ACOPLAMENTO ACÚSTICO-ELÁSTICO PARA PROPAGAÇÃO DE ONDAS SÍSMICAS USANDO O MÉTODO DE MALHA INTERCALADA EQUIVALENTE

Ana Paula Gomes Vieira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: Webe João Mansur
Leandro Di Bartolo

Rio de Janeiro
Junho de 2014

ACOPLAMENTO ACÚSTICO-ELÁSTICO PARA PROPAGAÇÃO DE ONDAS SÍSMICAS USANDO O MÉTODO DE MALHA INTERCALADA EQUIVALENTE

Ana Paula Gomes Vieira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. Leandro Di Bartolo, D.Sc.

Felipe dos Santos Loureiro

Prof. Felipe dos Santos Loureiro, D.Sc.

Prof. Leandro Palermo Junior, D.Sc.

Prof. Carlos Alexandre Bastos de Vasconcellos, D.Sc.

Prof. José Antonio Fontes Santiago, ~~D.Sc.~~

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2014

Vieira, Ana Paula Gomes

Acoplamento Acústico-Elástico para propagação de ondas sísmicas usando o método de malha intercalada equivalente/ Ana Paula Gomes Vieira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2014.

IX, 62 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Webe João Mansur

Leandro Di Bartolo

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2014.

Referências Bibliográficas: p. 58-62.

1. Propagação de ondas sísmicas. 2. Diferenças Finitas. 3. Acoplamento. I. Mansur, Webe João *et al*. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

À minha querida filha Isabella.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Professores Webe e Leandro, por todos os ensinamentos recebidos.

Ao meu marido Julio e meus pais, Marcos e Elizabeth, pela paciência e apoio.

Aos meus chefes, Coronéis Carlos Alves, Monteiro, Diniz, Guilherme e Teixeira, pela oportunidade de desenvolvimento profissional.

Aos membros da banca, pela participação e contribuição.

À Ivone, por estar sempre pronta a ajudar a todos.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ACOPLAMENTO ACÚSTICO-ELÁSTICO PARA PROPAGAÇÃO DE ONDAS SÍSMICAS USANDO O MÉTODO DE MALHA INTERCALADA EQUIVALENTE

Ana Paula Gomes Vieira

Junho/2014

Orientadores: Webe João Mansur
Leandro Di Bartolo

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta a proposta de um novo algoritmo baseado no acoplamento de esquemas baseados no Método das Diferenças Finitas. São acopladas formulações de malha intercalada equivalente acústica (ESG-Ac) e elástica (ESG-El). O acoplamento é explícito e utiliza a técnica de sobreposição de domínio, onde um esquema em pressão é utilizado na parte acústica e um esquema em velocidades é utilizado na parte elástica. Esquemas que utilizam malha intercalada equivalente demandam um menor dispêndio de memória do que os esquemas de malha intercalada padrão (SSG). Ao serem acoplados, resultam em um algoritmo que utiliza a menor quantidade de recursos de memória possível sem comprometer o custo computacional significativamente. Com a estratégia de acoplamento desenvolvida, pode-se aplicar o esquema mais adequado para cada parte do modelo físico, ou seja, utilizar o esquema ESG-Ac para as camadas de água e o ESG-El para as camadas de rocha, gerando um algoritmo eficiente para a propagação de ondas sísmicas, adequado a diversas aplicações.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

COUPLING ACOUSTIC-ELASTIC FOR SEISMIC PROPAGATIONS USING EQUIVALENT STAGGERED-GRID SQUEME

Ana Paula Gomes Vieira

June/2014

Advisors: Webe João Mansur
Leandro Di Bartolo

Department: Civil Engineering

This work presents a proposal of a new algorithm based on coupling schemes based on the Difference Finite Method. Acoustic and elastic equivalent staggered-grid schemes are coupled. The coupling is explicit and uses the technique of overlapping area, where a scheme is used in pressure in the acoustic part and a scheme in velocities is used in the elastic part. Schemes based in equivalent staggered-grid demands less memory requirements than the standard staggered-grid scheme (SSG).When they are coupled, results in an algorithm that uses the lowest possible memory requirement without compromises the computational cost. With the coupling developed strategy, the scheme can be applied in the layer more appropriate at the physic model, in other words, applies ESG-Ac for the water layer and the ESG-El for the rock layers, generating an efficient algorithm for seismic propagations that is adequate for various applications.

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO

Em geofísica aplicada, o Método Sísmico (MS) é o método mais utilizado na exploração de hidrocarbonetos, sendo a principal ferramenta para imageamento da subsuperfície, permitindo a identificação de regiões favoráveis ao acúmulo de petróleo e gás, além do constante monitoramento de reservatórios já conhecidos. O MS pode ser dividido em três etapas fundamentais: aquisição, processamento e interpretação (YILMAZ, 2001). A etapa de aquisição consiste na propagação de ondas sísmicas no meio de interesse para, posteriormente, se obter as ondas refletidas provenientes das interfaces onde há descontinuidade no contraste de impedância do meio. A segunda etapa tem o objetivo final de obter uma imagem geológica do meio baseada nos dados coletados anteriormente. Para tal, os dados são processados com o intuito de atenuar ruídos e aumentar a razão sinal-ruído e a resolução dos dados coletados em campo. Nesta etapa, as velocidades do meio são estimadas e o dado é migrado para formar a imagem dos refletores. Na etapa de interpretação, os dados obtidos são interpretados de tal maneira a se localizar possíveis reservas de hidrocarbonetos em subsuperfície.

O presente trabalho se insere na linha de modelagem computacional de ondas sísmicas com o Método das Diferenças Finitas (MDF). A modelagem é importante em várias etapas do MS, sendo o modo mais utilizado para a resolução dos problemas envolvendo propagações de ondas sísmicas a utilização de métodos numéricos, em contraposição aos demais métodos como, por exemplo, a resolução analítica de tais equações (o que não funciona para meios complexos) e a abordagem experimental. Cada vez mais, os chamados métodos baseados na equação da onda são utilizados no processamento em detrimento de métodos de última instância fundamentados na teoria do raio. Exemplos disso são a migração reversa no tempo, um método de imageamento que propaga a energia sísmica inversamente no tempo utilizando a equação completa da onda, e o procedimento de inversão de campo de onda conhecido como *full wave form inversion*, capaz de obter velocidades sísmicas de alta qualidade e resolução. Nessas duas aplicações, é muito importante a utilização de algoritmos eficientes.

Em várias áreas, a propagação de ondas é importante, não somente em Geofísica, mas também em Engenharia, Medicina, Física, entre outras. Exemplos de aplicações nessas áreas são: ensaios não destrutivos em Engenharia, imageamento em Medicina e eletrodinâmica em Física, por exemplo. Assim, o estudo aqui proposto tem diversas utilizações em potencial, não devendo ser visto como restrito apenas à geofísica aplicada à exploração de hidrocarbonetos.

Há diversos métodos numéricos que podem ser utilizados no estudo da propagação de ondas, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método das Diferenças Finitas (MDF). Este último é o mais popular entre os métodos para o caso da propagação de ondas sísmicas, uma vez que apresenta grande eficiência computacional e é de implementação mais simples.

1.1 Revisão Bibliográfica

Os primeiros trabalhos sobre a propagação de ondas sísmicas utilizando o MDF remontam há 40 anos. Foram desenvolvidas por BOORE (1972) formulações numéricas para o MDF onde as propriedades heterogêneas do meio são fornecidas ponto a ponto e, depois, foi lançada a sua extensão por KELLY *et al.* (1976). Vale lembrar que este último esquema não fornece bons resultados na presença da água, assim como em meios onde o coeficiente de Poisson é maior do que 0,25, como observado em LEVANDER (1988). Outros esquemas de malha simples tem o mesmo problema para modelar este tipo de região (STEPHEN, 1988).

Um esquema muito popular de modelagem para a solução de problemas de propagação de ondas sísmicas baseado em malhas intercaladas foi proposto por VIRIEUX (1984, 1986), bem como sua posterior extensão para quarta ordem, sugerida por LEVANDER (1989). Ambos os esquemas citados são baseados na mesma malha intercalada e serão designados como SSG (do inglês *Standard Staggered-Grid scheme*). Na verdade, os esquemas de malha intercalada foram aplicadas em geofísica originalmente por MADARIAGA (1976), utilizando ideias aplicadas para eletrodinâmica e fluidos, respectivamente em YEE (1966) e HARLOW *et al.* (1965).

A vantagem de esquemas de malha intercalada deste tipo é que eles funcionam com qualquer coeficiente de Poisson, porém necessitam que sejam armazenados os parâmetros relativos aos três campos de tensões e aos dois campos de velocidades (no caso 2D), uma vez que são baseados no sistema de equações acopladas em tensões e velocidades (de primeira ordem). Esta desvantagem em termos de dispêndio de memória foi resolvida por LUO e SCHUSTER (1990) para um caso específico, ao implementar um algoritmo baseado no sistema de equações acopladas em tensões e deslocamentos (de segunda ordem), onde não há necessidade de armazenamento das tensões. Esta abordagem funciona apenas para o caso elástico, como mostrado por DI BARTOLO *et al.* (2012a).

DI BARTOLO *et al.*(2014) desenvolveram formulações de campo único (ou seja, somente em termos de deslocamento, velocidade ou tensão) para a resolução de problemas de propagação de ondas sísmicas em meios heterogêneos e anisotrópicos através do MDF com malhas intercaladas. Tal formulação pode ser aplicada para diferentes configurações de malha intercalada e generalizam a ideia de LUO e SCHUSTER (1990), gerando esquemas equivalentes aos esquemas de malha intercalada existentes, com a diferença de que são aplicados diretamente nas equações em termos de apenas um campo de propagação, fazendo com que se possam obter esquemas vantajosos do ponto de vista de dispêndio de memória computacional. Tais esquemas são denominados simplesmente por ESG (do inglês *Equivalent Staggered-Grid scheme*).

Os esquemas de malha intercalada padrão (VIRIEUX, 1986; LEVANDER, 1989; MOCZO *et al.*, 2002) são abordagens de sucesso para a propagação de ondas sísmicas especialmente porque funcionam bem tanto para o caso elástico quanto para o acústico, bem como em regiões de acoplamento entre estes dois tipos de meios. Contudo, quando o dispêndio de memória é um condicionante, é sabido que o SSG apresenta desvantagem em relação aos esquemas não intercalados, como por exemplo, o esquema de KELLY *et al.* (1976), baseado apenas em deslocamentos.

Para o caso acústico, os esquemas em termos de pressão em malha simples são os esquemas de diferenças finitas com menor dispêndio de memória possível. Neste sentido, DI BARTOLO *et al.* (2012a) apresentaram o esquema de malha intercalada equivalente baseado apenas em pressão (ESG-Ac-P) para modelar regiões acústicas. Tal esquema é um esquema alternativo ao apresentado por COHEN *et al.* (1990) e fornece as mesmas respostas numéricas que o SSG quando aplicado em meios acústicos, porém com o mesmo dispêndio de memória que o esquema de malha simples. Enquanto o esquema de Cohen não tem a estabilidade garantida, conforme a análise de estabilidade realizada no trabalho citado, o esquema proposto por DI BARTOLO *et al.* (2012a) tem as mesmas propriedades espectrais do esquema de malha intercalada correspondente.

A grande vantagem do ESG-Ac-P é que, assim como o de malha simples, ele necessita armazenar apenas dois painéis de pressão para realizar a marcha no tempo, em contraposição aos cinco painéis (2D) ou nove painéis (3D) do SSG. O trabalho DI BARTOLO *et al.*(2014) é uma a generalização desta ideia para o caso elástico. Neste caso, apresenta-se vantajoso em termos de dispêndio de memória utilizar o campo de deslocamentos (ou velocidades) para formular o esquema equivalente.

O acoplamento de esquemas numéricos ESG é um tema importante no que se refere à propagação de ondas, uma vez que podem ser utilizados algoritmos especialmente voltados para modelar eficientemente determinadas regiões do domínio em questão. Um exemplo é o acoplamento entre meios acústicos e elásticos, conhecidos como meios *offshore,* no jargão da geofísica – meios compostos por água na parte superior e rochas na parte inferior. Existem diversos artigos sobre técnicas de acoplamento que reportam variadas estratégias para lidar com o acoplamento entre diferentes domínios físicos e uma revisão mais completa pode ser vista em SOARES (2011).

DI BARTOLO *et al.*(2012b) apresentaram um algoritmo de acoplamento entre os esquemas ESG-Ac-P e SSG que utiliza uma estratégia de acoplamento simples e eficiente numericamente. Neste algoritmo, é utilizado o chamado acoplamento direto explícito, bem como a técnica de sobreposição de domínio, na qual o domínio do problema é dividido em sub-regiões (subdomínios), uma para a parte acústica (água) outra para a parte elástica (rochas), sendo aplicado os esquemas ESG-Ac-P e SSG, respectivamente, para cada sub-região. Como resultado, o esquema de acoplamento proposto permitiu uma redução do tempo de processamento e dispêndio de memória em cerca de 25% para os casos 2D e 3D.

Algoritmos de modelagem eficientes são importantes para diversas aplicações em geofísica. Desde cedo, começou-se a utilizar tais algoritmos para o imageamento de estruturas, conhecido com o nome de migração sísmica. HEMON (1978), BAYSAL *et al.* (1983) e LOEWENTHAL *et al.* (1983) propuseram a técnica chamada de Migração Reversa no Tempo, que propaga a energia que chega aos receptores no sentido inverso do tempo e aplica uma condição de imagem para gerar uma imagem dos refletores.

1.2 Proposta de tese

O acoplamento de esquemas numéricos ESG é o foco deste trabalho, onde são construídos algoritmos especialmente voltados para modelar eficientemente regiões *offshore.* Serão focadas, especialmente, regiões oceânicas muito profundas (conhecidas como águas profundas ou ultra profundas), onde a lâmina d’água pode variar entre 2 e 3 km. Uma destas regiões é o pré-sal brasileiro, onde as camadas de petróleo podem ser encontradas a 2.000 m abaixo da camada de sal, que, por sua vez, encontra-se a aproximadamente 2.000m de profundidade abaixo da camada de rocha, abaixo de 2.000-3.000 m de água. Isto implica que cerca de 30 a 40% do meio de interesse é composto de água.

A presente tese propõe uma extensão do procedimento de acoplamento sugerido por DI BARTOLO *et al.*(2012b). Neste sentido, será aplicado o ESG-Ac-P na camada de água e o ESG elástico em termos de velocidades (ESG-El-V) nas camadas de rocha. Tal esquema, como mencionado anteriormente, foi desenvolvido em DI BARTOLO *et al.* (2014), sendo baseado apenas nas componentes de velocidade, utilizando malha intercalada de VIRIEUX. Além disso, o ESG-El-V é um esquema de malha intercalada equivalente ao SSG para meios elásticos, ou seja, apresenta as mesmas respostas que este esquema. Na extensão proposta neste trabalho, é aplicada também a técnica de acoplamento explícito direto, combinada com a técnica de sobreposição de domínio para acoplar os dois esquemas. Uma vez que o ESG-Ac-P e o ESG-El-V apresentam o mesmo critério de estabilidade, essa estratégia de acoplamento se mostra a mais apropriada, não requerendo processo iterativo.

A extensão apresentada é realizada acoplando-se o algoritmo de acoplamento previamente apresentado (ESG-Ac-P com SSG-El) com o esquema ESG-El-V. Em outras palavras, o SSG é utilizado em uma sub-região de transição. Na presente extensão, a técnica de sobreposição é usada para trocar, não somente informações sobre pressão acústica (tensões no caso do SSG), mas também informações de velocidade, o que torna o procedimento um pouco mais complexo. Para fins de simplicidade, o acoplamento será desenvolvido para meio 2D, adotando-se operadores com quarta ordem de precisão no espaço e segunda ordem de precisão no tempo. Ordens mais elevadas e extensões 3D podem ser feitas de forma simples. O esquema de acoplamento resultante é muito otimizado em relação ao custo de memória e o custo computacional permanece similar ao SSG se uma programação cuidadosa for feita. O desempenho deste algoritmo de acoplamento será tanto melhor quanto maior for a espessura da camada de água, em virtude do excelente desempenho do esquema ESG-Ac-P.

1.3 Estrutura da tese

A tese está dividida em cinco capítulos, conforme descrito na sequência.

No Capítulo 2 são apresentadas as formulações numéricas implementadas. Inicialmente são mostradas as formulações clássicas, tanto baseadas em malha simples quanto intercalada padrão e, posteriormente, apresentam-se os esquemas de malha intercalada equivalente, que serão utilizados no acoplamento foco dessa tese.

No Capítulo 3 são apresentados os acoplamentos implementados detalhadamente. Explica-se o acoplamento entre o ESG-Ac-P e SSG, o acoplamento entre o SSG e ESG-El-V e, finalmente, o acoplamento entre os três esquemas ESG-Ac-P, SSG e ESG-El-V.

No Capítulo 4, apresentam-se exemplos utilizando o acoplamento proposto e compara os resultados com aqueles obtidos pelo esquema SSG, demonstrando a equivalência entre eles. São feitas análises a respeito desses resultados.

No Capítulo 5, encontram-se as conclusões finais a respeito do trabalho apresentado, bem como as perspectivas de trabalhos futuros.

2 FORMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, são apresentadas as formulações numéricas implementadas para o presente estudo. Inicialmente, são mostradas as formulações clássicas, que serão utilizadas neste trabalho para a realização do acoplamento e para fins de comparação, tanto baseadas em malhas simples quanto em malhas intercaladas padrão, assim como formulações com ordens elevadas. Por fim, serão vistos esquemas de malha intercalada equivalente, apresentando-se a teoria subjacente.

2.1 Malha Simples (NSG) - Acústica

Usualmente, é utilizada em Geofísica a seguinte equação da onda acústica:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho s, \qquad (2\text{-}1)$$

sendo p a pressão acústica, ρ a densidade do meio, c a velocidade de propagação e s a fonte sísmica, dada pela derivada segunda do parâmetro de injeção de massa i_v, sendo dada por

$$s(\vec{x},t) = \frac{\partial^2 i_v(\vec{r},t)}{\partial t^2} = A[2\pi(\pi f_c t_d)^2 - 1]exp[-\pi(\pi f_c t_d)^2]\delta(\vec{x} - \vec{x}_f), \qquad (2\text{-}2)$$

onde $\delta(\vec{x} - \vec{x}_f)$ é a distribuição Delta de Dirac, $\vec{x}_f$ é o ponto de aplicação da fonte, A é a amplitude da fonte, f_c é um parâmetro relacionado com a frequência de corte f_{corte} e t_d é o tempo defasado, utilizado para deslocar o início da aplicação da fonte, para que o máximo da função seja deslocado de zero para um tempo t_0 positivo, de forma que a expressão seja praticamente zero no início da análise (em *t=0*) e cresça suavemente (sem descontinuidade). As expressões para os parâmetros acima serão mostradas, posteriormente, em (2-49) e (2-50).

É importante lembrar a equação (2-2) é válida apenas para o caso em que o gradiente de densidades do meio é desprezível.

Para a derivada temporal, foi utilizada a aproximação de 2ª ordem de diferenças centrais, dada por

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right)_{i,j}^{k} = \frac{p_{i,j}^{k-1} - 2p_{i,j}^{k} + p_{i,j}^{k+1}}{\Delta t^2}, \tag{2-3}$$

onde o tempo é dado por $t = k\Delta t$ e as coordenadas espaciais por $x=ih$ e $z=jh$, sendo Δt o passo de tempo e h o espaçamento da malha.

A equação (2-1), desconsiderando a fonte sísmica, pode ser escrita como:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{2-4}$$

Tal equação foi discretizada por diferenças finitas em 2ª, 4ª e 6ª ordens, respectivamente, com a utilização dos operadores dados por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{p_{i+1,j}^{k} - 2p_{i,j}^{k} + p_{i-1,j}^{k}}{h^2} \tag{2-5}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{-p_{i+2,j}^k + 16p_{i+1,j}^k - 30p_{i,j}^k + 16p_{i-1,j}^k - p_{i-2,j}^k}{12h^2} \tag{2-6}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{3}{2}\frac{p_{i+1,j}^k + p_{i-1,j}^k}{h^2} - \frac{3}{20}\frac{p_{i+2,j}^k + p_{i-2,j}^k}{h^2} + \frac{1}{90}\frac{p_{i+3,j}^k + p_{i-3,j}^k}{h^2} - \frac{49}{18}\frac{p_{i,j}^k}{h^2} \tag{2-7}$$

Substituindo-se (2-5) e (2-3) em (2-4), (2-6) e (2-3) em (2-4) e (2-7) e (2-3) em (2-4) chega-se às expressões dos esquemas NSG (2-8), (2-9) e (2-10), respectivamente 2E2T, 4E2T e 6E2T (onde os números são as ordens de aproximação utilizadas no espaço e no tempo, respectivamente), assim representadas:

$$p_{i,j}^{k+1} = c_{i,j}^2 \left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2 \left(p_{i+1,j}^k - 2p_{i,j}^k + p_{i-1,j}^k + p_{i,j+1}^k - 2p_{i,j}^k + p_{i,j-1}^k\right) + 2p_{i,j}^k - p_{i,j}^{k-1} \tag{2-8}$$

$$p_{i,j}^{k+1} = c_{i,j}^2 \left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2 \left(\frac{1}{12}\right)\left(-p_{i+2,j}^k + 16p_{i+1,j}^k - 30p_{i,j}^k + 16p_{i-1,j}^k - p_{i-2,j}^k - p_{i,j+2}^k + 16p_{i,j+1}^k - 30p_{i,j}^k + 16p_{i,j-1}^k - p_{i,j-2}^k\right) + 2p_{i,j}^k - p_{i,j}^{k-1} \tag{2-9}$$

$$p_{i,j}^{k+1} = c_{i,j}^2 \left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2 \left(\frac{3}{2}p_{i+1,j}^k - \frac{49}{18}p_{i,j}^k + \frac{3}{2}p_{i-1,j}^k + \frac{1}{90}p_{i+3,j}^k + \frac{1}{90}p_{i-3,j}^k - \frac{3}{20}p_{i+2,j}^k - \frac{3}{20}p_{i-2,j}^k + \frac{3}{2}p_{i,j+1}^k - \frac{49}{18}p_{i,j}^k + \frac{3}{2}p_{i,j-1}^k + \frac{1}{90}p_{i,j+3}^k + \frac{1}{90}p_{i,j-3}^k + \frac{3}{20}p_{i,j+2}^k - \frac{3}{20}p_{i,j-2}^k\right) + 2p_{i,j}^k - p_{i,j}^{k-1}\,. \tag{2-10}$$

Na Figura 2-1, são mostrados os *stencils* dos esquemas NSG acústicos de 2ª e 4ª ordens. Por esse ser um esquema de passo duplo, devem-se armazenar os painéis de pressão dos tempos *t-1* e *t* para ser possível o cálculo do tempo *t+1,* ou seja, para a realização da marcha no tempo.

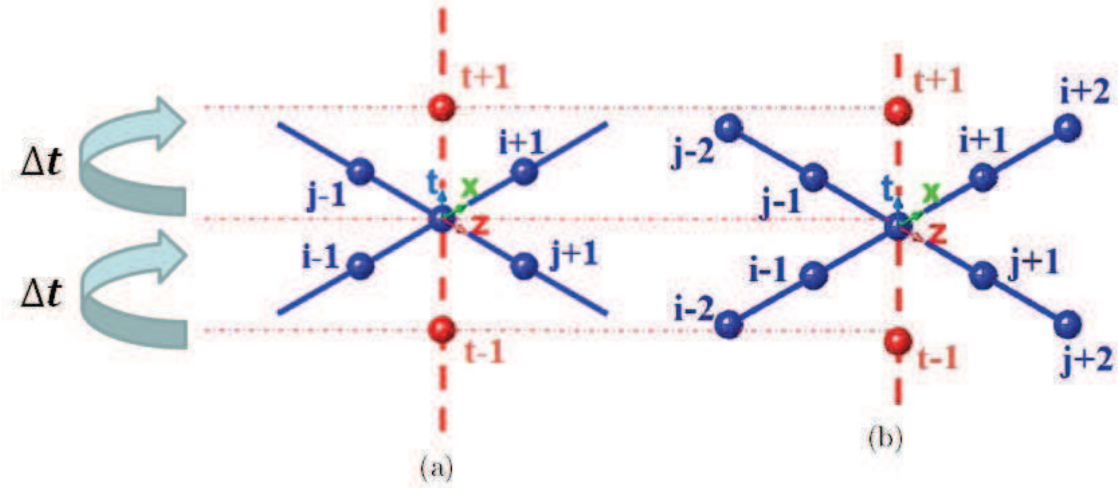


Figura 2-1: Stencil de 2ª ordem (a) e 4ª ordem (b).

2.2 Malha Intercalada Padrão (SSG) - Acústico

Na formulação de malha intercalada para meios acústicos, parte-se das equações apresentadas abaixo, que são mais gerais que a equação (2-1), pois permitem meios com quaisquer densidades:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}.v = \frac{\partial i_v(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (2\text{-}11)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0, \tag{2-12}$$

onde i_v é o parâmetro de injeção de massa, k é o coeficiente de compressão volumétrico (*bulk modulus*), sendo a velocidade de propagação do meio dada por $c = \sqrt{k/\rho}$.

A Figura 2-2 apresenta a malha intercalada utilizada para o caso acústico. O painel da esquerda mostra as posições do campo de pressões *p* e do módulo de compressão *k*, ambos em posições inteiras da malha, considerando-se também índices inteiros para os passos de tempo n. O painel da direita mostra a malha intercalada considerada no passo de tempo intermediário, para as componentes de velocidade na direção *x* e na direção *z.* Uma observação importante é que os valores das propriedades nos pontos intermediários, *b,* foram obtidos através de média aritmética entre os pontos inteiros da malha, como mostrado, por exemplo, em (2-13). Cabe ressaltar que outras médias podem ser usadas como, por exemplo, a média harmônica (MOCZO *et al.*, 2002; ZAHRADNÍK *et al.*, 1993).

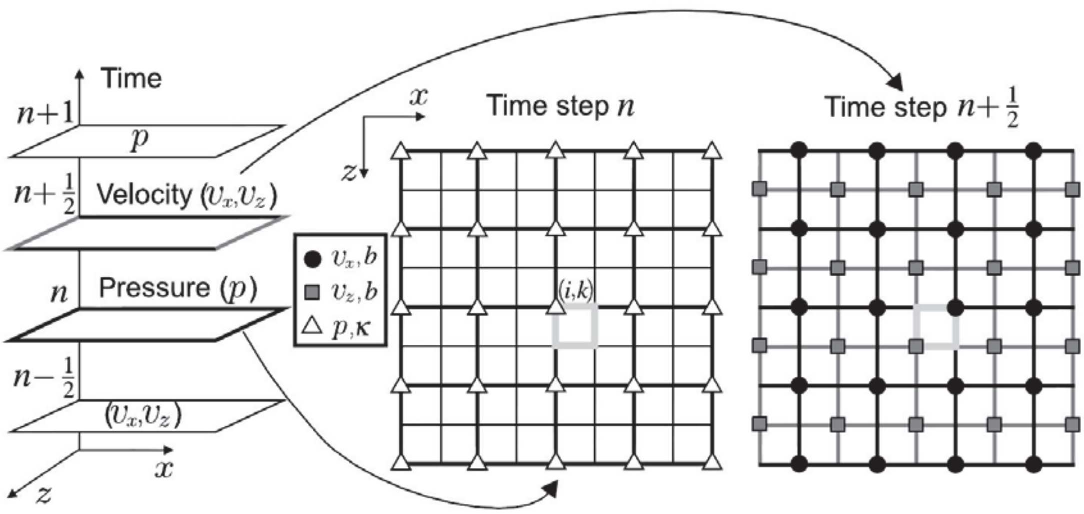


Figura 2-2: Representação da malha intercalada utilizada para o caso acústico.

$$b_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{b_{i,j} + b_{i+1,j}}{2}. \qquad (2\text{-}13)$$

Os operadores de diferenças centrais utilizados foram os seguintes (VIRIEUX, 1986 e LEVANDER, 1989):

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial x}\right)_{i,j}^{k} = \frac{p_{i+1/2,j}^{k} - p_{i-1/2,j}^{k}}{\Delta x} \qquad (2\text{-}14)$$

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial x}\right)_{i,j}^{k} = \frac{-1}{24\Delta x} p_{i+3/2,j}^{k} + \frac{9}{8\Delta x} p_{i+1/2,j}^{k} - \frac{9}{8\Delta x} p_{i-1/2,j}^{k} + \frac{1}{24\Delta x} p_{i-3/2,j}^{k} \qquad (2\text{-}15)$$

respectivamente para 2ª e 4ª ordens no espaço. Além disso, foi utilizado também o operador de 6ª ordem, dado por:

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial x}\right)_{i,j}^{k} = \frac{1}{32\Delta x}\Big(-\frac{45}{300} p_{i-5/2,j}^{k} + \frac{75}{36} p_{i-3/2,j}^{k} - \frac{225}{6} p_{i-1/2,j}^{k} + \frac{225}{6} p_{i+1/2,j}^{k} - \qquad (2\text{-}16)$$

$$\frac{75}{36} p_{i+3/2} + \frac{45}{300} p_{i+5/2,j}^{k}\Big).$$

Utilizando a discretização, em 2ª ordem, obtêm-se as expressões a seguir descritas:

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^{k} - \rho_{i,j} {c_p^2}_{i,j} \frac{\Delta t}{h}\left(u_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right) \qquad (2\text{-}17)$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{\rho_{i,j}} + \frac{1}{\rho_{i+1,j}}\right)\frac{\Delta t}{2h}\left(p_{i+1,j}^{k} - p_{i,j}^{k}\right) \qquad (2\text{-}18)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = v_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{\rho_{i,j}} + \frac{1}{\rho_{i,j+1}}\right)\frac{\Delta t}{2h}\left(p_{i,j+1}^{k} - p_{i,j}^{k}\right). \qquad (2\text{-}19)$$

E, analogamente, as expressões de 4ª ordem ficam assim escritas:

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^{k} + \rho_{i,j} c_{p_{i,j}}^{2} \frac{\Delta t}{24h}\left[u_{i+\frac{3}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - 27\left(u_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}\right) - u_{i-\frac{3}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{3}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right.$$
$$\left. - 27\left(v_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right) - v_{i,j-\frac{3}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right] \tag{2-20}$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\rho_{i,j}} + \frac{1}{\rho_{i+1,j}}\right)\frac{\Delta t}{48h}\left[p_{i+2,j}^{k} - 27\left(p_{i+1,j}^{k} - p_{i,j}^{k}\right) - p_{i-1,j}^{k}\right] \tag{2-21}$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = v_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\rho_{i,j}} + \frac{1}{\rho_{i,j+1}}\right)\frac{\Delta t}{48h}\left[p_{i,j+2}^{k} - 27\left(p_{i,j+1}^{k} - p_{i,j}^{k}\right) - p_{i,j-1}^{k}\right]. \tag{2-22}$$

Após os testes com os operadores de 2ª e 4ª ordens, foi implementada e testada a discretização em 6ª ordem com a utilização das seguintes expressões:

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^{k} + \rho_{i,j} c_{p_{i,j}}^{2} \frac{\Delta t}{32h}\left(-\frac{45}{300} u_{i-\frac{5}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{75}{36} u_{i-\frac{3}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{225}{6} u_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{225}{6} u_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \right.$$
$$- \frac{75}{36} u_{i+\frac{3}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{45}{300} u_{i+\frac{5}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{45}{300} v_{i,j-\frac{5}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{75}{36} v_{i,j-\frac{3}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{225}{6} v_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \tag{2-23}$$
$$\left. + \frac{225}{6} v_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{75}{36} v_{i,j+\frac{3}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{45}{300} v_{i,j+\frac{5}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right)$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\rho_{i,j}} + \frac{1}{\rho_{i+1,j}}\right)\frac{\Delta t}{64h}\left(-\frac{45}{300} p_{i-2,j}^{k} + \frac{75}{36} p_{i-1,j}^{k} - \frac{225}{6} p_{i,j}^{k} \right.$$
$$\left. + \frac{225}{6} p_{i+1,j}^{k} - \frac{75}{36} p_{i+2,j}^{k} + \frac{45}{300} p_{i+3,j}^{k}\right) \tag{2-24}$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = v_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\rho_{i,j}} + \frac{1}{\rho_{i,j+1}}\right)\frac{\Delta t}{64h}\left(-\frac{45}{300} p_{i,j-2}^{k} + \frac{75}{36} p_{i,j-1}^{k} - \frac{225}{6} p_{i,j}^{k} \right.$$
$$\left. + \frac{225}{6} p_{i,j+1}^{k} - \frac{75}{36} p_{i,j+2}^{k} + \frac{45}{300} p_{i,j+3}^{k}\right). \tag{2-25}$$

2.3 Malha Intercalada Padrão (SSG) – Elástico

O esquema de malha intercalada padrão para meios elásticos (SSG) é obtido aplicando-se operadores de diferença central para malha intercalada nas equações de propagação de onda a seguir descritas (2-26)-(2-30), considerando os campos e propriedades na malha intercalada (VIRIEUX, 1986; LEVANDER, 1989).

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \tag{2-26}$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \tag{2-27}$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{2-28}$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{2-29}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \tag{2-30}$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé, ρ é a densidade de massa média, v_x e v_z são as componentes de velocidade e τ_{xx}, τ_{xz} e τ_{zz} são as componentes de tensão.

A Figura 2-3 apresenta a malha intercalada utilizada para o caso elástico. O painel da esquerda mostra as posições do campo de tensões (τ_{xx}, τ_{xz} e $\tau_{zz} = X, T, Z$) e propriedades elásticas (constantes de Lamé, *L* e *M*) consideradas no passo de tempo *n*. O painel da direita mostra a malha intercalada considerada no passo de tempo *n+1/2*, para as componentes de velocidade (v_x, $v_z = U, V$) e para as densidades (ou o seu inverso, *B*).

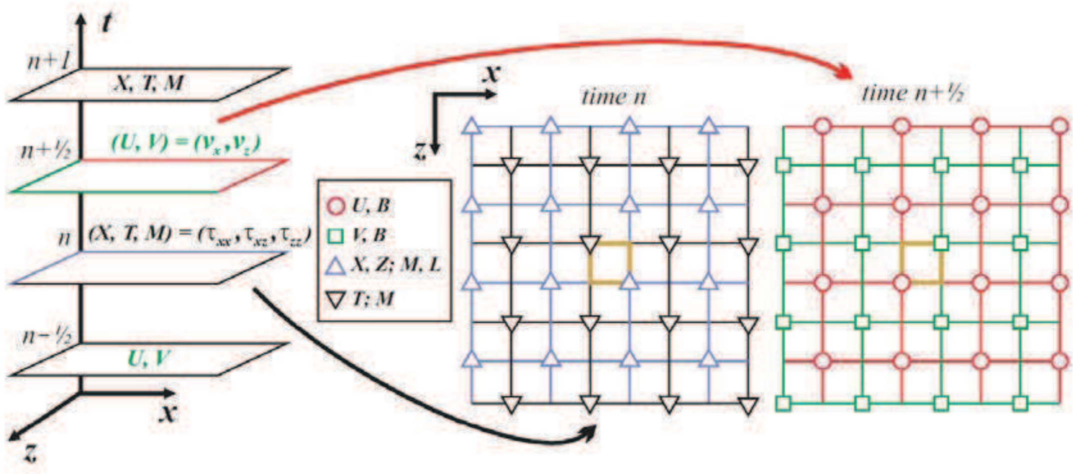


Figura 2-3: Representação da malha intercalada utilizada para o caso elástico.

O esquema de quarta ordem é obtido aplicando o operador da forma (2-15), de quatro pontos de *stencil*, nas equações acima, bem como o operador usual de segunda ordem para malhas intercaladas no tempo (similar a (2-14)).

Como exemplo, são apresentadas as expressões de diferenças finitas para a resolução de tais equações, com precisão de 2ª ordem, após aplicação do operador mostrado em (2-14) para todas as derivadas presentes em (2-26)-(2-30):

$$v_{x_{i,j}}^{k+\frac{1}{2}} = v_{x_{i,j}}^{k-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\rho_{i,j}} + \frac{1}{\rho_{i+1,j}}\right)\frac{\Delta t}{2h}\left(\tau_{xx_{i+\frac{1}{2},j}}^{k} - \tau_{xx_{i-\frac{1}{2},j}}^{k} + \tau_{xz_{i,j+\frac{1}{2}}}^{k} - \tau_{xz_{i,j-\frac{1}{2}}}^{k}\right) \qquad (2\text{-}31)$$

$$v_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{k+\frac{1}{2}} = v_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{k-\frac{1}{2}}$$

$$+ \left(\frac{1}{\rho_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\rho_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}}\right)\frac{\Delta t}{2h}\left(\tau_{xz_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^{k} - \tau_{xz_{i,j+\frac{1}{2}}}^{k} + \tau_{zz_{i+\frac{1}{2},j+1}}^{k}\right. \qquad (2\text{-}32)$$

$$\left. - \tau_{zz_{i+\frac{1}{2},j}}^{k}\right)$$

$$\tau_{xx}{}_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} = \tau_{xx}{}_{i+\frac{1}{2},j}^{k} + (\lambda + 2\mu)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(v_{x}{}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x}{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right)$$
$$+ \lambda_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(v_{z}{}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z}{}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \tag{2-33}$$

$$\tau_{zz}{}_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} = \tau_{zz}{}_{i+\frac{1}{2},j}^{k} + (\lambda + 2\mu)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(v_{z}{}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z}{}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right)$$
$$+ \lambda_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(v_{x}{}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x}{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \tag{2-34}$$

$$\tau_{xz}{}_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} = \tau_{xz}{}_{i,j+\frac{1}{2}}^{k} + \mu_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(v_{x}{}_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x}{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right)$$
$$+ \mu_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(v_{z}{}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z}{}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \tag{2-35}$$

2.4 Formulações Equivalentes

Nesta seção, serão apresentadas formulações de malha intercalada equivalente (ESG – do inglês *Equivalent Staggered Grid*), baseadas em um único campo de propagação e que utilizam malha intercalada padrão (DI BARTOLO *et al.*, 2014, 2012a). Como mencionado anteriormente, os esquemas ESG apresentam como principal vantagem a economia na utilização de memória durante a resolução do problema e são formulações equivalentes àquelas de malha intercalada obtidas anteriormente, ou seja, são numericamente equivalentes. Por serem mais vantajosas em termos de utilização de memória, foram implementadas formulações de campo único em termos de pressões, para o caso acústico (DI BARTOLO *et al.*, 2012a) e em termos de velocidades (DI BARTOLO *et* *al.*, 2014), para o caso elástico. Primeiro, será mostrada uma breve revisão sobre os operadores equivalentes de malha intercalada, conforme apresentado em DI BARTOLO *et al.* (2014).

2.4.1 Operadores equivalentes de malha intercalada

Considerando-se $G_l^{(N)}$ como o operador de diferenças finitas utilizado para aproximar derivadas no SSG, ou seja, é a aproximação para a derivada primeira com ordem N de aproximação na direção x_l .

Para a obtenção dos operadores ESG, parte-se daqueles já vistos no esquema SSG, utilizando-se a relação dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(p_{i,k}\frac{\partial q_{i,k}^n}{\partial x_j}\right) \approx G_l^{(N)}\left(p_{i,k}G_j^{(N)}q_{i,k}^n\right) \tag{2-36}$$

onde x_l representa a coordenada espacial ou temporal, com $x_0=t$ e $(x_1, x_2, x_3)=(x, y, z)$ e os índices i, k e n indicam, respectivamente, a posição em x, z e tempo na malha intercalada (caso 2D), q é a componente do campo de propagação considerado e p é uma componente do tensor elástico. A correspondência entre os esquemas SSG e ESG é esquematicamente representada por

$$p_{i,k}\frac{\partial q_{i,k}^n}{\partial x_j} \approx p_{i,k}G_j^{(N)}q_{i,k}^n \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_l}\left(p_{i,k}\frac{\partial q_{i,k}^n}{\partial x_j}\right) \approx G_l^{(N)}\left(p_{i,k}G_j^{(N)}q_{i,k}^n\right). \tag{2-37}$$

Tal expressão indica que, para terem-se os mesmos resultados do esquema SSG, os operadores de derivada segunda devem ser obtidos aplicando-se duas vezes os operadores usados para as derivadas primeiras do SSG considerando o mesmo esquema de malha intercalada original.

2.4.2 ESG – Acústico (ESG-Ac-P)

O esquema ESG acústico baseado apenas na pressão acústica é obtido aplicando-se os operadores equivalentes nas equações acústicas da onda em termos de pressão. Tal equação é obtida eliminando as velocidades das equações (2-11) e (2-12), ficando da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \kappa\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right] + k\frac{\partial^2 i_v}{\partial t^2}. \tag{2-38}$$

A equação (2-38) é a extensão da equação (2-1) para o caso de meios com densidade variável, sendo $\kappa = c^2\rho$ o módulo de compressão volumétrico. Da mesma forma que em (2-13), deve-se considerar as mesmas médias que no caso do esquema SSG para que os resultados sejam equivalentes.

Neste esquema, será utilizada a mesma malha já vista para o caso SSG-Ac (Figura 2-2). Os operadores de derivada segunda utilizados para 2ª e 4ª ordem (DI BARTOLO *et al.*, 2012a), são os seguintes, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j}^{k} = \frac{g_{i+\frac{1}{2},j}\left(f_{i+1,j}^{k} - f_{i,j}^{k}\right) - g_{i-\frac{1}{2},j}\left(f_{i,j}^{k} - f_{i-1,j}^{k}\right)}{h^2} \tag{2-39}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} g \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j}^{k} = \frac{9}{8}\left(g_{i+\frac{1}{2},j}\left[\frac{9}{8}\frac{f_{i+1,j}^{k} - f_{i,j}^{k}}{h^2} - \frac{1}{24}\frac{f_{i+2,j}^{k} - f_{i-1,j}^{k}}{h^2}\right]\right.$$
$$\left. - g_{i-\frac{1}{2},j}\left[\frac{9}{8}\frac{f_{i,j}^{k} - f_{i-1,j}^{k}}{h^2} - \frac{1}{24}\frac{f_{i+1,j}^{k} - f_{i-2,j}^{k}}{h^2}\right]\right)$$
$$- \frac{1}{24}\left(g_{i+\frac{3}{2},j}\left[\frac{9}{8}\frac{f_{i+2,j}^{k} - f_{i+1,j}^{k}}{h^2} - \frac{1}{24}\frac{f_{i+3,j}^{k} - f_{i,j}^{k}}{h^2}\right]\right.$$
$$\left. - g_{i-\frac{3}{2},j}\left[\frac{9}{8}\frac{f_{i-1,j}^{k} - f_{i-2,j}^{k}}{h^2} - \frac{1}{24}\frac{f_{i,j}^{k} - f_{i-3,j}^{k}}{h^2}\right]\right). \tag{2-40}$$

Para o caso com densidade constante, os operadores utilizados são dados abaixo, respectivamente para 2ª e 4ª ordens:

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}^{k}}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j}^{k} - 2f_{i,j}^{k} + f_{i-1,j}^{k}}{h^2} \tag{2-41}$$

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}^{k}}{\partial x^2} = \frac{1}{576h^2}\left\{\left(f_{i+3,j}^{k} + f_{i-3,j}^{k}\right) - 54\left(f_{i+2,j}^{k} + f_{i-2,j}^{k}\right) + 783\left(f_{i+1,j}^{k} + f_{i-1,j}^{k}\right) - 1460 f_{i,j}^{k}\right\} \tag{2-42}$$

Discretizando-se (2-38) com precisão de 2ª ordem no tempo e espaço, chega-se à seguinte expressão, onde *b* é o inverso da densidade (*b=1/ρ*):

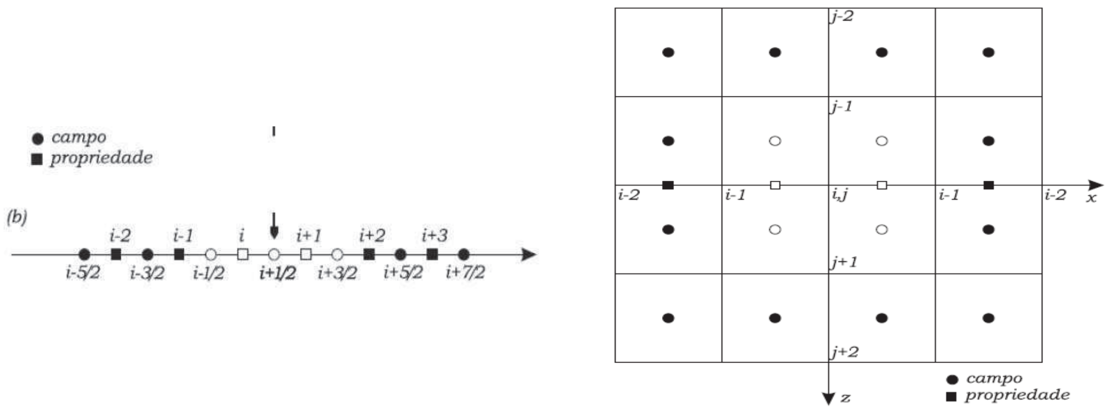
$$p_{i,j}^{k+1} = 2p_{i,j}^{k} - p_{i,j}^{k-1} - c_p^2 \rho_{i,j}\frac{\Delta t^2}{h^2}\left[-b_{i+\frac{1}{2},j}\left(p_{i+1,j}^{k} - p_{i,j}^{k}\right) + b_{i-\frac{1}{2},j}\left(p_{i,j}^{k} - p_{i-1,j}^{k}\right) - b_{i,j+\frac{1}{2}}\left(p_{i,j+1}^{k} - p_{i,j}^{k}\right) + b_{i,j-\frac{1}{2}}\left(p_{i,j}^{k} - p_{i,j-1}^{k}\right)\right] \tag{2-43}$$

Assim como no caso da utilização dos esquemas de campo duplo (esquemas de malha intercalada tradicionais), os operadores temporais utilizados neste esquema serão sempre em 2ª ordem de precisão e recaem no operador tradicional de diferenças finitas para malhas simples. Os esquemas ESG desintercalam a formulação numérica no tempo.

A equação com 4ª ordem de precisão pode ser assim representada:

$$
\begin{aligned}
p_{i,j}^{k+1} = 2p_{i,j}^{k} - p_{i,j}^{k-1}& \\
&+ c_p^2 \rho_{i,j} \frac{\Delta t^2}{h^2} \Big\{ \frac{9}{8} \Big(b_{i+\frac{1}{2},j} [\frac{9}{8}(p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k) - \frac{1}{24}(p_{i+2,j}^k - p_{i-1,j}^k)] \\
&- b_{i-\frac{1}{2},j} [\frac{9}{8}(p_{i,j}^k - p_{i-1,j}^k) - \frac{1}{24}(p_{i+1,j}^k - p_{i-2,j}^k)] \Big) \\
&- \frac{1}{24} \Big(b_{i+\frac{3}{2},j} [\frac{9}{8}(p_{i+2,j}^k - p_{i+1,j}^k) - \frac{1}{24}(p_{i+3,j}^k - p_{i,j}^k)] \\
&- b_{i-\frac{3}{2},j} [\frac{9}{8}(p_{i-1,j}^k - p_{i-2,j}^k) - \frac{1}{24}(p_{i,j}^k - p_{i-3,j}^k)] \Big) \\
&+ \frac{9}{8} \Big(b_{i,j+\frac{1}{2}} [\frac{9}{8}(p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k) - \frac{1}{24}(p_{i,j+2}^k - p_{i,j-1}^k)] \\
&- b_{i,j-\frac{1}{2}} [\frac{9}{8}(p_{i,j}^k - p_{i,j-1}^k) - \frac{1}{24}(p_{i,j+1}^k - p_{i,j-2}^k)] \Big) \\
&- \frac{1}{24} \Big(b_{i,j+\frac{3}{2}} [\frac{9}{8}(p_{i,j+2}^k - p_{i,j+1}^k) - \frac{1}{24}(p_{i,j+3}^k - p_{i,j}^k)] \\
&- b_{i,j-\frac{3}{2}} [\frac{9}{8}(p_{i,j-1}^k - p_{i,j-2}^k) - \frac{1}{24}(p_{i,j}^k - p_{i,j-3}^k)] \Big) \Big\}
\end{aligned}
\tag{2-44}
$$

Na Figura 2-4(a), são apresentados os *stencils* utilizados para os operadores ESG de derivadas não cruzadas, utilizados na formulação acústica. Os pontos em branco são utilizados para 2ª ordem de aproximação, enquanto que para 4ª ordem, todos os pontos (brancos e pretos) são utilizados. Na Figura 2-4(b), são apresentados os *stencils* utilizados para os operadores ESG de derivadas cruzadas, utilizados na formulação elástica (seção 2.4.3).



(a) (b)

Figura 2-4: *Stencils* utilizados para operadores ESG. (a) $\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j}^{k}$; (b) $\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{i,j}^{k}$.

2.4.3 ESG – Elástico (ESG-El-V)

Eliminando a tensão nas equações (2-26) a (2-30), é originada a equação da onda elástica em termos de velocidades:

$$\rho\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right] \tag{2-45}$$

$$\rho\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial z}v_z + \lambda\frac{\partial}{\partial x}v_x\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}v_z + \frac{\partial}{\partial z}v_x\right)\right] \tag{2-46}$$

As equações (2-45) e (2-46) descrevem o mesmo fenômeno de onda que as equações originais.

O esquema de malha intercalada equivalente de quarta ordem elástico e isotrópico (ESG-El-V) resolve as equações (2-45) e (2-46) usando a mesma malha intercalada, porém considerando-se apenas os pontos de velocidades. O ESG-El-V é construído aplicando-se apropriadamente operadores ESG nas derivadas de segunda ordem, como por exemplo (DI BARTOLO *et al.*, 2014):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial_x}\left(e\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i,j}^{k} \approx \frac{9}{8}\Bigg(& E_{i+\frac{1}{2},j}\left[\frac{9}{8}\left(\frac{V_{i+1,j}^k - V_{i,j}^k}{h^2}\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{V_{i+2,j}^k - V_{i-1,j}^k}{h^2}\right)\right] \\
& - E_{i-\frac{1}{2},j}\left[\frac{9}{8}\left(\frac{V_{i,j}^k - V_{i-1,j}^k}{h^2}\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{V_{i+1,j}^k - V_{i-2,j}^k}{h^2}\right)\right]\Bigg) \\
& - \frac{1}{24}\Bigg(E_{i+\frac{3}{2},j}\left[\frac{9}{8}\left(\frac{V_{i+2,j}^k - V_{i+1,j}^k}{h^2}\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{V_{i+3,j}^k - V_{i,j}^k}{h^2}\right)\right] \\
& - E_{i-\frac{3}{2},j}\left[\frac{9}{8}\left(\frac{V_{i-1,j}^k - V_{i-2,j}^k}{h^2}\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{V_{i,j}^k - V_{i-3,j}^k}{h^2}\right)\right]\Bigg),
\end{aligned}
\tag{2-47}
$$

onde E é a componente discreta do tensor elástico e V é a componente de velocidade discreta correspondente ao contínuo v. O esquema ESG-El resultante é uma extensão de quarta ordem da formulação apresentada em DI BARTOLO *et al.* (2013) e gera uma resposta equivalente ao SSG de quarta ordem, conforme apresentado em detalhes em DI BARTOLO *et al.*(2014).

Os operadores utilizados no esquema ESG-El-V possuem os mesmos *stencils* apresentados na Figura 2-4 (a) e (b), sendo os operadores de derivadas cruzadas utilizados somente no esquema elástico e não no acústico, apresentado anteriormente.

2.5 Aspectos Computacionais

Nesta seção, são discutidos os demais tópicos importantes computacionalmente relativos aos esquemas numéricos apresentados neste capítulo. Para tal, é necessária a especificação da fonte de geração da perturbação sísmica (fonte sísmica), além das condições de contorno e das condições iniciais utilizadas e, ainda, aspectos relativos à estabilidade numérica. Após isto, será possível iniciar a discussão a respeito dos acoplamentos entre esquemas numéricos ESG propostos e implementados nesse trabalho.

2.5.1 Fonte sísmica

Como será necessário comparar resultados provenientes de diferentes formulações numéricas, é importante tomar algumas precauções em relação à aplicação da fonte. Como foi visto nas equações de onda apresentadas, a fonte da equação da onda acústica possui uma forma distinta daquela do sistema de primeira ordem em pressão e velocidade (equação de campo duplo), sendo diferente também da fonte que aparece nas expressões do ESG. Neste trabalho, aplica-se sempre a fonte sísmica na camada acústica de água, na sub-região resolvida numericamente como o ESG-Ac-P, de forma que se necessita especificar apenas o parâmetro de injeção de massa, dado por

$$i_v = \frac{A}{2\pi(\pi f_c)^2} exp[-\pi(\pi f_c t_d)^2]\delta(\vec{x} - \vec{x}_f), \text{ para } 0 \leq t \leq t_M, \tag{2-48}$$

sendo nulo no restante do tempo, onde

$$f_c = \frac{f_{corte}}{3\sqrt{\pi}} \tag{2-49}$$

$$t_d = t - t_0 \tag{2-50}$$

$$t_0 = \frac{2\sqrt{\pi}}{f_{corte}}, \text{ e} \tag{2-51}$$

$$t_M = 2t_0 = \frac{4\sqrt{\pi}}{f_{corte}} \tag{2-52}$$

Na Figura 2-5, apresenta-se a forma desta fonte (a), bem como o seu espectro de Fourier (d), para uma fonte com amplitude *A = 1* e frequência de corte f_{corte}= *60 Hz*.

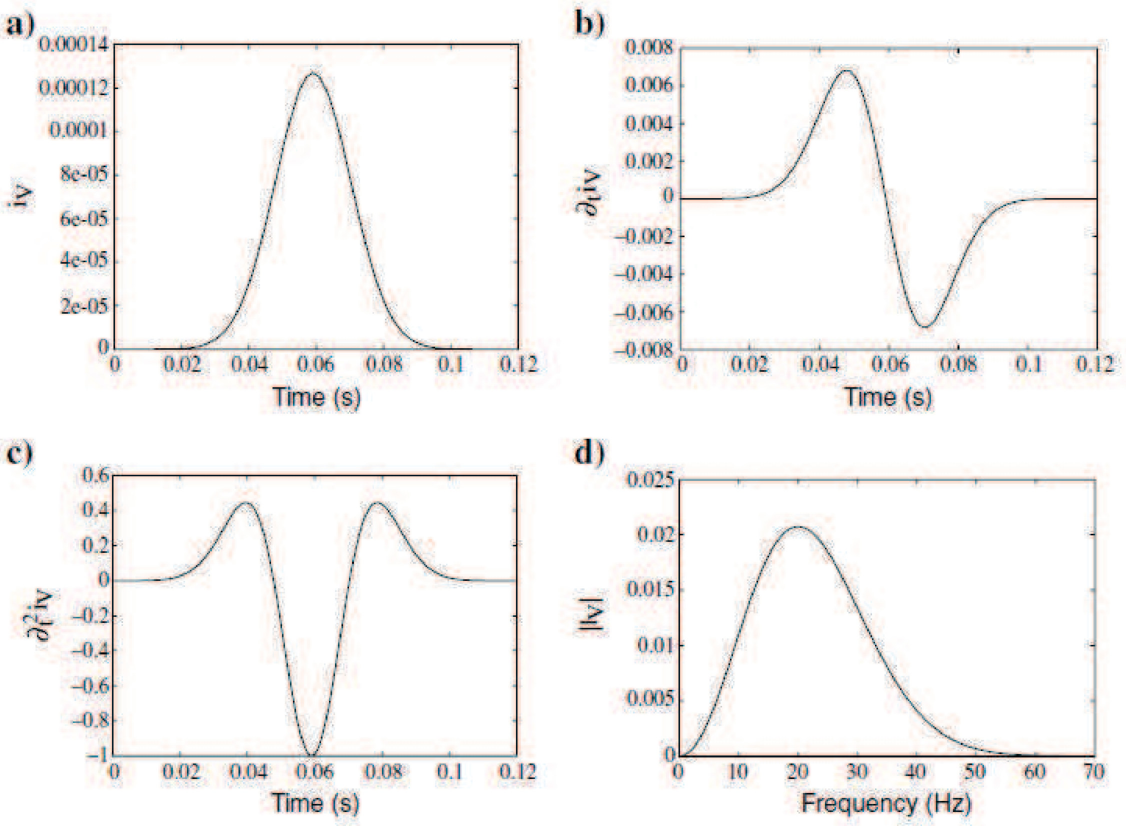


Figura 2-5: (a) Fonte sísmica utilizada; (b) derivada primeira parâmetro de injeção de massa; (c) derivada segunda parâmetro de injeção de massa; (d) Espectro de Fourier.

Assim, dependendo da formulação a ser considerada, utilizam-se expressões da derivada primeira ou da derivada segunda do parâmetro de injeção de massa (Figura 2-5(b) e (c)), respectivamente, para malha intercalada padrão e equivalente (ver equações (2-53) e (2-54)).

2.5.2 Condições de contorno e condições iniciais

Em relação às condições iniciais, nos problemas simulados neste trabalho necessita-se apenas de condições triviais. Desta forma, as condições iniciais adequadas são de campos iniciais nulos, bem como de derivada temporal nula, ou seja,

$$\vec{u}(\vec{x}, t = 0) = 0 \tag{2-53}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t = 0) = 0 \tag{2-54}$$

Em relação às condições de contorno, classicamente dois tipos são utilizadas, nomeadamente as condições essenciais (de Dirichlet), com valor do campo prescrito, e as condições naturais (de Neumann), com valor da derivada do campo prescrita. Neste trabalho, utiliza-se a condição essencial para a superfície do mar e condições de contorno não reflexivas (CCNR) para as demais bordas do modelo, uma vez que o domínio computacional deve ser truncado e está sendo simulado meios semi infinitos. Foi utilizada, então, a condição de contorno proposta em CERJAN *et al.* (1985), onde se define uma região na qual o campo de ondas é multiplicado por um fator de decaimento exponencial que reduz a amplitude da onda paulatinamente quando ela se aproxima da borda. Uma alternativa é o método conhecido na literatura como *Perfectly Matched Layer* (*PML*) de BERENGER (1994).

2.5.3 Estabilidade numérica

Os esquemas de campo único são equivalentes aos esquemas de campo duplo correspondentes (DI BARTOLO *et al.* 2012a, 2014). Desta forma, tais esquemas possuem as mesmas propriedades de estabilidade e dispersão numérica, como amplamente discutido na literatura.

A análise de von Neumann (válida, a princípio, apenas para um meio infinito e homogêneo) fornece os seguintes resultados de estabilidade para a malha intercalada padrão de Virieux com aproximação de segunda ordem no espaço e no tempo no caso 2D (VIRIEUX, 1986):

$$c_p \frac{\Delta t}{\mathrm{h}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2-55}$$

De forma geral, o critério de estabilidade de esquemas que utilizam a malha de Virieux, em qualquer (*2n*)-ésima ordem de aproximação espacial, pode ser escrito como (SAENGER *et al.*, 2000):

$$c_p \frac{\Delta t}{\mathrm{h}} \leq \left(\sqrt{N} \sum_{i=1}^{n} d_i \right)^{-1}, \tag{2-56}$$

onde N é a dimensão do espaço e d_i são os coeficientes da aproximação espacial de diferenças finitas que, no caso do operador de 4ª ordem de Levander, são $d_1 = 9/8$ e $d_2 = 1/24$, coeficientes estes que vem da expansão em série de Taylor para obter os operadores.

Um problema que pode ocorrer nas soluções numéricas, em virtude da discretização das equações, mesmo quando todos os critérios acima são satisfeitos, é chamado de dispersão numérica. Pode ocorrer também a chamada anisotropia numérica. Neste sentido, no caso de meios não dispersivos e isotrópicos, as velocidades de fase e de grupo coincidem (GRAFF, 1991) e são independentes da frequência e do ângulo de propagação. Porém, quando as equações de propagação são solucionadas com o MDF, as velocidades de propagação passam a depender dos parâmetros numéricos. Assim, estes erros numéricos necessitam ser controlados para que a solução numérica seja aceitável.

Análises amplamente conhecidas na área mostram que para que as respostas apresentem estabilidade e baixa dispersão numérica, devem ser utilizados critérios práticos para os parâmetros numéricos, conforme discutido a seguir.

Para evitar que a solução numérica apresente o problema artificial de dispersão,ou seja, a dispersão numérica, o critério utilizado é o seguinte

$$\mathrm{h} \leq \frac{c_{min}}{\alpha f_{corte}}, \qquad (2\text{-}57)$$

onde h é espaçamento da malha, f_{corte} é a frequência de corte da fonte, isto é, a frequência máxima presente na fonte, c_{min} é a velocidade mínima presente no modelo de velocidades e é um parâmetro que varia de acordo com a aproximação numérica utilizada, e α é parâmetro que representa o número de pontos discretos por comprimento de onda, onde se considera o menor comprimento de onda, referente à menor velocidade presente no meio.

Conforme ALFORD *et al.* (1974) e VIRIEUX (1986), em esquemas de diferenças finitas utilizando operador de segunda ordem no tempo, deve-se utilizar valores próximos a $\alpha = 10$ para garantir que não haja dispersão numérica no caso de se utilizar operadores de segunda ordem no espaço, enquanto que, utilizando-se a quarta ordem no espaço, $\alpha = 5$ já é suficiente. Enfatiza-se que isto vai depender do esquema numérico considerado, mas funciona muito bem para os esquemas de malha intercalada utilizados neste trabalho.

No caso da estabilidade, o critério prático utilizado é o seguinte:

$$\Delta t \leq \frac{h}{\beta c_{max}}, \qquad (2\text{-}58)$$

onde t é o intervalo de tempo, h é espaçamento da malha, c_{max} é a velocidade máxima presente no modelo de velocidades e β é um parâmetro obtido de forma empírica. A relação acima é conhecida como critério de *Courant-Friedrich-Levy* (COURANT *et al.*, 1967). Tal critério expressa a necessidade do intervalo de tempo considerado ter que ser menor que o tempo que a onda leva pra atravessar uma célula de diferenças finitas (considerando-se a maior velocidade presente no meio).

Valores de $\beta = 4$ são suficientes para garantir a estabilidade da resposta numérica com elevado grau de precisão (BULCÃO, 2004).

3 ACOPLAMENTO DE FORMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, serão apresentadas as propostas de acoplamentos de formulações numéricas implementadas neste trabalho. Enfatiza-se que a linha de pesquisa de acoplamento entre formulações numéricas é bastante extensa e que as formulações mostradas aqui são propostas bastante específicas, relativas ao acoplamento entre esquemas ESG, originalmente proposta pelo grupo de modelagem numérica do LAMEMO e apresentada em DI BARTOLO *et al.* (2012b). Trata-se de um acoplamento explícito entre esquemas equivalentes de malha intercalada utilizando-se a técnica de sobreposição de domínios. O principal objetivo é desenvolver um acoplamento que utilize a menor quantidade de recursos computacionais possíveis, mantendo a estabilidade numérica e a precisão da malha intercalada.

Portanto, aqui serão apresentados detalhes a respeito dos acoplamentos acústico-elástico desenvolvidos e implementados nesse trabalho. Como mencionado anteriormente, o algoritmo final de acoplamento – a proposta desenvolvida e originalmente e implementada neste trabalho – será baseado em juntar o algoritmo usado para o acoplamento entre ESG-Ac-P e SSG-El (DI BARTOLO *et al.* 2012b) com o acoplamento entre o SSG-El e ESG-El-V. Para fins de simplicidade, o fundo oceânico (interface acústico-elástica) será considerado horizontal e serão usados operadores espaciais de quarta ordem em 2D.

Antes de detalhar a parte do acoplamento SSG-El/ESG-El-V, originalmente proposta e implementada nesta tese, será feita uma revisão da estratégia de acoplamento do ESG-Ac-P com SSG-El, apresentado em detalhes em DI BARTOLO *et al.* (2012b).

3.1 Acoplamento da formulação ESG-Ac-P com SSG-El

O primeiro acoplamento implementado neste trabalho tem por base o apresentado em DI BARTOLO *et al.* (2012b), onde se aplica o esquema ESG-Ac-P para a camada de água e o SSG elástico para a camada de rocha, com o objetivo de gerar um esquema numérico equivalente ao esquema SSG elástico, porém com vantagens computacionais. A implementação de tal acoplamento é simples e o algoritmo resultante é muito eficiente computacionalmente, combinando a técnica do acoplamento explícito direto com a de sobreposição de domínios. No acoplamento explícito direto, a marcha no tempo é explícita e não necessita de processo iterativo entre subdomínios, daí essa técnica ser rápida, embora condicionalmente estável, assim como os esquemas de diferenças finitas originais, no caso o ESG-Ac-P e o SSG-El.

O acoplamento ora apresentado é vantajoso uma vez que suas propriedades de precisão e estabilidade são iguais às do esquema SSG, porém com menor gasto de memória e recursos computacionais.

Inicialmente, após a implementação isolada dos esquemas apresentados anteriormente, foi implementado o acoplamento entre o esquema SSG-Ac e ESG-Ac-P, ambos com 2ª ordem de precisão, ou seja, o acoplamento mais simples possível. Em seguida, deu-se início à implementação do acoplamento sugerido por DI BARTOLO *et al.* (2012b), com a utilização dos métodos ESG acústico e SSG elástico (ESG-Ac-P/SSG-El), primeiro com precisão de 2ª ordem e depois de 4ª ordem.

Para a realização do acoplamento ESG-Ac-P/SSG-El, o modelo físico deve ser dividido em duas sub-regiões: uma acústica e outra elástica. Com isso, podem ser aplicados os esquemas ESG-Ac-P e SSG-El de forma isolada em cada respectiva sub-região. A zona de acoplamento não será no ponto de profundidade K_0 (ponto onde o meio se torna elástico, como mostrado na Figura 3-1), uma vez que se deve atentar para o *stencil* espacial das formulações e para as informações que serão trocadas entre os esquemas – técnica da sobreposição de domínio e, por isso, o acoplamento não se resume em aplicar um método até a profundidade determinada e outro método daquela profundidade em diante, sendo necessário trocar informações entre as duas sub-regiões para que os operadores de diferenças finitas possam ser calculados (em virtude de seu *stencil*), conforme será detalhado posteriormente.

Uma das características fundamentais do acoplamento é a marcha no tempo. O método SSG é intercalado no tempo, ou seja, para o cálculo da velocidade em um tempo $n+1/2$, são necessários os valores das tensões (pressões no caso acústico) no tempo anterior (n), além da velocidade naquela mesma posição da malha no passo anterior ($n-1/2$). O mesmo vale para o cálculo das tensões, onde são utilizados os dados das velocidades no passo anterior e da própria tensão no passo mais anterior, considerada no mesmo ponto espacial. O avanço no tempo no esquema SSG é realizado, então, marchando-se ½ Δt em velocidade e depois mais ½ Δt em pressão. No esquema ESG-Ac-P, a malha não é intercalada no tempo, sendo a marcha realizada em $1\Delta t$ direto em pressão. Além disso, o *stencil* espacial de cada esquema define o tamanho da camada de sobreposição de pontos auxiliares, já que haverá a necessidade da troca de informações entre eles. Apenas informações de pressão será trocada entre as sub-regiões, onde se incluem algumas componentes da velocidade próximas à interface entre o meio acústico e elástico apenas para possibilitar o cálculo das tensões (pressões, dado que estão na parte acústica) necessárias, como mostrado na Figura 3-1. Nesta figura, os triângulos vermelhos são copiados para os triângulos verdes, para o caso de operadores espaciais de quarta ordem.

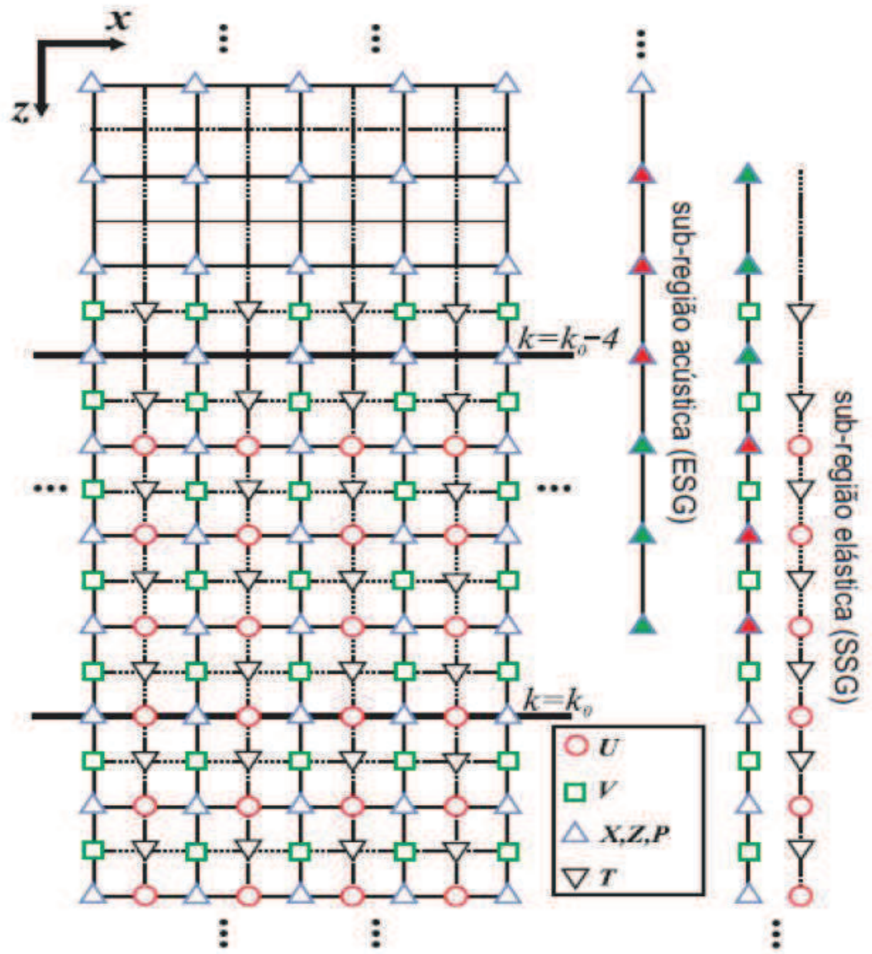


Figura 3-1: Acoplamento ESG-Ac-P/SSG-El (DI BARTOLO *et al.,* 2012b) - Representação das trocas de informações entre as sub-regiões sendo os pontos preenchidos em vermelho copiados para aqueles preenchidos em verde.

As trocas de informações são feitas da seguinte maneira: o esquema ESG-Ac-P é aplicado até a profundidade K_0-*4*, no passo de tempo *n+1*. Para calcularmos a pressão nesse ponto, temos que possuir 3 pressões acústicas dos pontos K_0-*3* a K_0-*1* (pois o *stencil* do ESG possui três pontos para cada lado) no passo de tempo *n*. Essas 3 pressões são calculadas na área elástica e, por isso, tais informações devem ser passadas para a sub-região acústica de forma a passar a informação da sub-região elástica para a acústica, tornando possível o cálculo das pressões no último ponto da malha.

No caso da sub-região elástica, devem-se transferir as pressões calculadas nos pontos K_0-*4*, K_0-*5* e K_0-*6* no passo de tempo *n* para possibilitar o cálculo das velocidades no tempo *n+1/2* e profundidade a partir de K_0-*9/2* pelo esquema SSG-El. Com isso, temos todos os dados necessários para a aplicação dos dois esquemas em cada sub-região.

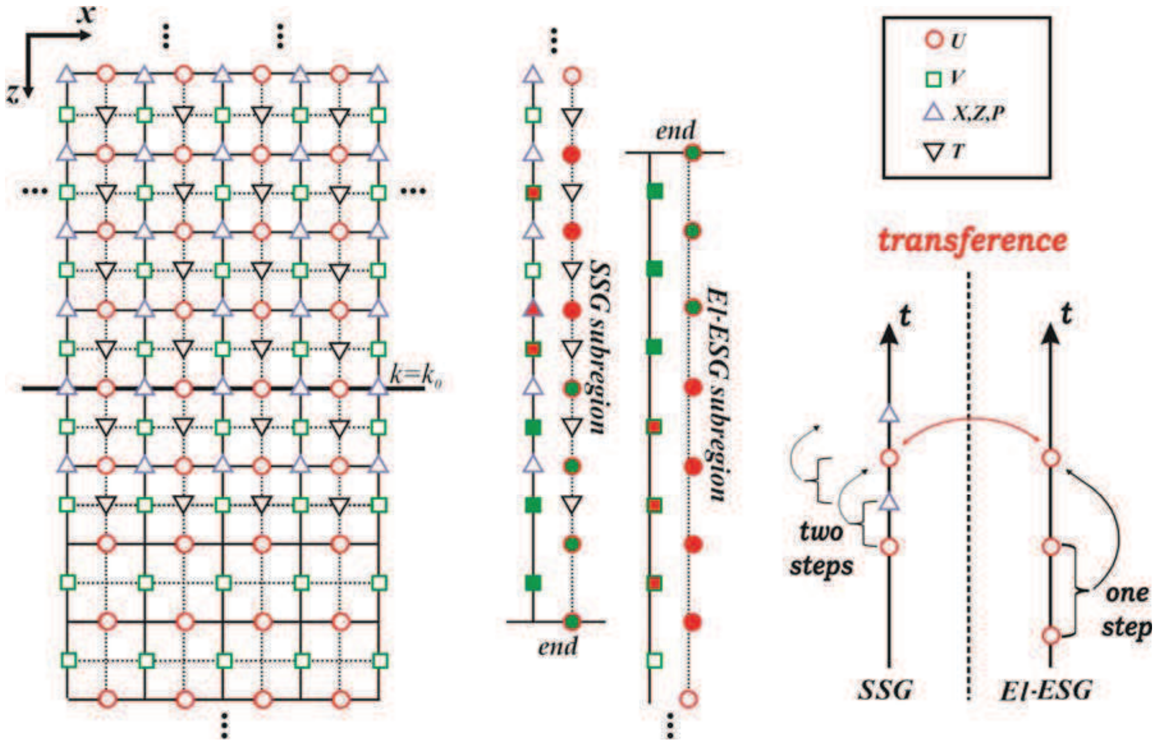
O esquema de acoplamento resultante é equivalente ao cálculo utilizando o SSG-El em todo o modelo, porém com menor utilização de memória computacional, conforme mostrado em DI BARTOLO *et al,* (2012b).

3.2 Acoplamento da formulação SSG-El com ESG-El-V

Neste acoplamento, o procedimento da marcha no tempo do esquema SSG-El é similar ao explicado no tópico anterior. No caso do esquema ESG-El-V, por não possuir intercalamento no tempo (há apenas índices inteiros de tempo fazendo-se, por exemplo, *n-1/2*→*n*), as componentes de velocidade em *n+1/2* são computadas diretamente com as velocidades calculadas no passo de tempo anterior *n-1/2* e mais uma velocidade no tempo *n-3/2*.

Adotando-se o mesmo incremento de tempo para o SSG-El e o ESG-El-V, o algoritmo de marcha no tempo acoplado consiste em avançar um passo de tempo para computar as velocidades em cada sub-região, atualizando as velocidades na zona de sobreposição entre as duas sub-regiões (Figura 3-2) e, então, calcular as componentes de tensão na sub-região do SSG. O tamanho da camada de pontos auxiliares para cálculo em cada sub-região necessário para transferir velocidades entre subdomínios, é proporcional ao *stencil* dos operadores espaciais envolvidos, de forma similar ao discutido no acoplamento anterior, como será mostrado a seguir.

Para cobrir o *stencil* de cada região, é necessário estender cada sub-região de forma a cobrir tal *stencil*, conforme pode ser verificado na Figura 3-2. Depois de marchar as velocidades em cada sub-região, devem-se transferir, entre as sub-regiões (ver Figura 3-2), as velocidades necessárias para o cálculo das tensões no passo de tempo seguinte, assim como para cálculo das velocidades no próximo passo de tempo.



(a) (b) (c)

Figura 3-2: Acoplamento SSG-El/ESG-El-V: (a) sobreposição das sub-regiões; (b) pontos de transferência das sub-regiões. Os pontos preenchidos em vermelho são copiados para aqueles preenchidos em verde; (c) marcha do tempo no acoplamento.

De forma mais detalhada, na marcha do tempo, assumindo que todas as componentes de tensão são conhecidas no tempo n e as componentes de velocidade são conhecidas em n-$1/2$ e n-$3/2$, primeiro calcula-se as componentes de velocidade em $n+1/2$ nas sub-regiões cobertas pelo SSG e pelo ESG-El. Após, é necessário transferir alguns pontos de velocidade que acabaram de ser calculados entre as sub-regiões. As velocidades entre as profundidades $k=k_0$ até $k=k_0+3$, calculadas na sub-região ESG-El-V, são copiadas para a sub-região SSG-El, assim como as componentes de velocidade calculadas entre as profundidades $k=k_0-3$ e $k=k_0-1/2$, calculadas na sub-região SSG-El devem ser transferidas para a sub-região ESG-El-V. Após todas as transferências das velocidades, na região SSG-El, as componentes de tensão até a profundidade $k=k_0+3/2$ são computadas no tempo $n+1$ e, em ESG-El-V, as componentes de velocidade são computadas da profundidade $k=k_0$ até a profundidade final do modelo no passo de tempo $n+1/2$. Todo o processo é repetido até o término do *loop* do tempo.

3.3 Acoplamento final entre os esquemas ESG-Ac-P, SSG-El e ESG-El-V

Como dito anteriormente, o acoplamento entre os esquemas ESG-Ac-P e ESG-El-V é realizado aplicando-se conjuntamente os acoplamentos descritos anteriormente nas seções 3.1 e 3.2. Uma vez que o grande interesse desse tipo de algoritmo é o menor dispêndio de memória possível, a sub-região SSG deve ser a menor possível, avançando sobre a região acústica e elástica apenas em alguns pontos.

Assim, o acoplamento proposto segue os seguintes passos: cálculo das velocidades nas sub-regiões SSG e ESG-El no passo de tempo $n+1/2$, transferência dos valores das velocidades entre as sobreposições dessas sub-regiões, cálculo das tensões nas sub-regiões ESG-Ac e SSG, transferência dos valores das tensões entre as sobreposições dessas sub-regiões, passar para o próximo passo de tempo. Na Figura 3-3 é mostrado, de forma geral, como é realizada a sobreposição das sub-regiões.

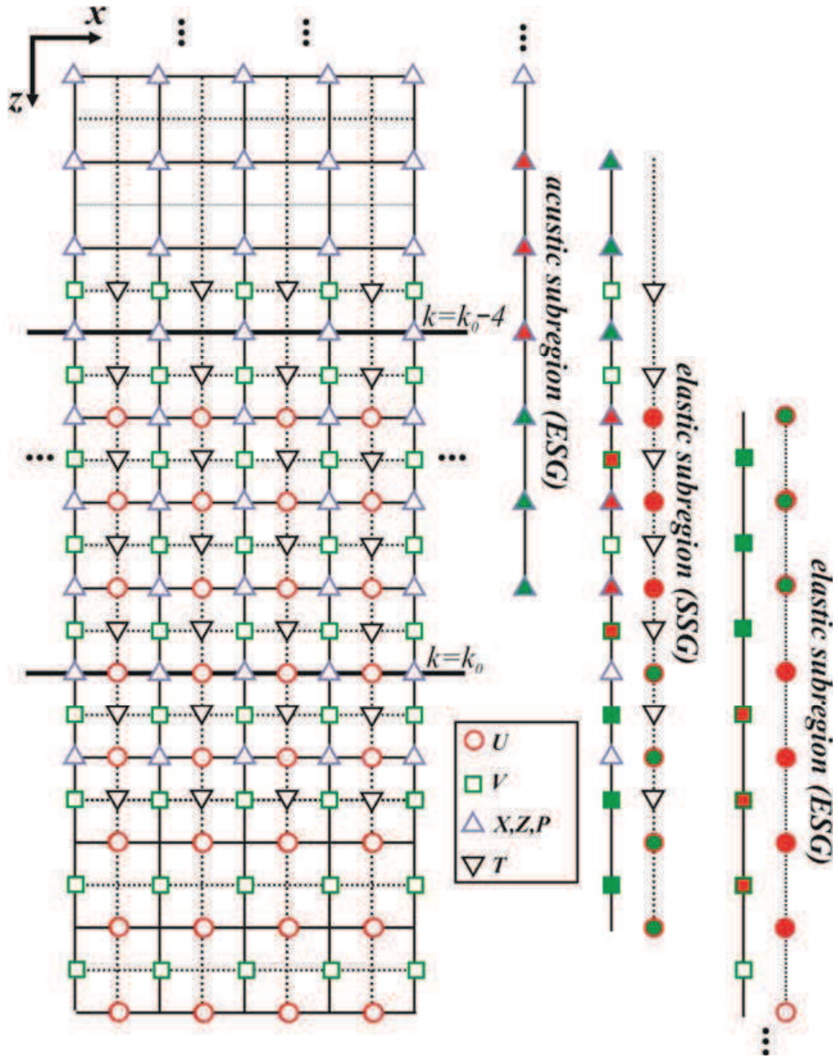


Figura 3-3: Acoplamento ESG-Ac-P/SSG-El/ESG-El-V - Representação das trocas de informações entre as sub-regiões. Os pontos preenchidos em vermelho são copiados para aqueles preenchidos em verde.

Este procedimento de acoplamento tem por objetivo gerar um esquema numérico equivalente ao esquema SSG-El, porém com vantagens computacionais. A implementação de tal acoplamento é simples e eficiente, combinando a técnica do acoplamento explícito direto com a sobreposição de domínios. No acoplamento explícito direto, a marcha no tempo é explícita e não necessita de processo iterativo entre subdomínios, daí essa técnica ser rápida e condicionalmente estável, assim como os esquemas de diferenças finitas originais, no caso o ESG e o SSG.

4 EXEMPLOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, serão apresentados exemplos de aplicação do algoritmo de acoplamento implementado, bem como a comparação com os resultados obtidos quando aplicado apenas o esquema SSG-El em todo o modelo. Em seguida, será mostrada discussão a respeito dos ganhos computacionais obtidos pelo acoplamento proposto em comparação com os esquemas SSG-El, ESG-Ac-P e ESG-El-V aplicados isoladamente.

4.1 Exemplo 1 – Modelo com três camadas

Para fins de demonstração da equivalência entre o esquema de acoplamento proposto e o SSG-El, primeiro foi utilizado um modelo de três camadas simples, mostrado na Figura 4-1, tendo sido utilizados parâmetros numéricos conforme dado na Tabela 4-1.

Na camada superior, foram adotados os seguintes valores para as propriedades de meio: V_p = *1.500 m/s*, V_s = *0* e $\rho = 1.000\ Kg/m^3$. Para a camada intermediária, V_p = *2.000 m/s*, V_s = *1.200 m/s* e $\rho = 2.000\ Kg/m^3$. Finalmente, para a camada inferior, V_p = *2.500 m/s*, V_s = *1.700 m/s* e $\rho = 2.300\ Kg/m^3$. Considerando-se os parâmetros numéricos utilizados, a profundidade total e a largura do modelo foram 1.500 m e o tempo total de análise de 2,5 s.

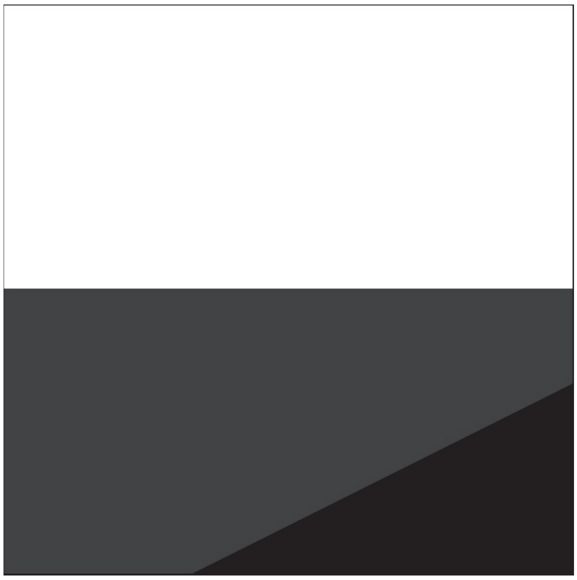


Figura 4-1: Modelo de três camadas utilizado.

Parâmetro	Valor	Significado
Δt	2,5 x 10^{-4} s	Incremento temporal na marcha
h	2,5 m	Espaçamento da malha
f_c	60 Hz	Frequência de corte da fonte sísmica
N_x	601	Número de pontos na malha na direção x
N_z	601	Número de pontos na malha na direção z
N_{total}	10000	Número total de passos de tempo
i_{xf}, i_{zf}	301, 101	Posição da fonte nas direções x e z

Tabela 4-1: parâmetros utilizados no exemplo 1.

Para ilustrar a propagação da onda, são mostrados os instantâneos (*snapshots*) da modelagem com o esquema SSG (Figura 4-2), em quarta ordem de aproximação no espaço e segunda ordem no tempo, para a componente τ_{zz} do campo de tensões. É importante notar que os instantâneos para o acoplamento proposto entre ESG-Ac-P e ESG-El-V são indistinguíveis dos mostrados na figura, desde que se convertam as velocidades na parte elástica em tensões. Esta equivalência será demonstrada através dos sismogramas sintéticos obtidos para este exemplo.

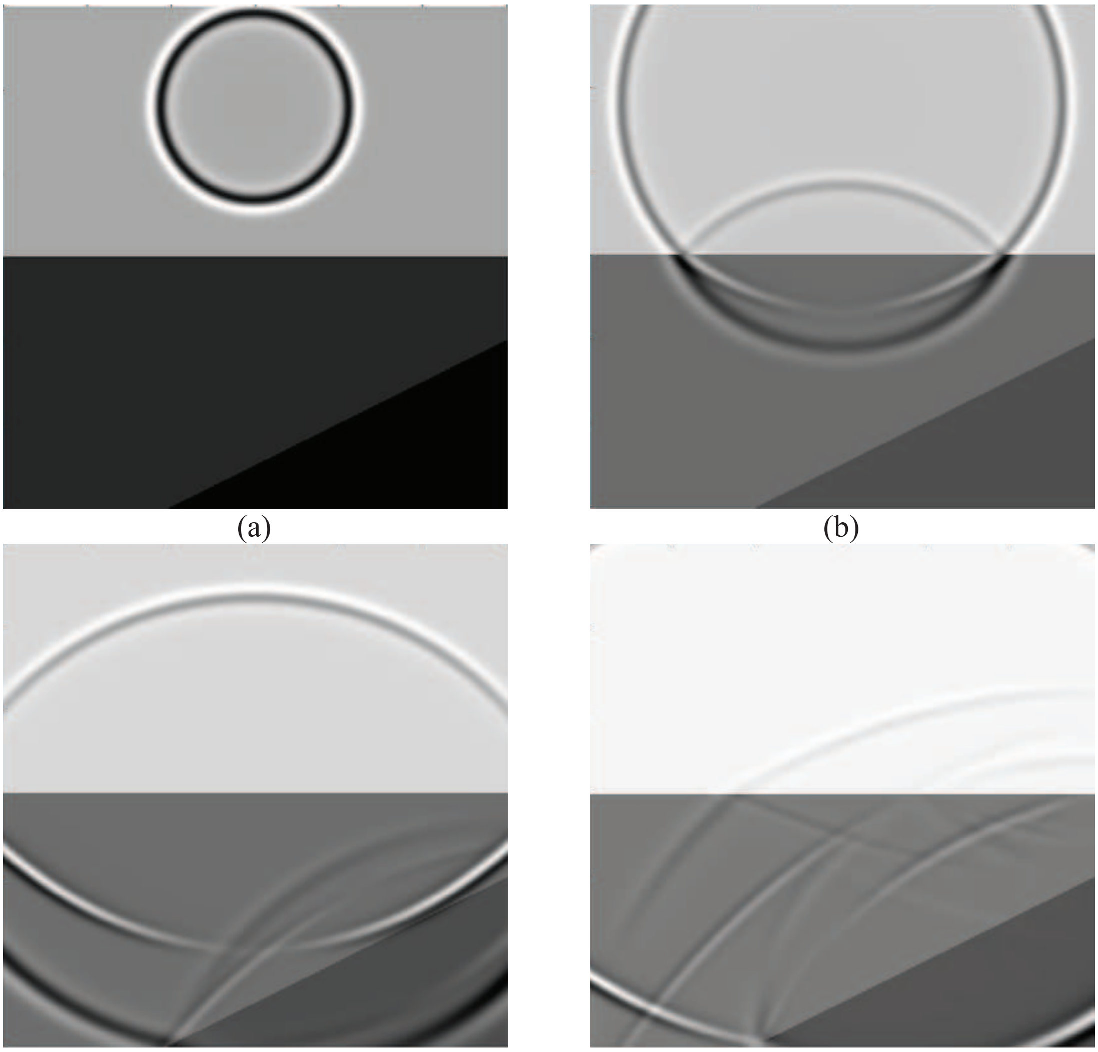
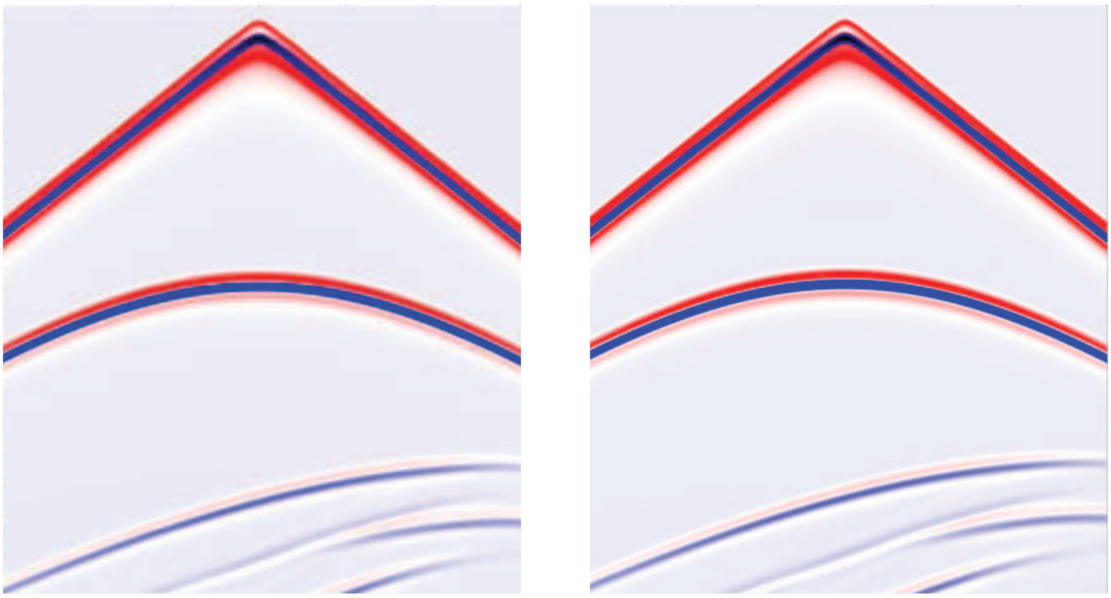

(a) (b) (c) (d)

Figura 4-2: Instantâneos obtidos com a aplicação do esquema de SSG-El no modelo de três camadas: (a) t= 0,25 s, (b) t = 0,50 s, (c) t =0,75 s e (d) t = 1,00 s.

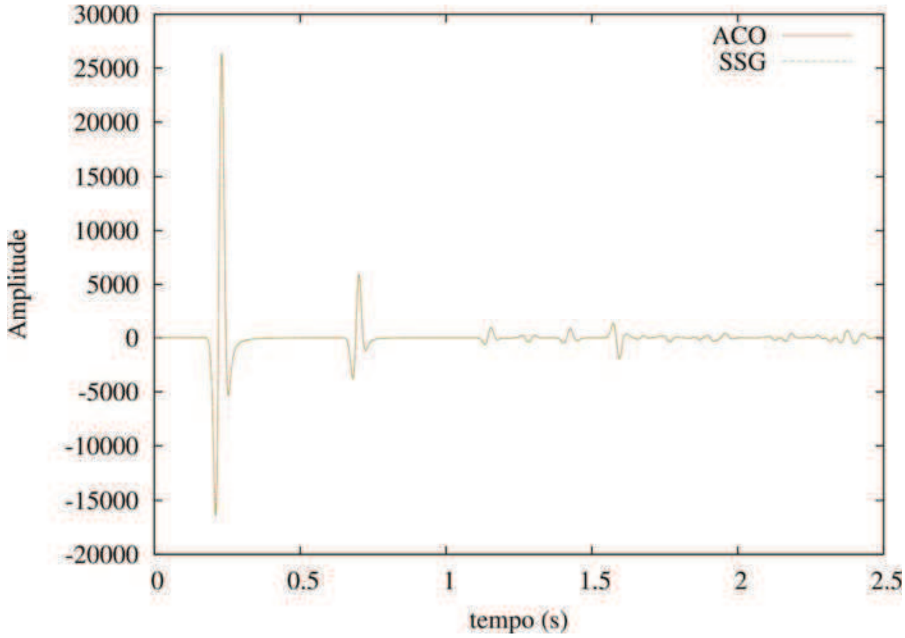
Na Figura 4-3 são mostrados os sismogramas gerados utilizando-se o esquema SSG-El (a) e o acoplamento ESG-Ac-P/SSG-El/ESG-El-V (b). Foram colocados lado a lado de forma a facilitar a comparação. Como se pode observar, ambos os esquemas aplicados ao modelo geraram resposta indistinguíveis, conforme o esperado.



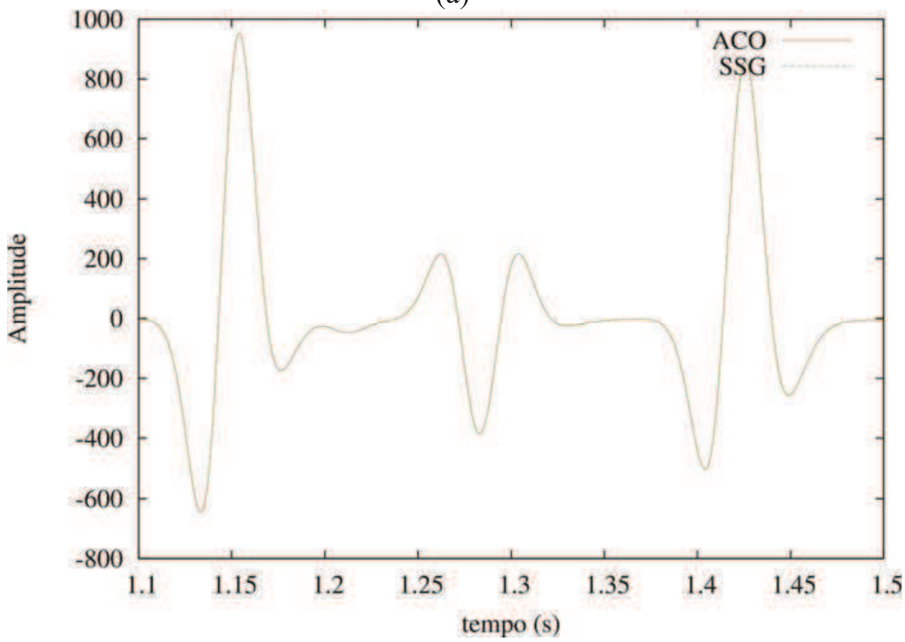
(a) (b)

Figura 4-3: Sismogramas obtidos pela aplicação do esquema SSG-El (a) e acoplamento ESG-Ac-P /SSG-El/ESG-El-V (b).

A seguir (Figura 4-4 (a)), para facilitar a comparação quantitativa entre os resultados, são mostrados os resultados provenientes das modelagens utilizando-se os esquemas SSG-El e o acoplamento ESG-Ac-P/SSG-El/ESG-El-V, através de um traço isolado do sismograma na posição de 1.000 m, o que significa um afastamento da fonte de 750 m. Como esperado, os resultados são coincidentes, quando comparados os dois esquemas. A ampliação do gráfico (Figura 4-4 (b)) mostra, de forma mais clara, a equivalência das modelagens.



(a)



(b)

Figura 4-4: Traço em *z=1.000 m* comparação entre esquemas (a). Detalhe do traço (b).

Na Tabela 4-2 estão as coordenadas de um ponto presente na Figura 4-4, obtidas pelo esquema SSG-El e pelo Acoplamento. Pode-se observar que a diferença entre os esquemas apresentados são da ordem 0,05%, demonstrando a equivalência entre eles.

Esquema	Tempo	Amplitude
SSG-El	1,250000	71,15335
ESG-Ac-P/SSG-El/ESG-El-V	1,250000	71,11758

Tabela 4-2: Comparação entre esquemas.

4.2 Exemplo 2 – Marmousi 2

Outro modelo utilizado para a verificação de equivalência entre o esquema de acoplamento proposto e o SSG-El é o chamado Marmousi 2 (MARTIN *et al.*, 2006). Trata-se de um modelo heterogêneo complexo, que é composto originalmente por 13601x2801 pontos, possuindo painéis com valores de densidade e velocidades de onda *P* e *S*. No presente exemplo, a camada de água foi estendida 1000 pontos para acima, de forma que o modelo componha cerca de 35% de água. A Figura 4-5 mostra os dados relativos à velocidade V_p do modelo utilizado neste exemplo. Os dados referentes à ρ e V_s possuem aspecto similar a V_p. Na Tabela 4-3 são mostrados os parâmetros numéricos utilizados nesse exemplo.

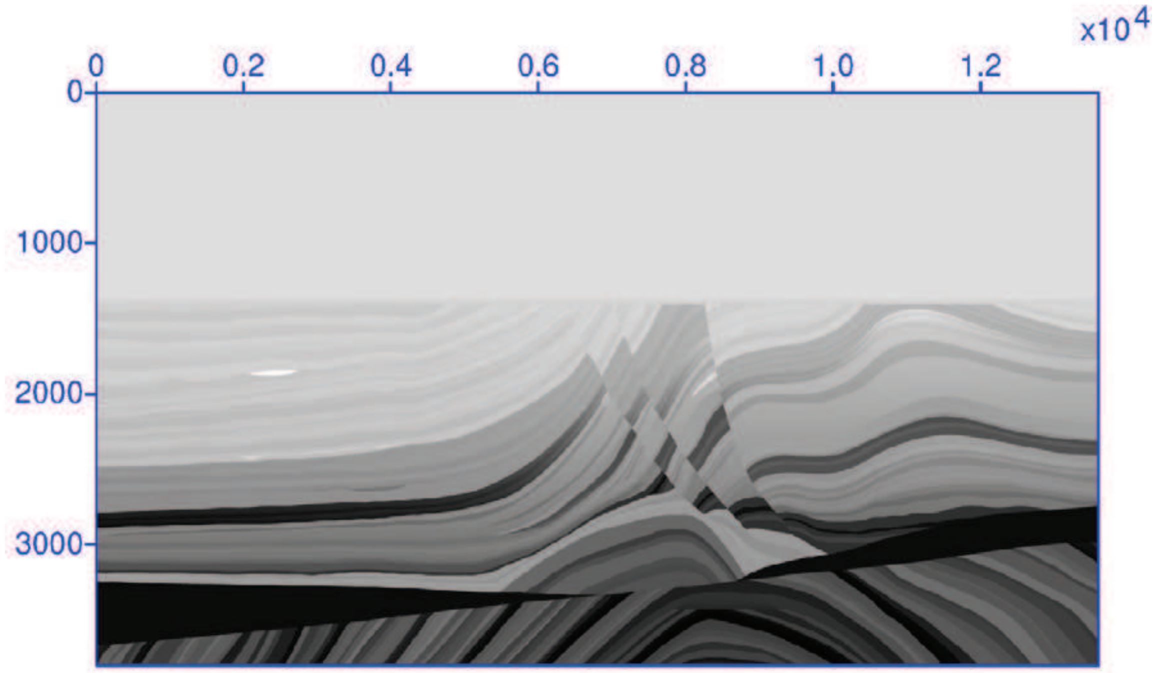


Figura 4-5: Modelo de Marmousi 2 – V_p.

Parâmetro	Valor	Significado
Δt	2,5 x 10^{-4} s	Incremento temporal na marcha
h	2,5 m	Espaçamento da malha
f_c	60 Hz	Frequência de corte da fonte sísmica
N_x	13601	Número de pontos na malha na direção x
N_z	3801	Número de pontos na malha na direção z
N_{total}	10000	Número total de passos de tempo
i_{xf}, i_{zf}	1500, 1200	Posição da fonte nas direções x e z
K_0	1350 m	Profundidade de acoplamento

Tabela 4-3: parâmetros utilizados no exemplo 2.

Neste exemplo, foi rodado apenas um único tiro posicionado conforme indicado na Tabela 4-3. Na Figura 4-6, são mostrados os instantâneos (*snapshots*) da componente τ_{zz} do campo de tensões, para a modelagem com o esquema SSG. Nestes instantâneos, apenas a região próxima à fonte é mostrada para facilitar a visualização.

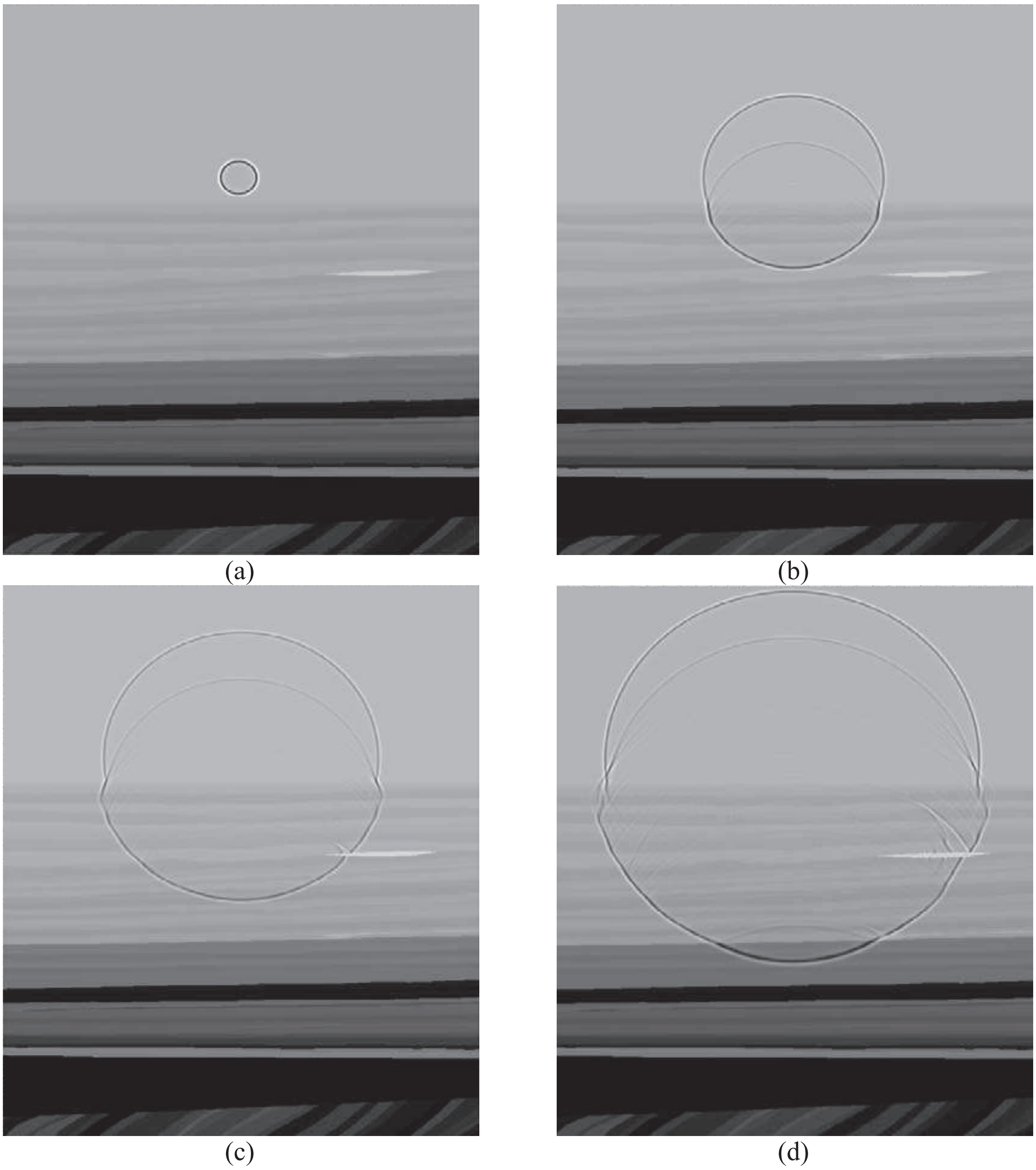
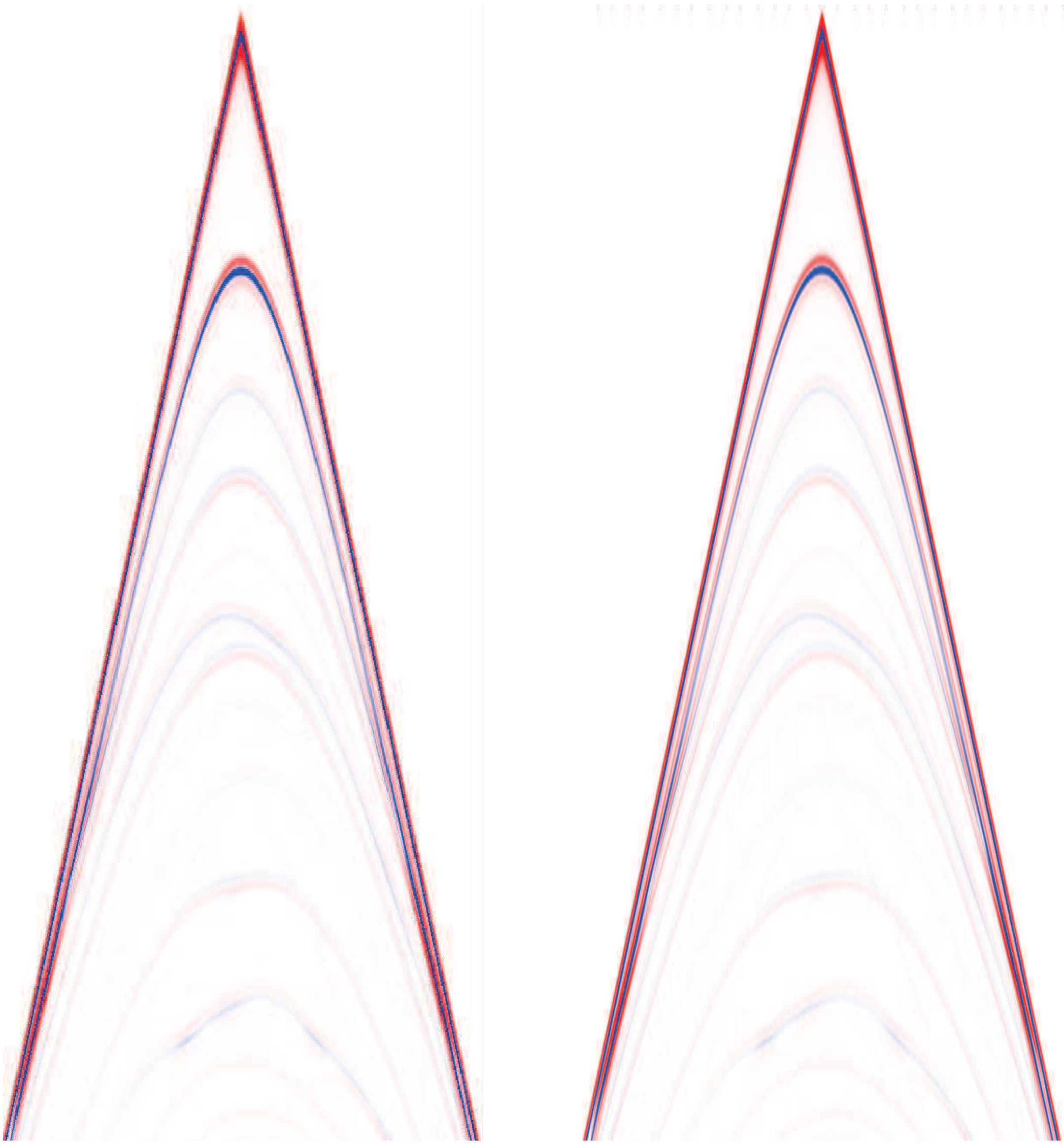


Figura 4-6: Instantâneos obtidos com a aplicação do esquema SSG-El no modelo Marmousi 2: (a) t= 0,25 s, (b) t = 1,00 s, (c) t =1,50 s e (d) t = 2,00 s.

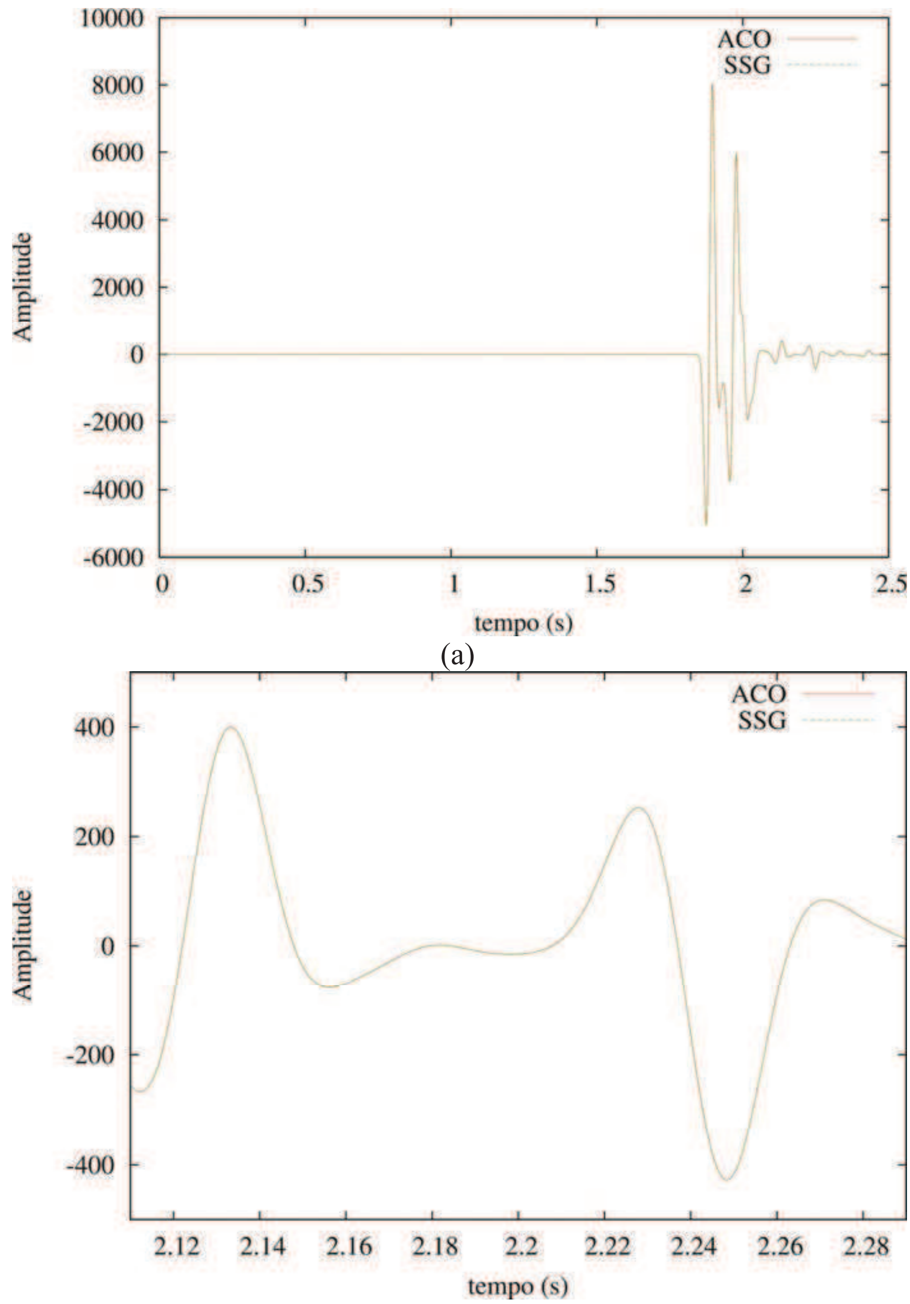
Na Figura 4-7, são mostrados os sismogramas gerados utilizando-se o esquema SSG-El (a) e o acoplamento ESG-Ac-P/SSG-El/ESG-El-V (b). Foram colocados lado a lado de forma a facilitar a comparação. Pode-se observar que ambos os esquemas aplicados ao modelo geraram resposta equivalente, conforme o esperado.



(a) (b)

Figura 4-7: Sismogramas obtidos pela aplicação do esquema SSG-El (a) e acoplamento ESG-Ac-p/SSG-El/ESG-El-V (b).

A seguir (Figura 4-8 (a)), são mostrados, de forma comparativa, os resultados provenientes das modelagens utilizando-se os esquemas SSG-El e o acoplamento ESG-Ac-P/SSG-El/ESG-El-V, através de traço do sismograma na posição de 1.000 m, o que significa um afastamento da fonte de 2.000m. Os resultados são coincidentes, quando comparados os dois esquemas. A ampliação do gráfico (Figura 4-8 (b)) mostra, de forma mais clara, a equivalência das modelagens.



(b)

Figura 4-8: Traço em *z=1.000 m* comparação entre esquemas (a). Detalhe do traço (b).

Na Tabela 4-4 estão as coordenadas de um ponto presente na Figura 4-8, obtidas pelo esquema SSG-El e pelo Acoplamento. Pode-se observar que a diferença entre os esquemas apresentados são da ordem 0,05%, demonstrando a equivalência entre eles.

Esquema	Tempo	Amplitude
SSG-El	2,13325	399,9073
ESG-Ac-P/SSG-El/ESG-El-V	2,13325	399,7063

Tabela 4-4: Comparação entre esquemas.

4.3 Discussão a respeito do rendimento computacional

A Tabela 4-5 mostra os recursos de memória necessários, ou seja, o número de painéis armazenados em cada esquema para realização da marcha no tempo, assim como o número de operações por nó e passo de tempo: M_f representa o número de painéis de campos de propagação que necessitam ser armazenados, similarmente, M_p é o número de painéis de parâmetros (propriedades do meio), M_t é a soma de M_f e M_p; *NOp* é o número total de operações (número de produtos mais somas) por nó e por passo de tempo e $\%M_t$ e *%NOp* são os respectivos percentuais em relação ao esquema SSG aplicado à malha inteira. O número de operações é contado utilizando-se as expressões brutas dos operadores de diferenças finitas, sem qualquer preocupação com otimização das expressões. Para os acoplamentos, os valores foram estimados considerando um modelo composto por 35% de água. Assim, para a geração de tal tabela, foi considerado, inicialmente, a aplicação dos esquemas SSG-El e ESG-Ac-P em todo o modelo (itens 1 e 2). A seguir, foi considerado o acoplamento SSG-El com ESG-Ac-P, chamado de Acopla 1 (item 3). Tais valores foram obtidos aplicando-se média ponderada com os pesos de 35% para o ESG-Ac-P e 65% para o SSG-El. No item 4, foi aplicado o esquema ESG-El-V em todo o modelo. Finalmente, no item 5, tem-se os resultados da aplicação do acoplamento entre ESG-Ac-P e ESG-El-V, chamado de Acopla 2, adotando-se na média ponderada os pesos de 35% para o esquema ESG-Ac-P e 65% para o ESG-El-V.

Item	Esquema	M_f	M_p	M_t	NOp	$\%M_t$	%NOp
1	SSG-El	5	3	8	104	-	-
2	ESG-Ac-P	2	1	3	24	37	23
3	Acopla 1	3,95	2,3	6,25	76	78	73
4	ESG-El-V	4	3	7	244	87	235
5	Acopla 2	3,3	2,3	5,6	167	70	160

Tabela 4-5: Comparação de rendimento entre os esquemas SSG-El, ESG-Ac-P, ESG-El-V, Acopla 1 e Acopla 2.

A Tabela 4-5 mostra claramente a vantagem em termos de dispêndio de memória, para os dois acoplamentos implementados. No primeiro acoplamento, além de gastar menos memória (78% da memória do SSG), o esquema acoplado também possui vantagens em relação ao custo computacional, gastando tipicamente apenas 73% do tempo utilizado no esquema de malha intercalada tradicional (SSG). Logicamente, quanto maior a quantidade de água presente no modelo, melhores serão estes percentuais. No caso do segundo acoplamento, tem-se o esquema mais vantajoso em termos de dispêndio de memória possível, sendo gasto 70% da memória gasta se aplicado o SSG em todo o modelo. Em relação ao custo computacional, o segundo acoplamento é claramente mais caro, embora uma programação cuidadosa possa reduzir as diferenças mostradas na tabela, uma vez que há diversos termos similares nas expressões brutas do esquema ESG-El-V que podem ser agrupados.

É importante mencionar que em diversas aplicações, como é o caso da modelagem sísmica aplicada a petróleo (e suas diversas aplicações), a questão da memória é de suma importância, uma vez que as malhas utilizadas contêm milhares de pontos, o que se torna mais importante ainda no caso tridimensional. Neste caso, a ordem de economia de memória pode chegar a gigabytes, tornando-se crucial para aplicações importantes na área.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

5.1 Conclusões finais

Neste trabalho, foram desenvolvidos e implementados novos algoritmos de acoplamento entre esquemas de diferenças finitas de malha intercalada equivalentes (ESG) utilizando um método originalmente desenvolvido, visando modelar eficientemente a propagação de ondas em geofísica para meios *offshore*, compostos parte por água e parte por rochas sedimentares. Os algoritmos desenvolvidos e o método proposto podem ser utilizados em outras aplicações que não a geofísica como, por exemplo, em imageamento na área médica, ensaios não destrutivos na área de engenharia ou em eletrodinâmica na área de física.

Os esquemas de malha intercalada equivalente (ESG) são formulações baseadas em apenas um campo de propagação (deslocamentos, velocidades, tensões ou pressões), propostos recentemente por DI BARTOLO *et al.*(2012a, 2014), que fornecem o mesmo resultado que os esquemas de malha intercalada tradicionais (SSG), e.g. VIRIEUX (1986), podendo ter vantagens em termos computacionais, tanto em termos de dispêndio memória como em termos de custo computacional, dependendo da formulação específica. Cabe ressaltar que os esquemas ESG, assim como os esquemas SSG, são estáveis e apresentam bons resultados em interfaces entre meios acústicos e elásticos, diferente de formulações baseadas em campo único e de malha simples, como é o caso do esquema clássico em termos de deslocamentos proposto por KELLY (1976).

Os novos acoplamentos implementados conjugam a utilização de duas estratégias básicas: acoplamento explícito direto e decomposição de domínio com sobreposição de domínios. A primeira estratégia é fundamental no caso de aplicações em geofísica e mesmo em outras aplicações que exigem algoritmos rápidos, devido à sua eficiência computacional, onde não é necessário recorrer a processo iterativo para a marcha no tempo, o que torna o processo muito mais rápido. A decomposição de domínio é utilizada para a troca de informações entre os subdomínios, de forma a garantir a passagem de informação entre eles, o que se mostra necessário em virtude do *stencil* dos operadores de diferenças finitas se estenderem por vários pontos da malha, o que depende da ordem utilizada na aproximação espacial. Por simplicidade, os acoplamentos tratados neste trabalho utilizaram quarta ordem de aproximação no espaço e uma interface plana e horizontal entre os meios acústico e elástico.

O primeiro acoplamento implementado é o acoplamento entre o esquema ESG acústico em termos de pressão para densidades constantes (ESG-Ac-P) – um esquema extremamente eficiente tanto em termos de memória quanto em termos de custo computacional proposto por DI BARTOLO *et al*. (2012a) – para a parte de água (acústica) e o esquema de malha intercalada clássico (SSG-El) para a parte elástica. Este acoplamento tem um desempenho melhor do que o SSG aplicado ao modelo inteiro e apresenta os mesmos resultados que ele: gasta 78% e 73%, respectivamente, da memória e do custo computacional em relação ao SSG, considerando-se um modelo *offshore* típico (35% de água) e fornece a resposta elástica do problema, numericamente equivalente ao esquema SSG aplicado a todo o modelo.

O segundo acoplamento implementado é entre o esquema ESG acústico em termos de pressão para densidades constantes (ESG-Ac-P) para a parte de água e o esquema

ESG em velocidades para a parte elástica (ESG-El-V). Este esquema foi originalmente desenvolvido e implementado nesta tese, tendo por base o trabalho citado acima.

Para a realização de tal acoplamento, lançou-se mão do esquema SSG-El na região intermediária entre os esquemas ESG citados, criando assim uma sub-região para passagem de informação entre as sub-regiões, que denomina-se de sub-região de acoplamento. Esse novo acoplamento é vantajoso uma vez que suas propriedades de precisão e estabilidade são iguais às do esquema SSG, porém com menor gasto de memória possível em esquemas de diferenças finitas. Tal acoplamento, conforme mostram os resultados, possui resultados equivalentes ao SSG elástico, gastando, porém, apenas 70% de sua memória. O fator memória é de suma importância em aplicações práticas em geofísica aplicada, em especial no caso de modelagens tridimensionais, bem como nas aplicações práticas dos algoritmos de modelagem nesta área da ciência aplicada, como é o caso da migração e da inversão sísmica, muito utilizadas pela indústria do petróleo.

5.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, podemos citar a implementação de ordens superiores para os operadores espaciais nos algoritmos de acoplamento implementados. Para tal, será necessário estender as sub-regiões, bem como a sub-região intermediária, para cobrirem os *stencils* dos operadores de ordens superiores. Extensões dos algoritmos para fundos irregulares, ou seja, interface acústico-elástica não horizontais e para o caso 3D são outras possibilidades de trabalhos de grande importância, com aplicações não somente em geofísica.

Além disso, outro trabalho interessante seria a aplicação dos algoritmos para a migração reversa no tempo (RTM), um algoritmo que utiliza a própria equação da onda para imagear os refletores (contrastes de velocidade), considerando que o modelo de velocidades é conhecido. A RTM é um dos métodos que fornece melhores resultados para o imageamento de estruturas e necessita de algoritmos eficientes para modelar a propagação de ondas.

Outra aplicação para os algoritmos de acoplamento desenvolvidos se refere à resolução de problemas inversos para obtenção do modelo de velocidades, necessários como *input* para os algoritmos de migração. O método conhecido como inversão do campo de onda completo (FWI, do inglês, *full wave form inversion*) é uma das áreas de pesquisa mais ativas atualmente na área de geofísica aplicada, onde são investidos milhões de dólares anualmente pela indústria. Nele, o problema direto é resolvido diversas vezes iterativamente, utilizando-se um método de minimização (como o gradiente conjugado), com o objetivo de obter os modelos de velocidade do meio. Pode-se dizer que o estado da arte do método sísmico utiliza FWI para obter o modelo de velocidade e RTM para o imageamento de estruturas, sendo o algoritmo de modelagem o elemento mais importante destes, necessitando ser o mais eficiente possível para o sucesso da aplicação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALFORD, R. M., KELLY, K. R., BOORE, D. M., 1974, "Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation", *Geophysics*, V. 39, n. 6, pp. 834–842.

BAYSAL, E., KOSLOFF, D. D, SHERWOOD, J. W. C., 1983, "Reverse time migration", *Geophysics*, V. 48, n. 11, pp. 1514–1524.

BERENGER, J., 1994, "A perfectly matched layer for the absorption of electro- magnetic waves", *Journal of Computational Physics*, V. 114, n. 2, pp. 185–200.

BOORE, D., 1972, "Finite Difference Methods for Seismic Wave Propagation in Heterogeneous Materials", *Methods in Computational Physics*, V.11,pp. 1-37.

BULCÃO, A., *Modelagem e Migração Reversa no Tempo Empregando Operadores Elásticos e Acústicos*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.

CERJAN, C., KOSLOFF, D., KOSLOFF, R., et al., 1985, "A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations", *Geophysics*, V. 50, n. 4, pp. 705–708.

COHEN, G., JOLY, P., 1990, “Fourth order schemes for the heterogeneous acoustics equation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V. 80, n. 1, pp. 397–407.

COURANT, R., FRIEDRICHS, K., LEWY, H., 1967, “On the partial difference equations of mathematical physics”, *IBM Journal of Research and Development,* V.11, pp. 215–234.

DI BARTOLO, L., *Modelagem Sísmica Anisotrópica Através do Método das Diferenças Finitas Utilizando Sistemas de Equações em Segunda Ordem*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2010.

DI BARTOLO, L., DORS, C., MANSUR, W. J., 2012a, “A New Family of Finite-Difference Schemes to Solve the Heterogeneous Acoustic Wave Equation”, *Geophysics*, V.77, pp. T187-T199.

DI BARTOLO, L., DORS, C., MANSUR, W. J., 2012b, “An Efficient Simple Acoustic-elastic FD Coupling for Offshore Seismic Simulations”, *Eighty-second SEG Annual Meeting*, Las Vegas. SEG Expanded Abstract, V.31.

DI BARTOLO, L., DORS, C., MANSUR, W. J., 2014, “Theory of equivalent staggered-grid schemes: Application to rotated and standard grids in anisotropic media”, *Geophysical Prospecting*, Aceito.

GRAFF, K. F., 1991, *Wave Motion in Elastic Solids*. Mineola, Dover Publication, Inc.

HARLOW, F., WELCH, J., 1965, "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface", *The Physics of Fluids*, V. 8, n. 12 pp. 2182–2189.

HEMON, C., 1978, "Equations d'onde et modeles", *Geophysical Prospecting*, V. 26, pp. 790–821.

KELLY, K. R., WARD, R. W., TREITEL, S., *et al.*, 1976, "Synthetic Seismograms: a Finite-difference Approach", *Geophysics*, V. 41, n.1, pp. 2-27.

LEVANDER, A. R., 1988, "Fourth-order Finite-difference P-SV Seismograms", *Geophysics*, V. 53, n.11, pp. 1425-1436.

LEVANDER, A. R., 1989, "Finite-difference Forward Modeling in Seismology", In: James D. (Ed.), *The Encyclopedia of Solid Earth Geophysics*, pp. 410-430, New York, Van Nostrand Reinhold.

LOEWENTHAL, D., MUFTI, I., 1983, "Reversed time migration in spatial frequency domain", *Geophysics*, V. 48, pp. 627–635.

LUO, Y., SCHUSTER, G., 1990, "Parsimonious Staggered Grid Finite-differencing of the Wave Equation", *Geophysical Research Letters*, V.17, n.2, pp. 155-158.

MADARIAGA, R., 1976, “Dynamics of an expanding circular fault”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, V. 66, n. 3, pp. 639.

MARTIN, G., WILEY, R., MARFURT, K., 2006, “Marmousi 2: An Elastic Upgrade for Marmousi”, *The Leading Edge*, 25, pp. 156-166.

MOCZO, P., KRISTEK, J., VAVRYCUK, V., *et al.*, 2002, “3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, V. 92, n. 8, pp. 3042.

SAENGER, E. H., GOLD, N., SHAPIRO, S. A., 2000, “Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid”, *Wave Motion*, V. 31, pp. 77–92.

SOARES, D., 2011, “Coupled numerical methods to analyze interacting acoustic-dynamic models by multidomain decomposition techniques”, *Mathematical Problems in Engineering*.

STEPHEN, R., 1988, “A review of finite difference methods for seismo-acoustics problems at the seafloor”, *Reviews of Geophysics*, V. 26, n. 3, pp. 445–458.

VIRIEUX, J., 1984, “SH-Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity-stress finite-difference Method”, *Geophysics*, V.49, n.11, pp. 1933-1957.

VIRIEUX, J., 1986, "P-SV Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity-stress finite-difference Method", *Geophysics*, V.51, n.4, pp. 889-901.

YEE, K., 1966, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, V. 14, n. 3, pp. 302–307.

YILMAZ, O., 2001, *Seismic Data Analysis. Processing, Inversion and Interpretation of Seismic Data*.V.I 2 ed., Tulsa, Society of Exploration Geophysicists.

ZAHARADNIK, J., MOCZO, P., EKHRON, F., 1993, "Testing four elastic finite-difference schemes for behavior at discontinuities", *Bulletin of the Seismological Society of America*, V. 83, n. 1, pp. 107–129.