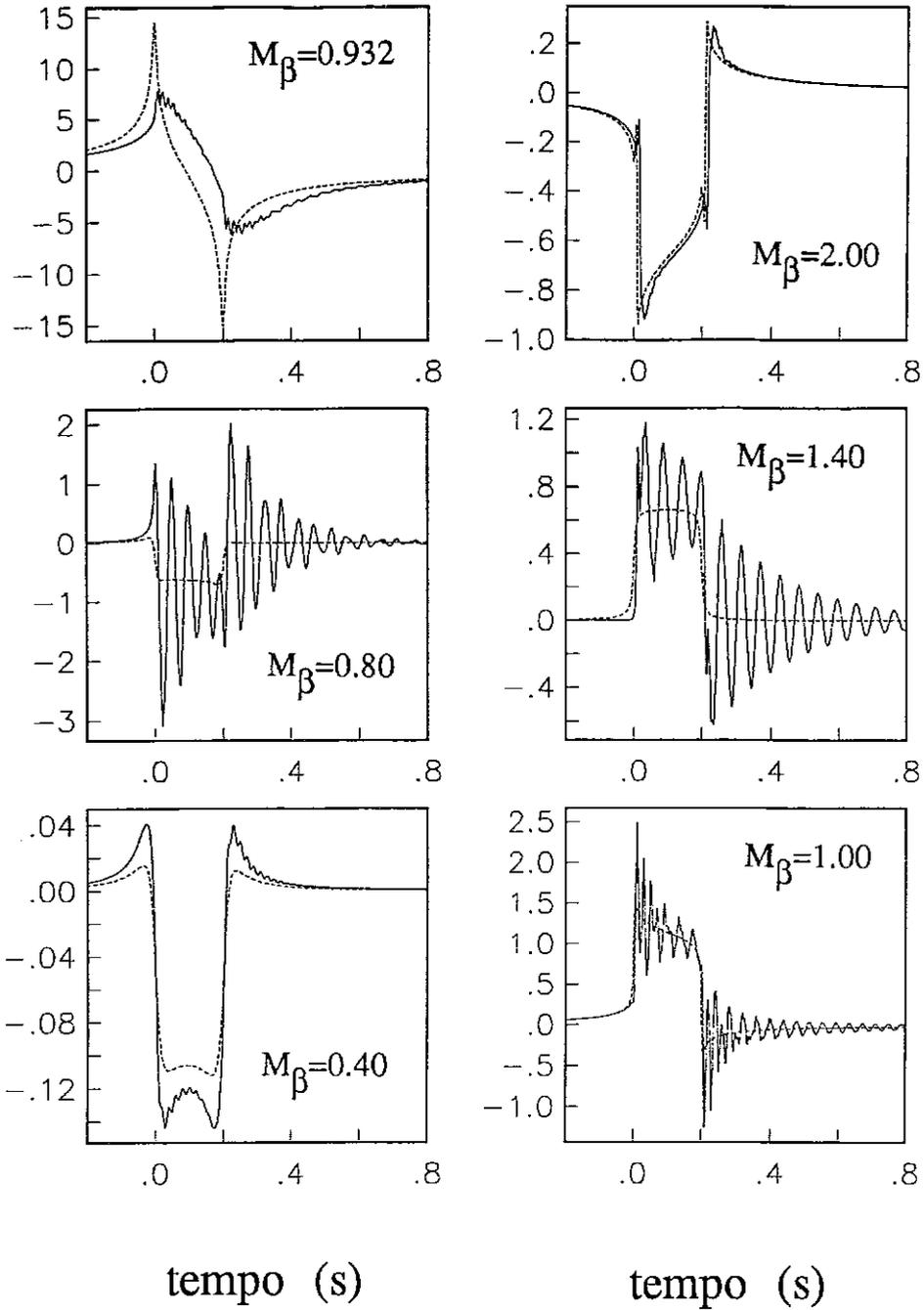


Figura 3.4.2-3. Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{21}^* , em um ponto de observação localizado no semi-espaço subjacente $\vec{x}^r = (0, 10 m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante ($M_\beta = C/\bar{\beta}$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$) na superfície de um meio estratificado constituído por uma camada sobre o semi-espaço. As linhas contínuas representam os resultados para o modelo de solo mostrado na Figura 3.4.1-1a. Os resultados correspondentes para um semi-espaço uniforme com as mesmas propriedades do semi-espaço subjacente do meio estratificado (Fig. 3.4.1-1b) são mostrados com linhas tracejadas.

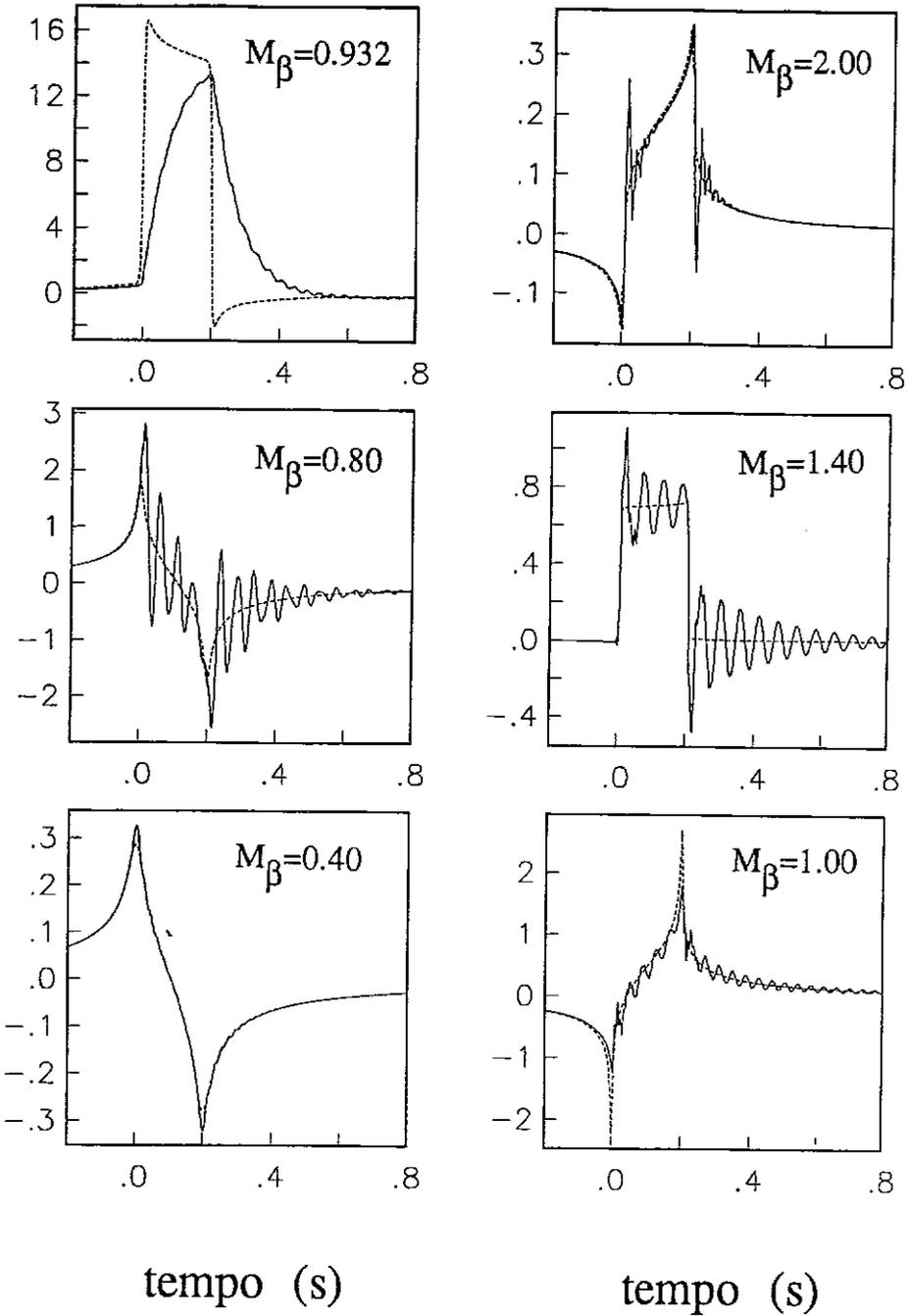


Figura 3.4.2-4. Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{22}^* , em um ponto de observação localizado no semi-espaço subjacente $\vec{x}^r = (0, 10 m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante ($M_\beta = C/\bar{\beta}$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$) na superfície de um meio estratificado constituído por uma camada sobre o semi-espaço. As linhas contínuas representam os resultados para o modelo de solo mostrado na Figura 3.4.1-1a. Os resultados correspondentes para um semi-espaço uniforme com as mesmas propriedades do semi-espaço subjacente do meio estratificado (Fig. 3.4.1-1b) são mostrados com linhas tracejadas.

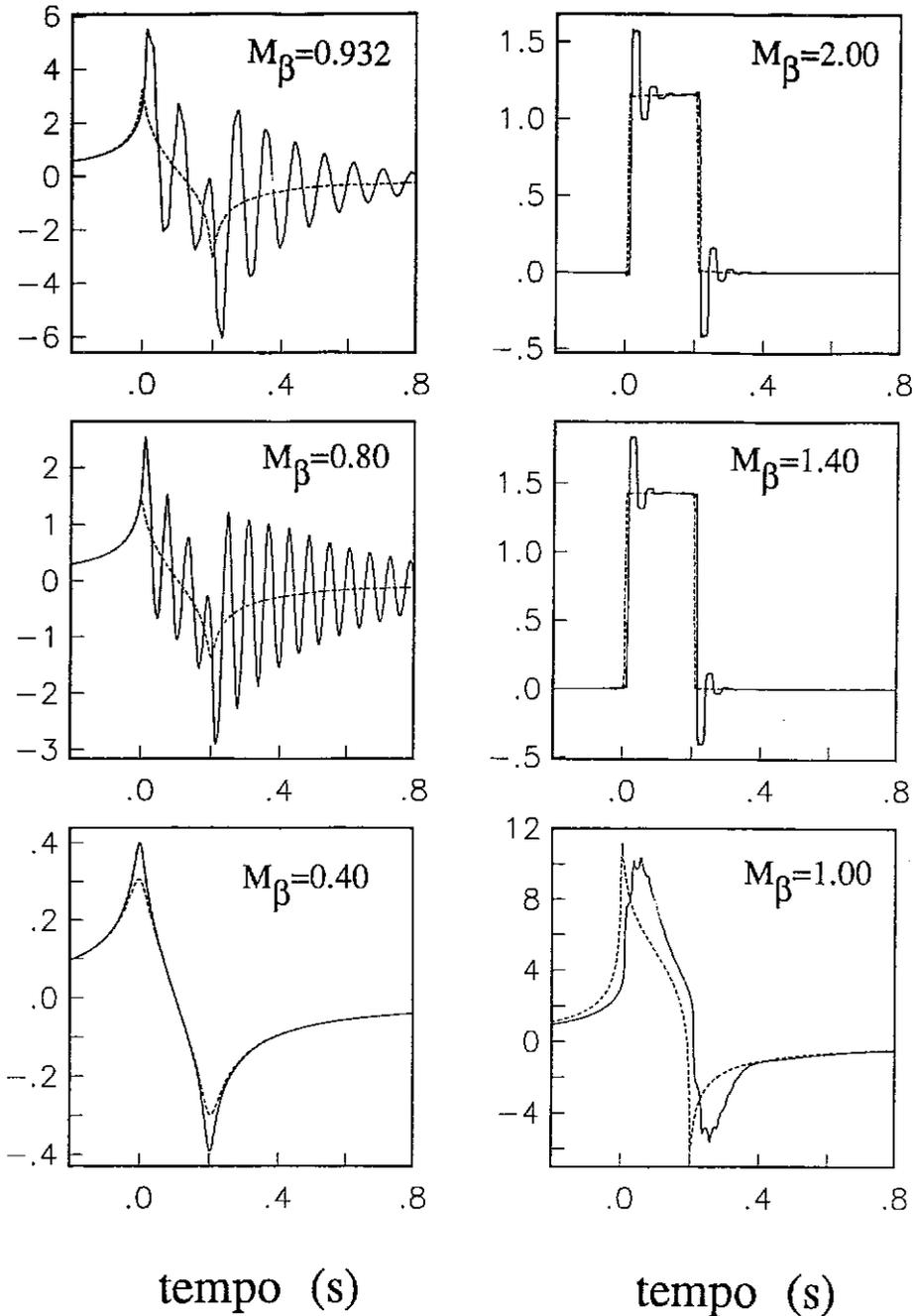


Figura 3.4.2-5. Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{33}^* , em um ponto de observação localizado no semi-espaço subjacente $\vec{x}^r = (0, 10 m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante ($M_\beta = C/\bar{\beta}$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$) na superfície de um meio estratificado constituído por uma camada sobre o semi-espaço. As linhas contínuas representam os resultados para o modelo de solo mostrado na Figura 3.4.1-1a. Os resultados correspondentes para um semi-espaço uniforme com as mesmas propriedades do semi-espaço subjacente do meio estratificado (Fig. 3.4.1-1b) são mostrados com linhas tracejadas.

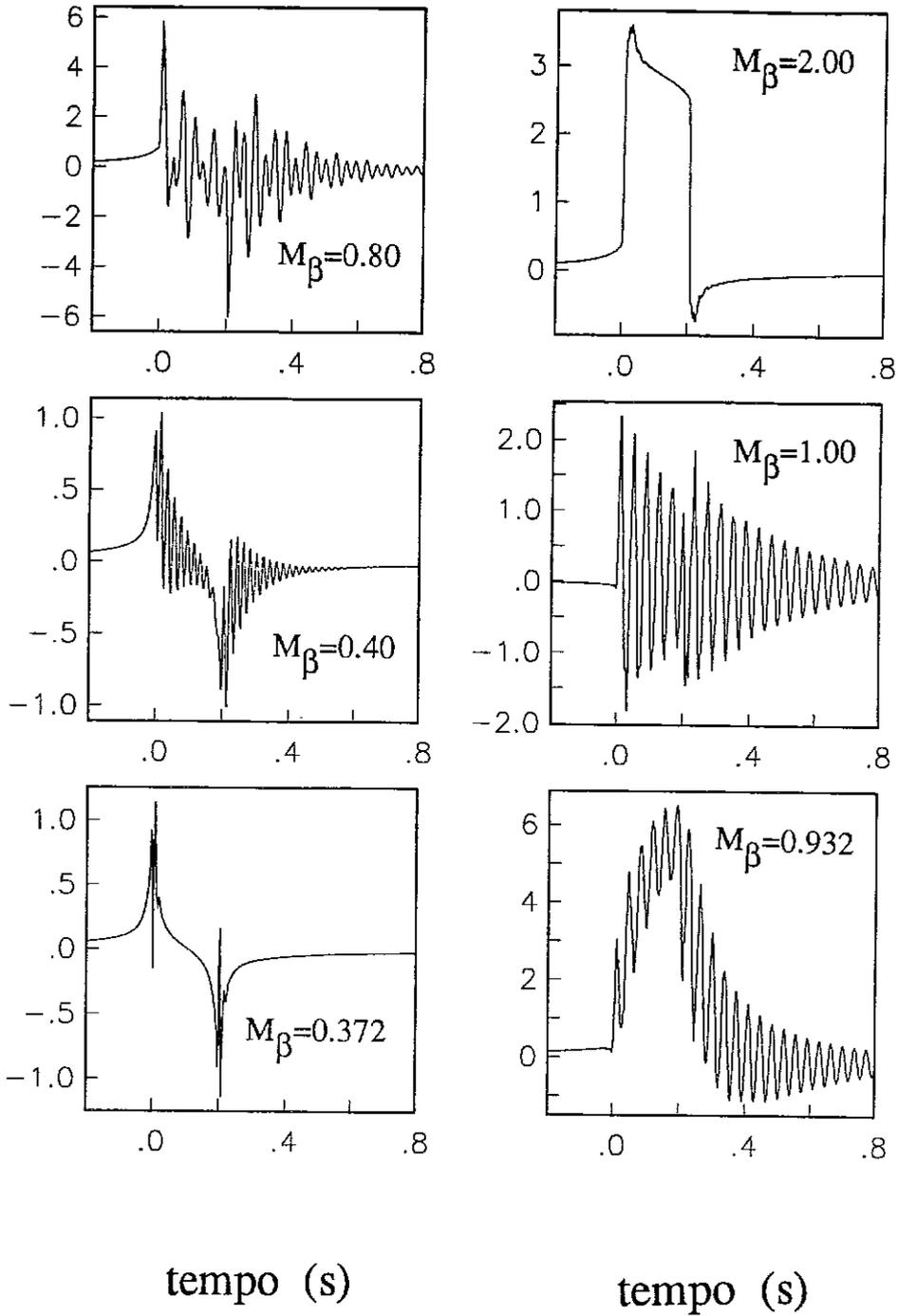


Figura 3.4.2-6. Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade \dot{u}_{11}^* , em um ponto de observação localizado no interior da camada $\vec{x}^r = (0, 2.5 m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante ($M_\beta = C/\bar{\beta}$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$) na superfície de um meio estratificado, constituído por uma camada sobre o semi-espaço, mostrado na Figura 3.4.1-1a.

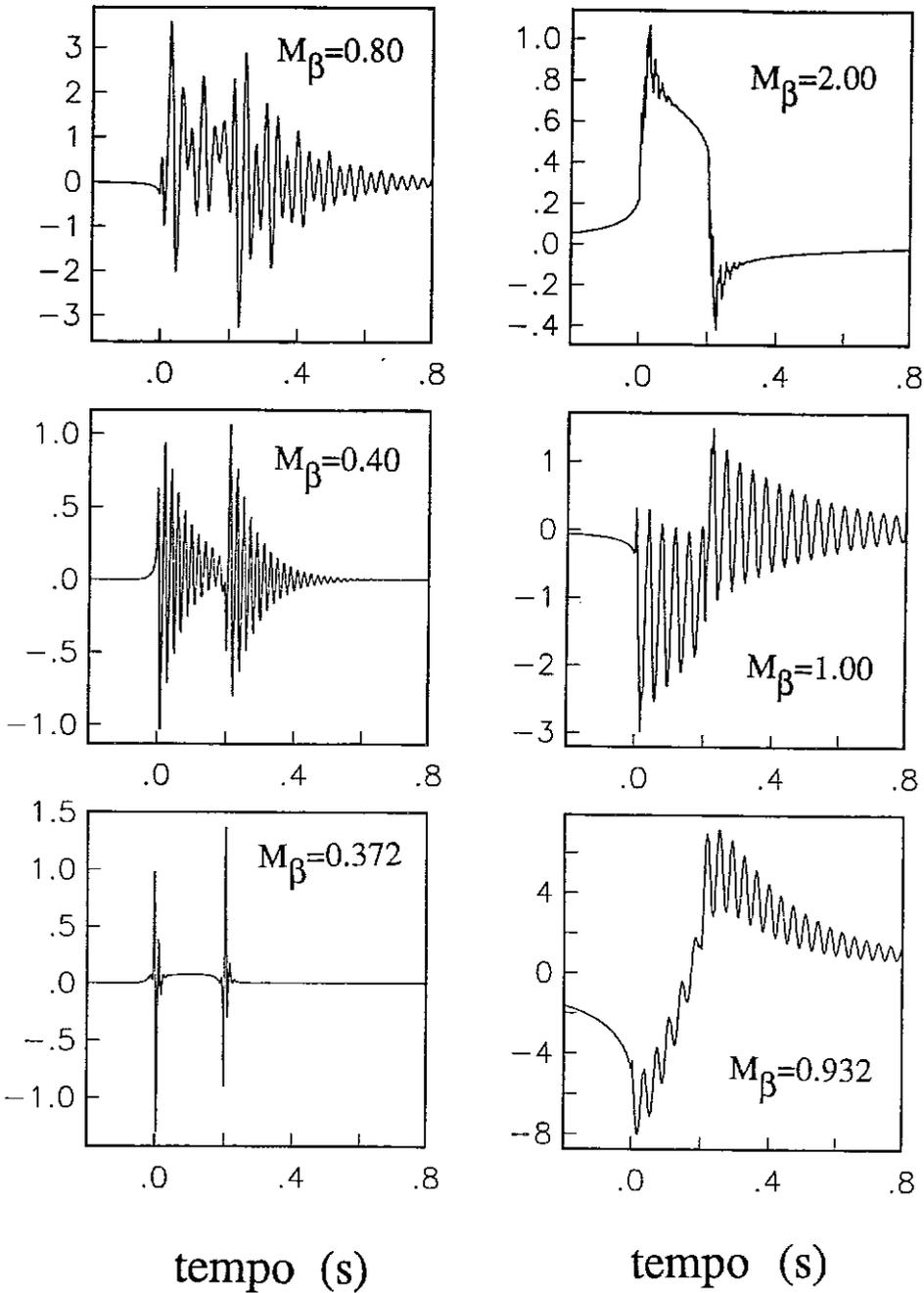


Figura 3.4.2-7. Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade u_{12}^* , em um ponto de observação localizado no interior da camada $\vec{x}^r = (0, 2.5 m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante ($M_\beta = C/\bar{\beta}$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$) na superfície de um meio estratificado, constituído por uma camada sobre o semi-espaço, mostrado na Figura 3.4.1-1a.

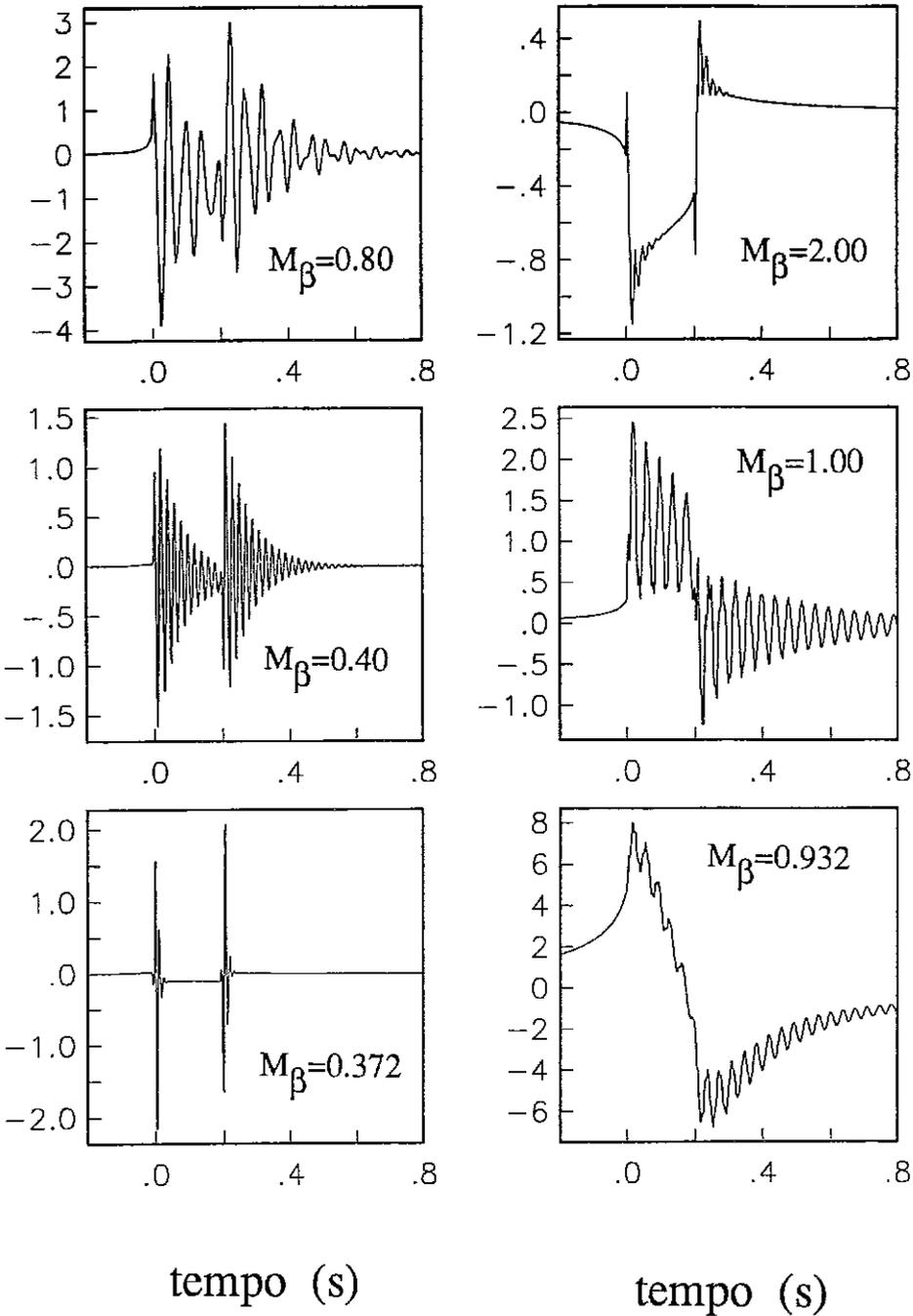


Figura 3.4.2-8. Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade \hat{u}_{21}^* , em um ponto de observação localizado no interior da camada $\bar{x}^r = (0, 2.5 m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante ($M_\beta = C/\beta$, $\beta = 1000 m/s$) na superfície de um meio estratificado, constituído por uma camada sobre o semi-espaço, mostrado na Figura 3.4.1-1a.

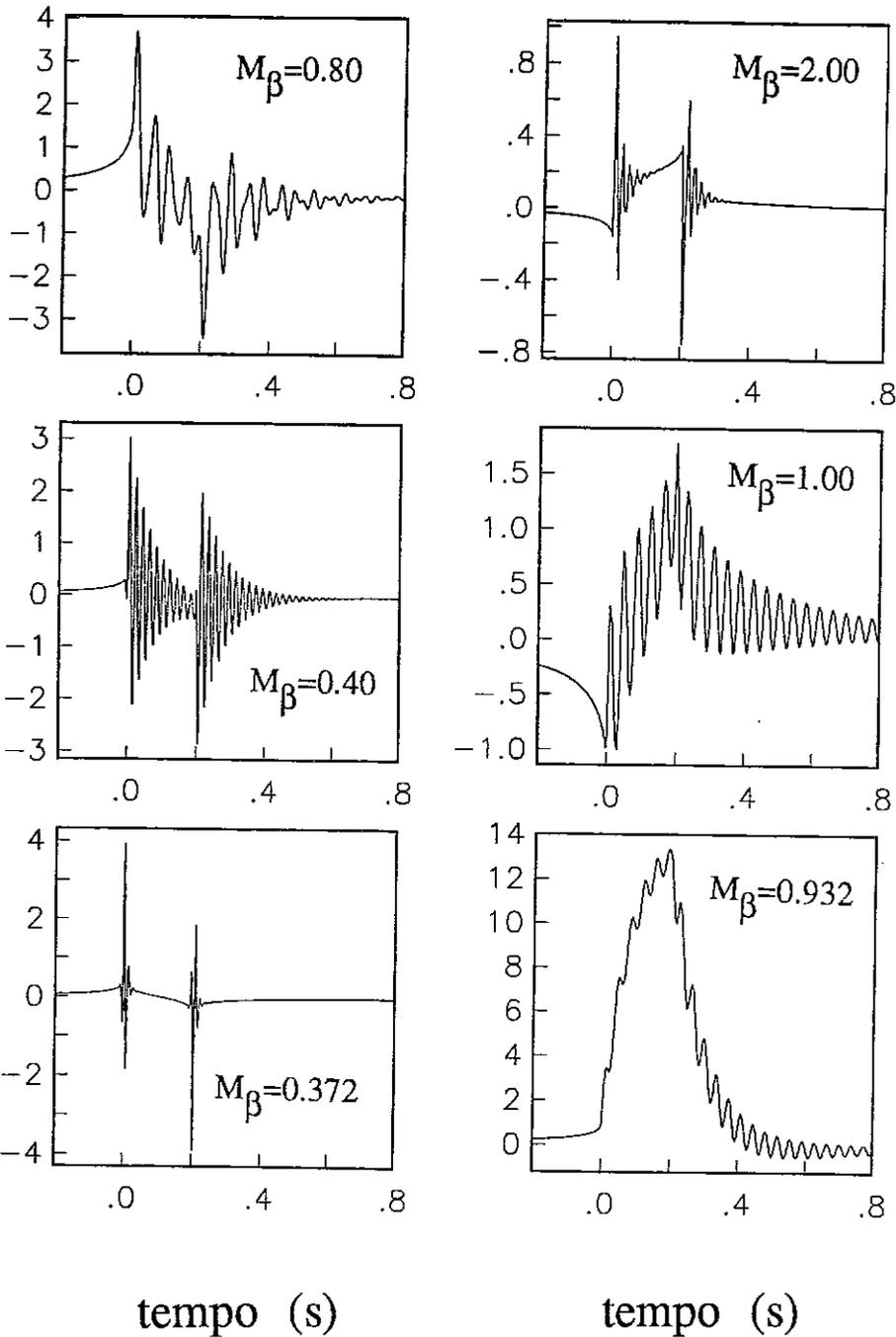


Figura 3.4.2-9. Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade \hat{u}_{22}^* , em um ponto de observação localizado no interior da camada $\vec{x}^r = (0, 2.5 m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante ($M_\beta = C/\beta$, $\beta = 1000 m/s$) na superfície de um meio estratificado, constituído por uma camada sobre o semi-espaço, mostrado na Figura 3.4.1-1a.

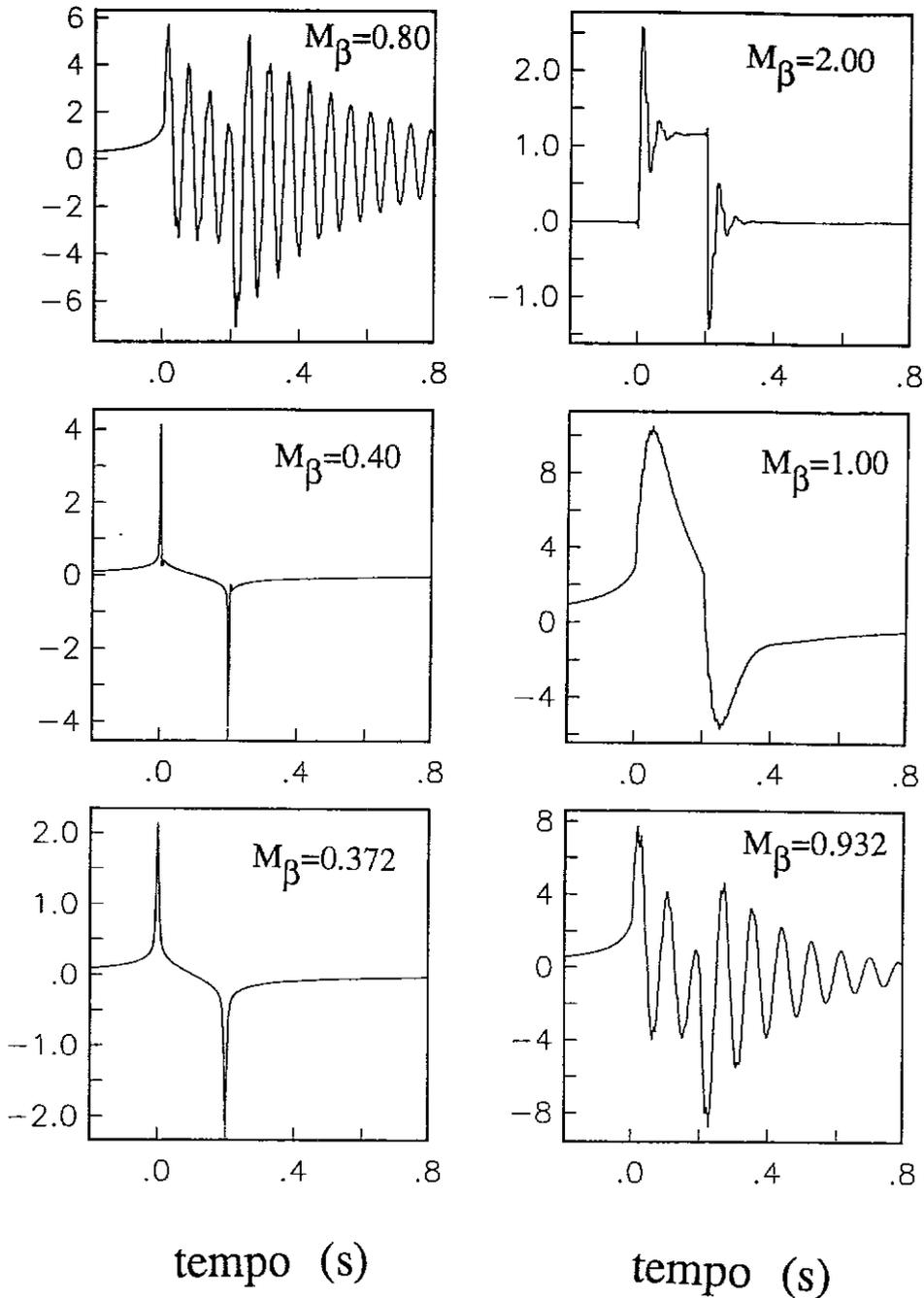


Figure 3.4.2-10. Efeito da velocidade da carga na forma do pulso de resposta da componente normalizada da velocidade u_{33}^* , em um ponto de observação localizado no interior da camada $\vec{x}^r = (0, 2.5 m)$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante ($M_\beta = C/\bar{\beta}$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$) na superfície de um meio estratificado, constituído por uma camada sobre o semi-espço, mostrado na Figura 3.4.1-1a.

3.4.3. Relações de Reciprocidade

As relações de reciprocidade, que surgem ao se alternarem as posições da carga e do ponto de observação, são testadas para o modelo constituído por uma camada sobre o semi-espaco, que foi considerado nas duas seções anteriores. Duas configurações da posição da carga e do ponto de observação foram consideradas. Na configuração (A), a faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos se move na superfície livre do meio estratificado $x_2^s = 0$ e o ponto de observação está localizado no interior do semi-espaco subjacente em $(x_1^r, x_2^r) = (0, 10 m)$. Na configuração (B), o ponto de observação se encontra na superfície em $(x_1^r, x_2^r) = (0, 0 m)$, enquanto que a faixa de carga se move a uma profundidade $x_2^s = 10 m$. São consideradas as seguintes velocidades da carga: $C = 800, 930$ e $2200 m/s$. As componentes normalizadas das velocidades, que foram calculadas para ambas as configurações, são mostradas nas Figuras 3.4.3-1 a 3.4.3-6. Pode-se notar que as mesmas relações de reciprocidade que foram encontradas na Seção 3.3.5, para o caso de um semi-espaco visco-elástico uniforme, são também verificadas.

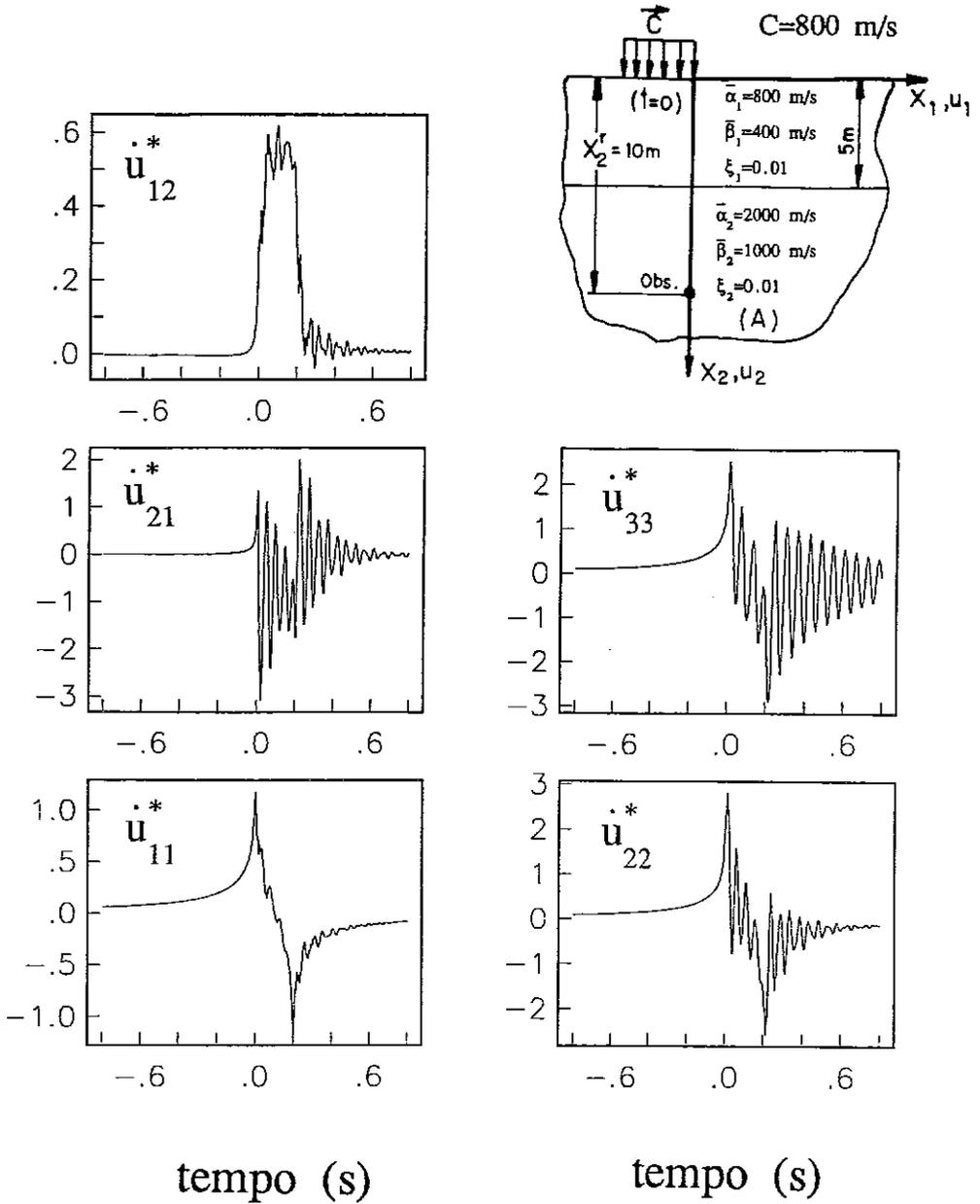


Figura 3.4.3-1. Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* em um ponto de observação localizado no interior do semi-espaço subjacente $\vec{x}^r = (0, 10 \text{ m})$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante $C = 800 \text{ m/s}$ na superfície de um meio estratificado constituído por uma camada sobre o semi-espaço. O índice j em \dot{u}_{ij}^* denota a direção da aplicação da faixa de carga distribuída.

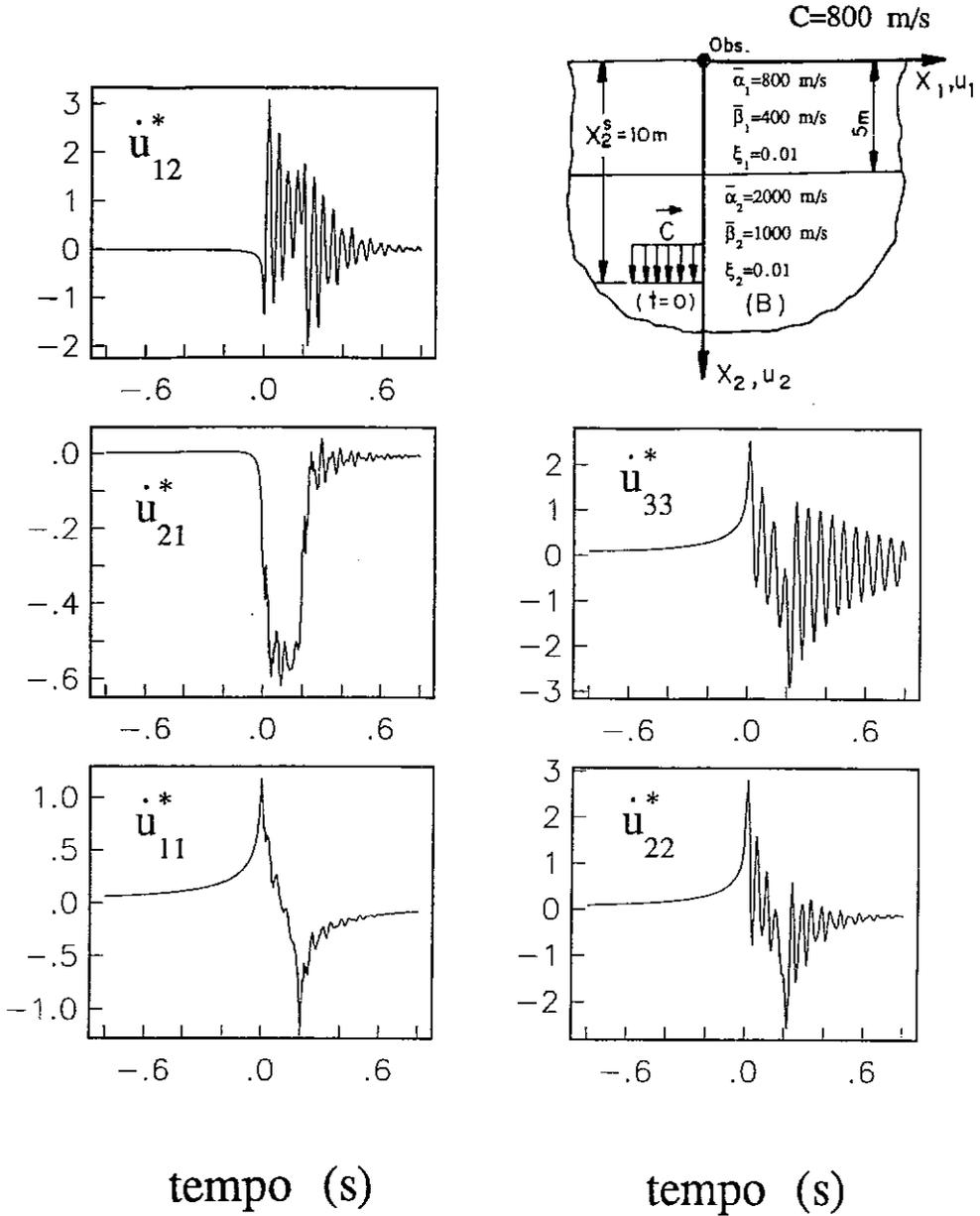


Figura 3.4.3-2. Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* , em um ponto de observação localizado na superfície $\vec{x}^r = (0, 0\text{m})$ de um meio estratificado, constituído por uma camada sobre o semi-espaço, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante $C = 800\text{ m/s}$ a uma profundidade $\vec{x}^s = (0, 10\text{m})$ no semi-espaço subjacente. O índice j em \dot{u}_{ij}^* denota a direção da aplicação da faixa de carga distribuída.

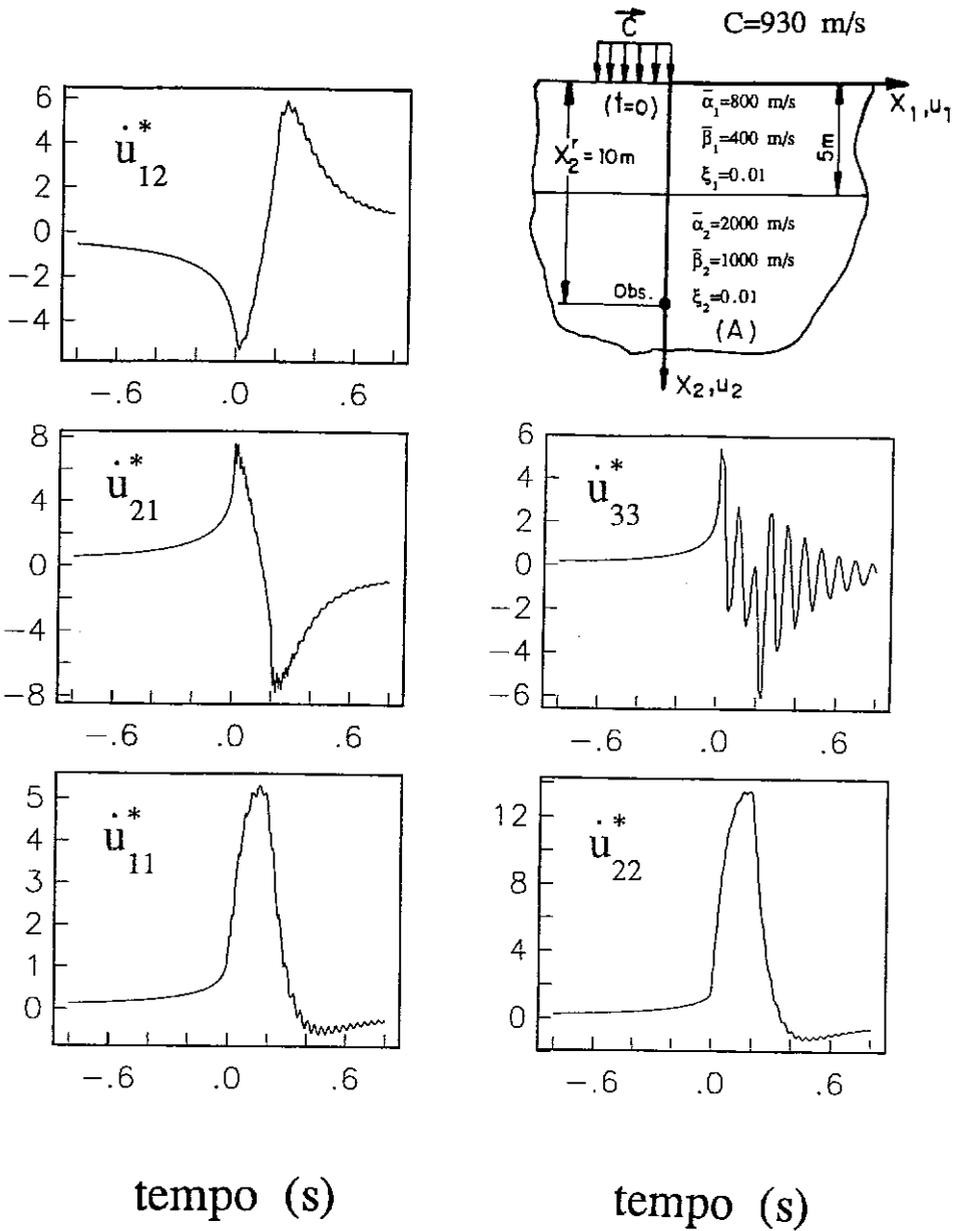


Figura 3.4.3-3. Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* em um ponto de observação localizado no interior do semi-espaço subjacente $\vec{x}^r = (0, 10 \text{ m})$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante $C = 930 \text{ m/s}$ na superfície de um meio estratificado constituído por uma camada sobre o semi-espaço. O índice j em \dot{u}_{ij}^* denota a direção da aplicação da faixa de carga distribuída.

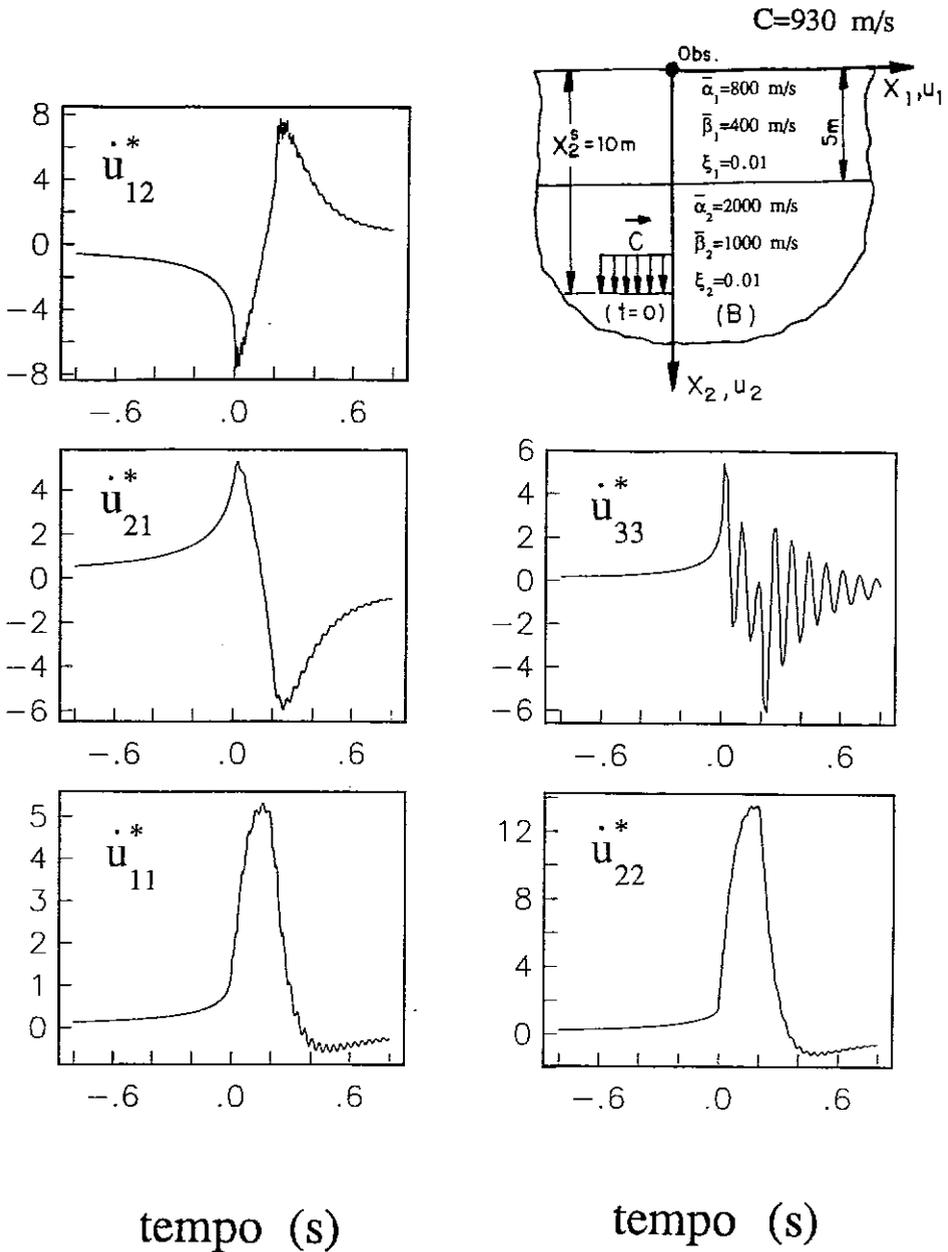


Figura 3.4.3-4. Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* em um ponto de observação localizado na superfície $\vec{x}^r = (0, 0 \text{ m})$ de um meio estratificado, constituído por uma camada sobre o semi-espaço, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante $C = 930 \text{ m/s}$ a uma profundidade $\vec{x}^s = (0, 10 \text{ m})$ no semi-espaço subjacente. O índice j em \dot{u}_{ij}^* denota a direção da aplicação da faixa de carga distribuída.

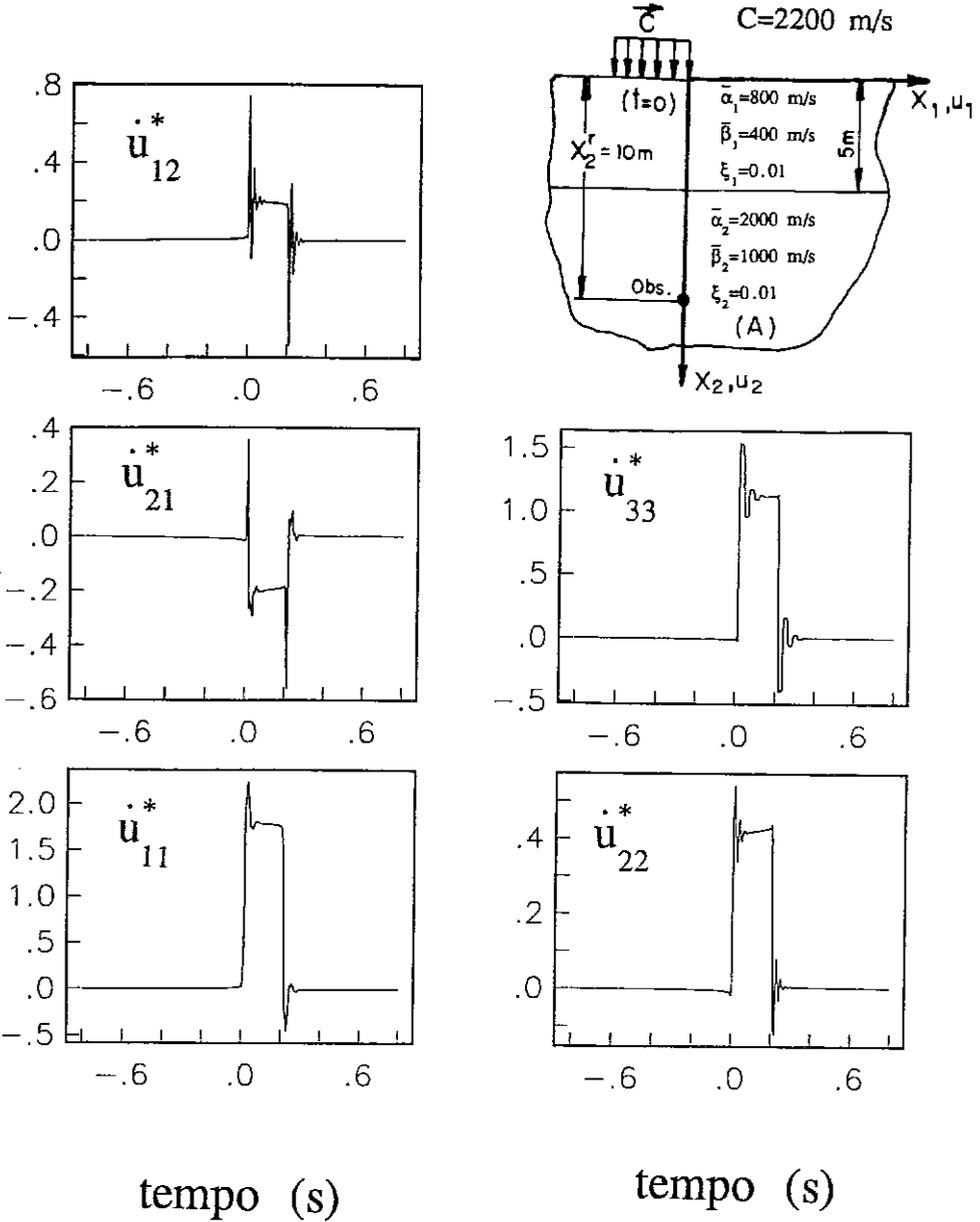


Figura 3.4.3-5. Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* , em um ponto de observação localizado no interior do semi-espaço subjacente $\vec{x}^r = (0, 10 \text{ m})$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante $C = 2200 \text{ m/s}$ na superfície de um meio estratificado constituído por uma camada sobre o semi-espaço. O índice j em \dot{u}_{ij}^* denota a direção da aplicação da faixa de carga distribuída.

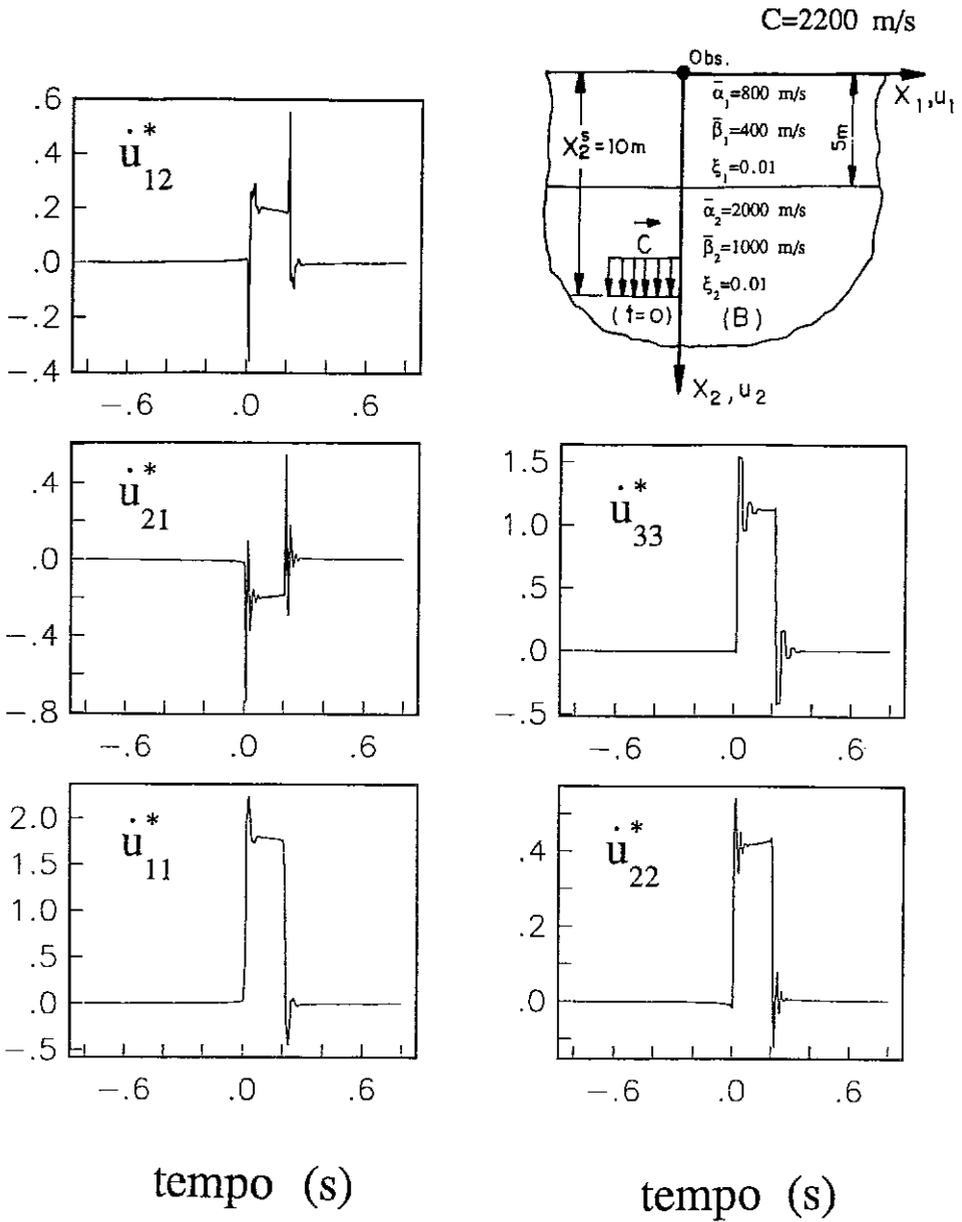


Figura 3.4.3-6. Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* em um ponto de observação localizado na superfície $\vec{x}^r = (0, 0 \text{ m})$ de um meio estratificado, constituído por uma camada sobre o semi-espaço, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante $C = 2200 \text{ m/s}$ a uma profundidade $\vec{x}^s = (0, 10 \text{ m})$ no semi-espaço subjacente. O índice j em \dot{u}_{ij}^* denota a direção da aplicação da faixa de carga distribuída.

3.5. Resposta de um Semi-espaco Estratificado com Múltiplas Camadas sob a Ação de Cargas Móveis

Como um exemplo da capacidade do método proposto para calcular a resposta de um meio estratificado, constituído por um semi-espaco visco-elástico sobreposto por múltiplas camadas horizontais homogêneas visco-elásticas, sob a ação de cargas móveis, é considerado o caso correspondente ao modelo apresentado na Figura 3.5-1. O meio estratificado consiste de cinco camadas de 1.0 m de espessura sobrepostas a um semi-espaco visco-elástico. As velocidades das ondas de cisalhamento para os seis meios são, respectivamente, 200, 475, 675, 825, 925 e 1000 m/s. As velocidades das ondas P são o dobro das velocidades das ondas S. A densidade de massa para todos os meios é definida como sendo igual a $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e os coeficientes de amortecimento em todas as camadas são considerados iguais a $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$. A faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, se move na superfície livre $x_2 = 0$ do meio estratificado, com velocidade $C = 800 \text{ m/s}$. O ponto de observação está localizado na terceira camada em $(x_1^r, x_2^r) = (0, 2.5 \text{ m})$.

As componentes adimensionais das velocidades \dot{u}_{11}^* , \dot{u}_{22}^* e \dot{u}_{33}^* são mostradas na coluna esquerda da Figura 3.5-2, enquanto que as componentes das velocidades \dot{u}_{21}^* e \dot{u}_{12}^* são mostradas na coluna esquerda da Figura 3.5-3. Para efeito de comparação, na coluna direita das Figuras 3.5-2 e 3.5-3, são apresentadas as componentes normalizadas das velocidades correspondentes, determinadas para um modelo equivalente, constituído por uma única camada sobre o semi-espaco. Esta camada equivalente de 5 m de espessura é caracterizada por $\bar{\beta} = 460 \text{ m/s}$ e $\bar{\alpha} = 920 \text{ m/s}$. A resposta calculada para o caso do meio estratificado composto de múltiplas camadas, exhibe freqüências mais altas do que a resposta obtida para o modelo equivalente composto de uma camada. Em ambos os casos, as respostas calculadas foram obtidas usando-se 2048 freqüências e uma freqüência de corte

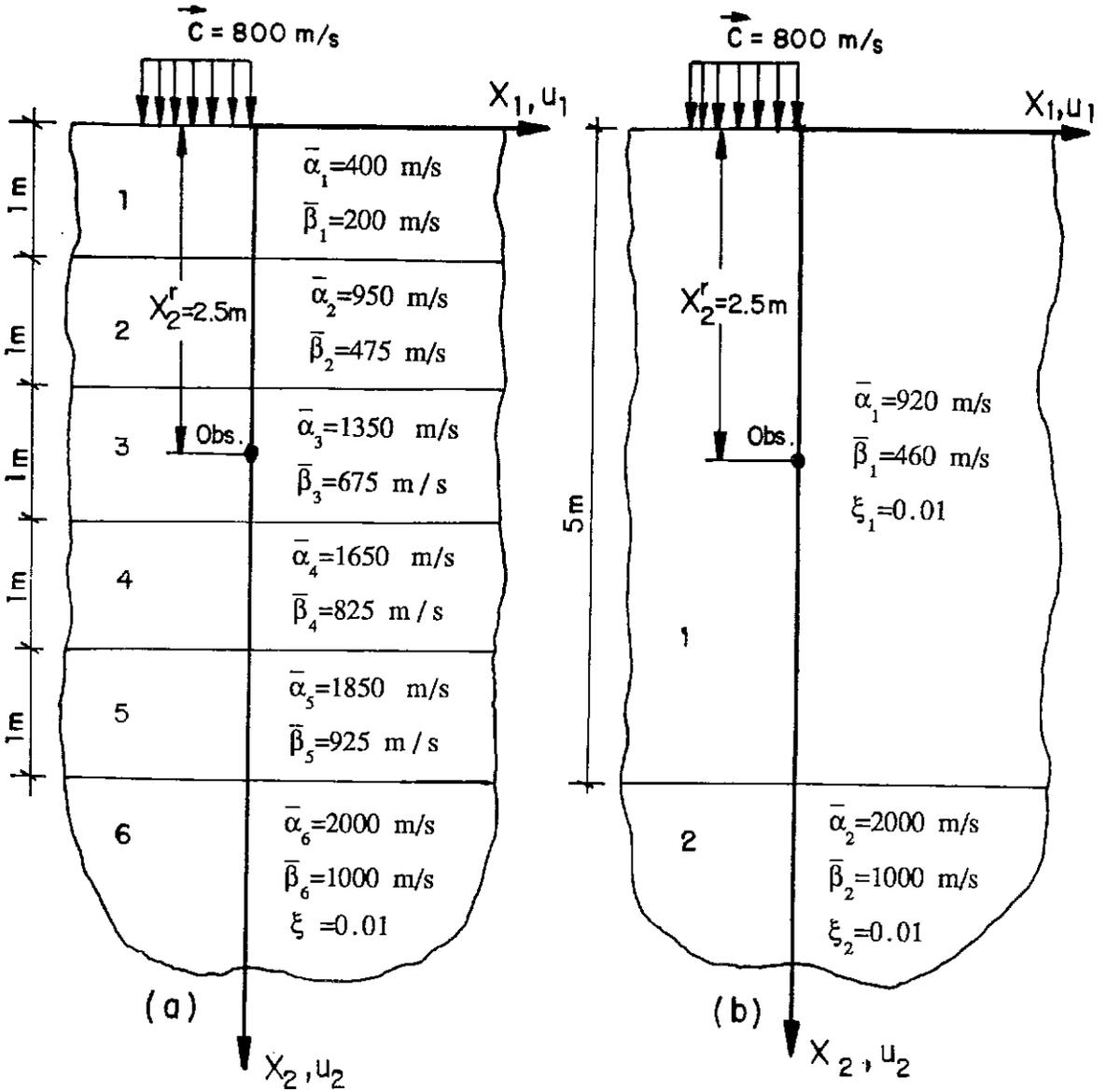


Figura 3.5-1. Modelos de semi-espacos visco-elásticos estratificados. (a) Cinco camadas de 1 metro de espessura sobrepostas ao semi-espaco. (b) Modelo equivalente composto de uma camada sobre o semi-espaco. A densidade de massa $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e os coeficientes de amortecimento $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$ são considerados iguais em todas as camadas.

de 200 Hertz, e foram normalizadas usando-se as propriedades do semi-espço subjacente.

Como um exemplo adicional, as relações de reciprocidade, que resultam da troca de profundidades entre o ponto de observação e a carga, são testadas para o caso do semi-espço estratificado com múltiplas camadas, cujo modelo é apresentado pela Figura 3.5.1a. Duas configurações da posição da carga e do ponto de observação foram consideradas. Na configuração (A), a faixa de carga de duração $T = 0.2$ segundos se move com velocidade constante $C = 600 \text{ m/s}$ sobre a superfície $x_2^s = 0 \text{ m}$ e o ponto de observação se localiza no interior do semi-espço em $(x_1^r, x_2^r) = (0, 10 \text{ m})$; na configuração (B), as localizações são alternadas, de modo que $x_2^s = 10 \text{ m}$ e $(x_1^r, x_2^r) = (0, 0 \text{ m})$. As componentes normalizadas das velocidades calculadas para ambas as configurações são apresentadas nas Figures 3.5-4 e 3.5-5. Foram também obtidas as mesmas relações de reciprocidade que já foram identificadas, para o caso de sistema constituído por uma camada sobre o semi-espço visco-elástico. Esta verificação serve como um teste adicional da metodologia, dos procedimentos numéricos e dos programas associados de computador, que foram desenvolvidos para calcular a resposta de um semi-espço visco-elástico estratificado sob a ação de cargas móveis.

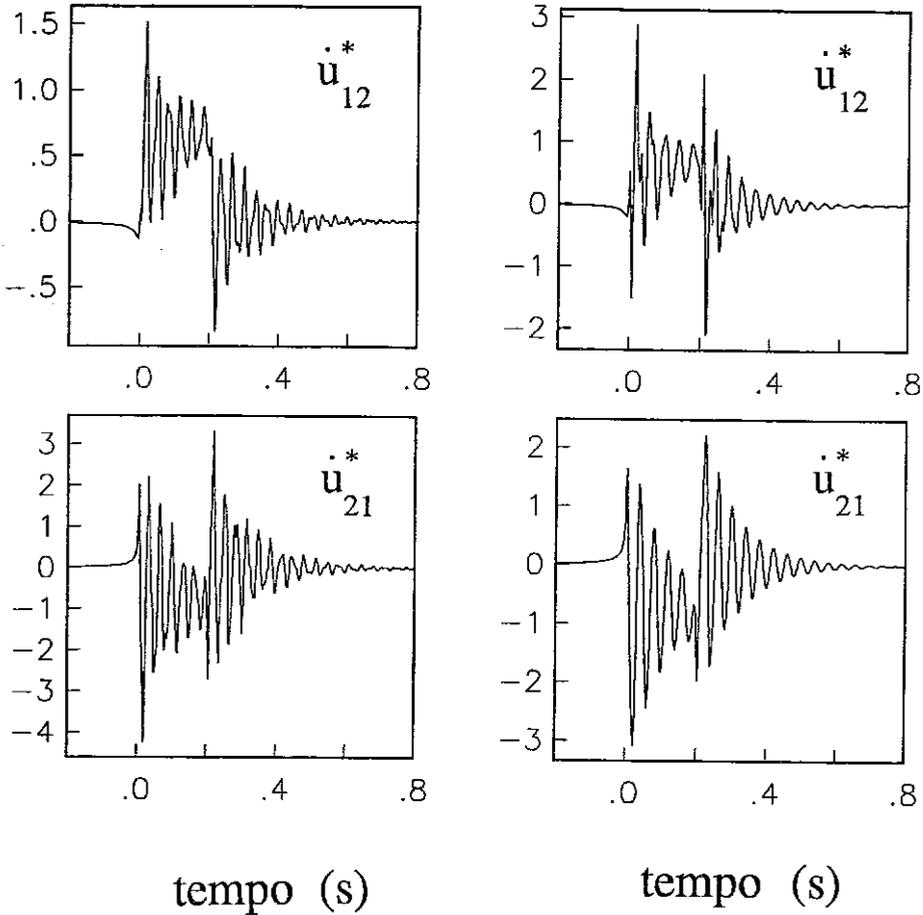


Figure 3.5-3. Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 2.5 m)$, para uma faixa de carga de duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante $C = 800 m/sec$ na superfície dos modelos de semi-espacos estratificados, apresentados nas Figuras 3.5-1(a),(b). As respostas das componente das velocidade \dot{u}_{ij}^* para o modelo composto de cinco camadas sobrepostas ao semi-espaco são mostradas na coluna esquerda da figura, enquanto que na coluna direita são apresentados o resultados correspondentes para o modelo equivalente com uma camada sobre o semi-espaco. O índice j em \dot{u}_{ij}^* denota a direção da aplicação da faixa de carga distribuída.

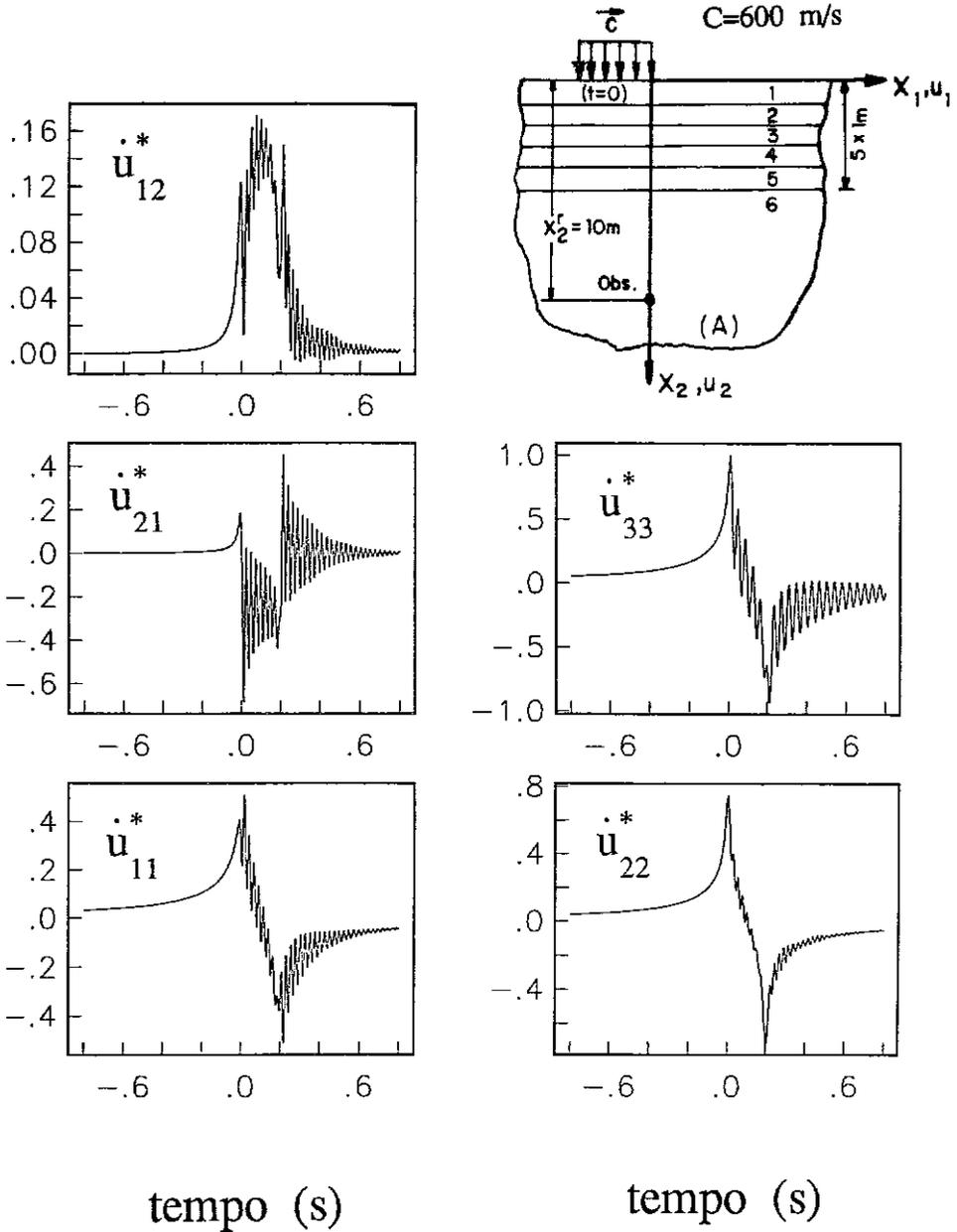


Figura 3.5-4. Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* em um ponto de observação localizado no interior do semi-espaco subjacente $\vec{x}^r = (0, 10 \text{ m})$, para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante $C = 600 \text{ m/s}$ na superfície do semi-espaco estratificado com cinco camadas, mostrado na Figura 3.5-1(a). O índice j em \dot{u}_{ij}^* denota a direção da aplicação da faixa de carga distribuída.

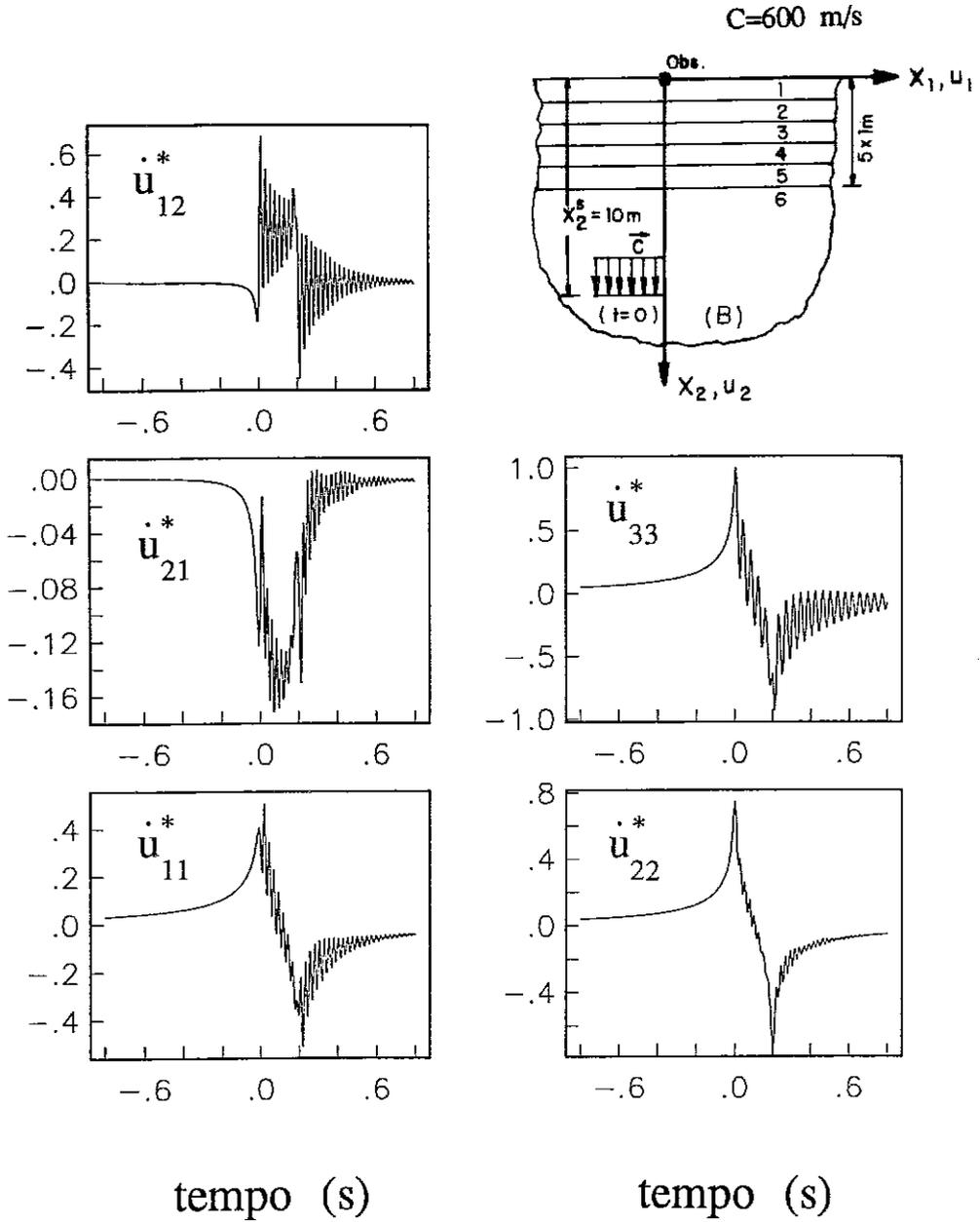


Figura 3.5-5. Resposta das componentes normalizadas das velocidades \dot{u}_{ij}^* em um ponto de observação localizado na superfície $\bar{x}^r = (0,0 \text{ m})$ do meio estratificado com cinco camadas, mostrado na Figura 3.5-1(a), para uma faixa de carga com duração $T = 0.2$ segundos, que se move com velocidade constante $C = 600 \text{ m/s}$ a uma profundidade $\bar{x}^s = (0,10 \text{ m})$ no semi-espaço subjacente. O índice j em \dot{u}_{ij}^* denota a direção da aplicação da faixa de carga distribuída.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DINÂMICA TRIDIMENSIONAL DE UM SEMI-ESPAÇO VISCO-ELÁSTICO ESTRATIFICADO SOB A AÇÃO DE CARGAS MÓVEIS

As respostas dinâmicas de semi-espacos visco-elásticos uniformes e estratificados, produzidas por uma carga concentrada que se move horizontalmente, com velocidade constante, na superfície ou no interior dos semi-espacos, são estudadas neste capítulo. A formulação geral, apresentada no Capítulo 2 é adequada na Seção 4.1 para o caso no qual a solicitação corresponde a uma carga concentrada móvel. A formulação decorrente e os programas de computador associados são testados na Seção 4.2, por meio de comparações com soluções, analíticas e numéricas, disponíveis para casos limites simples. As características principais da resposta dinâmica de um semi-espaco visco-elástico uniforme são investigadas, discutidas e ilustradas na Seção 4.3. Finalmente, na Seção 4.4 são apresentados alguns resultados típicos da resposta de um sistema estratificado, constituído por várias camadas sobrepostas a um semi-espaco.

4.1. Formulação Geral

No Capítulo 2, foi apresentada uma representação integral da solução geral, para a resposta dinâmica tridimensional de um semi-espaco visco-elástico estratificado sob a ação de forças de corpo arbitrarias. Tais resultados serão especializados e desenvolvidos, neste capítulo, para o cálculo da resposta de um semi-espaco visco-elástico estratificado, produzida por uma carga concentrada que se move, sobre a

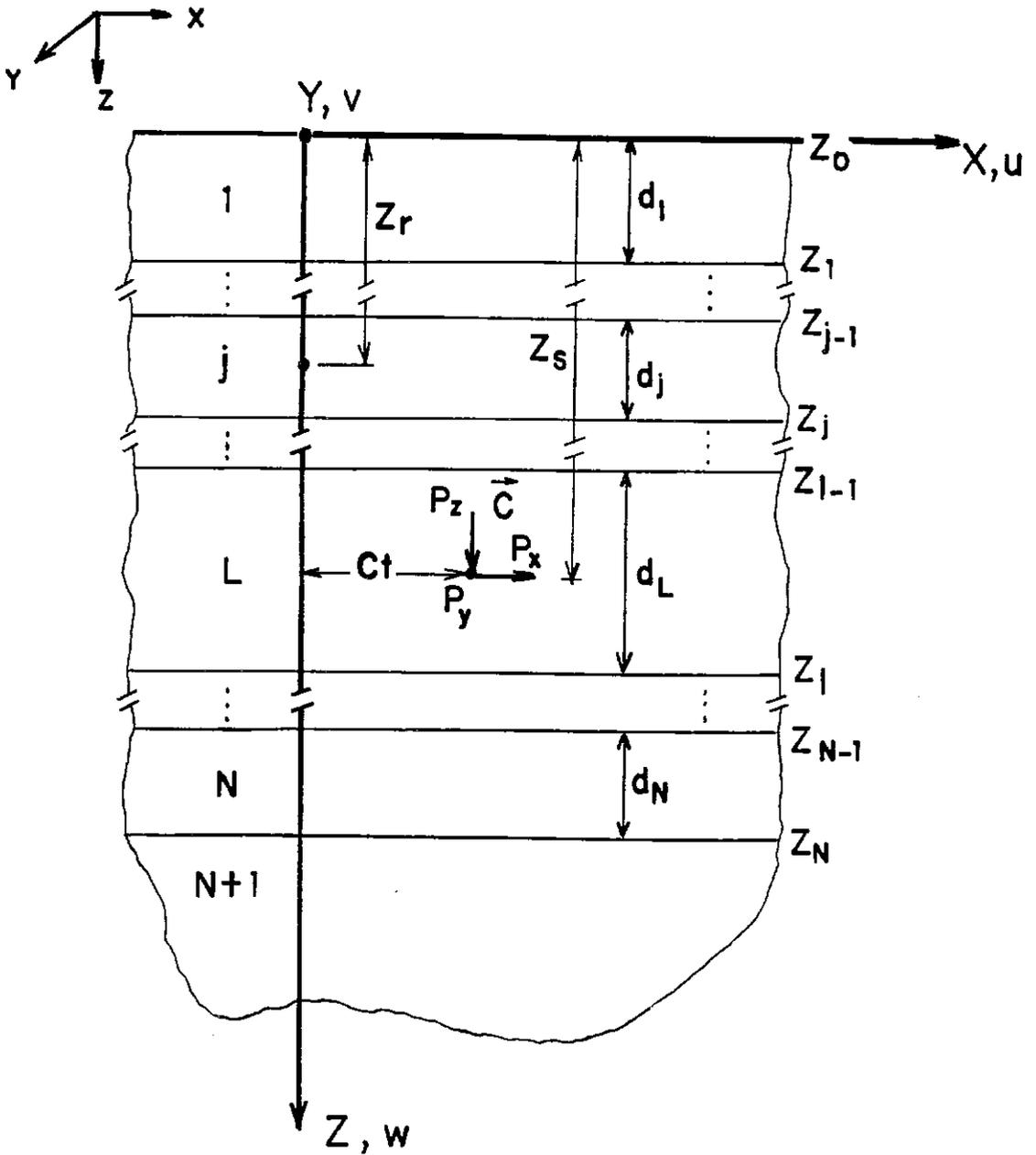


Figura 4.1-1 Sistema coordenado e notações. A carga concentrada está localizada a uma profundidade $z = z_s$, no interior da camada $j = l$, e se move na direção positiva do eixo X com uma velocidade constante C .

superfície livre ou no seu interior, com velocidade constante segundo uma dada direção horizontal. A geometria do problema, as notações e o sistema Cartesiano de coordenadas adotados, são apresentados na Figura 4.1-1. É considerado o problema tridimensional no qual a excitação corresponde a uma carga concentrada, localizada a uma profundidade $z = z_s$, no interior da camada $j = l$. É suposto que a carga atua no plano $j = 0$ e se move na direção positiva do eixo X com velocidade constante C . As componentes da carga P_x , P_y e P_z são aplicadas, respectivamente, na direção positiva dos eixos X , Y , e Z .

As forças de corpo equívalentes por unidade de volume, na camada l , associadas a este estado de carregamento, podem ser escritas como:

$$X^l = P_x \delta(x - Ct) \delta(y) \delta(z - z_s) \quad (4-1a)$$

$$Y^l = P_y \delta(x - Ct) \delta(y) \delta(z - z_s) \quad (4-1b)$$

$$Z^l = P_z \delta(x - Ct) \delta(y) \delta(z - z_s) \quad (4-1c)$$

Aplicando-se a transformada tripla de Fourier, expressa pela equação (2-14), e, em seguida, substituindo-se as forças de corpo, no domínio transformado, nas equações (2-37a,b,c), obtêm-se:

$$F_1^l = -2\pi i (k_1 P_x + k_2 P_y) \delta(k_1 C - \omega) \delta(z - z_s) / k \quad (4-2a)$$

$$F_2^l = 2\pi P_z \delta(k_1 C - \omega) \delta(z - z_s) \quad (4-2b)$$

$$F_3^l = -2\pi i (k_2 P_x - k_1 P_y) \delta(k_1 C - \omega) \delta(z - z_s) / k \quad (4-2c)$$

A solução geral no domínio transformado, para um semi-espaco visco-elástico estratificado, é apresentada na Seção 2.3. Substituindo-se as equações (4-2a,b,c) nas expressões (2-45a) a (2-45f) e, em seguida, modificando-se os termos associados com as ondas polarizadas no plano vertical ($S_n^l(z), n = 1, \dots, 4$), através das

transformações dadas pelas equações (2-68b) e (2-69b), obtêm-se as seguintes expressões para os termos de carga na camada que contém a fonte ($z_{l-1} \leq z \leq z_l$):

$$S_1^l(z) = -\frac{\pi}{\kappa_l \mu_l} \delta(k_1 C - \omega) H(z - z_s) e^{\nu_l(z_s - z_{l-1})} \left\{ \frac{i \psi_l}{\nu_l k} (k_1 P_x + k_2 P_y) + \frac{\psi_l}{\nu_l'} P_z + \frac{1}{\nu_l' + k} \left[\frac{i}{k} (k_1 P_x + k_2 P_y) + \frac{k}{\nu_l'} P_z \right] E(z_{l-1} - z_s) \right\} \quad (4-3a)$$

$$S_2^l(z) = -\frac{\pi}{\kappa_l \mu_l} \delta(k_1 C - \omega) H(z - z_s) e^{\nu_l(z_s - z_{l-1})} \left\{ \frac{i \psi_l (\kappa_l - 1)}{\nu_l k} (k_1 P_x + k_2 P_y) - \frac{\psi_l}{\nu_l'} P_z - \left(\frac{1}{\nu_l' + k} + \frac{\kappa_l \nu_l' \beta_l^2}{\omega^2} \right) \left[\frac{i}{k} (k_1 P_x + k_2 P_y) + \frac{k}{\nu_l'} P_z \right] E(z_{l-1} - z_s) \right\} \quad (4-3b)$$

$$S_3^l(z) = -\frac{\pi}{\kappa_l \mu_l} \delta(k_1 C - \omega) H(z_s - z) e^{\nu_l(z_1 - z_s)} \left\{ \frac{i \psi_l}{\nu_l k} (k_1 P_x + k_2 P_y) - \frac{\psi_l}{\nu_l'} P_z - \frac{1}{\nu_l' + k} \left[\frac{k}{\nu_l'} P_z - \frac{i}{k} (k_1 P_x + k_2 P_y) \right] E(z_s - z_l) \right\} \quad (4-3c)$$

$$S_4^l(z) = -\frac{\pi}{\kappa_l \mu_l} \delta(k_1 C - \omega) H(z_s - z) e^{\nu_l(z_1 - z_s)} \left\{ \frac{i \psi_l (\kappa_l - 1)}{\nu_l k} (k_1 P_x + k_2 P_y) + \frac{\psi_l}{\nu_l'} P_z + \left(\frac{1}{\nu_l' + k} + \frac{\kappa_l \nu_l' \beta_l^2}{\omega^2} \right) \left[\frac{k}{\nu_l'} P_z - \frac{i}{k} (k_1 P_x + k_2 P_y) \right] E(z_s - z_l) \right\} \quad (4-3d)$$

$$S_5^l(z) = -\frac{i\pi}{\mu_1 \nu_1' k^2} \delta(k_1 C - \omega) H(z - z_s) [k_2 P_x - k_1 P_y] e^{\nu_1'(z_s - z_{l-1})} \quad (4-3e)$$

$$S_6^l(z) = -\frac{i\pi}{\mu_1 \nu_1' k^2} \delta(k_1 C - \omega) H(z_s - z) [k_2 P_x - k_1 P_y] e^{\nu_1'(z_l - z_s)} \quad (4-3f)$$

onde $H(x)$ denota a função degrau de Heaviside e $E(x)$, κ_l e ψ_l são definidos, respectivamente, pelas equações (2-80), (3-4b) e (3-4c). Os termos de carga modificados, espessos pelas equações (4-3a) a (4-3f), correspondem aos termos de carga que devem ser aplicados nas equações (2-86a,b).

Uma vez determinadas as funções U_p^j e Σ_{pq}^j pelo procedimento descrito na Seção 2.3, o campo de deslocamentos e o campo de tensões correspondente, no domínio transformado, em um ponto de observação situado na camada j -ésima a uma profundidade definida pela coordenada $z = z_r$, podem ser obtidos usando-se as equações (2-35a,b,c) e (2-38a) a (2-38f).

Pode-se observar que todas as componentes dos vetores $\{S_d^l(z)\}$ e $\{S_u^l(z)\}$ expressas pelas equações (4-3a) a (4-3f) e, conseqüentemente, o campo de deslocamentos e o de tensões no domínio transformado do tempo e do espaço ($\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}$; $i, j = 1, \dots, 3$), têm como fator comum a função delta de Dirac $\delta(k_1 C - \omega)$. Esta peculiaridade implica que as integrais sobre o domínio do número de onda k_1 , que aparece na transformada inversa de Fourier (2-16), podem ser determinadas analiticamente usando-se as propriedades da função delta de Dirac. Por conseguinte, a resposta completa no domínio da freqüência, para uma carga concentrada móvel, pode se escrita em termos de integrais sobre o número de onda horizontal k_2 . As integrais sobre o número de onda são calculadas numericamente, no domínio do número de onda horizontal k_2 , através da utilização do algoritmo adaptativo da quadratura de Filon, apresentado na Seção 2.4. Como é comentado nessa seção, este procedimento de integração numérica pode ser simplificado

tomando-se partido da simetria ou da antisimetria do integrando com relação à variável de integração. Para o caso em estudo, identificou-se que as componentes $\tilde{u}_x, \tilde{w}_x, \tilde{v}_y, \tilde{u}_z, \tilde{w}_z, \tilde{\sigma}_{xxx}, \tilde{\sigma}_{yyx}, \tilde{\sigma}_{zzx}, \tilde{\sigma}_{xxz}, \tilde{\sigma}_{yzy}, \tilde{\sigma}_{xyy}, \tilde{\sigma}_{xxz}, \tilde{\sigma}_{yyz}, \tilde{\sigma}_{zzz}$ e $\tilde{\sigma}_{zzz}$ são simétricas em relação ao número de onda k_2 , enquanto que as componentes $\tilde{v}_x, \tilde{u}_y, \tilde{w}_y, \tilde{v}_z, \tilde{\sigma}_{yxz}, \tilde{\sigma}_{xyx}, \tilde{\sigma}_{xxy}, \tilde{\sigma}_{yyy}, \tilde{\sigma}_{zzy}, \tilde{\sigma}_{xzy}, \tilde{\sigma}_{yzz}$ e $\tilde{\sigma}_{xyz}$ são antisimétricas. O último índice x, y ou z , nestes termos, denota a direção de aplicação da força. Finalmente, a resposta no domínio do tempo é obtida através da síntese de Fourier das componentes no domínio da frequência, por meio de um algoritmo de Transformadas Discretas Rápidas de Fourier. Os cálculos numéricos para os resultados no domínio do tempo, obtidos com base no método proposto e que são apresentados neste capítulo, foram realizados em um supercomputador Cray X-MP/48 do Centro de Supercomputação de San Diego, EUA.

4.2. Validação por Comparação com Resultados Analíticos e Numéricos

A complexidade do procedimento geral apresentado neste trabalho, para o cálculo da resposta dinâmica de um semi-espaco visco-elástico estratificado tridimensional sob a ação de uma carga concentrada móvel, implica na necessidade de se ter resultados numéricos gerais significativos, validados por meio de comparações com resultados correspondentes, publicados por outros autores. Infelizmente, na literatura técnica não existem soluções analíticas ou resultados numéricos apresentados para o caso geral em estudo. São disponíveis somente soluções associadas ao caso particular de um semi-espaco perfeitamente elástico uniforme sob a ação de uma carga concentrada, que se move sobre a superfície livre. Este problema corresponde a uma generalização dinâmica do problema clássico de Boussinesq.

A solução para o movimento estacionário de uma carga concentrada, no interior de um meio elástico infinito, foi apresentada por Eason, Fulton e Sneddon (1956). Eason (1965), com a utilização de técnicas de transformação integral, foi capaz de obter a resposta de um semi-espaco elástico uniforme sob a ação concentrada, que se move sobre a sua superfície com velocidade constante subsônica, em termos de integrais finitas sobre uma única variável. O mesmo problema foi estudado por Lansing (1966), que aplicando um procedimento de análise de alguma forma semelhante, obteve os campos de deslocamento para velocidades uniformes da carga nos regimes subsônico, transônico e supersônico. Papadopoulos (1963a,b) e Mandel e Avramesco (1961) também investigaram a resposta de um semi-espaco elástico, produzida por uma carga concentrada em movimento uniforme sobre a superfície livre. A resposta estacionária de um sistema constituído por um sólido semi-infinito sobreposto por um fluido semi-infinito, produzida por uma carga, que se move com velocidade constante no plano de interface dos dois semi-espacos, foi apresentada por Kennedy e Herrman (1973a,b).

Inicialmente, como um primeiro teste, as respostas no interior de um semi-espaço uniforme, para pontos de observação e posições da linha de aplicação da carga localizados a uma grande profundidade no seu interior, foram comparadas com as soluções analíticas apresentadas por Eason, Fulton e Sneddon (1956), para o caso de um sólido elástico ilimitado. Como um segundo teste, os resultados obtidos através do cálculo numérico das integrais dadas por Eason (1965), para os componentes do deslocamento e das tensões, no interior de um semi-espaço elástico, produzidos por uma carga concentrada vertical, que se move sobre a superfície com velocidade constante subsônica, foram comparados com os resultados numéricos correspondentes obtidos pelo procedimento proposto neste estudo. Finalmente, foi realizada também uma série de comparações com os resultados apresentados por Lansing (1966), para cargas concentradas, que se movem na superfície livre de um semi-espaço com velocidade constante nos regimes subsônico, transônico e supersônico. Todas estas comparações revelaram a existência de uma excelente concordância entre os resultados obtidos pela metodologia apresentada e aqueles correspondentes disponíveis na literatura. Tais comparações, além de validarem os procedimentos numéricos, para o caso limite de um semi-espaço uniforme, dão confiabilidade à metodologia proposta para a análise do caso geral.

Como um teste independente, a resposta dinâmica no domínio da frequência, para um semi-espaço visco-elástico estratificado, produzida por uma carga concentrada que se move com uma velocidade supersônica muito alta, obtida pela metodologia proposta, foi comparada com as funções bidimensionais harmônicas de Green, para um semi-espaço visco-elástico, calculadas pelo procedimento numérico apresentado na Seção 2.4 e no Apêndice C. Estas comparações se justificam, uma vez que as forças de corpo equivalentes por unidade de volume, associadas com uma carga concentrada que se move com velocidade constante segundo a direção positiva do eixo X , descritas pelas equações (4-1a,b,c),

podem ser escritas como:

$$X^l = P_x \delta(x/C - t) \delta(y) \delta(z - z_s)/C \quad (4-4a)$$

$$Y^l = P_y \delta(x/C - t) \delta(y) \delta(z - z_s)/C \quad (4-4b)$$

$$Z^l = P_z \delta(x/C - t) \delta(y) \delta(z - z_s)/C \quad (4-4c)$$

Quando $C \rightarrow 0$ na equação (4-1a,b,c) tem-se o caso estático, e quando $C \rightarrow \infty$, depois de se multiplicar o lado direito da equação (4-4a,b,c) por C , se tem as forças de corpo por unidade de volume, associadas com uma linha de carga concentrada por unidade de comprimento, como descritas pelas equações (C-1a,b,c). Usando-se o mesmo modelo de solo (coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$) e a mesma configuração de posição entre a fonte e o ponto de observação, foi realizada uma série de comparações em diversas frequências para as velocidades de carga supersônicas correspondentes a $M_\beta = 10^4$ e $M_\beta = 10^5$. Como esperado, as funções bidimensionais harmônicas de Green de deslocamentos e de tensões divididas por C são numericamente iguais às componentes do deslocamento e das tensões, resultantes do cálculo da resposta tridimensional para uma carga concentrada, que se move com velocidade supersônica muito alta C .

4.2.1. Comparação com a Solução para um Espaço Elástico Infinito

A solução para o problema tridimensional associado com o movimento uniforme de uma carga concentrada no interior de um corpo elástico ilimitado foi apresentada por Eason, Fulton e Sneddon (1956). Com o objetivo de se comparar os resultados numéricos obtidos para um semi-espaço uniforme com os resultados analíticos calculados para um sólido elástico infinito, torna-se necessário se considerar que tanto a carga quanto o ponto de observação se localizam a uma grande profundidade no interior do semi-espaço, a fim de se mitigarem os efeitos da superfície de contorno na resposta do semi-espaço .

As componentes das tensões foram obtidas pelo procedimento numérico descrito na Seção 4.1, para o caso de um semi-espaco visco-elástico uniforme caracterizado pelo coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$, pelas partes reais das velocidades das ondas S e P, respectivamente, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$ e $\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, pela densidade de massa $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e pelos coeficientes de amortecimento do material $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$. Foram consideradas duas configurações de posição fonte-observação situadas no plano $y = 0$. Na configuração (a), a fonte se localiza a uma profundidade $z_s = 50 \text{ m}$ e o ponto de observação a uma profundidade $z_r = 60 \text{ m}$; na configuração (b), a fonte se encontra a uma profundidade $z_s = 100 \text{ m}$ e o ponto de observação a uma profundidade $z_r = 110 \text{ m}$. Os resultados numéricos no domínio do tempo foram calculados através da síntese de Fourier de 512 valores de cada componente no domínio da frequência. A frequência de corte considerada foi de 800 Hertz. Foi suposto que a carga concentrada P atua segundo a direção Z e se desloca ao longo da direção positiva do eixo X com velocidade constante $C = 700 \text{ m/s}$. As componentes das tensões foram transformadas em valores adimensionais por meio da seguinte normalização:

$$\sigma_i^* = \frac{r^2}{P} \sigma_i \quad (4-5)$$

onde r representa a distância entre a fonte e o ponto de observação.

A tabela 4.2.1-1 apresenta as comparações das componentes adimensionais das tensões obtidas numericamente no estudo presente, para as duas configurações de posição fonte-observação, definidas anteriormente, com os resultados correspondentes calculados através das expressões da solução analítica, para um sólido elástico ilimitado. Os valores mostrados nesta tabela correspondem ao instante $t = 0$, no qual o ponto de aplicação da carga está situado exatamente em cima do ponto de observação. As diferenças entre os resultados obtidos por meio da solução elástica ilimitada e os resultados calculados numericamente em um semi-espaco visco-elástico, para σ_x , σ_y e σ_z , na configuração (a) são, respectivamente,

0.45%, 2.58% and 2.22%, e na configuração (b) são, respectivamente, 0.14%, 1.17% e 0.55%.

	SOLUÇÃO ANALÍTICA	PRESENTE ESTUDO	
		(a)	(b)
σ_x^*	0.07072	0.07104	0.07062
σ_y^*	0.03614	0.03523	0.03572
σ_z^*	-0.2518	-0.2574	-0.2532

Tabela 4.2.1-1 Comparação de componentes adimensionais das tensões, obtidas numericamente no presente estudo, para duas configurações de posição fonte-observação localizadas a uma grande profundidade no interior de um semi-espaco visco-elástico uniforme, com os resultados correspondentes calculados pela solução analítica, para um sólido elástico ilimitado, apresentada por Eason, Fulton e Sneddon (1956). O meio é caracterizado pelo coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$ e pelos coeficientes de amortecimento do material $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$. Na configuração (a) a fonte se localiza a uma profundidade $z_s = 50\text{ m}$ e o ponto de observação em $z_r = 60\text{ m}$, na configuração (b) a fonte atua a uma profundidade $z_s = 100\text{ m}$ e o ponto de observação em $z_r = 110\text{ m}$. Os resultados apresentados correspondem ao instante $t = 0$ quando o ponto de aplicação da carga está situado exatamente em cima do ponto de observação.

4.2.2. Comparação com os Resultados Apresentados por Eason (1965)

A resposta dinâmica de um semi-espaço elástico, isotrópico e homogêneo sob a ação de uma carga concentrada, que se move com velocidade uniforme em direção retilínea na superfície do semi-espaço, foi investigada por Eason (1965). Com a utilização de métodos de transformações integrais seguida da redução das integrais múltiplas obtidas, Eason foi capaz de expressar as componentes do deslocamento e das tensões em termos de integrais finitas sobre uma variável, para um ponto qualquer no interior do sólido. A solução apresentada por Eason é somente válida quando a velocidade da carga é menor do que a velocidade da onda de superfície de Rayleigh no material. No mesmo trabalho, são mostrados graficamente em função do número Mach relativo à onda de cisalhamento $M_\beta = C/\bar{\beta}$, os resultados das componentes, diferentes de zero, do deslocamento e das tensões, para pontos de observação localizados diretamente embaixo do ponto de aplicação da carga, em um semi-espaço caracterizado por $\nu = 0.25$. Os resultados apresentados por Eason são mostrados nas Figuras 4.2.2-1 e 4.2.2-2 com linhas tracejadas. A componente vertical do deslocamento w^* e as componentes das tensões σ_{xx}^* , σ_{yy}^* , σ_{zz}^* (representadas genericamente por σ) foram transformados em valores adimensionais por meio das seguintes normalizações:

$$w^* = \frac{2\pi \mu z_r}{P_z} w \quad (4-6)$$

$$\sigma^* = \frac{\pi z_r^2}{P_z} \sigma \quad (4-7)$$

onde z_r é a profundidade do ponto de observação.

Para efeito de comparação, os procedimentos numéricos apresentados na Seção 4.1 foram usados para o cálculo da resposta no interior de um semi-espaço visco-elástico uniforme sob a ação de uma carga concentrada, que se move sobre a sua superfície com velocidade subsônica ao longo da direção positiva do eixo X . O

semi-espaco visco-elástico uniforme foi caracterizado por $\nu = 0.25$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$. Os resultados foram obtidos para um ponto de observação localizado no eixo Z a uma profundidade $z_r = 10 \text{ m}$. Os resultados no domínio do tempo foram calculados através da síntese de Fourier de 512 valores de cada componente no domínio da frequência. A frequência de corte considerada foi de 800 Hertz.

Os resultados, quando o ponto de observação está situado exatamente embaixo da carga, são mostrados nas Figuras 4.2.2-1 e 4.2.2-2 com círculos pequenos, como uma função do número Mach M_β . Os resultados apresentados nestas figuras indicam que os resultados para a componente vertical do deslocamento obtidos pelo procedimento proposto (círculos pequenos) concordam com os obtidos por Eason (linhas tracejadas). Entretanto, as diferenças entre as componentes das tensões obtidas pelo método apresentado e as apresentadas graficamente por Eason (1965) crescem à medida que a velocidade da carga aumenta. Com o objetivo de se entender tais diferenças, foram efetuadas várias verificações tanto na metodologia proposta quanto nos programas de computador associados desenvolvidos. Como nada foi encontrado, no processo de verificação, que pudesse justificar as discrepâncias existentes, decidiu-se então que as componentes do deslocamento e das tensões apresentados por Eason (1965) seriam recalculados a partir da integração numérica das integrais finitas obtidas por este autor.

No trabalho de Eason (1965), a resposta no interior de um semi-espaco elástico uniforme, produzida por uma carga concentrada vertical que se move sobre sua superfície livre com velocidade constante, é expressa pelas equações (3-30) e (3-33) a (3-40). As componentes do deslocamento e das tensões são apresentados na forma de integrais finitas sobre uma única variável, que são válidas somente, quando a velocidade da carga é menor do que a velocidade da onda de Rayleigh no sólido. As expressões obtidas por Eason (1965) apresentam uma dificuldade

associada ao fato de que os denominadores dos vários integrandos tornam-se zero em um ponto do domínio de integração. Entretanto, os integrandos têm um limite finito neste ponto. As equações apresentadas por Eason, para as componentes dos deslocamentos e das tensões em pontos de observação situados diretamente embaixo do ponto de aplicação da carga, foram manipuladas algebricamente no sentido de se remover a singularidade e desta forma se evitar os processos-limites dos integrandos neste ponto. Como resultado, a resposta em pontos de observação situados imediatamente abaixo do ponto de aplicação da carga, no interior de um semi-espaco elástico uniforme, sob a ação de uma carga concentrada vertical que se move na sua superfície livre com velocidade subsônica constante C , pode ser expressa como:

$$w = \frac{P_z v^2}{2\pi^2 \mu z_r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Lambda} \left\{ \frac{(2 - 3v^2)}{2v^2} + \frac{3}{4} b_\beta - \frac{1}{8} b_\beta^2 + \left(\frac{b_\beta - 2}{4} \right) \frac{\zeta_\alpha}{\zeta_\beta} \right\} d\phi \quad (4-8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \frac{P_z}{\pi^2 M_\alpha^2 z_r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Lambda} \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{2} b_\beta \right)^2 + \zeta_\alpha \zeta_\beta \right] \right. \\ \left. \left[\left(1 + \frac{M_\alpha^2}{2} (b_\beta^2 - 2) \right) \left(1 - \frac{1}{2} b_\beta \right) \frac{1}{\zeta_\alpha^2} - \frac{\zeta_\alpha}{\zeta_\beta} \right] \right\} d\phi \end{aligned} \quad (4-9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = \frac{P_z}{2\pi^2 z_r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Lambda} \left\{ \left(v^2 - 2 \right) \left(1 - \frac{1}{2} b_\beta \right) \left[\left(1 - \frac{1}{2} b_\beta \right)^2 + \zeta_\alpha \zeta_\beta \right] \frac{1}{\zeta_\alpha^2} + \right. \\ \left. \sin^2 \phi \left[\left(2 - v^2 \right) + \frac{(v^2 - 4)}{2} b_\beta + \frac{1}{2} b_\beta^2 \right] \frac{1}{\zeta_\alpha \zeta_\beta} + \right. \\ \left. \left((4 - 3v^2) + (3v^4 - 4) \frac{b_\beta}{2v^2} - \frac{v^2 b_\beta^2}{4} \right) \frac{1}{\zeta_\alpha^2} \right\} d\phi \end{aligned} \quad (4-10)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{P_z}{\pi^2 z_r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Lambda} \left\{ \left(1 - v^2\right) \left(1 - \frac{1}{2} b_\beta\right)^2 \frac{1}{\zeta_\alpha \zeta_\beta} + \left[2(1 - v^2) + \frac{(3v^4 - 2)}{2v^2} b_\beta - \frac{v^2}{2} b_\beta^2 + \frac{v^2}{16} b_\beta^3 \right] \frac{1}{\zeta_\alpha^2} \right\} d\phi \quad (4-11)$$

onde

$$M_\alpha = \frac{C}{\alpha}; \quad M_\beta = \frac{C}{\beta} \quad (4-12)$$

$$v = \frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-13)$$

$$\zeta_\alpha = \left(1 - M_\alpha^2 \cos^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-14)$$

$$\zeta_\beta = \left(1 - M_\beta^2 \cos^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-15)$$

$$b_\beta = M_\beta^2 \cos^2 \phi \quad (4-16)$$

$$\Lambda = (1 - v^2) + \left(\frac{3}{2} v^2 - 1 \right) b_\beta - \frac{v^2}{2} b_\beta^2 + \frac{v^2}{16} b_\beta^3 \quad (4-17)$$

As integrais finitas, que aparecem nas equações (4-8) a (4-11), são adequadas para integração numérica uma vez que a função Λ não contém zeros no domínio de integração, quando a velocidade da carga C é menor do que a velocidade da onda de Rayleigh para o sólido. As equações (4-8) a (4-11) indicam que para os pontos de observação situados imediatamente abaixo do ponto de aplicação da carga, o deslocamento é inversamente proporcional à profundidade do ponto de observação, enquanto que as tensões são inversamente proporcionais ao quadrado da da profundidade do ponto de observação.

Os resultados obtidos pelo cálculo numérico das expressões analíticas dadas pelas equações (4-8) a (4-11) são representados graficamente com linhas contínuas

nas Figuras 4.2.2-1 e 4.2.2-2. O deslocamento e as tensões obtidas pela metodologia proposta por este trabalho (círculos pequenos) concordam plenamente com os que foram recalculados utilizando-se as expressões (4-8) a (4-11) (linhas contínuas). As diferenças entre estes dois conjuntos de resultados são sempre inferiores a 1%. Estes resultados validam o procedimento proposto por este trabalho e indicam que os resultados numéricos apresentados por Eason (1965) para as tensões σ_{xx}^* , σ_{yy}^* e σ_{zz}^* estão incorretos.

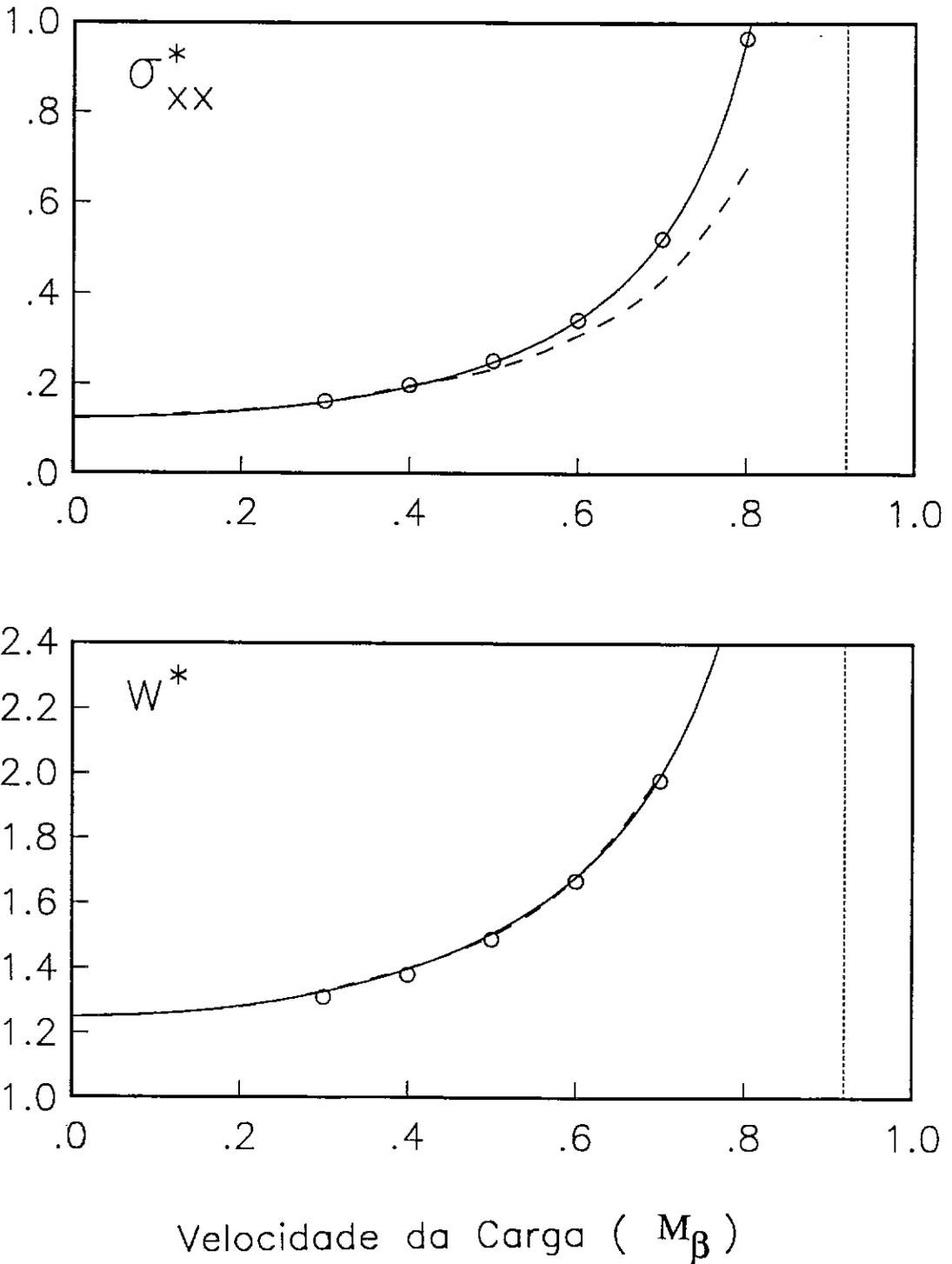


Figura 4.2.2-1 Variação das componentes adimensionais do deslocamento e das tensões, w^* e σ_{xx}^* , com $M_\beta = C/\beta$, para uma carga vertical que se move na superfície de um semi-espaço uniforme ($\nu = 0.25$, $\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\beta = 1000 \text{ m/s}$ e $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$). Os pontos de observação estão localizados exatamente embaixo do ponto de aplicação da carga. As linhas contínuas e tracejadas representam, respectivamente, os valores recalculados com base na solução analítica de Eason e os resultados originalmente apresentados por Eason (1965). Os círculos pequenos denotam os resultados numéricos obtidos pelo presente estudo para um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$). As linhas verticais pontilhadas indicam a velocidade das ondas de Rayleigh.

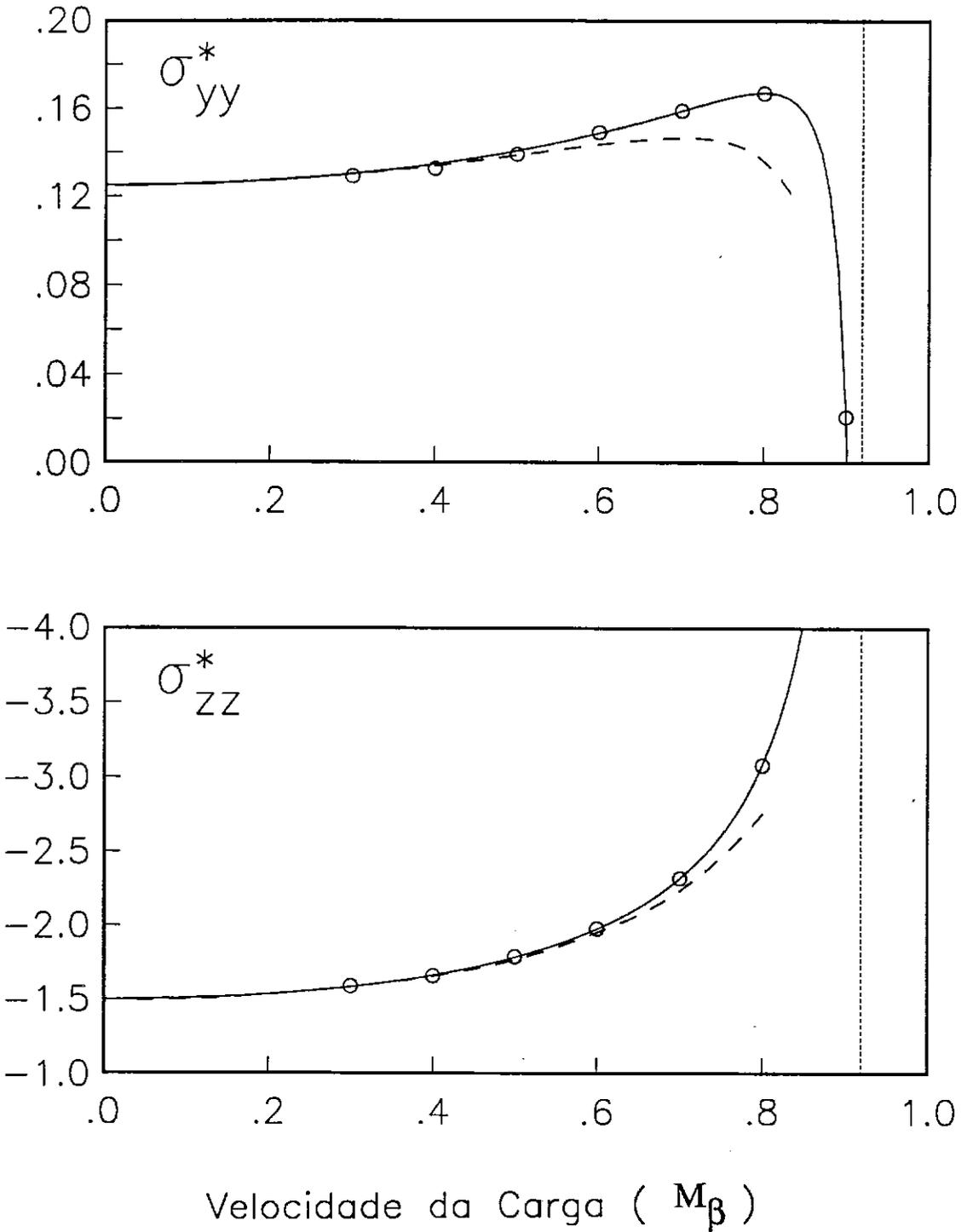


Figura 4.2.2-2 Variação das componentes adimensionais das tensões, σ_{yy}^* e σ_{zz}^* , com $M_\beta = C/\beta$, para uma carga vertical que se move na superfície de um semi-espaço uniforme ($\nu = 0.25$, $\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$ e $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$). Os pontos de observação estão localizados exatamente embaixo do ponto de aplicação da carga. As linhas contínuas e tracejadas representam, respectivamente, os valores recalculados com base na solução analítica de Eason e os resultados originalmente apresentados por Eason (1965). Os círculos pequenos denotam os resultados numéricos obtidos pelo presente estudo para um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$). As linhas verticais pontilhadas indicam a velocidade das ondas de Rayleigh.

4.2.3. Comparação com os Resultados Apresentados por Lansing (1966)

Os deslocamentos estacionários em um ponto qualquer do interior de um semi-espaço elástico uniforme, resultantes da ação de uma carga concentrada vertical, que se move com velocidade constante ao longo de um direção retilínea sobre a superfície livre do semi-espaço, foram investigados por Lansing (1966). Aplicando um procedimento com base no método das transformadas de Fourier, Lansing determinou as expressões gerais para os deslocamentos em um ponto qualquer no interior de um semi-espaço elástico, para todas as velocidades da carga. Em particular, para um semi-espaço caracterizado pelo coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$, por meio de simplificações dos resultados gerais, Lansing apresentou expressões, em termos de funções elementares e de integrais elíticas, para os deslocamentos na superfície livre e no plano vertical que contém a linha de carga. Para estes casos particulares, foram também apresentados por Lansing (1966) resultados numéricos para várias velocidades de carga nos regimes subsônico, transônico e supersônico. Tais resultados numéricos foram apresentados em termos dos sistemas de coordenadas polares mostrados na Figura 4.2.3-1. Para os pontos de observação localizados na superfície livre do plano de contorno $z = 0$, foram usadas as coordenadas polares r e φ apresentadas na Figura 4.2.3-1a. Tal sistema de coordenadas tem sua origem atrelada ao ponto de aplicação da carga e se move simultaneamente com a mesma. O ângulo φ é medido positivo na direção horária, com $\varphi = 0$ correspondendo à direção do movimento da carga e r é a distância do ponto de aplicação da carga no plano $z = 0$. A convenção positiva de sinal adotada para os componentes dos deslocamentos vertical w , radial u_r e tangencial u_φ , é indicada na Figura 4.2.3-1a. Para os pontos de observação situados no plano $y = 0$, foram usadas as coordenadas polares s e ψ , localizadas neste plano como mostra a Figura 4.2.3-1b. Como no caso anterior, a origem deste sistema está sempre localizada na posição instantânea do ponto de aplicação da carga, acompanhando

o movimento. O ângulo ψ é igual a zero ao longo da direção positiva do eixo X e $\pi/2$ na direção positiva do eixo Z , e s é a distância do ponto de aplicação da carga no plano vertical $y = 0$. A convenção positiva de sinal para as componentes dos deslocamentos radial u_s e tangencial u_ψ , é também indicada na Figura 4.2.3-1b.

Para efeito de comparação, os campos de deslocamentos, na superfície e no interior de um semi-espaco visco-elástico uniforme, correspondentes a uma carga concentrada vertical foram calculados pelos procedimentos numéricos apresentados na Seção 4.1. Foi considerado que a carga se move na superfície livre do semi-espaco $z = 0$, na direção positiva do eixo X . O semi-espaco uniforme visco-elástico considerado é caracterizado por $\nu = 0.25$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$ e $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$. Para os casos de comparação, nos quais as velocidades das cargas pertenciam ao regime subsônico, os coeficientes de amortecimento do material considerados para o meio foram $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$, enquanto que para velocidades das cargas nos regimes transônico ou supersônico foram considerados dois pares de coeficientes de amortecimento: $\xi_\alpha = 0.001$, $\xi_\beta = 0.005$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$. Com o objetivo de se comparar os resultados deste estudo com os apresentados por Lansing (1966), é necessária a transformação dos resultados para as coordenadas polares mostradas na Figura 4.2.3-1. Para os pontos de observação localizados na superfície do semi-espaco, as coordenadas polares r e φ se relacionam com as coordenadas Cartesianas pelas equações $x - Ct = r \cos \varphi$ e $y = r \sin \varphi$ conforme mostra a Figura 4.3.2-1a. Então:

$$u_r = u(x_r, y_r, 0) \cos \varphi + v(x_r, y_r, 0) \sin \varphi \quad (4-18a)$$

$$u_\varphi = v(x_r, y_r, 0) \cos \varphi - u(x_r, y_r, 0) \sin \varphi \quad (4-18b)$$

Para este caso, os resultados numéricos foram obtidos em um ponto de observação fixo localizado na superfície em $\vec{x}_r = (0, 20 \text{ m}, 0)$.

Para os pontos de observação localizados no plano vertical $y = 0$, as

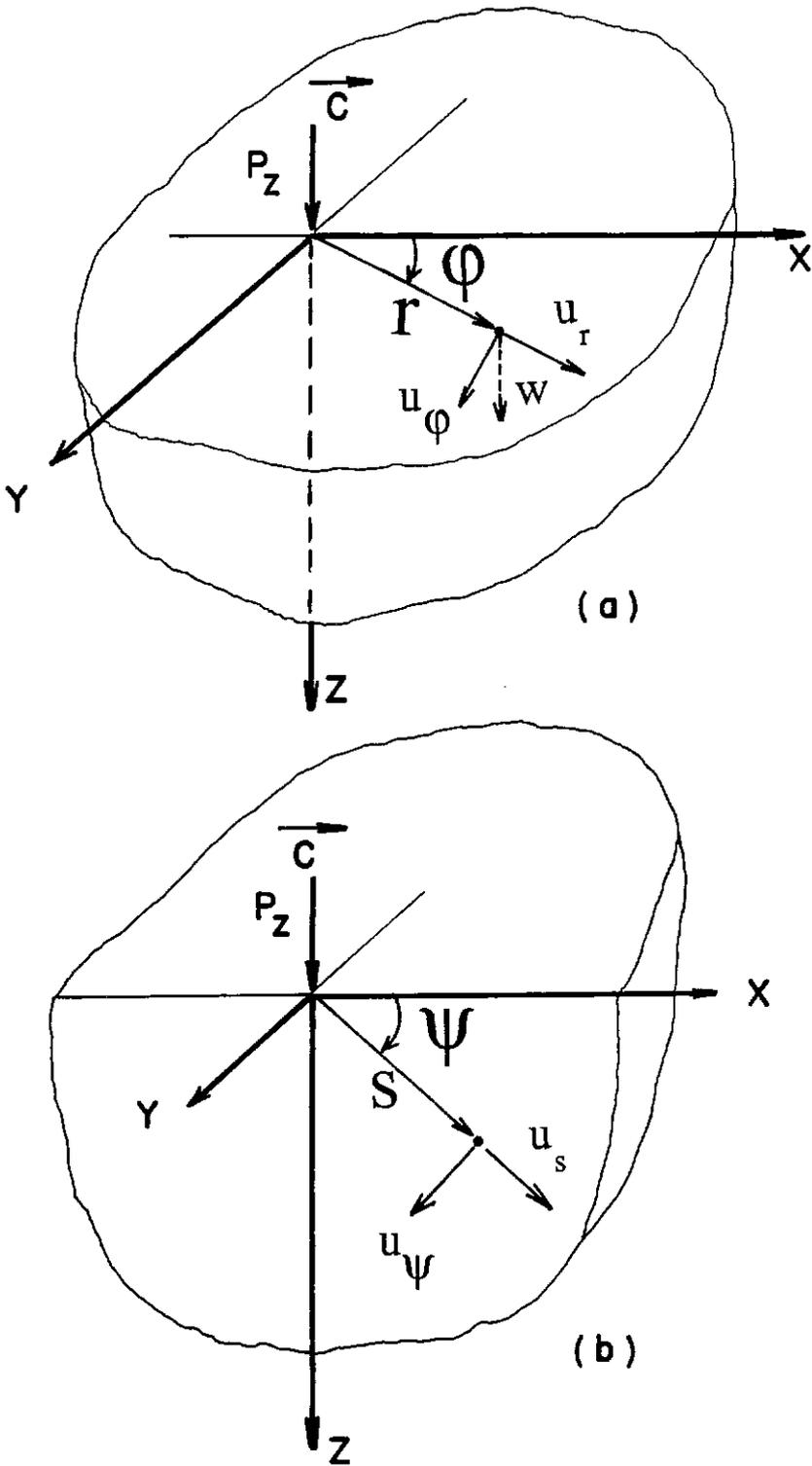


Figura 4.2.3-1 Sistemas de coordenadas polares e notações para as componentes do deslocamento. (a) Pontos de observação localizados na superfície livre; (b) pontos de observação localizados no plano vertical $y = 0$.

coordenadas polares s e ψ se relacionam com as coordenadas Cartesianas pelas equações $x - Ct = s \cos \psi$ e $z = s \sin \psi$, conforme mostra a Figura 4.3.2-1b. As componentes radial e tangencial do deslocamento são dadas por:

$$u_s = u(x_r, 0, z_r) \cos \psi + w(x_r, 0, z_r) \sin \psi \quad (4-18a)$$

$$u_\psi = w(x_r, 0, z_r) \cos \psi - u(x_r, 0, z_r) \sin \psi \quad . \quad (4-18b)$$

Para este caso, os resultados numéricos foram obtidos em um ponto de observação fixo localizado no plano vertical $y = 0$ em $\vec{x}_r = (0, 0, 20 m)$. Os resultados numéricos no domínio do tempo foram calculados através da síntese de Fourier de 2048 valores de cada componente no domínio da frequência. A frequência de corte considerada foi de 1600 Hertz.

As componentes verticais e tangenciais do deslocamento da superfície, produzidas por uma carga concentrada vertical, que se move sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme com velocidade constante subsônica, transônica e supersônica, são representadas graficamente versus $\varphi = \arccos[(x_r - Ct)/r]$ nas Figuras 4.2.3-2 a 4.2.3-5. Para efeito de comparação, nestas figuras são mostrados também os resultados correspondentes apresentados por Lansing (1966), para um semi-espaço elástico uniforme. Como todas as componentes do deslocamento são diretamente proporcionais a P_z e inversamente proporcionais à distância r e a $\bar{\mu}$ (Lansing, 1966), são utilizadas as seguintes normalizações:

$$u_\varphi^* = \frac{\bar{\mu} r}{P_z} u_\varphi \quad (4-20a)$$

$$w^* = \frac{\bar{\mu} r}{P_z} w \quad . \quad (4-21b)$$

A velocidade da onda de Rayleigh para um semi-espaço elástico uniforme definido pelo coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$ é dada por $\bar{c}_R = [2(1 - 1/\sqrt{3})]^{1/2} \beta$ (Graff, 1975). No domínio subsônico ($M_\alpha < M_\beta < 1$) foram consideradas duas velocidades para carga: $M_\beta = 0.909$ e $M_\beta = 0.957$, a primeira menor e a segunda maior do que

a velocidade da onda de Rayleigh para o meio ($M_\beta \approx 0.919$). Na Figura 4.2.3-2, as componentes verticais e tangenciais do deslocamento da superfície, u_φ^* e w^* , produzidas por uma carga concentrada vertical, que se move sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme com velocidade constante subsônica $C = 909 \text{ m/s}$ ($M_\beta = 0.909$) obtidas pelo presente método (linhas contínuas), são comparadas com os resultados correspondentes apresentados por Lansing (1966) (linhas tracejadas) para um semi-espaco elástico. Como pode ser observado, existe uma boa concordância entre os dois resultados. É importante salientar, que esta velocidade da carga ($M_\beta = 0.909$) é muito próxima da velocidade da onda de Rayleigh, onde ocorrem mudanças drásticas na forma dos pulsos e os efeitos do amortecimento são particularmente importantes. Resultados semelhantes para o caso de uma carga com velocidade subsônica $C = 957 \text{ m/s}$ ($M_\beta = 0.957$) são comparados na Figura 4.2.3-3. Também neste caso, é obtida uma boa concordância para as componentes verticais do deslocamento w^* , mas, por outro lado, podem ser observadas diferenças substanciais para as componentes tangenciais u_φ^* . Para esta velocidade de carga, o valor de u_φ^* é muito pequeno quando comparado ao de w^* . Também, existe uma descontinuidade angular acentuada em $\varphi \approx 106$ graus para os resultados obtidos pelo presente enfoque (linha contínua). Tal descontinuidade, que no caso de sólidos perfeitamente elásticos corresponde a uma singularidade da função delta de Dirac, está relacionada com a chegada da frente de onda de Rayleigh. Este efeito não é incluído nos resultados obtidos por Lansing (1966).

Comparações semelhantes, para o caso de uma carga com velocidade transônica $C = 1670 \text{ m/s}$ ($M_\beta = 1.67$), são apresentadas na Figura 4.2.3-4. Nesta figura, resultados numéricos calculados pelo enfoque proposto para valores do amortecimento $\xi_\alpha = 0.001$ e $\xi_\beta = 0.005$ são representados por linhas contínuas, enquanto que para $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$ são representados por linhas com o tracejado longo. Os resultados apresentados por Lansing são mostrados por

linhas com o tracejado curto. Os três conjuntos de valores para a componente vertical do deslocamento w^* são plenamente congruentes demonstrando uma concordância excelente com os resultados de Lansing, bem como que a influência do amortecimento em w^* é muito pequena. Conforme mostrado na parte superior da Figura 4.2.3-4, existe uma boa concordância de u_φ^* para quase todos os valores da variável angular φ , com exceção da vizinhança de $\varphi \approx 147^\circ$, onde u_φ^* obtido pelo presente estudo apresenta uma forte descontinuidade angular. Esta descontinuidade, que no caso elástico corresponde a uma singularidade da função delta, está associada aos efeitos da frente de onda de Rayleigh sobre a componente do deslocamento u_φ^* . Este pulso não se encontra incluído nos resultados correspondentes obtidos por Lansing. A existência destas singularidades da função delta na componente tangencial do deslocamento u_φ^* , para pontos de observação localizados na superfície do semi-espaco, foi identificada por Kennedy and Herrmann (1973a,b). Comparações similares para uma carga com velocidade supersônica $C = 1840 \text{ m/s}$ ($M_\beta = 1.84$) são apresentadas na Figura 4.2.3-5. Os resultados apresentados na Figura 4.2.3-5 indicam que os efeitos do amortecimento do material são mais significantes nas proximidades de $\varphi = 110^\circ$, onde a resposta está associada com a frente de onda P. Comparações adicionais de resultados, para a componente radial normalizada do movimento $u_r^* = (\bar{\mu}r/P_z) u_r$, para $M_\beta = 0.909, 0.957, 1.67$ e 1.84 confirmam a exatidão da metodologia proposta. As componentes radiais e tangenciais dos deslocamentos nos pontos de observação localizados embaixo da linha de movimento da carga (plano vertical $y = 0$), produzidas por uma carga vertical, que se move sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\nu = 0.25, \bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}, \bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}, \xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$ e $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$) com velocidade supersônica $C = 1840 \text{ m/s}$ ($M_\beta = 1.84$), são mostradas com linhas contínuas na Figura 4.2.3-6. Para efeito de comparação, nesta figura são mostrados também, com linhas tracejadas,

os resultados correspondentes apresentados por Lansing (1966) para um semi-espaço elástico uniforme. As componentes radial e tangencial do deslocamento são transformadas em valores adimensionais através das mesmas normalizações utilizadas por Lansing (1966), ou seja:

$$u_s^* = \frac{\bar{\mu} s}{P_z} u_s \quad (4-21a)$$

$$u_\psi^* = \frac{\bar{\mu} s}{P_z} u_\psi \quad (4-21b)$$

Os dois conjuntos de resultados concordam após a passagem da linha Mach da onda P ($\psi = 110^\circ$) para a componente tangencial e a passagem da linha de Mach da onda S ($\psi = 147^\circ$) para a componente radial. Os resultados para o semi-espaço visco-elástico com amortecimento histerético (linhas contínuas) apresentam a chegada de alguns pequenos movimentos não causais antes da chegada das linhas Mach das ondas P e S (frente das ondas P e S). Tal efeito é um resultado esperado que está associado com a hipótese adotada de amortecimento do material independente da frequência.

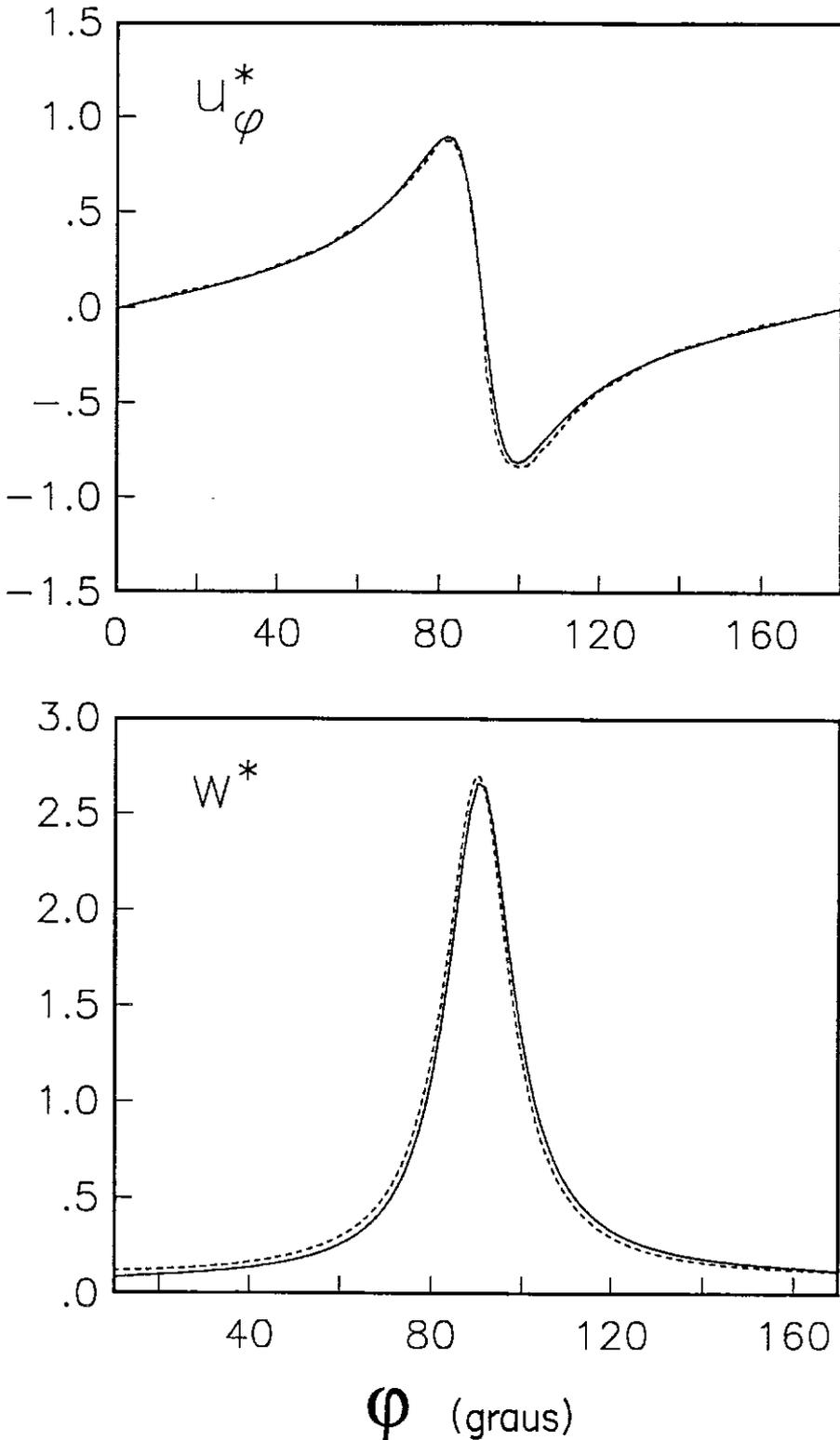


Figura 4.2.3-2 Componentes adimensionais do deslocamento da superfície, w^* e u_ϕ^* , para uma carga vertical concentrada, que se move na superfície de um semi-espaço uniforme, com velocidade subsônica constante $C = 909 \text{ m/s}$ ($M_\beta = 0.909$) menor do que a velocidade da onda de Rayleigh no meio ($M_\beta \approx 0.919$). Os resultados apresentados por Lansing (1966) para um semi-espaço uniforme perfeitamente elástico (coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$) são mostrados com linhas tracejadas. Os resultados correspondentes obtidos pelo procedimento numérico proposto para um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$) são representados com linhas contínuas.

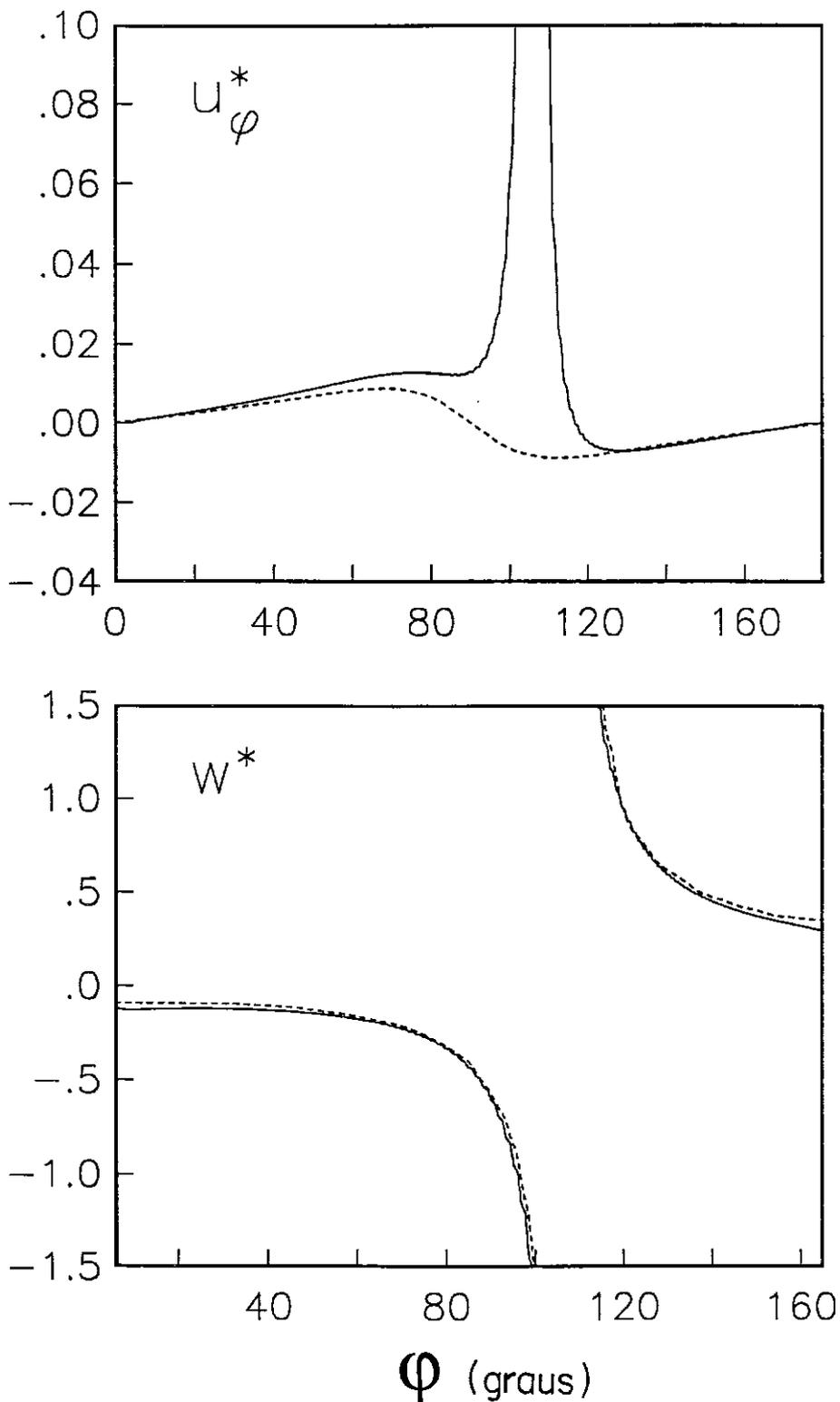


Figura 4.2.3-3 Componentes adimensionais do deslocamento da superfície, w^* e u_{φ}^* , para uma carga vertical concentrada, que se move na superfície de um semi-espaço uniforme, com velocidade subsônica constante $C = 957 \text{ m/s}$ ($M_{\beta} = 0.957$) maior do que a velocidade da onda de Rayleigh no meio ($M_{\beta} \approx 0.919$). Os resultados apresentados por Lansing (1966) para um semi-espaço uniforme perfeitamente elástico (coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$) são mostrados com linhas tracejadas. Os resultados correspondentes obtidos pelo procedimento numérico proposto para um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_{\alpha} = \xi_{\beta} = 0.001$) são representados com linhas contínuas.

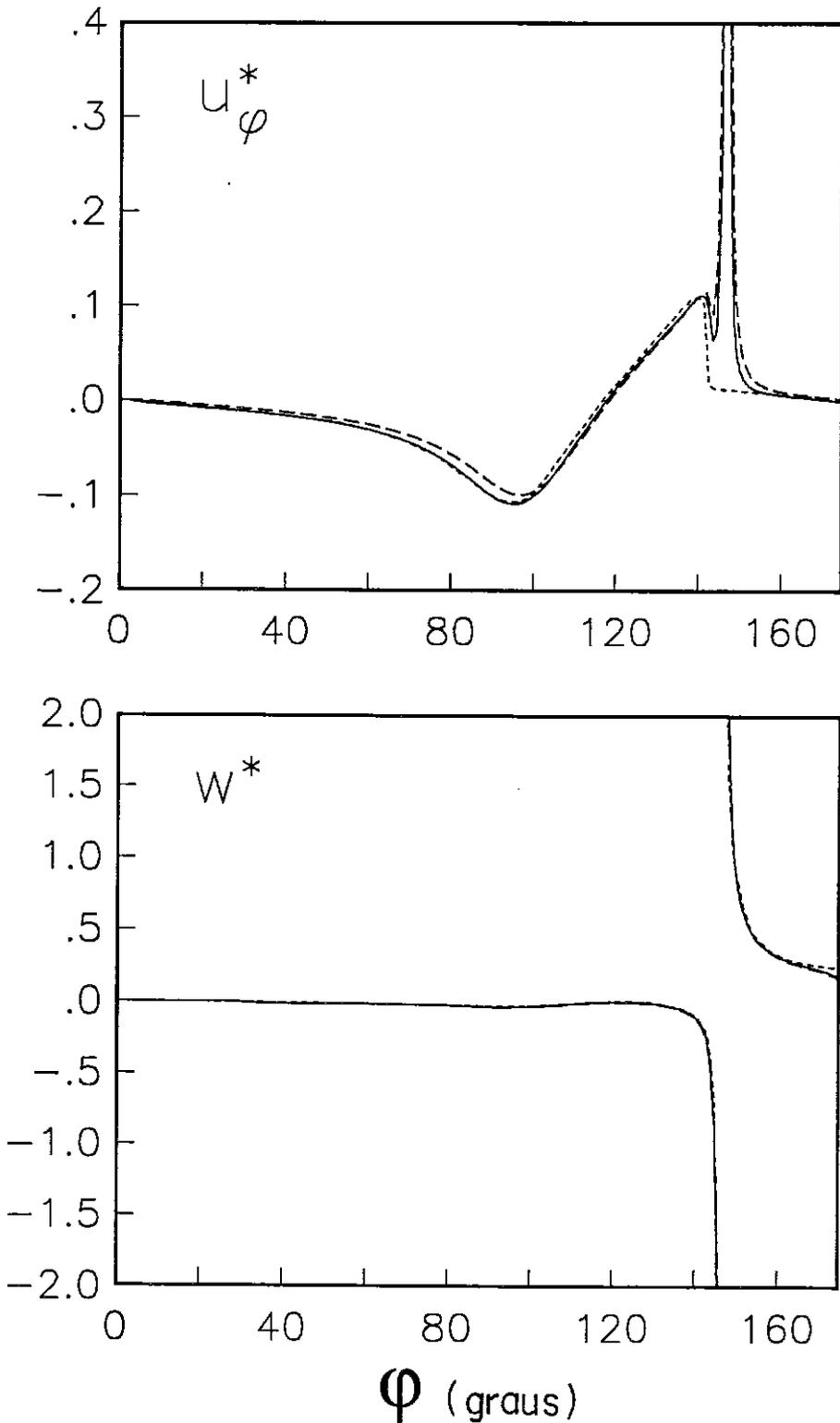


Figura 4.2.3-4 Componentes adimensionais do deslocamento da superfície, w^* e u_{φ}^* , para uma carga vertical concentrada, que se move na superfície de um semi-espaço uniforme com velocidade transônica constante $C = 1670 \text{ m/s}$ ($M_{\beta} = 1.67$). Os resultados apresentados por Lansing (1966) para um semi-espaço perfeitamente elástico (coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$) são mostrados por linhas com tracejado curto. Os resultados correspondentes obtidos pelo procedimento numérico proposto para dois modelos de semi-espaço visco-elástico uniforme: um caracterizado por $\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $\xi_{\alpha} = 0.001$ e $\xi_{\beta} = 0.005$, e o outro com as mesmas propriedade a menos dos coeficientes de amortecimento, que são considerados iguais $\xi_{\alpha} = \xi_{\beta} = 0.01$, são representados, respectivamente, com linhas contínuas e com linhas com tracejado longo.

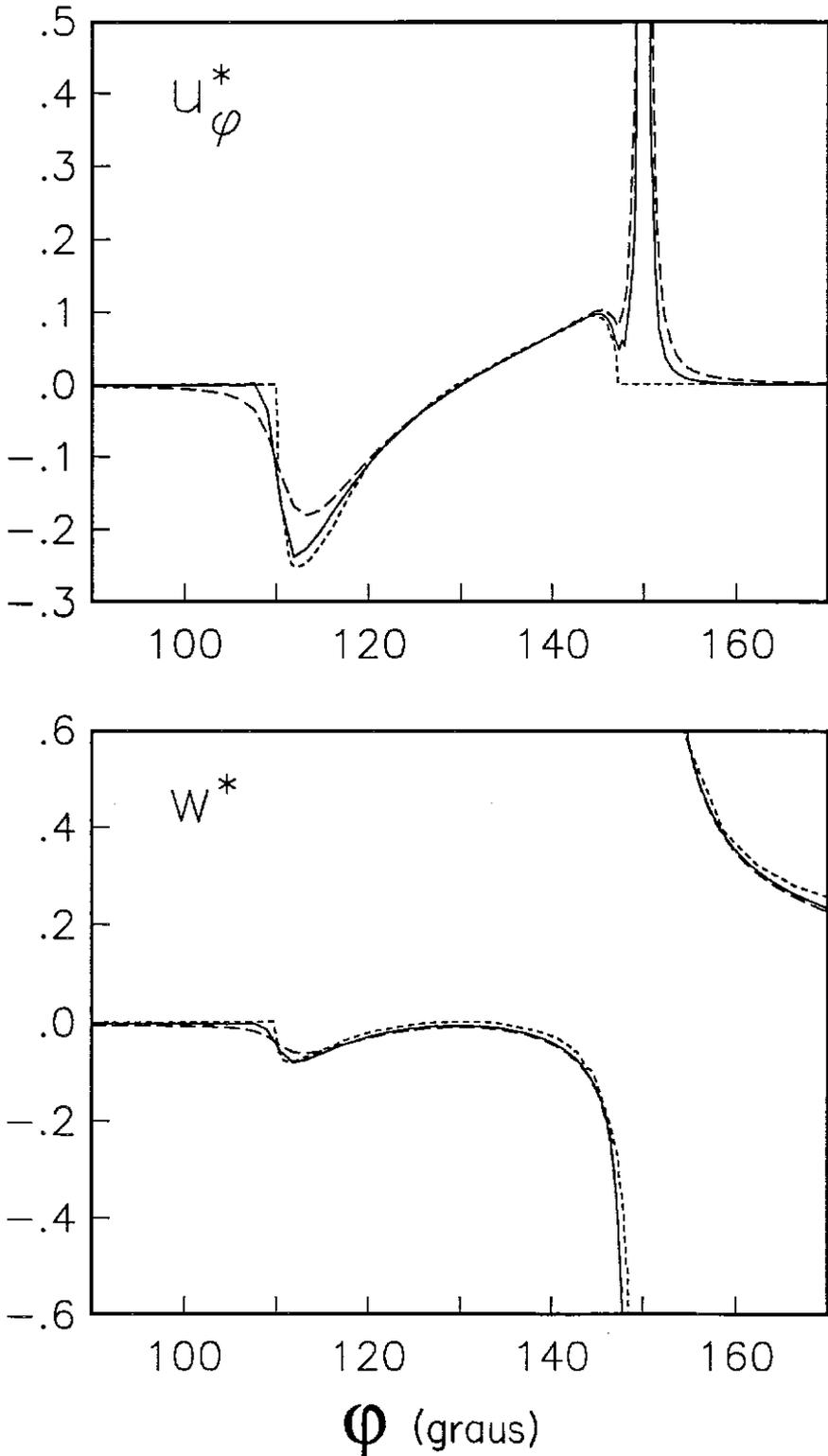


Figura 4.2.3-5 Componentes adimensionais do deslocamento da superfície, w^* e u_{φ}^* , para uma carga vertical concentrada, que se move na superfície de um semi-espaço uniforme com velocidade supersônica constante $C = 1840 \text{ m/s}$ ($M_{\beta} = 1.84$). Os resultados apresentados por Lansing (1966) para um semi-espaço uniforme perfeitamente elástico (coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$) são mostrados por linhas com tracejado curto. Os resultados correspondentes obtidos pelo procedimento numérico proposto para dois modelos de semi-espaço visco-elástico uniforme: um caracterizado por $\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $\xi_{\alpha} = 0.001$ e $\xi_{\beta} = 0.005$, e o outro com as mesmas propriedade a menos dos coeficientes de amortecimento que são considerados iguais $\xi_{\alpha} = \xi_{\beta} = 0.01$, são representados, respectivamente, com linhas contínuas e com linhas com tracejado longo.

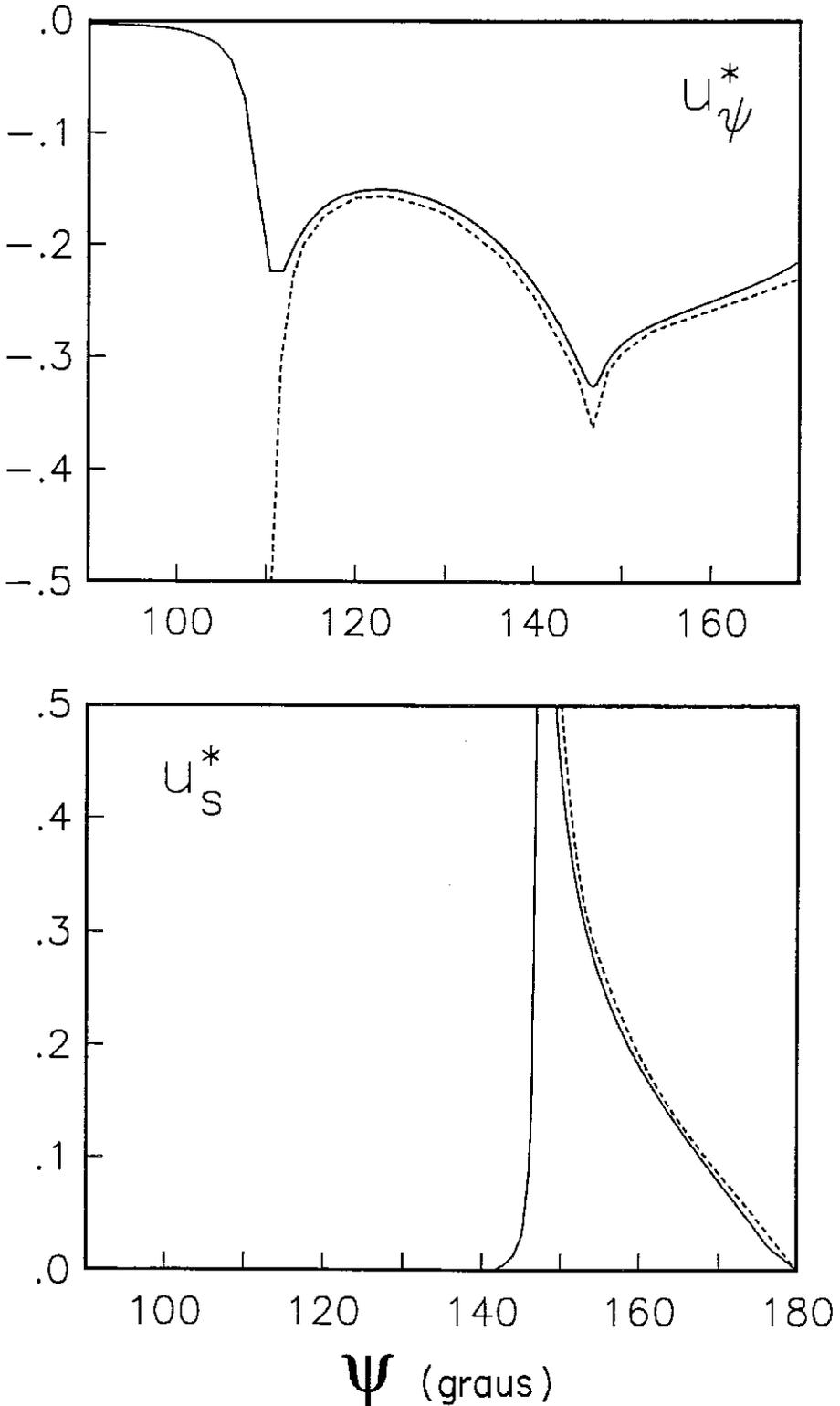


Figure 4.2.3-6 Componentes adimensionais dos deslocamento, w^* e u_{ψ}^* , nos pontos de observação localizados embaixo da linha de movimento da carga (plano vertical $y = 0$), para uma carga vertical concentrada, que se move na superfície de um semi-espaço uniforme com velocidade supersônica constante $C = 1840 \text{ m/s}$ ($M_{\beta} = 1.84$). Os resultados apresentados por Lansing (1966) para um semi-espaço uniforme perfeitamente elástico (coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$) são mostrados com linhas tracejadas. Os resultados correspondentes obtidos pelo procedimento numérico proposto para um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_{\alpha} = \xi_{\beta} = 0.01$) são representados com linhas contínuas.

4.3. Resposta de um Semi-Espaço Visco-Elástico sob a Ação de Cargas Móveis

Na Seção anterior, as respostas na superfície e no interior de um semi-espaço visco-elástico uniforme, produzidas por uma carga concentrada vertical, que se move com velocidade nos regimes subsônico, transônico e supersônico, foram apresentadas para efeito de validação da metodologia proposta. Nesta seção, são apresentados alguns resultados novos significativos para ilustrar as características principais da resposta de um semi-espaço sob a ação de cargas pontuais, que se movem sobre sua superfície ou no seu interior. A distribuição sobre a superfície da componente vertical do deslocamento é descrita na Subseção 4.3.1. As formas dos pulsos de resposta das componentes dos deslocamentos, das velocidades e das tensões para cargas móveis na superfície ou no interior de um semi-espaço, são apresentadas na Subseção 4.3.2, e as relações de reciprocidade, que surgem com a troca de posições entre a fonte e o ponto de observação, são investigadas na Subseção 4.3.3.

4.3.1. Distribuição das Componentes Verticais dos Deslocamentos para os Pontos da Superfície

As características principais da resposta dinâmica de um semi-espaço visco-elástico uniforme sob a ação de cargas concentradas móveis são ilustradas nas Figuras 4.3.1-1 a 4.3.1-4. Nestas figuras, o deslocamento da superfície produzido por uma carga concentrada vertical, que se move ao longo da direção positiva do eixo X , sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme com velocidade constante subsônica, transônica e supersônica, é mostrado versus as coordenadas x e y dos pontos da superfície. O campo de deslocamento vertical da superfície foi obtido pelo procedimento numérico apresentado na Seção 4.1, para o caso de um semi-espaço visco-elástico uniforme caracterizado por $\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, e $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$. Foram considerados coeficientes

de amortecimento do material iguais a $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$, nas análises em que as velocidades das cargas pertenciam ao regime subsônico, e iguais a $\xi_\alpha = 0.001$ e $\xi_\beta = 0.005$, nas análises com velocidades da carga nos regimes transônico e supersônico. As componentes verticais dos deslocamentos foram transformadas em valores adimensionais, através da seguinte normalização:

$$w^* = \frac{\bar{\mu} a}{P_z} w \quad (4-22)$$

onde a é um comprimento característico de referência. As variações do deslocamento vertical adimensional w^* nos pontos da superfície, mostradas nas Figuras 4.3.1-1 a 4.3.1-4, são correspondentes ao campo na superfície, no instante exato em que ponto de aplicação da carga concentrada vertical móvel está localizado na origem dos eixos coordenados $\vec{x}_s = (0, 0, 0)$. Nestas figuras, com o objetivo de se ilustrar melhor algumas características do movimento vertical, foram seccionados os valores extremos dos deslocamentos verticais. Os deslocamentos verticais na superfície w^* correspondentes às cargas com velocidades subsônicas $M_\beta = 0.909$ e $M_\beta = 0.957$ são mostrados, respectivamente, nas Figuras 4.3.1-1 e 4.3.1-2. A velocidade da primeira carga móvel considerada é menor do que a velocidade da onda de Rayleigh para o meio ($M_\beta \approx 0.919$), enquanto que a outra é maior. Como pode ser observado nestas figuras, a forma da distribuição na superfície da resposta w^* , para velocidades das cargas no regime subsônico, é completamente diferente dependendo se a velocidade da carga é menor ou maior do que a velocidade da onda de Rayleigh. A resposta da superfície w^* é simétrica com relação aos eixos X e Y , para velocidades das cargas menores do que a velocidade da onda de Rayleigh, enquanto que w^* apresenta uma descontinuidade abrupta, ao longo de duas linhas ligadas ao ponto de aplicação da carga, quando as velocidades das cargas são maiores do que a velocidade da onda de Rayleigh. Estas linhas são as chamadas linhas de Mach associadas com as frentes da onda de Rayleigh.

Sempre que a velocidade da carga excede uma das três velocidades de onda, que podem se propagar sobre a superfície de um semi-espaço uniforme (ondas de compressão, de cisalhamento e de Rayleigh), os efeitos correspondentes a estas ondas são confinados na região do sólido limitada pela superfície do semi-espaço e pela metade inferior de um cone com ápice no ponto de aplicação da carga. Este cone se move ligado à carga e é conhecido como cone de Mach, cuja intercessão com a superfície do semi-espaço define as linhas de Mach associadas com as frentes das ondas. A localização das linhas de Mach na superfície relativas às frentes das ondas de Rayleigh, de cisalhamento e de compressão, definidas em termos da coordenada angular φ , descrita na Figura 4.2.3-1a, pode ser obtida por:

$$\varphi = \pm \left[\pi - \arcsen \left(\frac{\text{velocidade da onda}}{\text{velocidade da carga}} \right) \right] \quad (4-23)$$

As linhas de Mach associadas com as frentes das ondas de Rayleigh mostradas na Figura 4.3.1-2 são definidas por $\varphi_R \approx 106^\circ$.

A resposta da superfície w^* para uma carga com velocidade transônica $M_\beta = 1.67$ é apresentada na Figura 4.3.1-3. Neste caso, existem dois pares de linhas de Mach associadas com as frentes das ondas, respectivamente, de cisalhamento e de Rayleigh. Tais linhas de Mach são definidas, de acordo com a equação (4-23), por $\varphi_S \approx 143^\circ$ e $\varphi_R \approx 147^\circ$. Na Figura 4.3.1-3 podem ser observadas algumas perturbações imediatamente à frente da carga, que são associadas com as ondas de compressão. O comportamento da componente vertical do deslocamento da superfície w^* é bastante semelhante ao do caso anterior, apresentando também uma descontinuidade abrupta na vizinhança da frente da onda de Rayleigh.

Finalmente, a resposta vertical da superfície w^* para uma carga com velocidade supersônica $M_\beta = 1.84$ é mostrada na Figura 4.3.1-4. Neste caso, estão presentes na resposta as frentes das ondas de Rayleigh, de cisalhamento e de compressão. As linhas de Mach correspondentes são definidas, respectivamente,

por $\varphi_R \approx 150^\circ$, $\varphi_S \approx 147^\circ$ e $\varphi_P \approx 110^\circ$, com base na equação (4-23). Como pode ser observado na Figura 4.3.1-4, não existem perturbações à frente da linha de Mach associada à onda de compressão; atrás desta linha de Mach, w^* cresce rapidamente, em seguida aproxima-se de zero e, então, de novo experimenta um descontinuidade abrupta nas proximidades da frente da onda de Rayleigh.

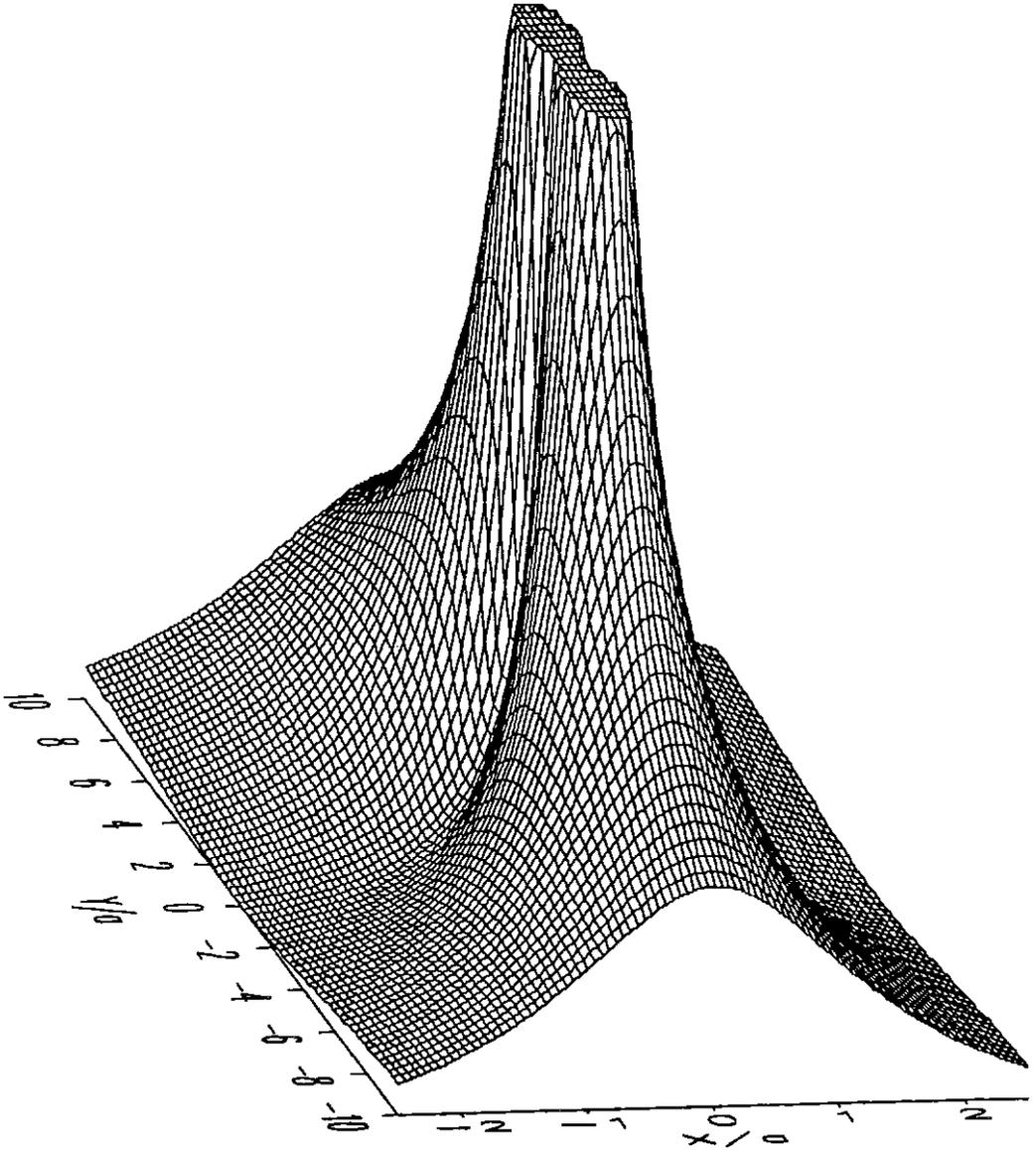


Figura 4.3.1-1 Deslocamento vertical adimensional da superfície w^* produzido por uma carga vertical concentrada, que se move ao longo da direção positiva do eixo X , sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$), com velocidade subsônica constante $C = 909 \text{ m/s}$ ($M_\beta = 0.909$) menor do que a velocidade das ondas de Rayleigh no meio ($M_\beta \approx 0.919$). A resposta que é mostrada corresponde ao instante em que a carga concentrada móvel passa exatamente sobre a origem dos eixos coordenados $\vec{x}_s = (0, 0, 0 \text{ m})$. O parâmetro a é um comprimento de referência.

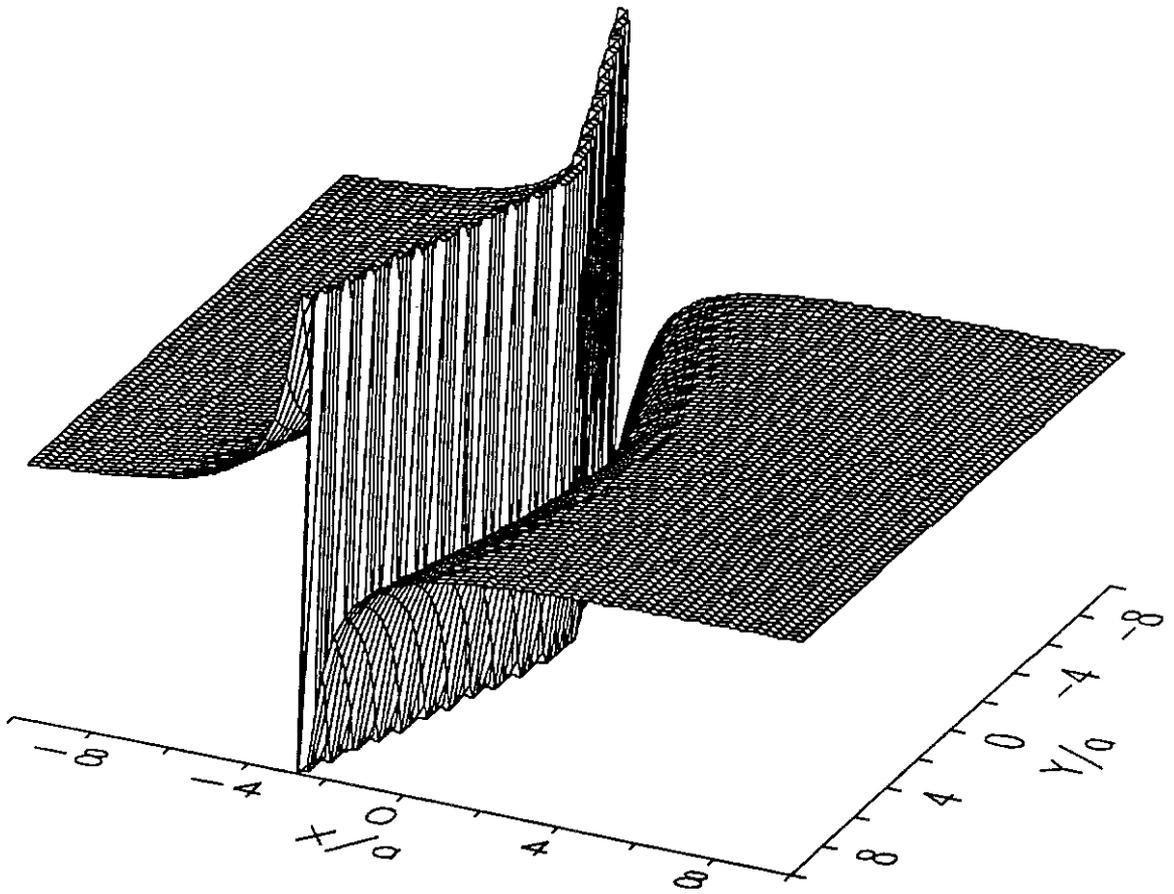


Figura 4.3.1-2 Deslocamento vertical adimensional da superfície w^* produzido por uma carga vertical concentrada, que se move ao longo da direção positiva do eixo X , sobre a superfície de um semi-espço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\beta = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$), com velocidade subsônica constante $C = 957 \text{ m/s}$ ($M_\beta = 0.957$) maior do que a velocidade das ondas de Rayleigh no meio ($M_\beta \approx 0.919$). A resposta que é mostrada corresponde ao instante em que a carga concentrada móvel passa exatamente sobre a origem dos eixos coordenados $\vec{x}_s = (0, 0, 0 \text{ m})$. O parâmetro a é um comprimento de referência.

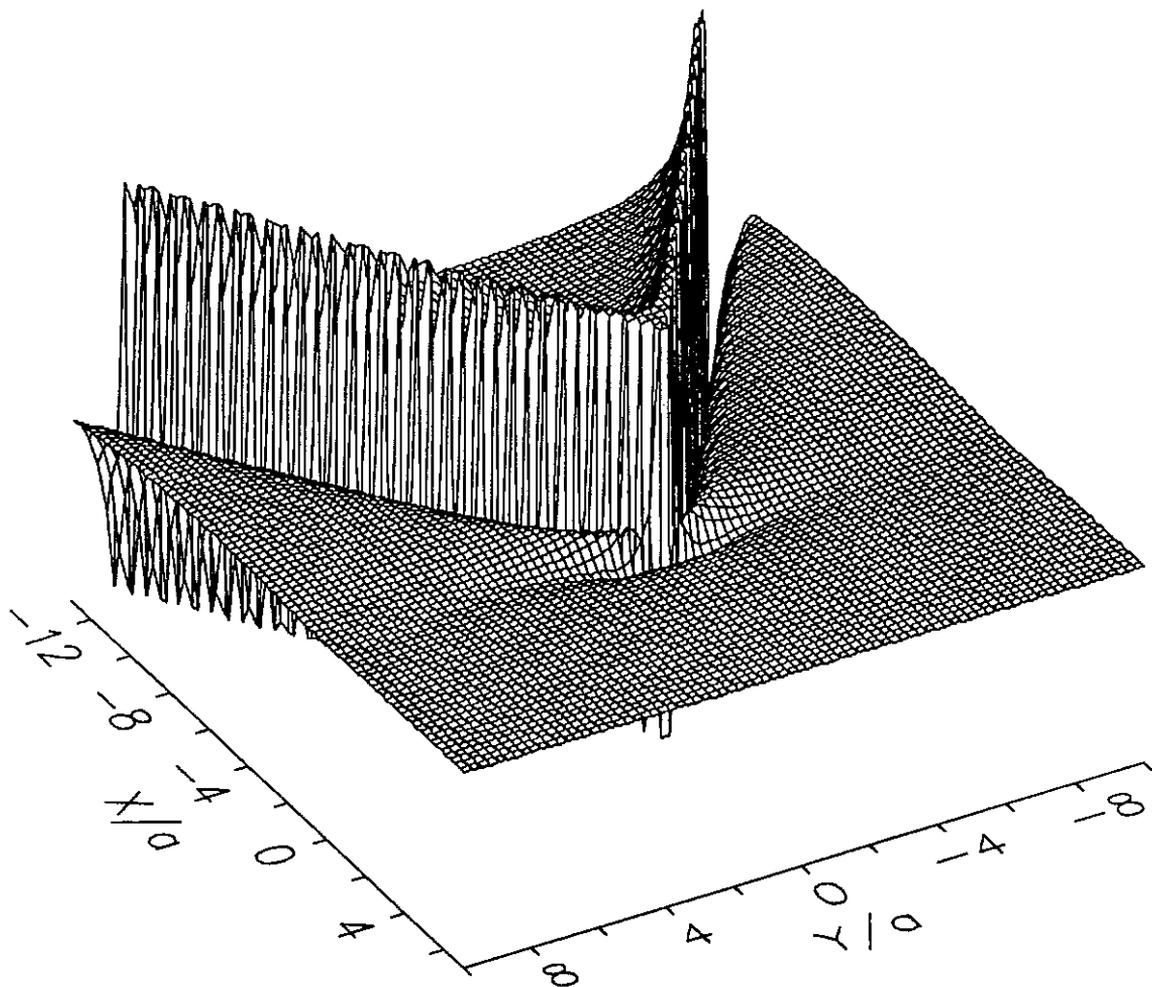


Figura 4.3.1-3 Deslocamento vertical adimensional da superfície w^* produzido por uma carga vertical concentrada, que se move ao longo da direção positiva do eixo X , sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $\xi_\alpha = 0.001$ e $\xi_\beta = 0.005$), com velocidade transônica constante $C = 1670 \text{ m/s}$ ($M_\beta = 1.67$). A resposta que é mostrada corresponde ao instante em que a carga concentrada móvel passa exatamente sobre a origem dos eixos coordenados $\vec{x}_s = (0, 0, 0 \text{ m})$. O parâmetro a é um comprimento de referência.

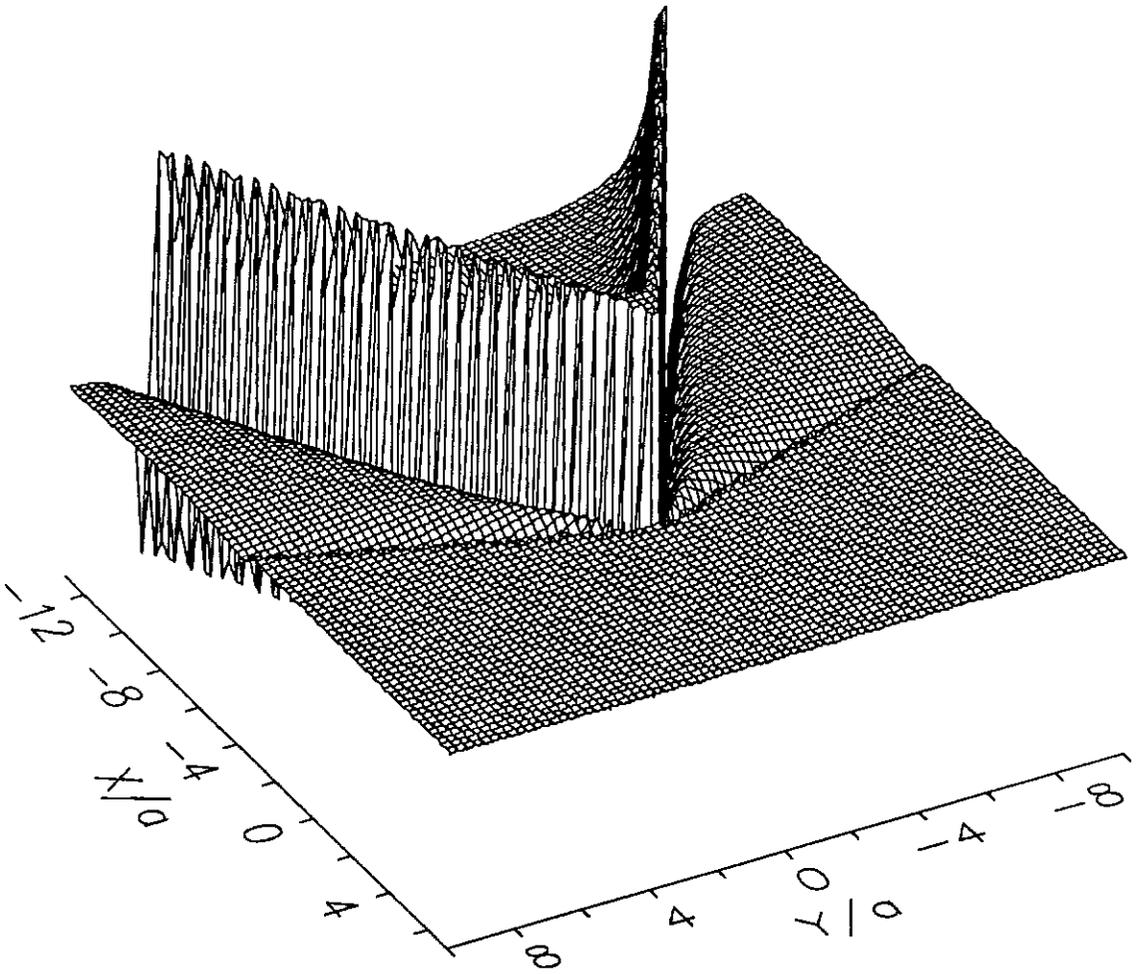


Figura 4.3.1-4 Deslocamento vertical adimensional da superfície w^* produzido por uma carga vertical concentrada, que se move ao longo da direção positiva do eixo X , sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $\xi_\alpha = 0.001$ e $\xi_\beta = 0.005$), com velocidade supersônica constante $C = 1840 \text{ m/s}$ ($M_\beta = 1.84$). A resposta que é mostrada corresponde ao instante em que a carga concentrada móvel passa exatamente sobre a origem dos eixos coordenados $\vec{x}_s = (0, 0, 0 \text{ m})$. O parâmetro a é um comprimento de referência.

4.3.2. Formas dos Pulsos das Respostas Dinâmicas

As formas dos pulsos das respostas de um semi-espaço visco-elástico uniforme, correspondentes a uma carga concentrada, que atua sobre a sua superfície ou no seu interior e que move com velocidade constante na direção positiva do eixo X , são mostradas nas Figuras 4.3.2-1 a 4.3.2-7 e nas Figuras 4.3.2-10 e 4.3.2-11. Os resultados numéricos foram obtidos usando-se o procedimento descrito na Seção 4.1, para um semi-espaço visco-elástico uniforme caracterizado por $\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$ e $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$. Foram considerados neste estudo dois conjuntos de coeficientes de amortecimento do material $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$, respectivamente, para as análises com as velocidades das cargas nos regimes subsônico e supersônico. Nestas figuras, as componentes adimensionais dos deslocamentos, das velocidades e das tensões, são representadas graficamente (ordenadas) versus o tempo em unidades de segundo (abscissas), onde $t = 0$ corresponde ao instante em que o ponto de aplicação da carga concentrada móvel passa através da coordenada $x = 0 \text{ m}$. As componentes adimensionais dos deslocamentos, das velocidades e das tensões, representadas genericamente por D^* , V^* e σ^* , são definidas por:

$$D^* = \frac{\bar{\mu} \bar{z}}{P} D \quad (4-24a)$$

$$V^* = \frac{\bar{\mu} \bar{z}^2}{P \bar{\beta}} V \quad (4-24b)$$

$$\sigma^* = \frac{\bar{z}^2}{P} \sigma \quad (4-24c)$$

onde $\bar{z} = [(z_s - z_r)^2]^{\frac{1}{2}}$. Nesta seção, o último índice do subscrito nas componentes do deslocamento, da velocidade e das tensões identificam a direção na qual a carga concentrada móvel está aplicada.

As formas dos pulsos das respostas das componentes dos deslocamentos, das velocidades e das tensões, no interior de um semi-espaço visco-elástico,

correspondentes a uma carga que se move com velocidade constante subsônica $C = 700 \text{ m/s}$, são mostradas nas Figuras 4.3.2-1 a 4.3.2-7. Estes resultados foram calculados para duas configurações das posições da linha de atuação da carga e do ponto de observação, localizadas no plano vertical $y = 0$. Na primeira configuração, a carga se move sobre a superfície $z_s = 0$ e o ponto de observação está localizado no interior do semi-espço em $(x_r, y_r, z_r) = (0, 0, 10 \text{ m})$. Na segunda configuração, as posições são alternadas, ou seja, o ponto de observação se localiza na superfície em $(x_r, y_r, z_r) = (0, 0, 0 \text{ m})$ e a carga se move horizontalmente no plano vertical $y = 0$ a uma profundidade $z_s = 10 \text{ m}$. Os resultados numéricos no domínio do tempo foram calculados através da síntese de Fourier de 1024 valores de cada componente no domínio da frequência. A frequência de corte considerada foi de 800 Hertz.

Para efeito de comparação, as formas dos pulsos de resposta das componentes adimensionais das velocidades e das tensões \dot{u}_{ij}^* e σ_{ijk}^* , para o problema bidimensional correspondente a uma linha de carga concentrada que se move com a mesma velocidade, são apresentadas nas Figuras 4.3.2-8 e 4.3.2-9. As características do meio são as mesmas consideradas anteriormente, a excitação corresponde a uma linha de carga concentrada que se move na direção positiva do eixo x_1 sobre a superfície do semi-espço com velocidade subsônica constante $C = 700 \text{ m/s}$. O ponto de observação se localiza pelas coordenadas $(x_1^r, x_2^r) = (0, 10 \text{ m})$. Foi utilizada a seguinte normalização:

$$\dot{u}_{ij}^* = \frac{\bar{\mu} x_2^r}{H_j \bar{\beta}} \dot{u}_{ij} \quad (4-25a)$$

$$\sigma_{ijk}^* = \frac{x_2^r}{H_k} \sigma_{ijk} \quad (4-25b)$$

onde a convenção de somatório sobre k ou j não se aplica e H_i ($i=1,2,3$) é a componente da carga em unidades de força por unidade de comprimento. Uma comparação qualitativa destes resultados bidimensionais (Figuras 4.3.2-8 e 4.3.2-9)

com os resultados tridimensionais mostrados nas Figuras 4.3.2-1 a 4.3.2-7, indica que os mesmos modelos de formas dos pulsos de resposta estão presentes em ambos os casos.

As formas dos pulsos das componentes dos deslocamentos no interior de um semi-espço visco-elástico para uma carga, que se move com velocidade supersônica $C = 1840 \text{ m/s}$, são mostradas nas Figuras 4.3.2-10 e 4.3.2-11. Estes resultados foram calculados para duas configurações das posições da linha de atuação da carga e do ponto de observação, localizadas no plano vertical $y = 0$. A resposta apresentada na Figura 4.3.2-10 corresponde à configuração na qual a carga se move na superfície $z_s = 0$ e o ponto de observação se localiza no interior do semi-espço em $(x_r, y_r, z_r) = (0, 0, 20 \text{ m})$. Na Figura 4.3.2-11, a resposta está associada a outra configuração na qual as posições são alternadas, isto é, o ponto de observação se localiza na superfície em $(x_r, y_r, z_r) = (0, 0, 0 \text{ m})$, e a carga concentrada se move horizontalmente no plano $y = 0$ a uma profundidade $z_s = 20 \text{ m}$. Os resultados numéricos no domínio do tempo foram calculados através da síntese de Fourier de 2048 valores de cada componente no domínio da frequência. A frequência de corte considerada foi de 1600 Hertz. As componentes do deslocamento apresentadas nas Figuras 4.3.2-10 e 4.3.2-11 mostram de maneira clara a chegada da frente da onda de compressão, que pode ser identificada pelo primeiro pico na resposta imediatamente após o instante $t = 0$. O segundo pico corresponde à chegada da frente da onda de cisalhamento. É interessante observar que as componentes do deslocamento são contínuas através da frente da onda de Rayleigh, que ocorre imediatamente depois da chegada da frente da onda de cisalhamento. Este comportamento difere do comportamento experimentado pelas componentes dos deslocamentos em pontos de observação localizados na superfície de um semi-espço uniforme, onde as componentes dos deslocamentos exibem um pico acentuado (uma singularidade da função delta no caso elástico) nas

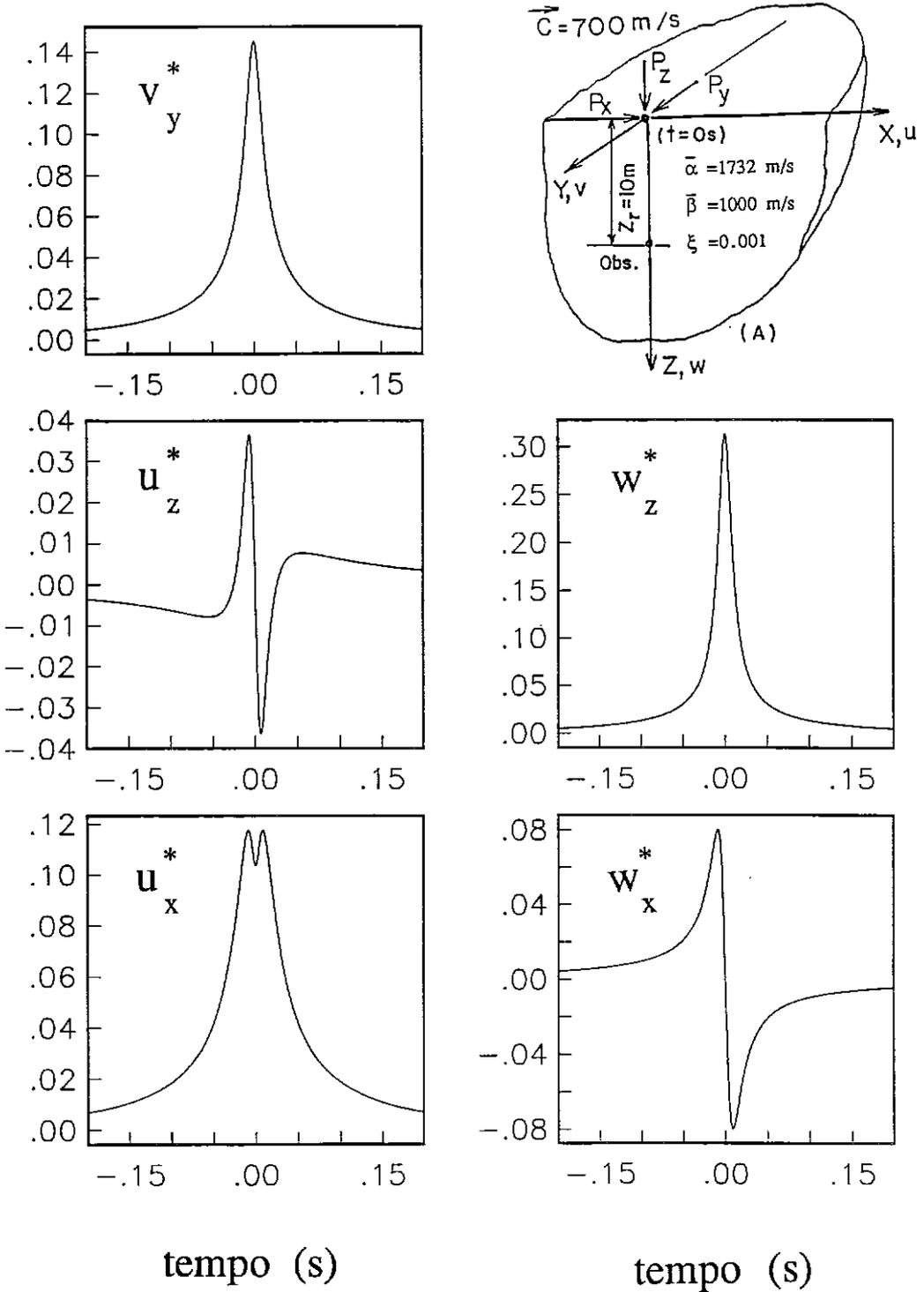


Figura 4.3.2-1 Respostas normalizadas das componentes do deslocamento em um ponto de observação $\vec{x}_r = (0, 0, 10 \text{ m})$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.7$), ao longo da direção positiva do eixo X sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$). O subscrito denota a direção na qual a carga foi aplicada.

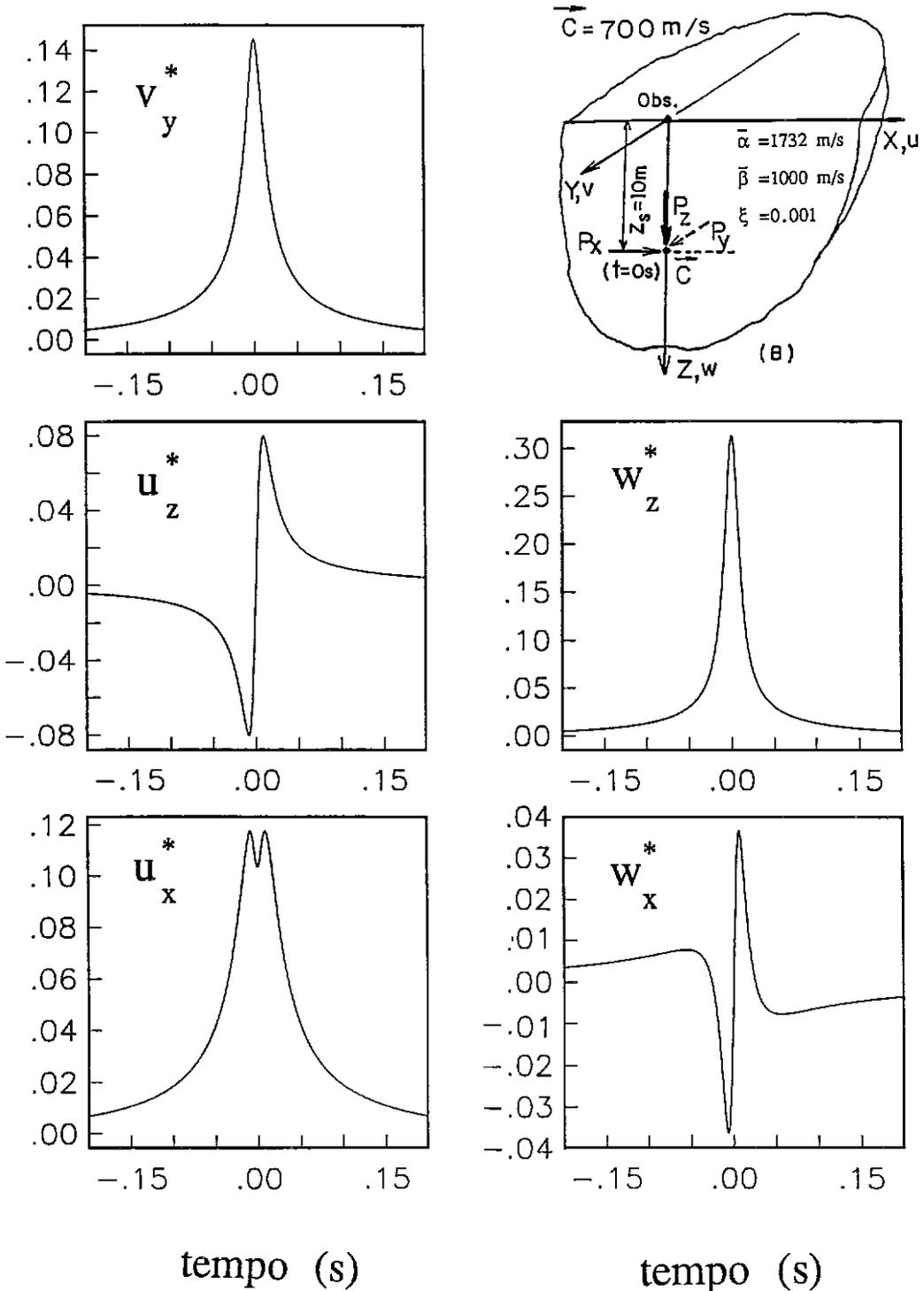


Figura 4.3.2-2 Respostas normalizadas das componentes do deslocamento em um ponto de observação situado na superfície $\vec{x}_r = (0, 0, 0 \text{ m})$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.7$), no interior de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$). A carga se move segundo direção positiva do eixo X no plano vertical $y = 0$ a uma profundidade $z_s = 10 \text{ m}$. O subscrito denota a direção na qual a carga foi aplicada.

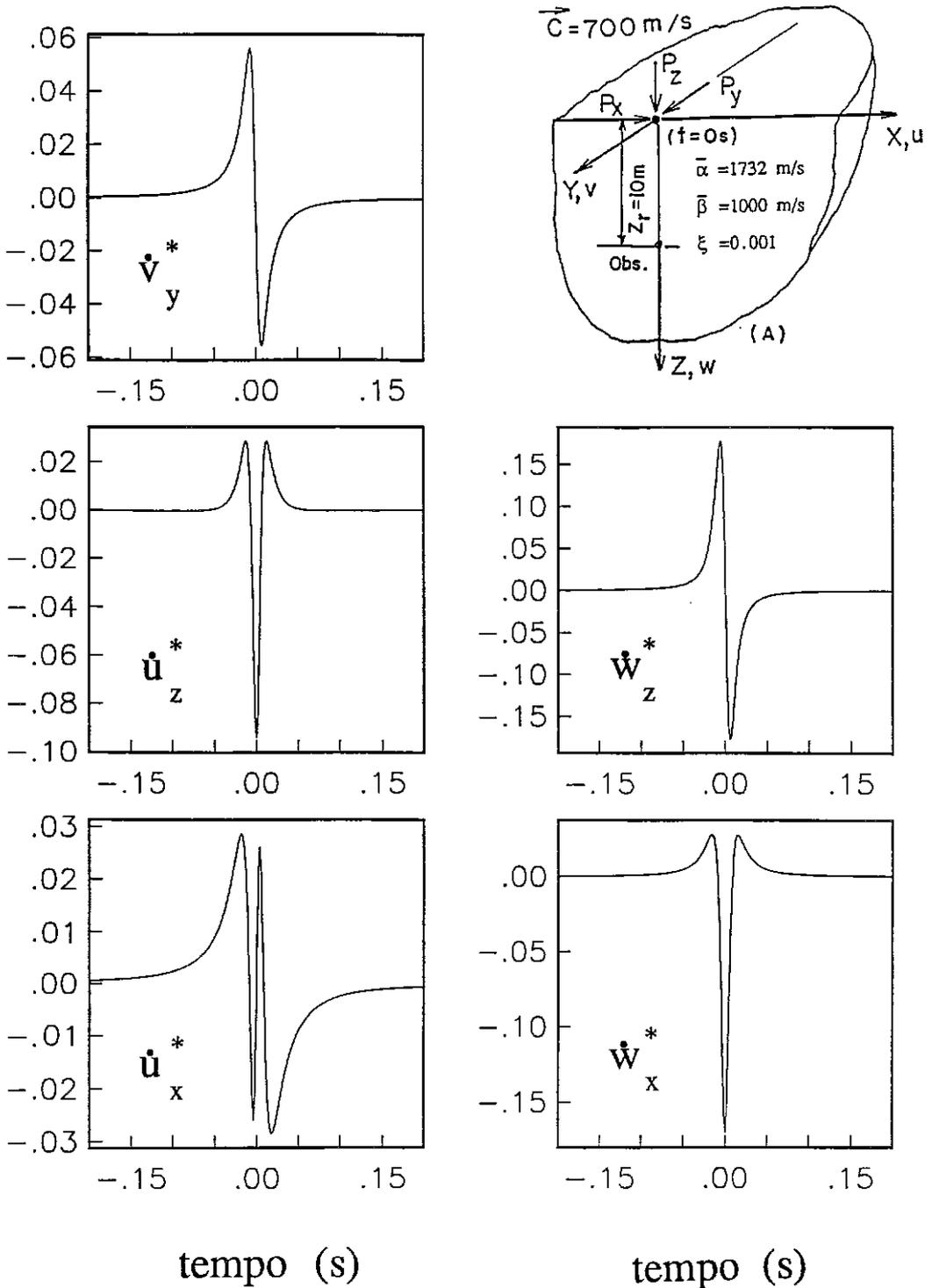


Figura 4.3.2-3 Respostas normalizadas das componentes da velocidade em um ponto de observação $\vec{x}_r = (0, 0, 10\text{ m})$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.7$), ao longo da direção positiva do eixo X sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$). O subscrito denota a direção na qual a carga foi aplicada.

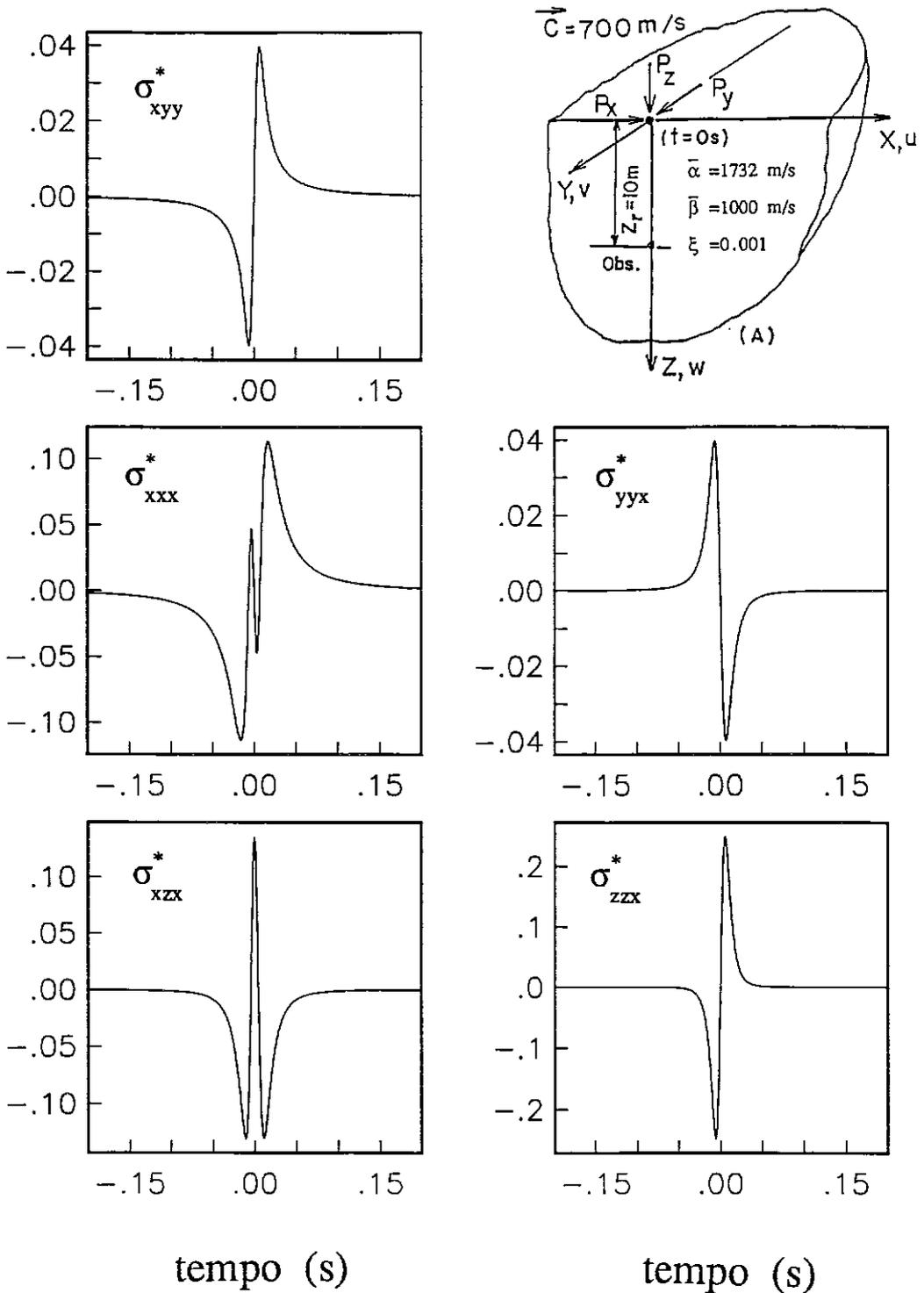


Figura 4.3.2-5 Respostas normalizadas das componentes das tensões em um ponto de observação $\vec{x}_r = (0, 0, 10 \text{ m})$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.7$), ao longo da direção positiva do eixo X sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$). O subscrito denota a direção na qual a carga foi aplicada.

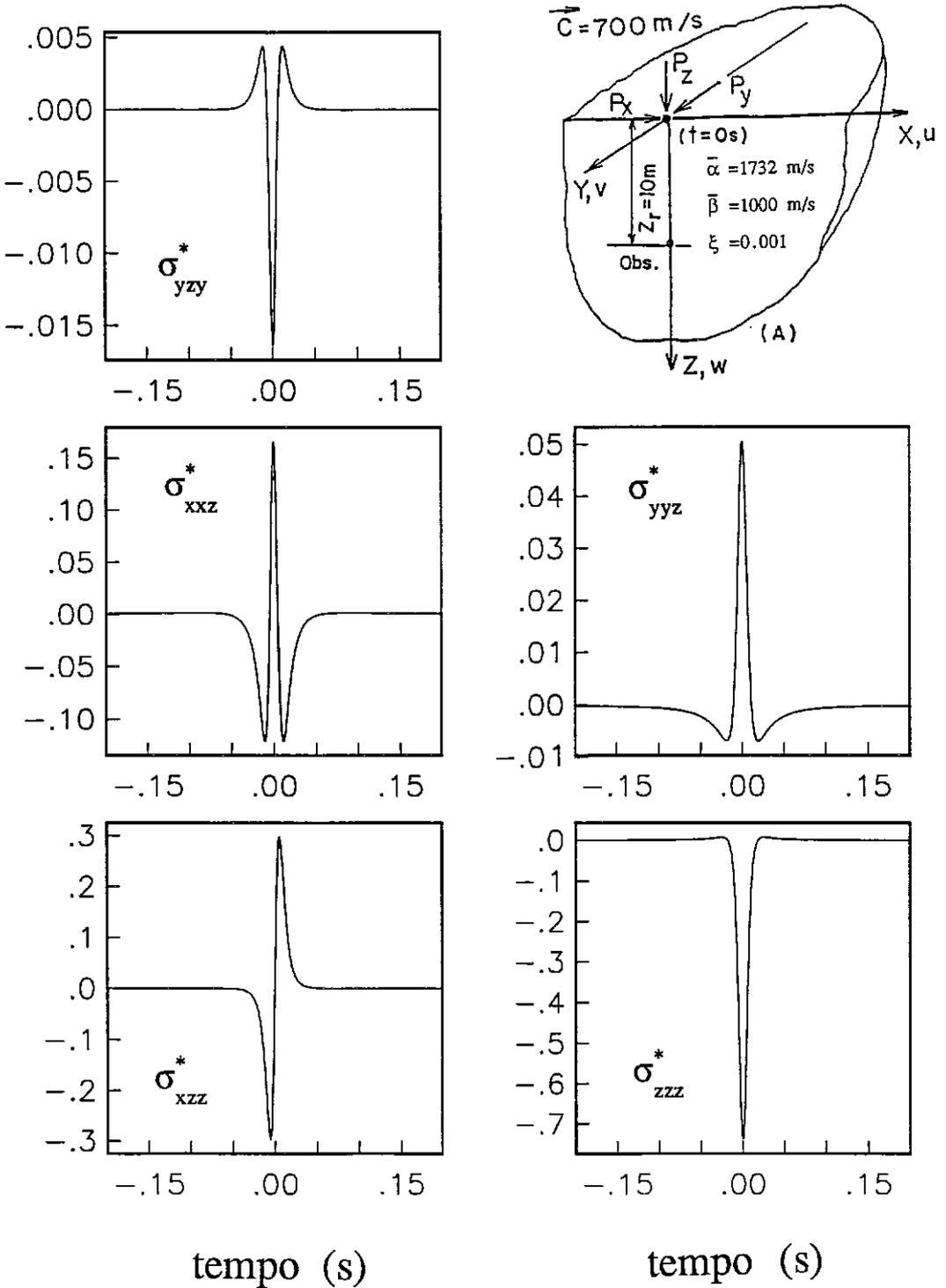
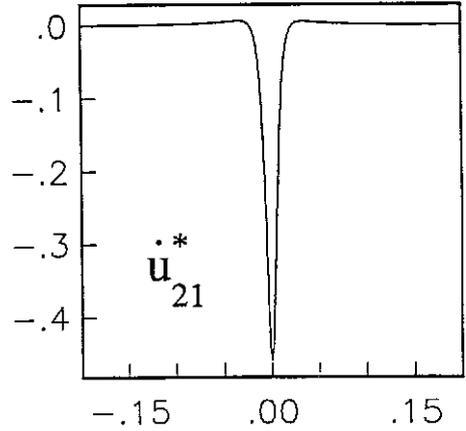
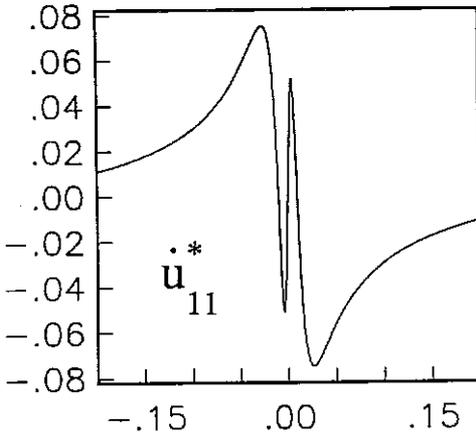
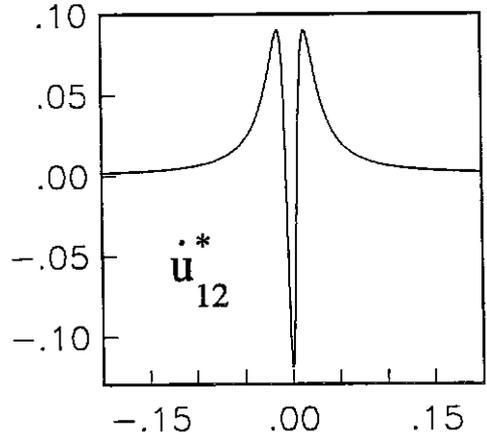
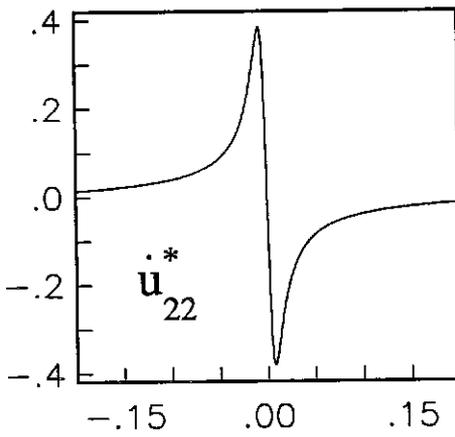
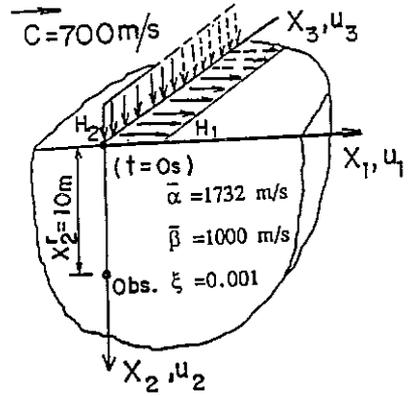
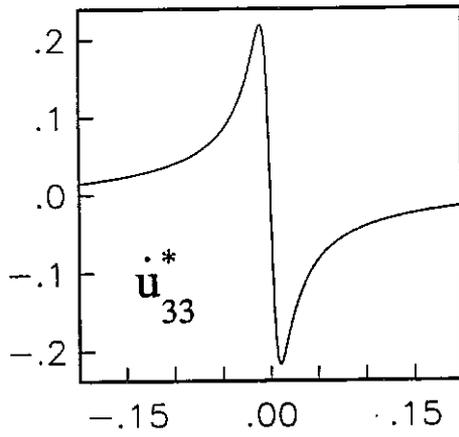


Figura 4.3.2-6 Respostas normalizadas das componentes das tensões em um ponto de observação $\vec{x}_r = (0, 0, 10 \text{ m})$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.7$), ao longo da direção positiva do eixo X sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$). O subscrito denota a direção na qual a carga foi aplicada.



tempo (s)

tempo (s)

Figura 4.3.2-8 Respostas normalizadas das componentes da velocidade \dot{u}_{ij}^* em um ponto de observação $\bar{x}^r = (0, 10\text{ m})$ para uma linha de carga, que se move com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.7$), ao longo da direção positiva do eixo x_1 sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$). O índice j em \dot{u}_{ij}^* denota a direção na qual a linha de carga foi aplicada.

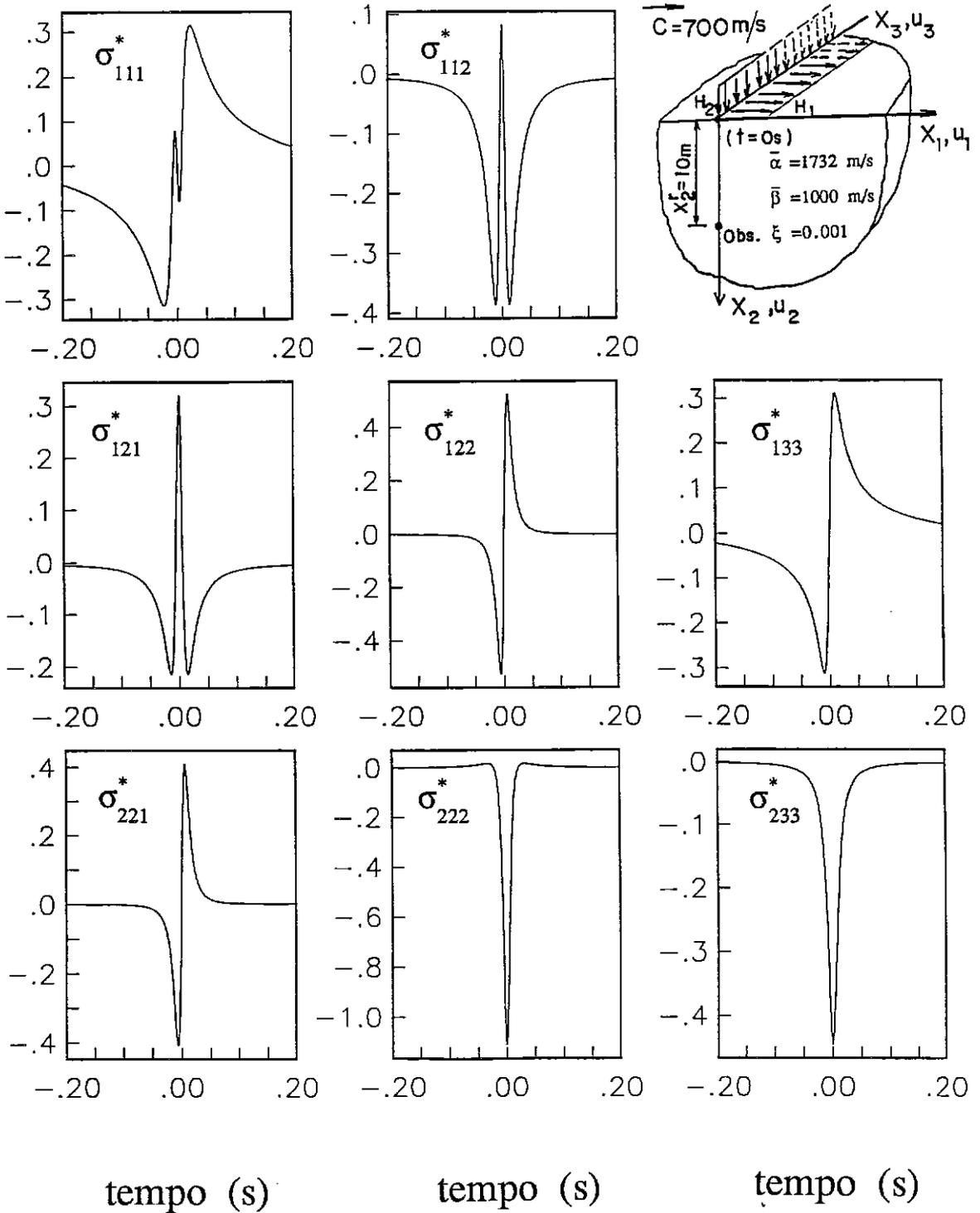


Figura 4.3.2-9 Respostas normalizadas das componentes das tensões σ_{ijk}^* em um ponto de observação $\vec{x}^r = (0, 10\text{ m})$ para uma linha de carga, que se move com velocidade subsônica constante ($M_\beta = 0.7$), ao longo da direção positiva do eixo x_1 sobre a superfície de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.001$). O índice k em σ_{ijk}^* denota a direção na qual a linha de carga foi aplicada.

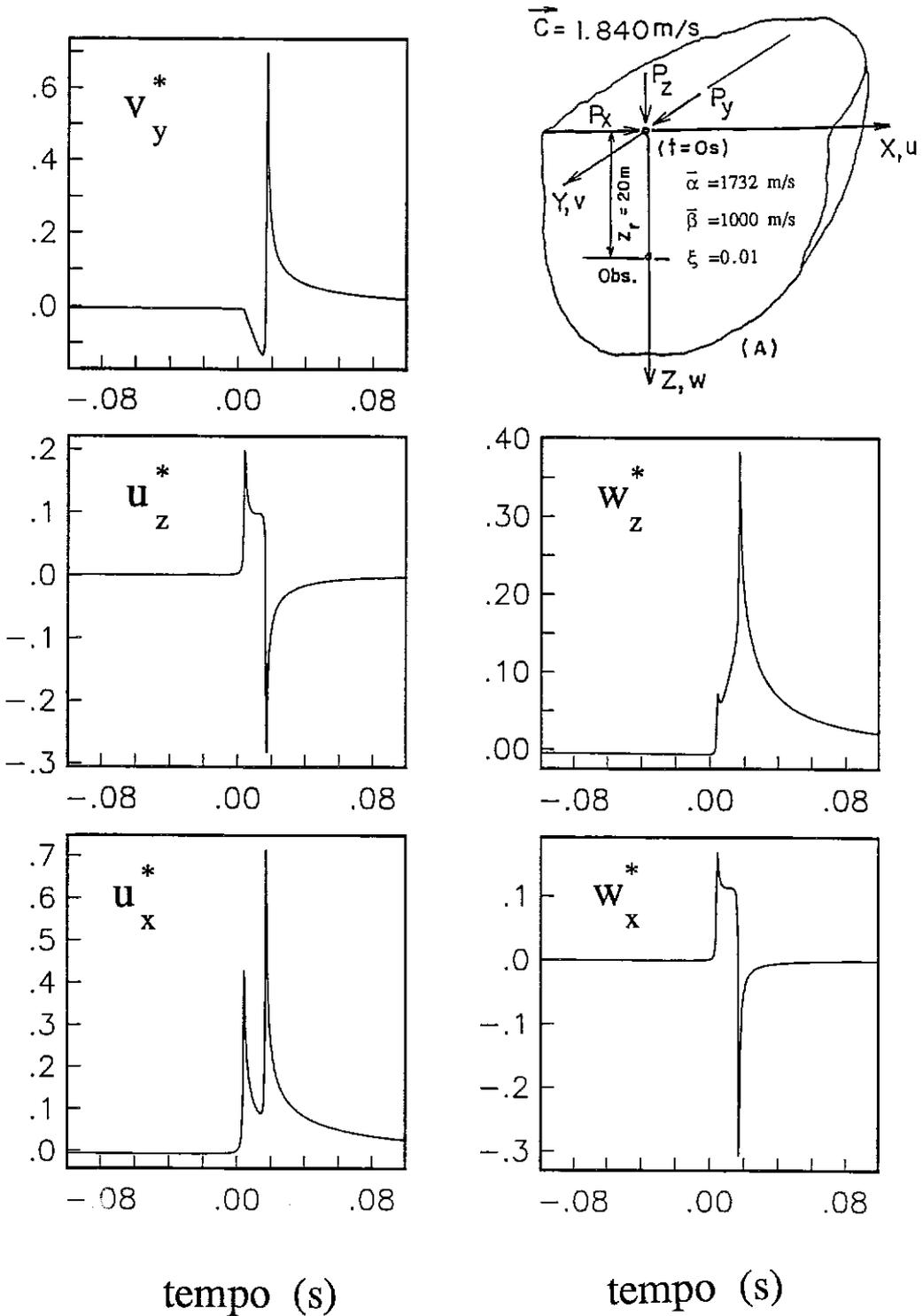


Figura 4.3.2-10 Respostas normalizadas das componentes do deslocamento em um ponto de observação $\vec{x}_r = (0, 0, 20\text{ m})$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade supersônica constante ($M_\beta = 1.84$), ao longo da direção positiva do eixo X sobre a superfície de um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O subscrito denota a direção na qual a carga foi aplicada.

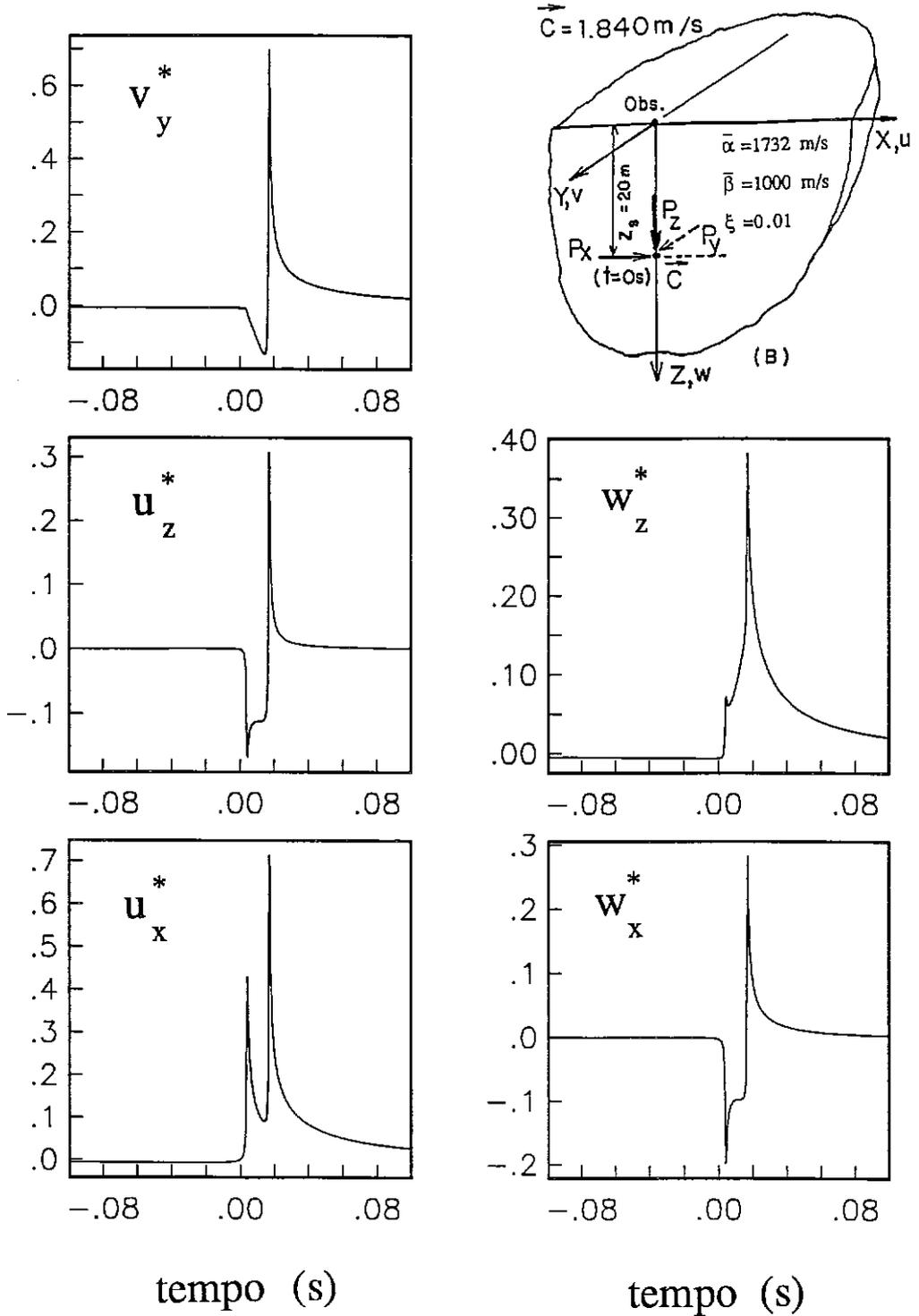


Figura 4.3.2-11 Respostas normalizadas das componentes do deslocamento em um ponto de observação situado na superfície $\vec{x}_r = (0, 0, 0 \text{ m})$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade supersônica constante ($M_\beta = 1.84$), no interior de um semi-espaço visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). A carga se move segundo direção positiva do eixo X no plano vertical $y = 0$ a uma profundidade $z_s = 20 \text{ m}$. O subscrito denota a direção na qual a carga foi aplicada.

vizinhanças das linhas Mach da onda de Rayleigh.

4.3.3. Relações de Reciprocidade

Algumas relações de reciprocidade entre a resposta calculada para uma dada configuração das posições da carga e do ponto de observação, e a resposta obtida quando a localização da carga é alternada com a posição do ponto de observação, são ilustradas nas Figuras 4.3.2-1 a 4.3.2-7 e nas Figuras 4.3.2-10 e 4.3.2-11. Foram consideradas duas configurações das posições da linha de atuação da carga e do ponto de observação, localizadas no plano vertical $y = 0$. Como indicado nestas figuras, na configuração (A), a carga se move sobre a superfície e o ponto de observação está localizado no eixo Z a uma profundidade $z_r = \bar{z}$; na configuração (B), as localizações são alternadas, ou seja o ponto de observação se encontra na superfície em $(x_r, y_r, z_r) = (0, 0, 0 m)$ e a carga se move a uma profundidade $z_s = \bar{z}$. As características das excitações e dos meios são as mesmas definidas na Seção 4.3.2. Os resultados obtidos indicam que:

$$u_x^*(A) = u_x^*(B), \quad v_y^*(A) = v_y^*(B), \quad w_z^*(A) = w_z^*(B) \quad (4-26a)$$

$$u_z^*(A) = -w_x^*(B), \quad w_x^*(A) = -u_z^*(B) \quad (4-26b)$$

$$\dot{u}_x^*(A) = \dot{u}_x^*(B), \quad \dot{v}_y^*(A) = \dot{v}_y^*(B), \quad \dot{w}_z^*(A) = \dot{w}_z^*(B) \quad (4-26c)$$

$$\dot{u}_z^*(A) = -\dot{w}_x^*(B), \quad \dot{w}_x^*(A) = -\dot{u}_z^*(B) \quad (4-26d)$$

$$\sigma_{xyy}^*(A) = \sigma_{xyy}^*(B) \quad (4-26e)$$

Estas relações de reciprocidade servem como um teste adicional dos procedimentos numéricos propostos e dos programas de computador associados.

4.4 Resposta de um Semi-Espaço Estratificado com Múltiplas Camadas sob a Ação de Cargas Concentradas Móveis

O caso mostrado na Figura 4.4-1a ilustra a capacidade do método proposto para o cálculo da resposta de um semi-espaco estratificado com múltiplas camadas sob a ação de cargas móveis concentradas. O meio consiste de cinco camadas com 4.0 m de espessura sobrepostas a um semi-espaco. As velocidades das ondas S definidas para os seis meios são, respectivamente, 200, 475, 675, 825, 925 e 1000 m/s . As velocidades correspondentes das ondas P são 346, 823, 1169, 1429, 1602 e 1732 m/s ($\nu_j = 0.25$, $\bar{\alpha}_j/\bar{\beta}_j = \sqrt{3}$, $j = 1, \dots, 6$). As densidades de massa para todos os meios são iguais a $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e os coeficientes de amortecimento do material para todas as camadas são considerados iguais a $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$. A carga concentrada se move sobre a superfície $z_s = 0$ ao longo da direção positiva do eixo X com velocidade constante $C = 700\text{ m/s}$. O ponto de observação se encontra no interior da terceira camada em $(x_r, y_r, z_r) = (0, 0, 10\text{ m})$. As componentes do deslocamento são normalizadas, de acordo com a equação (4-24a), usando-se as propriedades do semi-espaco subjacente ($\bar{\alpha} = 1732\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$ and $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$).

As respostas obtidas para as componentes adimensionais dos deslocamentos u_x^* , w_x^* , v_y^* , u_z^* e w_z^* são mostradas nos quadros inferiores das Figuras 4.4-2 a 4.4-6. Para efeito de comparação, nos quadros superiores destas figuras, são mostrados os deslocamentos normalizados obtidos em um modelo equivalente constituído por uma única camada sobre o semi-espaco. Neste modelo equivalente, representado na Figura 4.4-1b, o meio na camada de 20 m de espessura é caracterizado por $\bar{\beta} = 460\text{ m/s}$ e $\bar{\alpha} = 797\text{ m/s}$. Os resultados correspondentes para um semi-espaco uniforme ($\bar{\alpha} = 1732\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$) são mostrados também nestas figuras com linhas tracejadas. A resposta calculada para o modelo composto por múltiplas camadas exibe frequências mais elevadas do que

a resposta obtida para o modelo eqüivalente com uma camada. Similarmente, a amplitude dos picos da resposta para o meio estratificado são significativamente maiores do que a resposta para um semi-espaço uniforme com as propriedades do semi-espaço subjacente do meio estratificado. Em todos os casos, as respostas foram calculadas usando-se 1024 freqüências de cada componente e uma freqüência de corte de 200 Hertz.

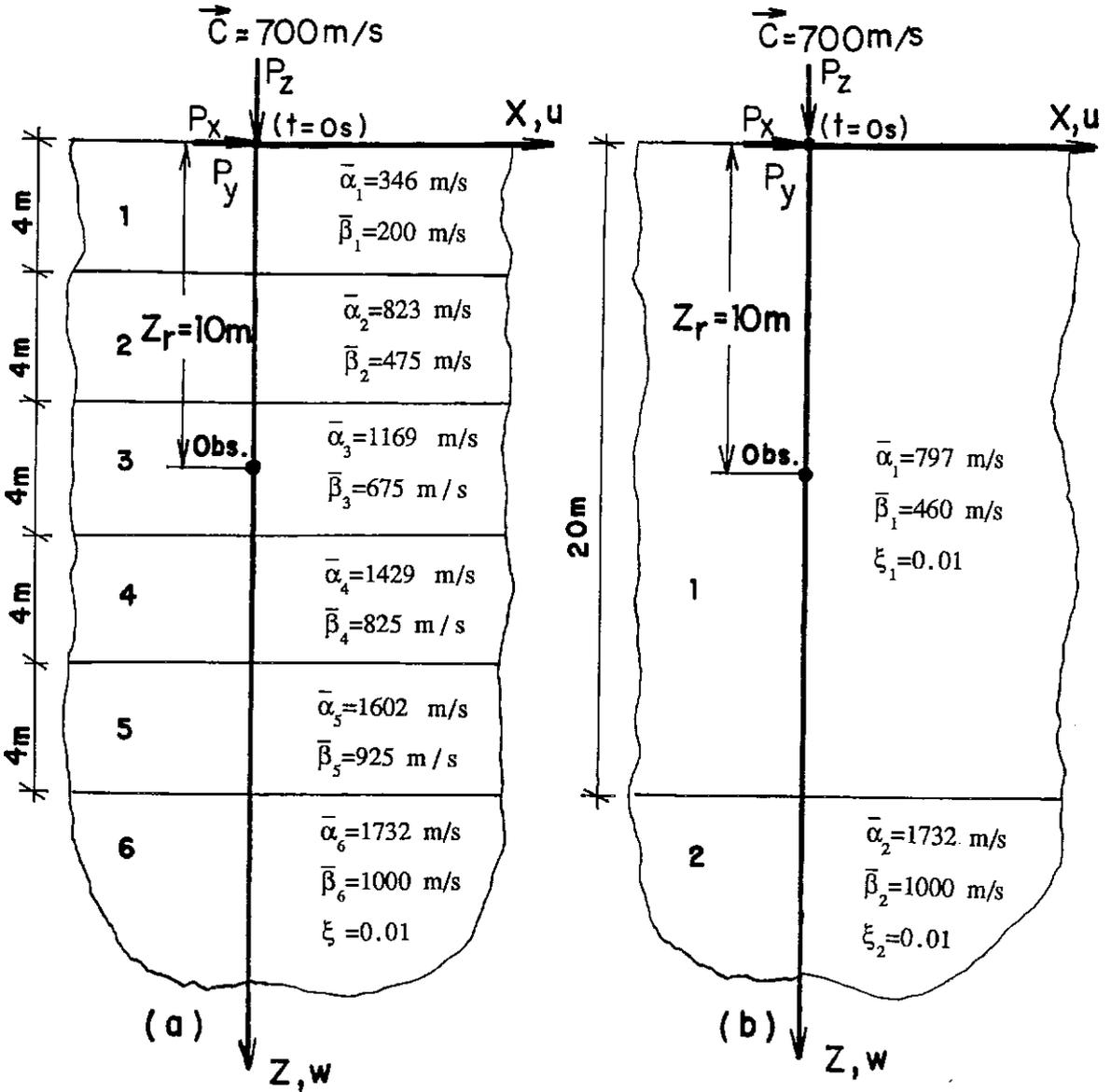


Figure 4.4-1 Modelos de semi-espacos visco-elásticos estratificados analisados. (a) Cinco camadas de 4 metros de espessura sobrepostas ao semi-espaco. (b) Modelo equivalente composto de uma camada sobre o semi-espaco. A densidade de massa $\rho = 2,000 \text{ kg/m}^3$ e os coeficientes de amortecimento $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$ são considerados iguais para todos os meios.

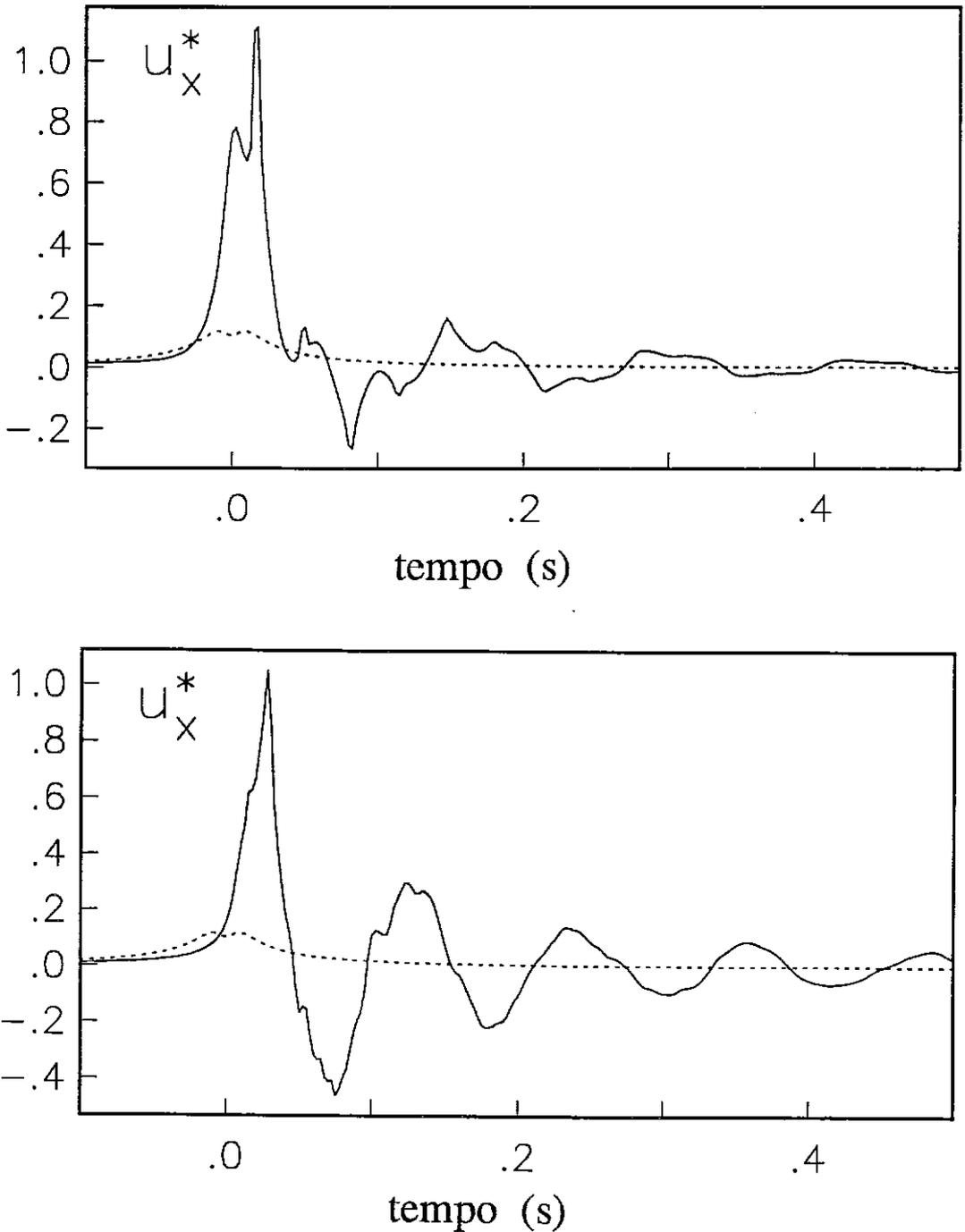


Figura 4.4-2 Resposta normalizada da componente do deslocamento u_x^* em um ponto de observação $\vec{x}_r = (0, 0, 10 m)$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade constante $C = 700 m/sec$ na superfície dos modelos de semi-espacos estratificados, apresentados nas Figuras 4.4-1(a),(b). A resposta da componente u_x^* para o modelo composto por cinco camadas sobrepostas ao semi-espaco é mostrada no quadro inferior da figura, enquanto que no quadro superior é apresentado o resultado correspondente para o modelo equivalente com uma camada sobre o semi-espaco. Para efeito de comparação, é mostrado em ambas as figuras, com linha tracejada, o resultado correspondente para um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 m/s$, $\bar{\beta} = 1000 m/s$, $\rho = 2000 kg/m^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O subscrito indica a direção na qual a carga foi aplicada.

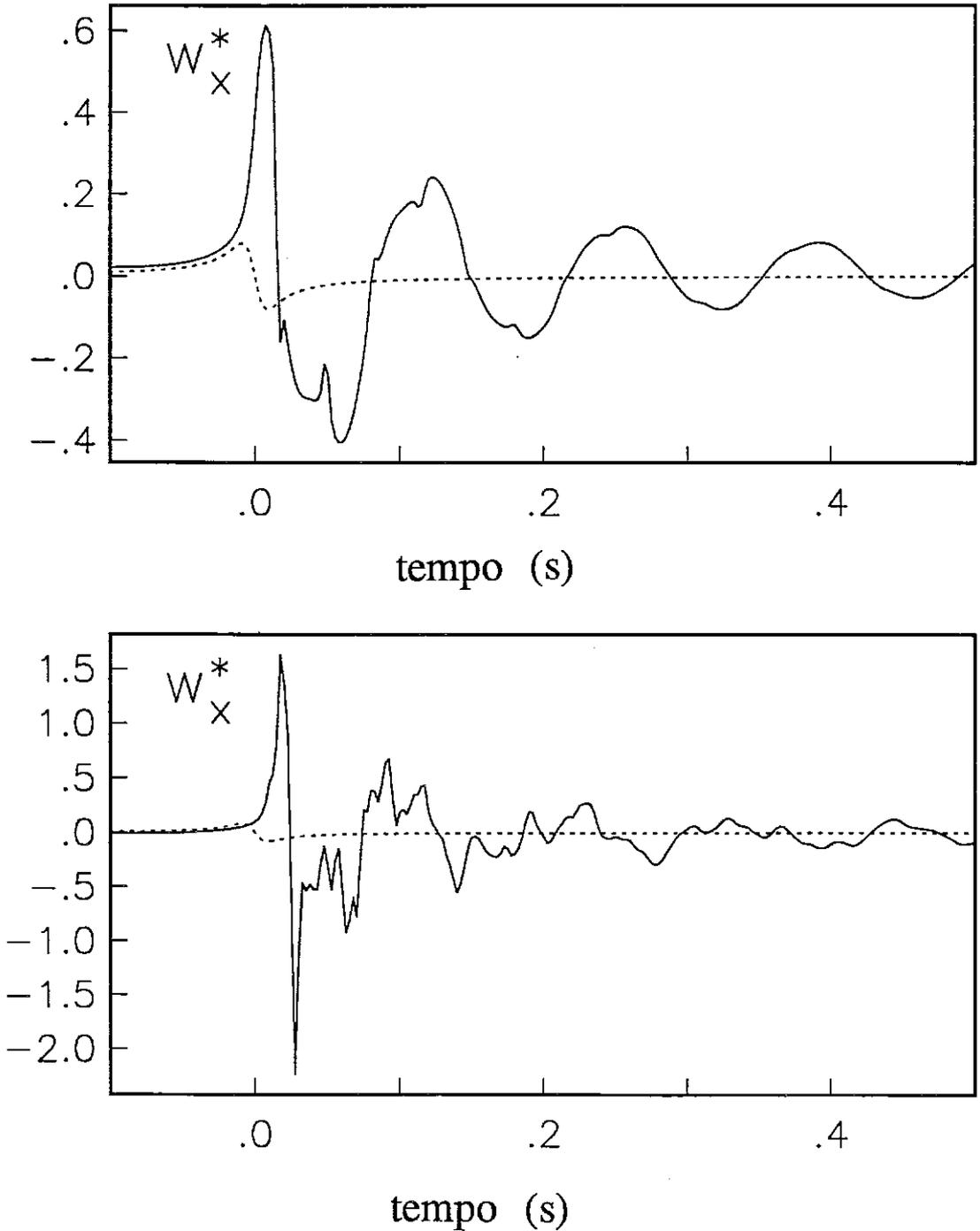


Figura 4.4-3 Resposta normalizada da componente do deslocamento w_x^* em um ponto de observação $\vec{x}_r = (0, 0, 10\text{ m})$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade constante $C = 700\text{ m/sec}$ na superfície dos modelos de semi-espacos estratificados, apresentados nas Figuras 4.4-1(a),(b). A resposta da componente w_x^* para o modelo composto por cinco camadas sobrepostas ao semi-espaco é mostrada no quadro inferior da figura, enquanto que no quadro superior é apresentado o resultado correspondente para o modelo equivalente com uma camada sobre o semi-espaco. Para efeito de comparação, é mostrado em ambas as figuras, com linha tracejada, o resultado correspondente para um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O subscrito indica a direção na qual a carga foi aplicada.

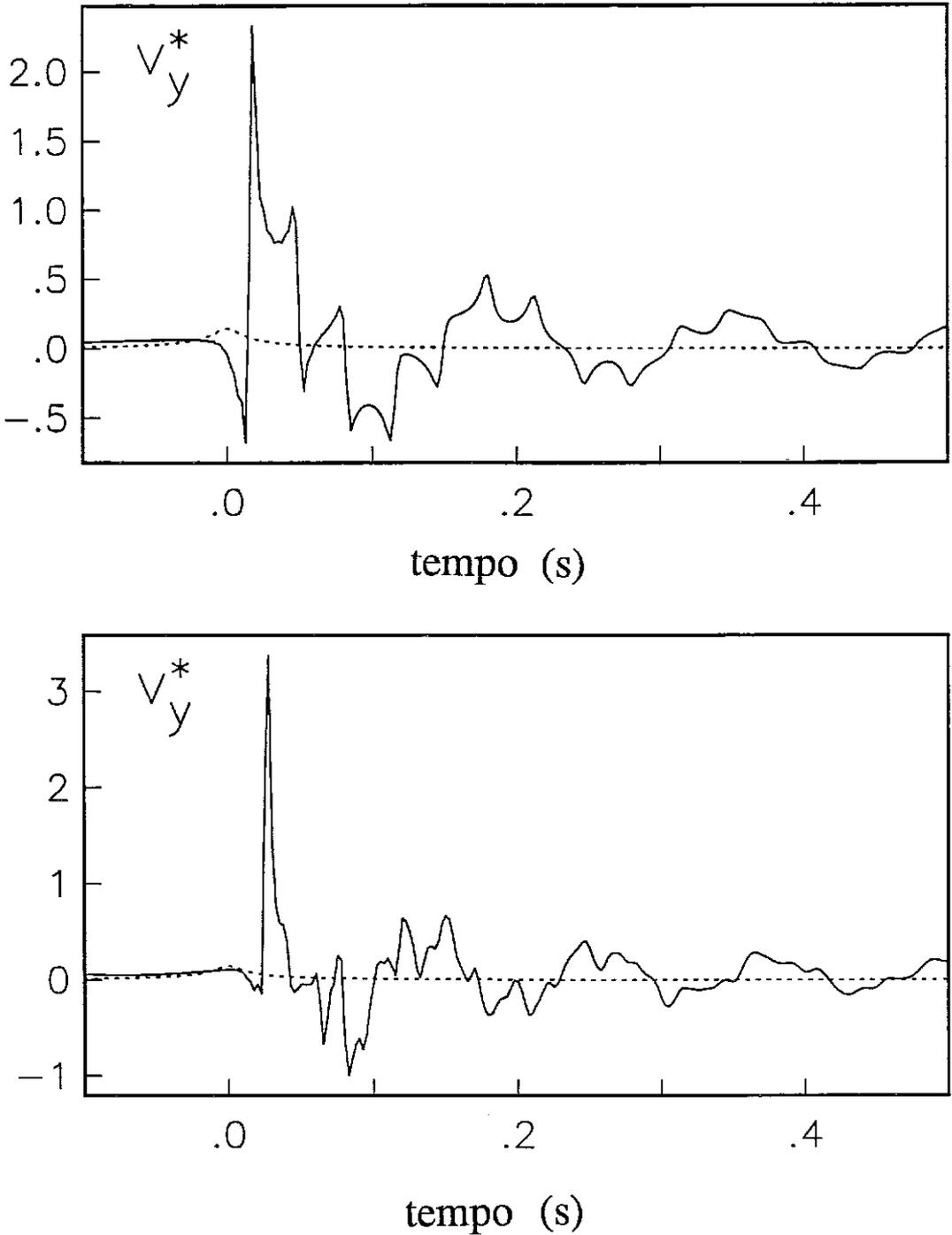


Figura 4.4-4 Resposta normalizada da componente do deslocamento v_y^* em um ponto de observação $\vec{x}_r = (0, 0, 10\text{ m})$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade constante $C = 700\text{ m/sec}$ na superfície dos modelos de semi-espacos estratificados, apresentados nas Figuras 4.4-1(a),(b). A resposta da componente v_y^* para o modelo composto por cinco camadas sobrepostas ao semi-espaco é mostrada no quadro inferior da figura, enquanto que no quadro superior é apresentado o resultado correspondente para o modelo equivalente com uma camada sobre o semi-espaco. Para efeito de comparação, é mostrado em ambas as figuras, com linha tracejada, o resultado correspondente para um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732\text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000\text{ m/s}$, $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O subscrito indica a direção na qual a carga foi aplicada.

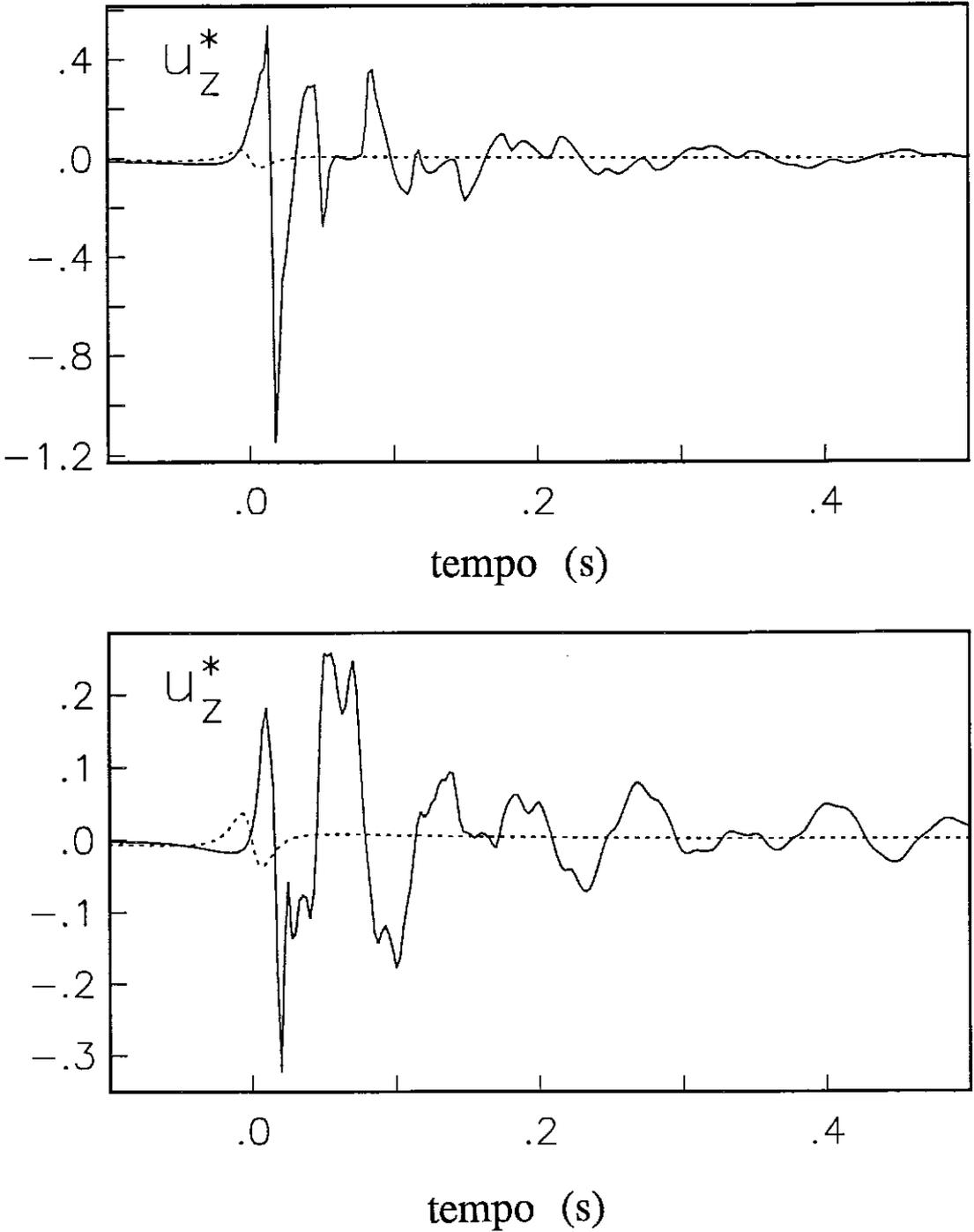


Figura 4.4-5 Resposta normalizada da componente do deslocamento u_z^* em um ponto de observação $\bar{x}_r = (0, 0, 10 \text{ m})$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade constante $C = 700 \text{ m/sec}$ na superfície dos modelos de semi-espacos estratificados, apresentados nas Figuras 4.4-1(a),(b). A resposta da componente u_z^* para o modelo composto por cinco camadas sobrepostas ao semi-espaco é mostrada no quadro inferior da figura, enquanto que no quadro superior é apresentado o resultado correspondente para o modelo equivalente com uma camada sobre o semi-espaco. Para efeito de comparação, é mostrado em ambas as figuras, com linha tracejada, o resultado correspondente para um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O subscrito indica a direção na qual a carga foi aplicada.

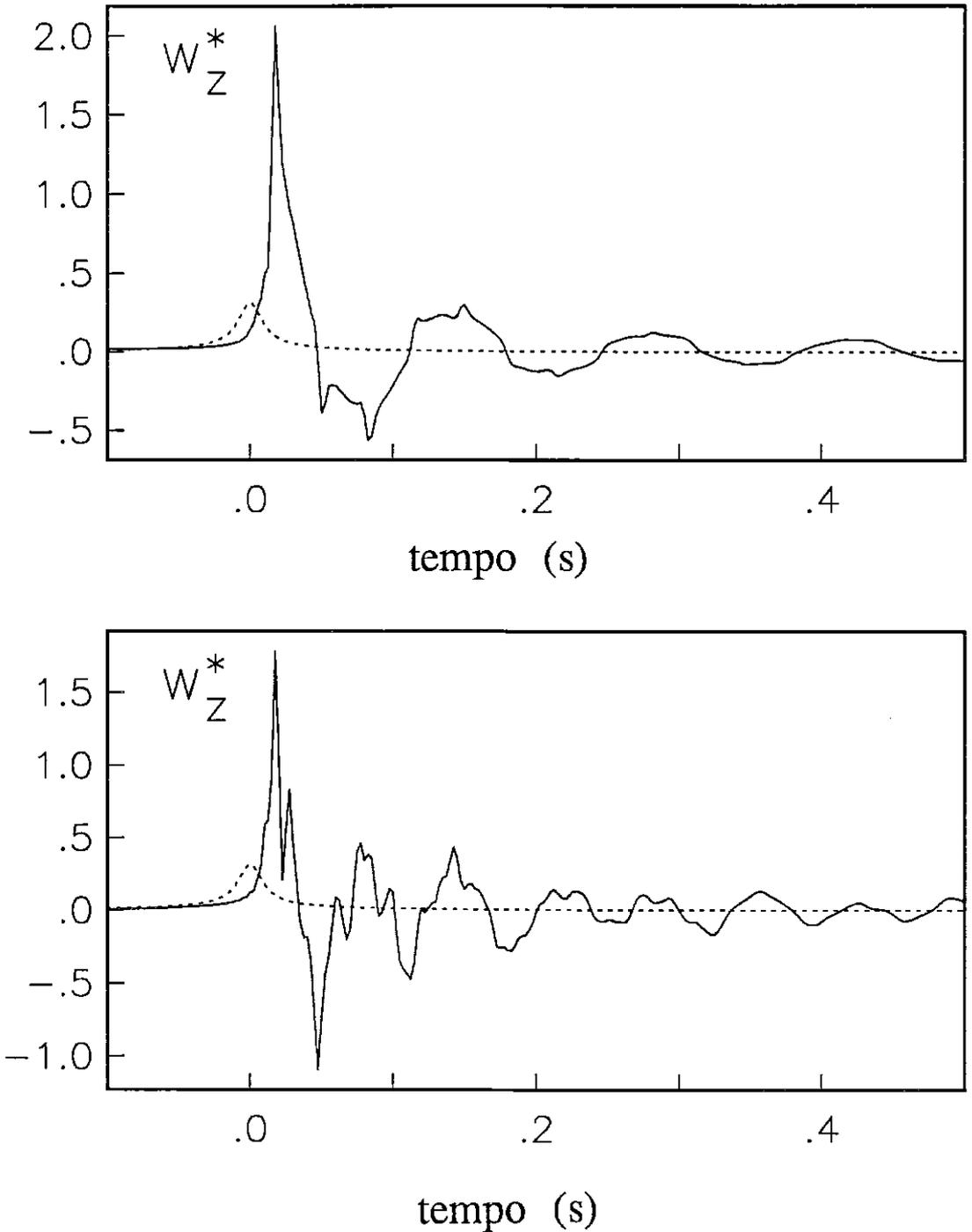


Figura 4.4-6 Resposta normalizada da componente do deslocamento w_z^* em um ponto de observação $\vec{x}_r = (0, 0, 10 \text{ m})$ para uma carga concentrada, que se move com velocidade constante $C = 700 \text{ m/sec}$ na superfície dos modelos de semi-espacos estratificados, apresentados nas Figuras 4.4-1(a),(b). A resposta da componente w_z^* para o modelo composto por cinco camadas sobrepostas ao semi-espaco é mostrada no quadro inferior da figura, enquanto que no quadro superior é apresentado o resultado correspondente para o modelo equivalente com uma camada sobre o semi-espaco. Para efeito de comparação, é mostrado em ambas as figuras, com linha tracejada, o resultado correspondente para um semi-espaco visco-elástico uniforme ($\bar{\alpha} = 1732 \text{ m/s}$, $\bar{\beta} = 1000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ e $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0.01$). O subscrito indica a direção na qual a carga foi aplicada.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

O presente trabalho apresenta um procedimento para a obtenção dos campos estacionários de deslocamentos e de tensões, em um semi-espaco visco-elástico estratificado, gerados por uma carga que se move, na superfície ou no interior do meio, em uma direção horizontal retilínea com velocidade constante. O método é fundamentado na representação integral da resposta em termos de números de onda. Os efeitos da consideração de múltiplas camadas são incluídos por meio da utilização de um esquema exato de fatoração dos campos de deformações e de tensões, na forma de coeficientes generalizados de reflexão e de transmissão. Os resultados no domínio do tempo são obtidos através da síntese de Fourier da resposta em frequência, que por sua vez é determinada por integração, analítica ou numérica, sobre o domínio de um único número de onda horizontal. Para se evitar problemas decorrentes da perda de precisão, quando os integrandos são calculados para grandes valores do número de onda, no ambiente de computadores com número real de 32-bits em precisão simples, foi apresentada uma representação integral modificada da solução para os campos de deslocamentos e de tensões associados às ondas polarizadas verticalmente. Foi constatado que esta representação modificada, desenvolvida para os cálculos que envolvem valores elevados do número de onda, se aplica apropriadamente para todos os valores do número de onda. Os programas de computador associados ao procedimento numérico apresentado podem ser executados em micros computadores compatíveis com o IBM PC/AT.

A validade e a precisão da metodologia apresentada foram exaustivamente investigadas por comparações com os resultados analíticos e numéricos, disponíveis para casos limites simples.

O problema bidimensional correspondente a uma linha de carga móvel e o problema tridimensional associado a uma carga concentrada móvel foram tratados separadamente. Foi apresentado um estudo paramétrico detalhado da resposta de um semi-espaço visco-elástico uniforme e de um meio composto por uma camada sobre o semi-espaço, sob a ação de cargas que se movem, na superfície ou no interior do meio, com velocidade constante nos regimes subsônico, transônico e supersônico. Em particular, foram investigados os efeitos associados à velocidade da carga, ao amortecimento do material, às posições da fonte e do ponto de observação e à estratificação. As relações de reciprocidade entre a fonte e o ponto de observação também foram estudadas. As respostas de modelos de semi-espaços visco-elásticos estratificados, constituídos por múltiplas camadas, foram apresentadas para ilustrar as características bastante complexas da resposta destes sistemas e para demonstrar a capacidade e a generalidade do método proposto.

Em resumo, neste trabalho foi apresentado um método geral, preciso e eficiente para a determinação da resposta dinâmica estacionária em um semi-espaço visco-elástico estratificado produzida por uma carga, que se move na superfície ou no interior do meio, segundo uma direção horizontal com velocidade constante. A solução deste problema fundamental, que é, em outras palavras, o problema da determinação das funções de Green móveis, abre as portas para um número considerável de outras aplicações extremamente interessantes para uma classe de problemas em que se incluem: (i) vibrações no solo induzidas pelo tráfego de superfície, (ii) vibrações no solo induzidas por metropolitanos ou por circulação em túneis ou passagens subterrâneas, (iii) resposta sísmica de túneis enterrados em subsolos estratificados e sob a ação de ondas sísmicas,

que se propagam em um ângulo arbitrário com o eixo do túnel, (iv) resposta sísmica de tubulações enterradas em um subsolo estratificado quando solicitadas por ondas sísmicas, incluindo os efeitos dos problemas de interação e espalhamento, (v) resposta sísmica de uma topografia constituída de vales ou *canyons* à excitação sísmica arbitrária (de interesse na determinação da variação espacial da excitação sísmica para o cálculo de barragens), e (vi) respostas de semi-espacos estratificados associadas à propagação de ondas de pressão geradas por explosões no ar. Algumas destas aplicações podem ser realizadas com a utilização direta das soluções básicas; outras requerem a solução de um problema de valores de contorno adicional, através da aplicação das funções de Green móveis em conjunto com uma formulação de equações integrais de contorno.

Espera-se que a presente solução, para o problema fundamental associado a cargas móveis, *i.e.*, funções de Green móveis para um semi-espaco visco-elástico estratificado, contribua para significantes avanços na investigação de uma variedade de problemas de radiação, espalhamento e interação associados a perturbações móveis no campo da elastodinâmica.

REFERÊNCIAS

- Ablow, C. M. (1962). The strength of seismic shock in an elastic earth under blast loading, *Proc. Fourth U. S. National Congress Appl. Mech.*, Berkeley, California, 51-56.
- Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (1970). *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, N.Y.
- Achenbach, J. D. (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Aggarwal, H. R. e Ablow, C. M. (1965). Disturbance from circularly symmetric load spreading over an acoustic half-space, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 4, 673-691.
- Ang, D. D. (1960). Transient Motion of a line load on the surface of an elastic half-space, *Quart. Appl. Math.*, 18, 251-256.
- Apsel, R. J. (1979). Dynamic Green's functions for layered media and applications to boundary-value boundary, *Ph. D. Thesis*, Univ. of Calif. at San Diego, La Jolla.
- Apsel, R. J. e Luco, J. E. (1983). On the Green's functions for a layered half-space. Part II, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 73, 931-951.
- Atkinson, C. (1968). On axially symmetric expanding boundary-value problems in classical elasticity, *Int. J. Engng. Sci.* 6, 27-35.
- Baron, M. L. e Lecht, C. (1961). Elastic Rayleigh waves effects due to nuclear blasts, *J. Engng. Mech. Division*, Proc. ASCE, 87, EM5, 33-53.
- Baron, M. L. e Check, R. (1963). Elastic Rayleigh wave motion due to nuclear blasts, *J. Engng. Mech. Division*, Proc. ASCE, 89, EM1, 57-70.

- Blowers, R. M. (1969). On the response of an elastic solid to droplet impact, *J. Institute of Mathematics and Its Applications*, **5**, 167-193.
- Bland, D. R. (1960). *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, Ltd., London.
- Bouchon, M. e Aki, K. (1977). Discrete Wavenumber representation of seismic-source wavefields, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **67**, 259-277.
- Bouchon, M. (1981). A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **71**, 941-959.
- Clenshawn, C. W. e Curtis, A. R. (1960). A method for numerical integration on an automatic computer, *Numer. Math.*, **2**, 197-205.
- Cole, J. e Huth, J. (1958). Stress Produced in a Half-space by moving loads, *J. Appl. Mech.*, **25**, 433-436.
- Graggs, J. W. (1960). Two dimensional waves in an elastic half-space, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **56**, 269-275.
- Davis, P. F. e Rabinowitz, P. (1983), *Methods of Numerical Integration*, Second Edition, Academic Press, Inc., New York.
- Dravinski, M. e Mossessian, T. K. (1987), Amplification of surface ground motion by an inclusion of arbitrary shape for harmonic line loads, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **77**, 221-235.
- Dravinski, M. e Mossessian, T. K. (1988), On evaluation of the Green function for harmonic line loads in a viscoelastic half space, *Int. J. Numer. Methods in Engng.*, **26**, 823-841.
- Eason, G., Fulton, J. e Sneddon, I. N. (1956), Generation of waves in an infinite elastic solid by variable body forces, *Phi. Trans. Roy. Soc.*, **A248**, 575-607.
- Eason, G. (1965), The stress produced in a semi-infinite solid by moving surface force, *Int. J. Engng. Sci.*, **2**, 581-609.
- Eringen, A.C. e Suhubi, E. S. (1975), *Elastodynamics Volume II, Linear Theory*,

Academic Press, Inc., New York.

- Filon, L. N. G. (1928), On a quadrature formula for trigonometric Integrals, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **49**, 38.
- Fulton, J. e Sneddon, I. N. (1958), The dynamic stresses produced in a thick plate by the action of surface forces, *Proc. Glasgow Math. Association*, **3**, 153-168.
- Futterman, W. I. (1962), Dispersive body waves, *J. Geophys. Res.*, **67**, 5279-5291.
- Galin, L. S. (1961), *Contact problems in th theory of elasticity*, (translated from Russian by H. Moss) Depart. Math. School Phys. Sci. and Appl. Math., North Caroline State College, Raleigh.
- Gakenheimer, D. C. e Miklowitz, J. (1969), Transient excitation of an elastic half-space by a point load travelling on the surface, *J. Appl. Mech.*, **36**, 505-515.
- Gakenheimer, D. C. (1969), Response of an elastic half-space to an expanding ring of surface pressure, *The RAND Corporation*, report RM-6095-PR.
- Gakenheimer, D. C. (1971), Response of an elastic half-space to expanding surface loads, *J. Appl. Mech.*, March, 99-110.
- Graff, K. F. (1975), *Wave Motion in Elastic Solids*, Ohio State University Press, Columbus.
- Graggs, J. W. (1963), On axially symmetric waves, III. Elastic waves in a half-space, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **59**, 803-809.
- Hudson, J. A. (1980), *The Excitation and Propagation of Elastic Waves*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Jones, D. S. (1966), *Generalized Functions*, MacGraw-Hill Publishing Ltd., England.
- Kennedy, T. C. e Herrmann, G. (1973a), Moving load on a Fluid-solid interface: subsonic and intersonic regimes, *J. Appl. Mech.*, **40**, 885-890.
- Kennedy, T. C. e Herrmann, G. (1973b), Moving load on a Fluid-solid interface:

- supersonic regime, *J. Appl. Mech.*, **40**, 137-142.
- Knopoff, L. (1964). Q, *Reviews of Geophysics*, **4**, 625-660.
- Kolsky, H. (1963), *Stress Waves in Solids*, Dover Publications, Inc, New York.
- Kundu, T. e Mal, A. K. (1985), Elastic waves in multilayered solids due to a dislocation source, *Wave Motions*, **7**, 459-471.
- Lansing, D. L. (1966), The displacements in an elastic half-space due to a moving concentrated normal load, *NASA Technical Report*, NASA TR R-238.
- Luco, J. E. e Anderson, J. G. (1983), Steady-state response of an elastic half-space to a moving dislocation of finite width, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **73**, 1-22.
- Luco, J. E. e Apsel, R. J. (1983), On the Green's functions for a layered half-space: Part I, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **73**, 909-929.
- Mandel, J. e Avramesco, A. (1961), Déplacements produits par une charge mobile à la surface d'une semi-espace elastique, *Comptes Rendus des Séances de L'Academie des Sciences, Paris*, **252**, 3730-7735.
- Mendez, A. J. (1988), Foward modeling and inversion of near-source earthquake ground motion, *Ph. D. Thesis*, Univ. of Calif. at San Diego, La Jolla.
- Miles, J. W. (1960). On the response of an elastic half-space to a moving blast wave, *J. Appl. Mech.*, **27**, 7710-716.
- Mita, A. (1986), Dynamic response of embedded foundation: a hibrid approach, *Ph. D. Thesis*, Univ. of Calif. at San Diego, La Jolla.
- Morley, L. S. D. (1961), Elastic plate with loads travelling at uniform velocity along the bounding surfaces, *Quart. J. Appl. Math.*, **15**, 193-213.
- Niwa, Y. e Kobayashi, S. (1966), Stresses produced in an elastic half-space by moving loads along its surface, *Mem. Fac. Engng. Kyoto Univ.*, **28**, 254-276.

- Nakai, S., Fukuwa, N. e Hasegawa, M. (1984), Approximate three-dimensional analysis of embedded structures, *Proc. 8th World Conference on Earthquake Engineering*, San Francisco, California, **III**, 689-696.
- Paytion, R. G. (1964), An application of the dynamic Betti-Raleigh Reciprocal Theorem to moving point load in elastic media, *Quart. Appl. Math.*, **21**, 299-313.
- Paytion, R. G. (1967), Transient motion of an elastic half-space due to a moving surface line load, *Int. J. Engng. Sci.*, **5**, 49-79.
- Papadopoulos, M. (1963a), The elastodynamics of moving loads, *J. Australian Math. Soc.*, **3**, 79-92.
- Papadopoulos, M. (1963b), The use of singular integrals in wave propagation problems, with application to the point load source in a semi-infinite elastic medium, *Proc. Roy. Soc., London, serie A*, **276**, 204-237.
- Sneddon, I. N. (1951), *Fourier Transforms*, MacGraw-Hill Book Company, New York.
- Sneddon, I. N. (1952), The stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid, *Rend. Cir. Mat. Palermo*, **2**, 57-62.
- Sneddon, I. N. (1972), *The Use of Integral Transforms*, MacGraw-Hill Book Company, New York.
- Sokolnikoff, I. S. (1956), *Mathematical Theory of Elasticity*, MacGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
- Suhubi, E. S. (1973), Moving rough punch on an elastic half-space, *Letters Appl. and Engng. Sci.*, **1**, 119-128.
- Tong, K. T. (1968), Dynamic response of a homogeneous isotropic elastic half-space to a spreading blast waves, *PhD Thesis*, Stanford University, California.
- Tranter, C. J. (1966), *Integral Transforms in Mathematical Physics*, Methuen and Co. Ltd, London.

- Xu, P. C. e Mal, A. K. (1985), An adaptive integration scheme for irregular oscillatory functions, *Wave Motion*, **7**, 235-243.
- Xu, P. C. e Mal, A. K. (1987), Calculation of the inplane Green's functions for a layered half-space, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **77**, 1823-1837.

APÊNDICE A

DESLOCAMENTOS E TENSÕES NO INTERIOR DE UM SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO PRODUZIDOS POR UMA LINHA DE CARGA QUE SE MOVE SOBRE SUPERFÍCIE

Neste apêndice estão listadas as expressões analíticas para as componentes dos deslocamentos e das tensões em um semi-espaço elástico uniforme, sob a ação de linhas de cargas concentradas, verticais e horizontais, que se movem com velocidade constante sobre a sua superfície livre. Tais expressões analíticas têm por base os resultados apresentados por Cole e Huth (1958), Niwa e Kobayashi (1966) e Eringen e Suhubi (1975), que correspondem a soluções bidimensionais no plano, obtidas dentro das hipóteses do estado plano de deformações, e incluem os casos de carga que se movem com velocidade subsônica, transônica ou supersônica. Deve-se ressaltar, que foi identificada a existência de vários erros de impressão e de algumas incorreções, nos trabalhos acima citados, durante o processo de validação dos resultados numéricos obtidos pelo presente estudo. As expressões listadas neste apêndice incorporam as correções pertinentes que foram efetuadas.

As linhas de cargas concentradas horizontal e vertical, denotadas por H_1 e H_2 , são consideradas positivas quando aplicadas, respectivamente, segundo as direções positivas dos eixos x_1 e x_2 . Tais cargas se movem com velocidade constante C na direção positiva do eixo x_1 , como mostra a Figura A-1. Deve ser salientado, que para o problema em apreço, os campos de deslocamentos não são determinados unicamente e que uma constante de deslocamento pode ser adicionada para se

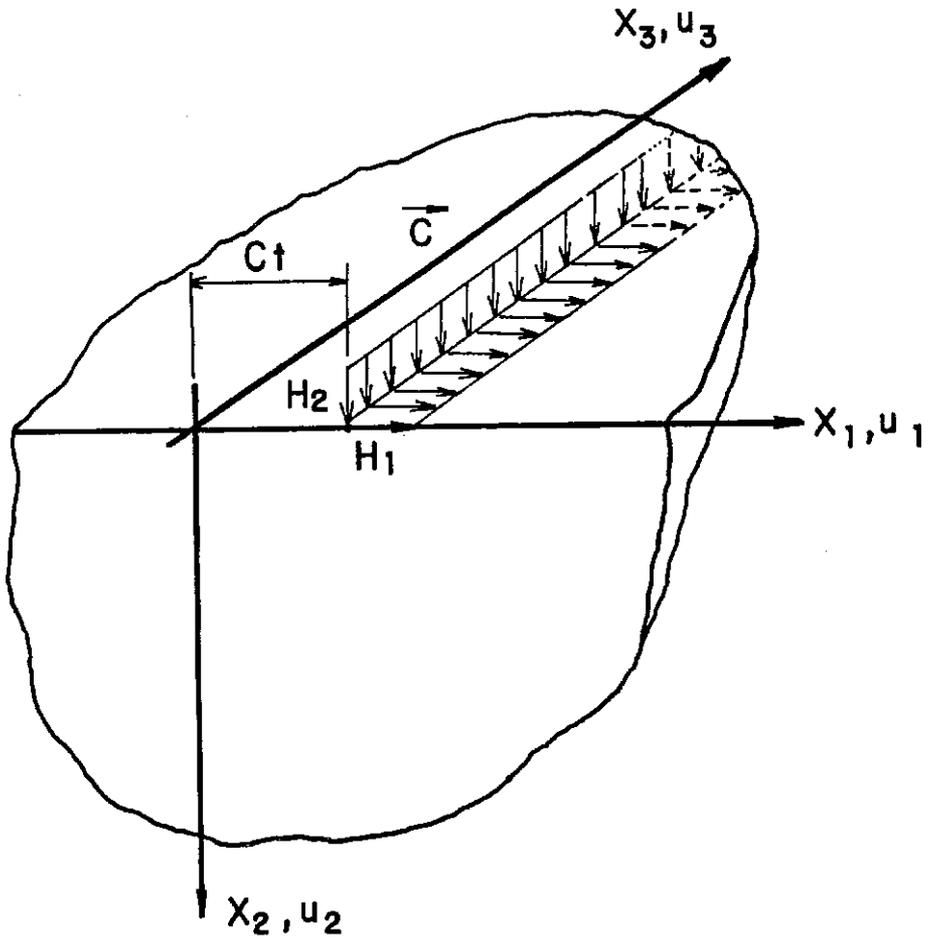


Figura A-1 Geometria do modelo, sistema coordenado e notações.

ajustar à simetria. Para o modelo considerado, que corresponde a um semi-espaco perfeitamente elástico uniforme, as constantes de Lamé μ e λ e, conseqüentemente, as velocidades das ondas de compressão e de cisalhamento, α e β , são números reais. Nas expressões apresentadas em seguida, $\delta(x)$ representa a função delta de Dirac e $H(x)$ denota a função degrau de Heaviside.

A.1. Campos de Deslocamentos e de Tensões para o Caso Subsônico

Neste caso em que $C < \beta < \alpha$, é introduzida a seguinte notação:

$$M_\alpha = \frac{C}{\alpha}; \quad M_\beta = \frac{C}{\beta} \quad (\text{A-1})$$

$$A_\alpha = (1 - M_\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-2})$$

$$A_\beta = (1 - M_\beta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-3})$$

$$r_\alpha = [(x_1 - Ct)^2 + A_\alpha^2 x_2^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-4})$$

$$r_\beta = [(x_1 - Ct)^2 + A_\beta^2 x_2^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-5})$$

$$\theta_\alpha = \tan^{-1} \frac{A_\alpha x_2}{x_1 - Ct} \quad \theta_\alpha \in (0, \pi) \quad (\text{A-6})$$

$$\theta_\beta = \tan^{-1} \frac{A_\beta x_2}{x_1 - Ct} \quad \theta_\beta \in (0, \pi) \quad (\text{A-7})$$

$$R_1 = (1 + A_\alpha^2)^2 - 4A_\alpha A_\beta \quad . \quad (\text{A-8})$$

A.1.1. Linha de Carga Horizontal (H_1)

$$u_1 = \frac{H_1 A_\alpha}{\pi \mu R_1} [2 \log r_\alpha - (1 + A_\beta^2) \log r_\beta] \quad (\text{A-9})$$

$$u_2 = -\frac{H_1}{\pi \mu R_1} [2A_\alpha A_\beta \theta_\alpha - (1 + A_\beta^2) \theta_\beta] \quad (\text{A-10})$$

$$\sigma_{11} = \frac{2H_1 A_\beta}{\pi R_1} \left[\frac{(2A_\alpha^2 - A_\beta^2 + 1)}{r_\alpha} \cos \theta_\alpha - \frac{(1 + A_\beta^2)}{r_\beta} \cos \theta_\beta \right] \quad (\text{A-11})$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2H_1 A_\beta}{\pi R_1} (1 + A_\beta^2) \left[\frac{\cos \theta_\alpha}{r_\alpha} - \frac{\cos \theta_\beta}{r_\beta} \right] \quad (\text{A-12})$$

$$\sigma_{12} = \frac{H_1}{\pi R_1} \left[\frac{4A_\alpha A_\beta}{r_\alpha} \sin \theta_\alpha - \frac{(1 + A_\beta^2)^2}{r_\beta} \sin \theta_\beta \right] \quad (\text{A-13})$$

A.1.2. Linha de Carga Vertical (H_2)

$$u_1 = \frac{H_2}{\pi \mu R_1} [2A_\alpha A_\beta \theta_\beta - (1 + A_\beta^2) \theta_\alpha] \quad (\text{A-14})$$

$$u_2 = -\frac{H_2 A_\alpha}{\pi \mu R_1} [(1 + A_\beta^2) \log r_\alpha - 2 \log r_\beta] \quad (\text{A-15})$$

$$\sigma_{11} = \frac{H_2}{\pi R_1} \left[\frac{(2A_\alpha^2 - A_\beta^2 + 1)}{r_\alpha} (1 + A_\beta^2) \sin \theta_\alpha - \frac{4A_\alpha A_\beta}{r_\beta} \sin \theta_\beta \right] \quad (\text{A-16})$$

$$\sigma_{22} = -\frac{H_2}{\pi R_1} \left[\frac{(1 + A_\beta^2)^2}{r_\alpha} \sin \theta_\alpha - \frac{4A_\alpha A_\beta}{r_\beta} \sin \theta_\beta \right] \quad (\text{A-17})$$

$$\sigma_{12} = -\frac{2H_2 A_\alpha}{\pi R_1} (1 + A_\beta^2) \left[\frac{\cos \theta_\alpha}{r_\alpha} - \frac{\cos \theta_\beta}{r_\beta} \right] \quad (\text{A-18})$$

A.2. Campos de Deslocamentos e de Tensões para o Caso Transônico

Neste caso em que $\beta < C < \alpha$, é aplicada a seguinte notação:

$$M_\alpha = \frac{C}{\alpha}; \quad M_\beta = \frac{C}{\beta} \quad (\text{A-19})$$

$$A_\alpha = (1 - M_\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-20})$$

$$B_\beta = (M_\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-21})$$

$$r_\alpha = [(x_1 - Ct)^2 + A_\alpha^2 x_2^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-22})$$

$$\theta_\alpha = \tan^{-1} \frac{A_\alpha x_2}{x_1 - Ct} \quad \theta_\alpha \in (0, \pi) \quad (\text{A-23})$$

$$R_2 = (1 - B_\beta^2)^4 - 16A_\alpha^2 B_\beta^2 \quad . \quad (\text{A-24})$$

A.2.1. Linha de Carga Horizontal (H_1)

$$\begin{aligned}
 u_1 = & -\frac{2H_1B_\beta}{\pi\mu R_2(1-B_\beta^2)} \left\{ (1-B_\beta^2) [4A_\alpha B_\beta \log r_\alpha - (1-B_\beta^2)^2 \theta_\alpha] \right. \\
 & - 2A_\alpha B_\beta [4\pi A_\alpha B_\beta H(Ct - x_1 - B_\beta x_2) + (1-B_\beta^2)^2 \log |Ct - x_1 - B_\beta x_2|] \left. \right\} \\
 & - \frac{H_1 B_\beta}{\mu(1-B_\beta^2)} H(Ct - x_1 - B_\beta x_2) \tag{A-25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 = & \frac{2H_1A_\alpha B_\beta}{\pi\mu R_2(1-B_\beta^2)} \left\{ (1-B_\beta^2) [(1-B_\beta^2)^2 \log r_\alpha + 4A_\alpha B_\beta \theta_\alpha] \right. \\
 & - 2 [4\pi A_\alpha B_\beta H(Ct - x_1 - B_\beta x_2) + (1-B_\beta^2)^2 \log |Ct - x_1 - B_\beta x_2|] \left. \right\} \\
 & + \frac{H_1}{\mu(1-B_\beta^2)} H(Ct - x_1 - B_\beta x_2) \tag{A-26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} = & -\frac{2H_1B_\beta}{\pi R_2(1-B_\beta^2)} \left\{ \frac{(1-B_\beta^2)(1+2A_\alpha^2+B_\beta^2)}{r_\alpha} [4A_\alpha B_\beta \cos \theta_\alpha + (1-B_\beta^2)^2 \sin \theta_\alpha] \right. \\
 & \left. - \frac{4A_\alpha B_\beta(1-B_\beta^2)^2}{(x_1 - Ct + B_\beta x_2)} + 16\pi A_\alpha^2 B_\beta^2 \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) \right\} \\
 & + \frac{2H_1B_\beta}{(1-B_\beta^2)} \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) \tag{A-27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22} = & \frac{2H_1B_\beta}{\pi R_2(1-B_\beta^2)} \left\{ \frac{(1-B_\beta^2)^2}{r_\alpha} [4A_\alpha B_\beta \cos \theta_\alpha + (1-B_\beta^2)^2 \sin \theta_\alpha] \right. \\
 & \left. - \frac{4A_\alpha B_\beta(1-B_\beta^2)^2}{(x_1 - Ct + B_\beta x_2)} + 16\pi A_\alpha^2 B_\beta^2 \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) \right\} \\
 & - \frac{2H_1B_\beta}{(1-B_\beta^2)} \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) \tag{A-28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12} = & -\frac{4H_1A_\alpha B_\beta}{\pi R_2} \left\{ 4A_\alpha B_\beta \left[\frac{\sin \theta_\alpha}{r_\alpha} - \pi \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) \right] \right. \\
 & \left. - (1-B_\beta^2)^2 \left[\frac{\cos \theta_\alpha}{r_\alpha} - \frac{1}{(x_1 - Ct + B_\beta x_2)} \right] \right\} - H_1 \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) . \tag{A-29}
 \end{aligned}$$

A.2.2. Linha de Carga Vertical (H_2)

$$u_1 = \frac{H_2}{\pi\mu R_2} \left\{ (1 - B_\beta^2) [4A_\alpha B_\beta \log r_\alpha - (1 - B_\beta^2)^2 \theta_\alpha] \right. \\ \left. - 2A_\alpha B_\beta [4\pi A_\alpha B_\beta H(Ct - x_1 - B_\beta x_2) + (1 - B_\beta^2)^2 \log |Ct - x_1 - B_\beta x_2|] \right\} \quad (\text{A-30})$$

$$u_2 = -\frac{H_2 A_\alpha}{\pi\mu R_2} \left\{ (1 - B_\beta^2) [(1 - B_\beta^2)^2 \log r_\alpha + 4A_\alpha B_\beta \theta_\alpha] \right. \\ \left. - 2 [4\pi A_\alpha B_\beta H(Ct - x_1 - B_\beta x_2) + (1 - B_\beta^2)^2 \log |Ct - x_1 - B_\beta x_2|] \right\} \quad (\text{A-31})$$

$$\sigma_{11} = \frac{H_2}{\pi R_2} \left\{ \frac{(1 - B_\beta^2)(1 + 2A_\alpha^2 + B_\beta^2)}{r_\alpha} [4A_\alpha B_\beta \cos \theta_\alpha + (1 - B_\beta^2)^2 \sin \theta_\alpha] \right. \\ \left. - \frac{4A_\alpha B_\beta (1 - B_\beta^2)^2}{(x_1 - Ct + B_\beta x_2)} + 16\pi A_\alpha^2 B_\beta^2 \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) \right\} \quad (\text{A-32})$$

$$\sigma_{22} = -\frac{H_2}{\pi R_2} \left\{ \frac{(1 - B_\beta^2)^2}{r_\alpha} [4A_\alpha B_\beta \cos \theta_\alpha + (1 - B_\beta^2)^2 \sin \theta_\alpha] \right. \\ \left. - \frac{4A_\alpha B_\beta (1 - B_\beta^2)^2}{(x_1 - Ct + B_\beta x_2)} + 16\pi A_\alpha^2 B_\beta^2 \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) \right\} \quad (\text{A-33})$$

$$\sigma_{12} = \frac{2H_2 A_\alpha (1 - B_\beta^2)}{\pi R_2} \left\{ 4A_\alpha B_\beta \left[\frac{\sin \theta_\alpha}{r_\alpha} - \pi \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) \right] \right. \\ \left. - (1 - B_\beta^2)^2 \left[\frac{\cos \theta_\alpha}{r_\alpha} - \frac{1}{(x_1 - Ct + B_\beta x_2)} \right] \right\} \quad (\text{A-34})$$

A.3. Campos de Deslocamentos e de Tensões para o Caso Supersônico

Neste caso em que $C > \alpha > \beta$, é utilizada a seguinte notação:

$$M_\alpha = \frac{C}{\alpha}; \quad M_\beta = \frac{C}{\beta} \quad (\text{A-35})$$

$$B_\alpha = (M_\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-36})$$

$$B_\beta = (M_\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-37})$$

$$R_3 = (1 - B_\beta^2)^2 + 4B_\alpha B_\beta \quad . \quad (\text{A-38})$$

A.3.1 Linha de Carga Horizontal (H_1)

$$u_1 = -\frac{H_1 B_\beta}{\mu R_3} [(1 - B_\beta^2)H(Ct - x_1 - B_\beta x_2) - 2H(Ct - x_1 - B_\alpha x_2)] \quad (\text{A-39})$$

$$u_2 = \frac{H_1}{\mu R_3} [(1 - B_\beta^2)H(Ct - x_1 - B_\beta x_2) + 2B_\alpha B_\beta H(Ct - x_1 - B_\alpha x_2)] \quad (\text{A-40})$$

$$\sigma_{11} = \frac{2H_1 B_\beta}{R_3} [(1 - B_\beta^2)\delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) - (1 - 2B_\alpha^2 + B_\beta^2)\delta(x_1 - Ct + B_\alpha x_2)] \quad (\text{A-41})$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2H_1 B_\beta (1 - B_\beta^2)}{R_3} [\delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) - \delta(x_1 - Ct + B_\alpha x_2)] \quad (\text{A-42})$$

$$\sigma_{12} = -\frac{H_1}{R_3} [(1 - B_\beta^2)^2 \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) + 4B_\alpha B_\beta \delta(x_1 - Ct + B_\alpha x_2)] \quad . \quad (\text{A-43})$$

A.3.2 Linha de Carga Vertical (H_2)

$$u_1 = -\frac{H_2}{\mu R_3} [2B_\alpha B_\beta H(Ct - x_1 - B_\beta x_2) + (1 - B_\beta^2)H(Ct - x_1 - B_\alpha x_2)] \quad (\text{A-44})$$

$$u_2 = \frac{H_2 B_\alpha}{\mu R_3} [2H(Ct - x_1 - B_\beta x_2) - (1 - B_\beta^2)H(Ct - x_1 - B_\alpha x_2)] \quad (\text{A-45})$$

$$\sigma_{11} = \frac{H_2}{R_3} [4B_\alpha B_\beta^2 \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) + (1 - 2B_\alpha^2 + B_\beta^2)(1 - B_\beta^2) \delta(x_1 - Ct + B_\alpha x_2)] \quad (\text{A-46})$$

$$\sigma_{22} = -\frac{H_2}{R_3} [4B_\alpha B_\beta \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) + (1 - B_\beta^2)^2 \delta(x_1 - Ct + B_\alpha x_2)] \quad (\text{A-47})$$

$$\sigma_{12} = -\frac{2H_2 B_\alpha (1 - B_\beta^2)}{R_3} [\delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) - \delta(x_1 - Ct + B_\alpha x_2)] \quad (\text{A-48})$$

APÊNDICE B

ANÁLISE FORA DO PLANO PARA UMA LINHA DE CARGA DE CISALHAMENTO QUE SE MOVE SOBRE A SUPERFÍCIE DE UM SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO UNIFORME

Surpreendentemente, a solução do problema bidimensional associado ao cisalhamento antiplano, produzido por uma linha de carga que se move com velocidade constante na superfície de um semi-espaço elástico uniforme, não foi encontrado na literatura. Neste Apêndice, é apresentado o desenvolvimento da solução para este caso simples bidimensional.

Ao invés de se aplicar a formulação geral apresentada nos capítulos anteriores, os campos de deslocamentos e de tensões são obtidos tomando-se partido das simplificações inerentes a este caso particular. A equação de Navier para o movimento fora do plano em coordenadas Cartesianas é descrita pela equação (2-17c). Na ausência de forças de corpo, ela pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \beta^2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) \quad . \quad (\text{B-1})$$

As componentes das tensões correspondentes são expressas por

$$\sigma_{31} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad (\text{B-2a})$$

$$\sigma_{32} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (\text{B-2b})$$

onde para o caso de um semi-espaço elástico uniforme, em estudo neste Apêndice, a constante de Lamé μ , e conseqüentemente, a velocidade da onda de cisalhamento β , são números reais.

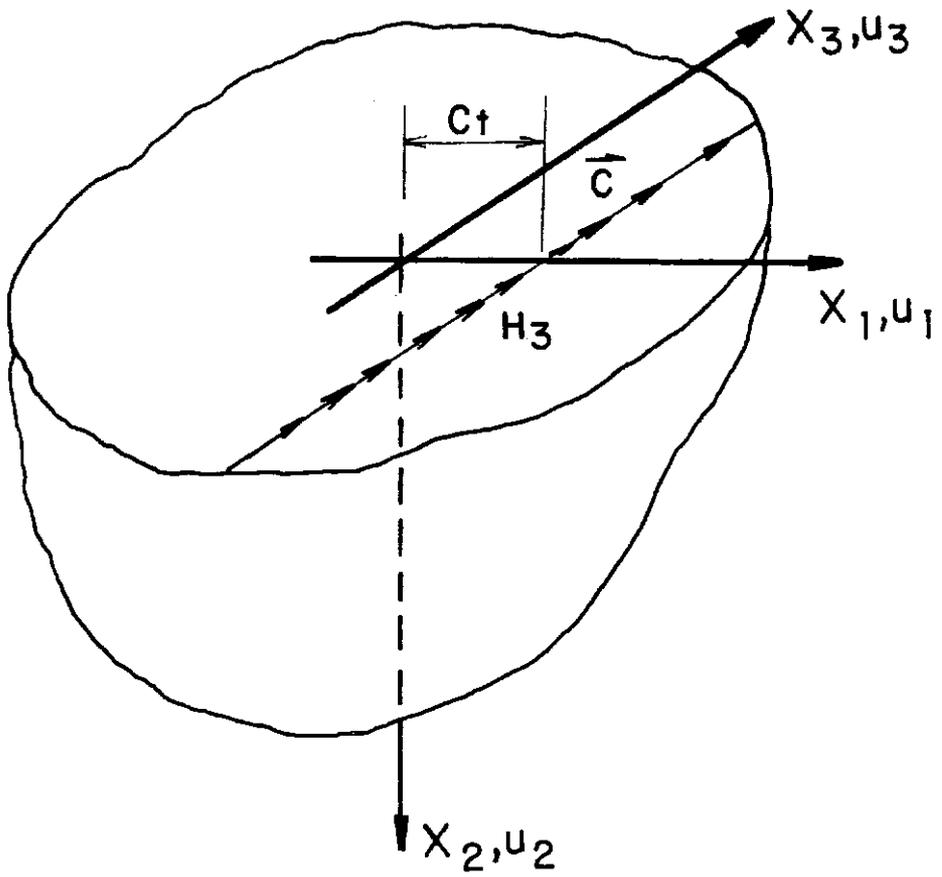


Figura B-1 Sistema coordenado, representação gráfica das condições de contorno e notações.

Seja uma linha de carga concentrada horizontal H_3 , aplicada na direção de x_3 , que se move com velocidade constante C , segundo a direção positiva do eixo x_1 , sobre a superfície livre de um semi-espaco elástico, como mostra a Figura B-1. A condição de contorno na superfície ($x_2 = 0$), para este caso, corresponde a:

$$\sigma_{32} = -H_3 \delta(x_1 - Ct) \quad . \quad (\text{B-3})$$

Para se encontrar a solução deste problema, é necessário que a equação do movimento (B-1) seja resolvida em conjunto com a condição de contorno prescrita na superfície (B-3) e com a condição de radiação no infinito. Com relação às condições iniciais do movimento, é considerado por hipótese, que a carga se encontra em movimento uniforme por um longo tempo, de modo que as condições iniciais pertencem a um passado suficientemente distante e, por conseguinte, a influência das mesmas no estado presente é desprezível. Inicialmente, torna-se conveniente a aplicação da transformada de Fourier com relação ao tempo, expressa pela equação 2-13), nas equações (B-1) e (B-2a,b). Procedendo-se desta forma chega-se a:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial x_2^2} + k_\beta^2 \bar{u}_3 = 0 \quad (\text{B-4})$$

e

$$\bar{\sigma}_{31} = \mu \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} \quad (\text{B-5a})$$

$$\bar{\sigma}_{32} = \mu \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} \quad (\text{B-5b})$$

onde $k_\beta = \omega/\beta$ e as variáveis com uma barra superior denotam quantidades transformadas no domínio da frequência.

A solução geral da equação (B-4) pode ser obtida pelo método da separação de variáveis. A solução geral da equação do movimento (B-4), que resulta da aplicação deste método, pode ser escrita como:

$$\bar{u}_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[A(k, k_\beta) e^{-\nu' x_2} + B(k, k_\beta) e^{\nu' x_2} \right] e^{-ikx_1} dx \quad (\text{B-6})$$

onde ν' é definido pela equação (2-42). A condição de radiação quando $x_2 \rightarrow \infty$ implica que, na equação (B-6), $B(k, k_\beta) = 0$. Tomando-se a transformada de Fourier em relação ao tempo na condição de contorno em $x_2 = 0$, definida pela equação (B-3), obtém-se:

$$\bar{\sigma}_{32} |_{x_2=0} = -\frac{H_3}{C} e^{-i\omega x_1/C} \quad . \quad (\text{B-7})$$

Usando-se as equações (B-5b), (B-6) e (B-7), conclui-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu' A(k, k_\beta) e^{-ikx_1} dk = \frac{H_3}{\mu C} e^{-i\omega x_1/C} \quad (\text{B-8})$$

o que implica em:

$$\nu' A(k, k_\beta) = \frac{H_3}{2\pi\mu C} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_1(k-\omega/C)} dx_1 \quad . \quad (\text{B-9})$$

Usando-se agora a representação integral da função delta de Dirac, pode-se escrever que:

$$A(k, k_\beta) = \frac{H_3}{\mu C \nu'} \delta\left(k - \frac{\omega}{C}\right) \quad . \quad (\text{B-10})$$

Substituindo-se a equação (B-10) nas equações (B-6) e (B-5a,b), resulta em:

$$\bar{u}_3 = \frac{H_3}{\mu C \nu'} e^{-\nu' x_2 - i\hat{k}x_1} \quad (\text{B-11})$$

$$\bar{\sigma}_{31} = -\frac{iH_3 \hat{k}}{C \nu'} e^{-\nu' x_2 - i\hat{k}x_1} \quad (\text{B-12a})$$

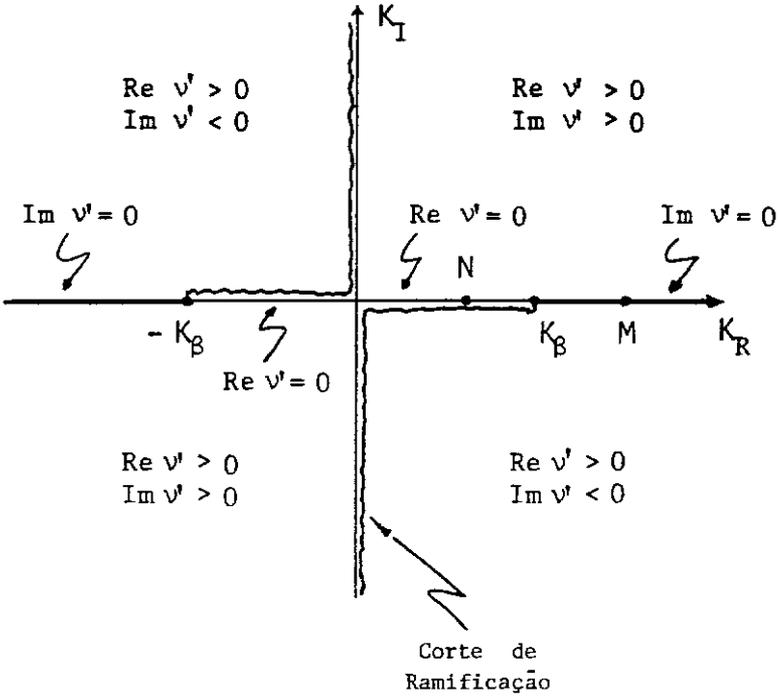
$$\bar{\sigma}_{32} = -\frac{H_3}{C} e^{-\nu' x_2 - i\hat{k}x_1} \quad (\text{B-12b})$$

onde

$$\hat{k} = \frac{\omega}{C} \quad (\text{B-13a})$$

$$\nu' = \left[\left(\frac{\omega}{C}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (\text{B-13b})$$

PLANO COMPLEXO K ($\omega > 0$)



PLANO COMPLEXO K ($\omega < 0$)

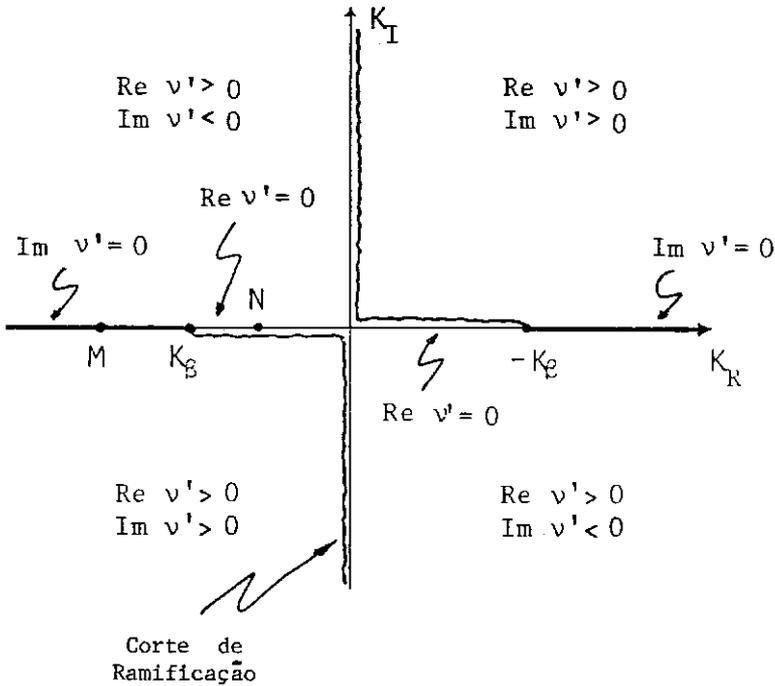


Figura B-2 Plano complexo k com os cortes de ramificação (branch cuts) selecionados.

A equação (B-11) indica que \bar{u}_3 se comporta como $1/\omega$ quando $\omega \rightarrow 0$. Com o objetivo de se evitar a ocorrência de possíveis problemas numérico em $\omega = 0$, torna-se conveniente, no desenvolvimento da solução, a utilização da velocidade no lugar do deslocamento. A transformada de Fourier da velocidade é dada por:

$$\bar{u}_3 = \frac{iH_3 \omega}{\mu C \hat{\nu}'} e^{-\hat{\nu}' x_2 - i\hat{k} x_1} \quad . \quad (\text{B-14})$$

É importante salientar que $\nu' = [k^2 - k_\beta^2]^{\frac{1}{2}}$ não é, em geral, uma função unívoca. Em conseqüência, a folha Riemann deve ser selecionada de forma adequada de maneira que a parte real de ν' seja maior ou igual a zero. Os cortes de ramificação (*branch cuts*) selecionados no plano complexo k são mostrados na Figura B.2, para o caso de $\omega > 0$ e de $\omega < 0$. Na equação (B-13b), $\hat{\nu}'$ é um número real quando a velocidade de propagação da carga C é menor do que a velocidade da onda de cisalhamento β (caso subsônico) e $\hat{\nu}'$ é um número imaginário puro quando $C > \beta$ (caso transônico e supersônico). As soluções assumem expressões diferentes para cada um desses casos.

B.1 Regime Subsônico ($C < \beta$)

Quando $C < \beta$, a partir da equação (B-13b) e em conformidade com os cortes de ramificação no plano complexo k que foram selecionados, $\hat{\nu}'$ é sempre maior ou igual que zero, para ω positivo ou negativo. Tal situação é representada esquematicamente pelos pontos M ($k = \omega/C$) na Figura A.2. Então, neste caso, a equação (B-13b) pode ser escrita, para valores positivos ou negativos de ω , como:

$$\hat{\nu}' = \frac{|\omega|}{C} A_\beta \quad (\text{B-15})$$

onde

$$A_\beta = \left[1 - \left(\frac{C}{\beta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (\text{B-16})$$

Substituindo-se a equação (B-15) na equação (B-14), obtém-se que:

$$\bar{u}_3 = (\text{sign } \omega) \frac{iH_3}{\mu A_\beta} e^{-(|\omega| A_\beta x_2 - i\omega x_1)/C} \quad . \quad (\text{B-17})$$

A transformada inversa de Fourier da equação (B-17) pode ser escrita na seguinte forma

$$\dot{u}_3 = \frac{H_3}{2\pi\mu A_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} i (\text{sign } \omega) e^{-[|\omega| A_\beta x_2 + i\omega (x_1 - Ct)]/C} d\omega \quad (\text{B-18})$$

ou então como

$$\dot{u}_3 = \frac{H_3}{\pi\mu A_\beta} \int_0^{\infty} \sin \left[\omega \left(\frac{x_1}{C} - t \right) \right] e^{-\omega A_\beta x_2/C} d\omega \quad (\text{B-19})$$

da qual pode ser obtida a expressão para a velocidade fora do plano, correspondente ao caso subsônico, que é apresentada a seguir:

$$\dot{u}_3 = \frac{H_3 C (x_1 - Ct)}{\pi\mu A_\beta \left[(x_1 - Ct)^2 + (A_\beta x_2)^2 \right]} \quad . \quad (\text{B-20})$$

Substituindo-se as equações (B-13a) e (B-15) nas equações (B-12a,b), e, em seguida, tomando-se as transformadas inversas de Fourier, chega-se a:

$$\sigma_{31} = -\frac{H_3}{\pi C A_\beta} \int_0^{\infty} \sin \left[\omega \left(\frac{x_1}{C} - t \right) \right] e^{-\omega A_\beta x_2/C} d\omega \quad (\text{B-21a})$$

$$\sigma_{32} = -\frac{H_3}{\pi C} \int_0^{\infty} \cos \left[\omega \left(\frac{x_1}{C} - t \right) \right] e^{-\omega A_\beta x_2/C} d\omega \quad . \quad (\text{B-21b})$$

Após a integração das equações (B-21a,b), as expressões para as componentes das tensões fora do plano, para o regime subsônico, podem ser escritas diretamente na seguinte forma:

$$\sigma_{31} = -\frac{H_3 (x_1 - Ct)}{\pi A_\beta \left[(x_1 - Ct)^2 + (A_\beta x_2)^2 \right]} \quad (\text{B-22a})$$

$$\sigma_{32} = -\frac{H_3 A_\beta x_2}{\pi \left[(x_1 - Ct)^2 + (A_\beta x_2)^2 \right]} \quad . \quad (\text{B-22b})$$

É interessante se observar que $\sigma_{31} = -\mu\dot{u}_3/C$.

B.2 Regime Transônico e Supersônico ($C > \beta$)

Quando $C > \beta$, a partir da equação (B-13b), tem-se que $\hat{\nu}'$ é um número imaginário puro. A parte imaginária de $\hat{\nu}'$ é positiva para $\omega > 0$ e negativa para $\omega < 0$, em conformidade com os cortes de ramificação definidos no plano complexo k . Tal situação é representada esquematicamente pelos pontos N na Figura B.2. Neste caso, a equação (B-13b) pode ser escrita para ω positivo ou negativo, como:

$$\hat{\nu}' = i \frac{\omega}{C} B_\beta \quad (\text{B-23})$$

onde

$$B_\beta = \left[\left(\frac{C}{\beta} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B-24})$$

A substituição da equação (B-23) na equação (B-24), resulta em:

$$\bar{u}_3 = \frac{H_3}{\mu B_\beta} e^{-i\omega(B_\beta x_2 + x_1)/C} \quad (\text{B-25})$$

Tomando-se a transformada inversa de Fourier, obtém-se:

$$\dot{u}_3 = \frac{H_3}{2\pi\mu B_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x_1 - Ct + B_\beta x_2)/C} d\omega \quad (\text{B-26})$$

e

$$\dot{u}_3 = \frac{CH_3}{\mu B_\beta} \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) \quad (\text{B-27})$$

Substituindo-se as equações (B-13a) e (B-23) nas equações (B-12a,b), e aplicando-se a transformada inversa de Fourier, resulta em:

$$\sigma_{31} = -\frac{H_3}{B_\beta} \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) \quad (\text{B-28a})$$

$$\sigma_{32} = -H_3 \delta(x_1 - Ct + B_\beta x_2) \quad (\text{B-28b})$$

Como no caso anterior, $\sigma_{31} = -\mu\dot{u}_3/C$. Pode ser observado pelos resultados obtidos, que no regime supersônico, a forma dos pulsos de resposta da velocidade e das tensões coincidem com a forma do pulso da carga, a menos do atraso $B_\beta x_2/C$.

APÊNDICE C

FUNÇÕES DE GREEN BIDIMENSIONAIS PARA UM SEMI-ESPAÇO VISCO-ELÁSTICO ESTRATIFICADO

C.1 Formulação do Problema

Uma representação integral da solução geral, para um semi-espaço visco-elástico estratificado, sob a ação de forças de corpo arbitrárias, foi apresentada no Capítulo 2. Esses resultados são agora especializados para o cálculo das funções dinâmicas de Green bidimensionais para um semi-espaço visco-elástico estratificado, com base nas hipóteses do estado plano de deformações (movimentos no plano) ou do cisalhamento anti-plano (movimentos fora do plano). A função bidimensional de Green de deslocamento $G_{ik}(\vec{x}^r, \vec{x}^s)$ é definida como a componente do deslocamento na direção do eixo x_i , em um ponto de observação do campo $\vec{x}^r = (x_1^r, x_2^r)$, devida à ação da componente unitária da força, aplicada segundo a direção do eixo x_k , em um ponto $\vec{x}^s = (x_1^s, x_2^s)$. As funções Green de tensões $H_{ijk}(\vec{x}^r, \vec{x}^s)$ representam as tensões em \vec{x}^r , devidas à componente unitária da força na direção de x_k , aplicada em \vec{x}^s . A geometria do problema e o sistema Cartesiano de coordenadas são ilustrados na Figura C.1. A excitação corresponde a uma linha de carga concentrada unitária, por unidade de comprimento, $\vec{H}_k = (H_1, H_2, H_3)$, aplicada em um ponto \vec{x}^s localizado no interior da camada $j = l$. As componentes H_i ($i = 1, 2, 3$) da força \vec{H}_k ($k = 1, 2, 3$) são definidas por $H_i = \delta_{ik}$, onde δ_{ik} é o delta de Kronecker. Para efeito de simplificação, é suposto, sem perda de generalidade, que a fonte está localizada no plano x_2x_3 , *i.e.*, $\vec{x}^s = (0, x_2^s)$.

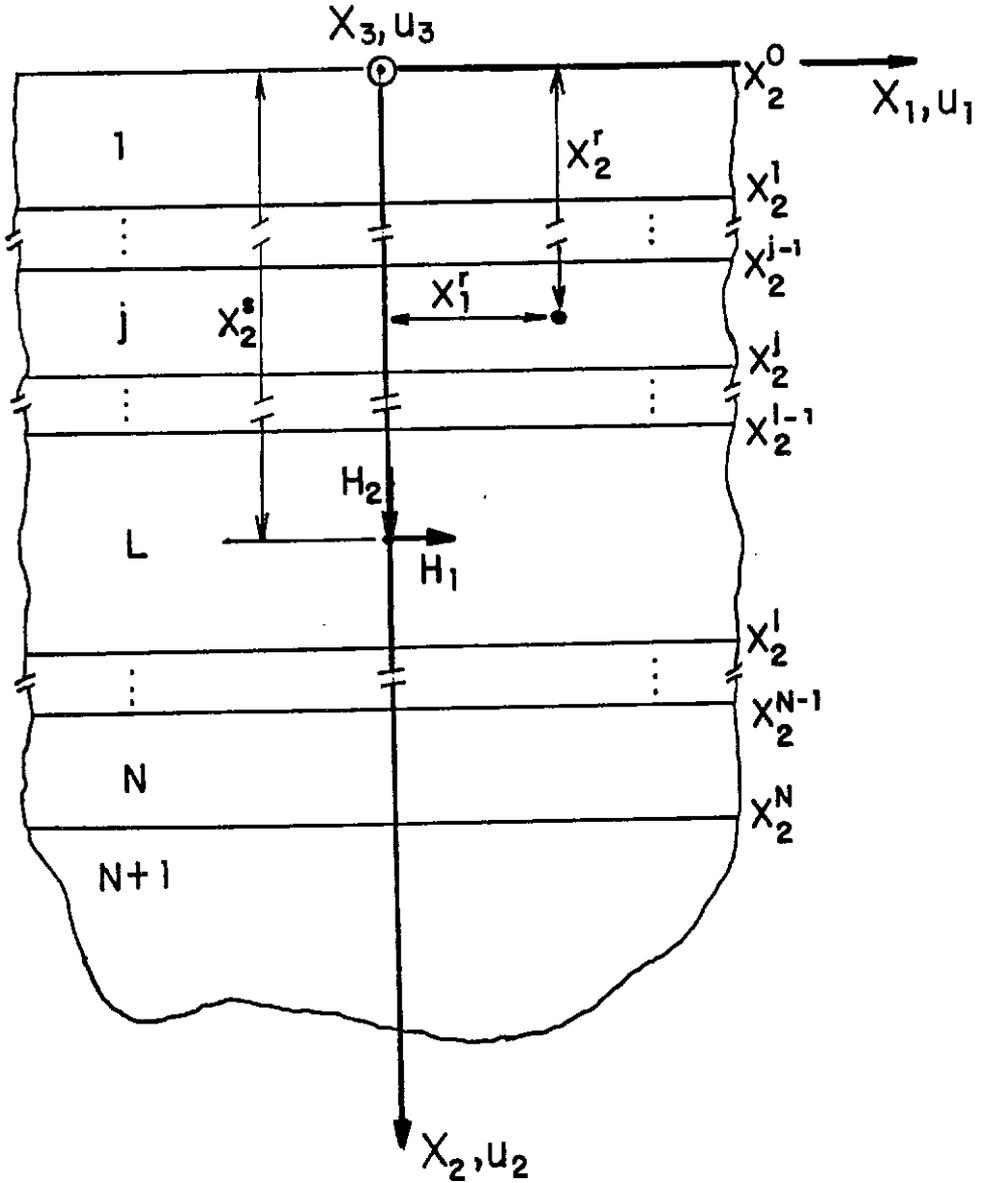


Figura C-1 Geometria do modelo, sistema coordenado e notações, para a análise bidimensional no semi-espaco visco-elástico estratificado.

As forças de corpo equivalentes por unidade de volume, na camada l , associadas a este estado de carregamento, podem ser escritas como:

$$\chi_1^l = H_1 \delta(x_1) \delta(x_2 - x_2^s) \delta(t) \quad (\text{C-1a})$$

$$\chi_2^l = H_2 \delta(x_1) \delta(x_2 - x_2^s) \delta(t) \quad (\text{C-1b})$$

$$\chi_3^l = H_3 \delta(x_1) \delta(x_2 - x_2^s) \delta(t) \quad . \quad (\text{C-1c})$$

Aplicando-se a transformada dupla de Fourier, expressa pela equação (2-13), e, em seguida, substituindo-se as forças de corpo, no domínio transformado, nas equações (2-26a,b,c), obtêm-se:

$$F_1^l = -i H_1 \delta(x_2 - x_2^s) \quad (\text{C-2a})$$

$$F_2^l = H_2 \delta(x_2 - x_2^s) \quad (\text{C-2b})$$

$$F_3^l = -i H_3 \delta(x_2 - x_2^s) \quad . \quad (\text{C-2c})$$

A solução geral no domínio transformado, apresentada na Seção 2.3, foi desenvolvida com base no sistema coordenado Cartesiano xyz , mostrado na Figura 2.1-1. Como foi comentado na Seção 2.2.3, todos os resultados contidos na Seção 2.3, permanecem válidos para o problema bidimensional em estudo, com a mudança da coordenada vertical z pela coordenada vertical correspondente x_2 .

Substituindo-se as equações (C-2a,b,c) nas expressões (2-45a) a (2-45f) e, em seguida, modificando-se os termos associados com as ondas polarizadas no plano vertical ($S_n^l(x_2), n = 1, \dots, 4$), através das transformações dadas pelas equações (2-68b) e (2-69b), obtêm-se as seguintes expressões para os termos de carga na

camada que contém a fonte ($x_2^{l-1} \leq x_2 \leq x_2^l$):

$$S_1^l(x_2) = -\frac{1}{2\kappa_l\mu_l} H(x_2 - x_2^s) e^{\nu_l(x_2^s - x_2^{l-1})} \left\{ \psi_l \left(i\frac{H_1}{\nu_l} + \frac{H_2}{\nu_l'} \right) + \frac{1}{k + \nu_l'} \left(iH_1 + \frac{k}{\nu_l'} H_2 \right) E(x_2^{l-1} - x_2^s) \right\} \quad (\text{C-3a})$$

$$S_2^l(x_2) = -\frac{1}{2\kappa_l\mu_l} H(x_2 - x_2^s) e^{\nu_l(x_2^s - x_2^{l-1})} \left\{ \psi_l \left(i\frac{H_1}{\nu_l}(\kappa_l - 1) - \frac{H_2}{\nu_l'} \right) - \left(iH_1 + \frac{k}{\nu_l'} H_2 \right) \left(\frac{1}{k + \nu_l'} + \frac{\nu_l' \kappa_l \beta_l^2}{\omega^2} \right) E(x_2^{l-1} - x_2^s) \right\} \quad (\text{C-3b})$$

$$S_3^l(x_2) = -\frac{1}{2\kappa_l\mu_l} H(x_2^s - x_2) e^{\nu_l(x_2^l - x_2^s)} \left\{ \psi_l \left(i\frac{H_1}{\nu_l} - \frac{H_2}{\nu_l'} \right) + \frac{1}{k + \nu_l'} \left(iH_1 - \frac{k}{\nu_l'} H_2 \right) E(x_2^s - x_2^l) \right\} \quad (\text{C-3c})$$

$$S_4^l(x_2) = -\frac{1}{2\kappa_l\mu_l} H(x_2^s - x_2) e^{\nu_l(x_2^l - x_2^s)} \left\{ \psi_l \left(i\frac{H_1}{\nu_l}(\kappa_l - 1) + \frac{H_2}{\nu_l'} \right) + \left(\frac{k}{\nu_l'} H_2 - iH_1 \right) \left[\frac{1}{k + \nu_l'} + \frac{\nu_l' \kappa_l \beta_l^2}{\omega^2} \right] E(x_2^s - x_2^l) \right\} \quad (\text{C-3d})$$

$$S_5^l(x_2) = -\frac{iH_3}{2\mu_l\nu_l'k} H(x_2 - x_2^s) e^{\nu_l'(x_2^s - x_2^{l-1})} \quad (\text{C-3e})$$

$$S_6^l(x_2) = -\frac{iH_3}{2\mu_l\nu_l'k} H(x_2^s - x_2) e^{\nu_l'(x_2^l - x_2^s)} \quad (\text{C-3f})$$

onde $E(x)$ é definido pela equação (2-80), $H(x)$ denota a função degrau de Heaviside e:

$$\gamma_l = \frac{\beta_l}{\alpha_l} \quad (\text{C-4a})$$

$$\kappa_l = \frac{(1 + \gamma_l^2)}{(1 - \gamma_l^2)} \quad (\text{C-4b})$$

$$\psi_l = \frac{k^2(\gamma_l^2 + 1) - \gamma_l^2\omega^2/\beta_l^2}{k^2 + \nu_l\nu_l'} \quad (\text{C-4c})$$

Uma vez que as soluções particulares ($S_n^t(x_2)$, $n = 1, \dots, 6$) são conhecidas, os campos de deslocamento e o de tensões, no domínio transformado, para um ponto de observação localizado no interior da camada j -ésima, com uma coordenada de profundidade $x_2 = x_2^r$, podem ser obtidos substituindo-se os resultados determinados através da equação (2-118) nas equações (2-24a,b,c) e nas equações (2-27a) a (2-27f). Para se obter a resposta no domínio da frequência é necessário determinar apenas as integrais com relação ao número de onda horizontal k , na transformada inversa de Fourier expressa pela equação (2.15). Por conseguinte, as funções dinâmicas de Green para cargas bidimensionais concentradas (linhas de carga) podem ser escritas na forma de integrais sobre o número de onda dos campos de deslocamento e de tensões \tilde{u}_{ik} , $\tilde{\sigma}_{ijk}$ ($i, j, k = 1, \dots, 3$), obtidos no domínio transformado do tempo e do espaço, isto é:

$$G_{ik}(\vec{x}^r, \vec{x}^s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_{ik}(k, x_2^s, x_2^r, \dots, \omega) e^{-ikx_1^r} dk \quad (\text{C-5})$$

$$H_{ijk}(\vec{x}^r, \vec{x}^s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}_{ijk}(k, x_2^s, x_2^r, \dots, \omega) e^{-ikx_1^r} dk \quad (\text{C-6})$$

onde, por simplificação, a função de dependência com o tempo $e^{i\omega t}$ é omitida.

A determinação das integrais sobre o número de onda é discutida na Seção 2.4, onde são apresentados dois procedimentos de integração numérica para as integrais que aparecem nas equações (C-5) e (C-6). Como é comentado na Seção 2.4, ambos os esquemas de integração numérica podem ser simplificados tomando-se partido da simetria ou da antisimetria do integrando com relação à variável k . Para o caso em estudo, identificou-se que as componentes \tilde{u}_{11} , \tilde{u}_{22} , \tilde{u}_{33} , $\tilde{\sigma}_{211}$, $\tilde{\sigma}_{112}$, $\tilde{\sigma}_{222}$, $\tilde{\sigma}_{332}$ e $\tilde{\sigma}_{323}$ são simétricas em relação ao número de onda k , enquanto que as componentes \tilde{u}_{21} , \tilde{u}_{12} , $\tilde{\sigma}_{111}$, $\tilde{\sigma}_{221}$, $\tilde{\sigma}_{331}$, $\tilde{\sigma}_{212}$ e $\tilde{\sigma}_{313}$ são antisimétricas. O último índice k em \tilde{u}_{ik} , $\tilde{\sigma}_{ijk}$ ($i, j, k = 1, \dots, 3$) denota a direção da força.

C.2 Validação

Com base na metodologia geral e nos procedimentos numéricos propostos por este trabalho, foi desenvolvido um programa de computador para o cálculo das funções bidimensionais de Green, correspondentes a linhas de cargas harmônicas fixas aplicadas no interior de um semi-espço visco-elástico estratificado. O método de cálculo e o programa de computador associado foram validados por meio de comparações com os resultados apresentados por Nakai et. al. (1984) e Mita (1986) para o caso de um semi-espço elástico uniforme, sob as condições do estado plano de deformações. Comparações adicionais com as soluções analíticas, para o problema do cisalhamento anti-plano, em um semi-espço visco-elástico uniforme, descrito pelas equações (2.4-17) a (2.4-19), foram também realizadas. As tabelas 2.4-1 e 2.4-2 apresentam as comparações destes resultados numéricos e analíticos com os resultados correspondentes obtidos pelo estudo presente, para um modelo de solo particular e a uma dada frequência adimensional. Além do mais, os efeitos da estratificação foram verificados por meio de um extensivo programa de comparações entre os resultados obtidos para o semi-espço uniforme e os calculados para diversos semi-espços ficticiamente estratificados.