

**DEPENDÊNCIA LINEAR GENERALIZADA  
ENTRE DESLOCAMENTOS DE MODELOS  
RETICULADOS, PLACAS<sup>1</sup> E CASCAS**

**CLAUDIO CRUZ NUNES**

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO  
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. H. Soriano

Prof. Humberto Lima Soriano, Titular-EE/UFRJ.  
(Presidente)

Benjamim Ernani Diaz

Prof. Benjamim Ernani Diaz, Titular-EE/UFRJ.

Luiz Fernando Taborda Garcia

Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia, D.Sc.

Fernando Venancio Filho

Prof. Fernando Venancio Filho, Livre Docente/UFRJ.

RIO DE JANEIRO, RJ, BRASIL.

SETEMBRO DE 1994

NUNES, CLAUDIO CRUZ

Dependência Linear Generalizada entre Deslocamentos de

Modelos Reticulados, Placas e Cascas

[Rio de Janeiro] 1994.

IX, 131p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,

Engenharia Civil, 1994)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Dependência Linear Generalizada entre Deslocamentos

I. COPPE/UFRJ · II. Título (Série).

Aos meus pais,  
**Francisco de Souza Nunes e**  
**Elza Cruz Nunes,**  
pela confiança depositada.

## **AGRADECIMENTOS**

Com o objetivo de aprimorar seus conhecimentos muitos deixam sua terra natal para aventurar-se em longínquos centros urbanos. Com pouco conhecimento de tais lugares, é necessário orientação, que me foi dada pelo **Prof. Márcio Miranda Soares**, a quem devo meus agradecimentos.

Ao se chegar a uma cidade como o Rio de Janeiro, é necessário acolhimento, devido às grandes dificuldades de moradia. Graças, porém, a **Helder Aloizio Lopes, Guilherme Silveira Castor e João Pedroza**, essas condições me foram proporcionadas, e por isso retribuo com meus agradecimentos.

No decorrer do curso conquistei muitos **amigos**, aos quais agradeço, em especial **David Soares Pinto Júnior**.

Para amenizar as dificuldades devidas à distância da terra natal, é necessário um pouco de carinho e cuidados e isto retribuo com meus agradecimentos a **Diana de Mesquita Siqueira**.

Meus objetivos de aprendiz não teriam sido atingidos sem a colaboração dos **Professores da COPPE**, aos quais agradeço em especial ao meu orientador **Prof. Humberto Lima Soriano** e ao **Prof. Silvio de Souza Lima**.

O desenvolvimento de um trabalho como este sempre esbarra em obstáculos burocráticos. Estes foram sempre resolvidos pela **Secretaria e a Administração do PEC**, às quais agradeço, bem como ao **CNPq**, pelo apoio financeiro.

Agradeço a **Deus**, que me proporcionou a realização deste modesto trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciência (M.Sc.).

## DEPENDÊNCIA LINEAR GENERALIZADA ENTRE DESLOCAMENTOS DE MODELOS RETICULADOS, PLACAS E CASCAS

CLAUDIO CRUZ NUNES  
SETEMBRO DE 1994

Orientador: Prof. Humberto Lima Soriano, Titular-EE/UFRJ.  
Programa: Engenharia Civil.

A prescrição de dependência linear entre deslocamentos é muito importante em estruturas, pois permite a obtenção de modelos com um menor número de graus de liberdades, quando estas hipóteses têm consistência de modelação em relação ao sistema físico.

Com o objetivo de aprimorar ainda mais as dependências clássicas entre deslocamentos, esta tese apresenta uma nova matriz de dependência para modelos reticulados e contínuos discretizados. Com essa matriz, um nó de pórtico espacial e de casca, por exemplo, passa a ter doze alternativas de dependência de doze nós distintos, cabendo ao usuário a responsabilidade de definir uma relação de dependência que corresponda a uma modelação adequada.

Esta técnica foi implementada no Sistema SALT - Sistema de Análise de Estruturas, o que a tornou disponível a todos os seus usuários.

São apresentados diversos exemplos que evidenciam a utilidade e correção desta técnica, bem como sua originalidade.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

**GENERALIZED LINEAR DEPENDENCE AMONG DISPLACEMENTS  
FOR FRAMED, PLATES AND SHELLS MODELS.**

CLAUDIO CRUZ NUNES  
SEPTEMBER OF 1994

Thesis supervisor: Prof. Humberto Lima Soriano, Titular-EE/UFRJ.  
Department: Civil Engineering.

The linear dependence among displacements is very useful in structural analysis in order to allow smaller discrete models, assuming that dependence adequately models the physical system.

In this thesis a new transformation matrix is presented which improves the existing classical dependence for framed, plates and shells models.

Using that matrix, a node of a space frame or shell, for instance, may have up to twelve different dependencies on twelve different nodes. The structural analyst is responsible for the adequate use of those dependencies.

This technique was coded in the SALT System Structural Analysis environment and is now available for public use.

Several examples are presented here, showing the correctness and efficiency of this technique, as well as its originality.

# **ÍNDICE**

## **CAPÍTULO I**

### **INTRODUÇÃO**

1

## **CAPÍTULO II**

### **MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS PARA ESTRUTURAS RETICULADAS**

II.1	SISTEMA DE REFERÊNCIA	6
II.2	DESLOCAMENTOS NODAIS	7
II.3	MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO	8
II.4	VETOR DE FORÇAS NODAIS	9
II.5	MATRIZ DE ROTAÇÃO	10
II.6	LIBERAÇÕES EM UM ELEMENTO	12
II.7	MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL	13
II.8	VETOR DE FORÇAS GLOBAL	13
II.9	CONDIÇÕES DE CONTORNO	13

## **CAPÍTULO III**

### **PLACAS E CASCAS**

III.1	PLACAS	15
III.1.1	FLEXÃO DE PLACAS	15
III.1.1.1	PLACAS DELGADAS (TEORIA DE KIRCHHOFF)	17
III.1.1.2	PLACAS ESPESSAS (TEORIA DE MINDLIN)	19
III.1.2	ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS	20
III.2	CASCAS	21

## **CAPÍTULO IV**

### **DEPENDÊNCIA LINEAR CLÁSSICA**

#### **ENTRE DESLOCAMENTOS**

IV.1	FORMULAÇÃO DA DEPENDÊNCIA LINEAR CLÁSSICA ENTRE DESLOCAMENTOS	23
IV.2	FORMAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA ESTRUTURA	28
IV.3	VETOR DE FORÇAS E DE DESLOCAMENTOS	30
IV.4	ACOPLAMENTO ENTRE TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO	30

## **CAPÍTULO V**

### **DEPENDÊNCIA LINEAR GENERALIZADA**

#### **ENTRE DESLOCAMENTOS**

V.1	GENERALIZAÇÃO DAS DEPENDÊNCIAS NODAIS	34
V.2	NÚMERO DE DEPENDÊNCIAS NODAIS	46
V.3	ANÁLISE DAS DIMENSÕES DAS MATRIZES	49
V.4	LIMITAÇÕES	49

## **CAPÍTULO VI**

### **PRINCIPAIS ASPECTOS DA**

### **IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL**

VI.1	PROCEDIMENTOS INICIAIS	51
VI.2	VETOR APONTADOR	56
VI.3	FORMAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL	57
VI.3.1	MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTO	57
VI.3.2	APOIOS ELÁSTICOS	61
VI.4	VETOR DE CARGAS	62
VI.5	CONDIÇÕES DE CONTORNO	63
VI.6	NÚMERO GRANDE E PRECISÃO	63
VI.7	SINGULARIDADE DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL	68
VI.8	DESLOCAMENTOS NODAIS	69

VI.9	ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DOS MEMBROS E NOS ELEMENTOS DE PLACA E CASCA	70
VI.10	RENUMERADOR	70

## **CAPÍTULO VII**

	<b>APLICAÇÕES</b>	72
VII.1	EXEMPLO I - PÓRTICO PLANO	73
VII.2	EXEMPLO II - TRELIÇA PLANA	75
VII.3	EXEMPLO III - TRELIÇA ESPACIAL	78
VII.4	EXEMPLO IV - GRELHA	81
VII.5	EXEMPLO V - PÓRTICO ESPACIAL, EDIFÍCIO	84
VII.6	EXEMPLO VI - PÓRTICO ESPACIAL, GALPÃO	93
VII.7	EXEMPLO VII - PÓRTICO PLANO, ESTAQUEAMENTO PLANO	98
VII.8	EXEMPLO VIII - PÓRTICO ESPACIAL, ESTAQUEAMENTO ESPACIAL	104
VII.9	EXEMPLO IX - PÓRTICO ESPACIAL, EDIFÍCIO ALTO	108
VII.10	EXEMPLO X - PLACA	115
VII.11	EXEMPLO XI - CASCA	120

## **CAPÍTULO VIII**

	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS</b>	125
--	---	-----

	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>
--	-----------------------------------

127

# **CAPÍTULO I**

## **INTRODUÇÃO**

A dependência linear entre deslocamentos nas estruturas é muito comum e muitas vezes pode levar a grandes reduções do modelo estrutural. Quando não é possível fazer tal simplificação com as dependências, é necessário discretizar as partes que provocam tal dependência. Essa discretização, porém, pode levar a grandes modelos numéricos, inviabilizando os projetos.

Muitas formulações e métodos foram criados para simplificar o cálculo das estruturas com dependências. Pode-se citar a técnica do meio contínuo [3][5][6], que é aplicada em análise do comportamento global de edifícios altos, estruturas estas que assim definem devido à sensibilidade a carregamentos laterais [6][12]. Esta técnica consiste em transformar as vigas em uma peça de rigidez contínua ao longo da altura, ligando os pilares. Com este sistema idealizado, escreve-se um sistema de equações diferenciais lineares que traduz o comportamento da estrutura. As dificuldades desta técnica começam a aparecer quando o modelo não é simétrico ou possui muitas variações de seções dos pilares, o que pode ser comum em edifícios; ou quando a estrutura não pode ser idealizada como pórtico plano, pois para o caso geral, a solução analítica poderá não existir [5].

Com o desenvolvimento dos computadores, tornou-se viável a elaboração de métodos discretos capazes de traduzir muitas dependências entre deslocamentos. Essas relações aparecem com muita freqüência nos edifícios, devido às excentricidade das vigas em relação aos pilares e ao comportamento de diafragma das lajes nos edifícios altos. Pode-se ter também um problema de dependência na análise de blocos de estaqueamentos e outros problemas de fundações rígidas, bem como excentricidade de placa em relação à viga de apoio, quando estas são calculadas juntas.

O comportamento das lajes dos edifícios altos funcionando como diafragma rígido, ou seja, lajes indeformadas em seus planos e com rigidez à flexão nula, foi o que mais estimulou a pesquisa de métodos que traduzissem as dependências impostas na estrutura.

Na COPPE/UFRJ, os estudos de edifícios altos com modelos discretos começaram em 1971, com Soriano [15], que desenvolveu o primeiro programa automático publicado no Brasil para o cálculo do efeito de vento em estruturas de edifícios lançando-se mão de pórticos planos, que simulavam o comportamento tridimensional da estrutura através da compatibilização dos deslocamentos dos painéis ortogonais. Devido à exigüidade de memória, era utilizada a técnica de deslocamento relativo de andar [15].

No ano seguinte, Fonte [16] desenvolveu um programa onde se considerava a laje funcionando como diafragma rígido juntamente com as vigas. Desta forma, cada ponto nodal possuía três deslocamentos independentes, ou seja, translação vertical e duas rotações no plano da laje; e o andar possuía três deslocamentos, devido ao diafragma, ou seja, as duas translações no plano da laje e a rotação da mesma como um corpo rígido, cujo vetor representativo é perpendicular ao plano da mesma.

Menezes [17], em 1977, desenvolveu um programa que tinha por objetivo dimensionar automaticamente as seções de concreto armado. Quanto à análise, considerava-se que as vigas formavam uma grelha cujas extremidades eram engastadas elasticamente com os pilares.

Retomando o enfoque de dependência, Camara Jr. [11], em 1978, acrescentou, na análise tridimensional de edifícios altos, diversos tipos de seções. As lajes funcionavam como diafragma rígido e usava-se a técnica de deslocamento relativo de andar, demonstrando-se uma grande preocupação com a escassez de memória do computador.

Oito anos mais tarde, a limitação de memória disponível ainda era um dos enfoques na análise de estruturas em micro-computador. Silva [13], em 1986, utilizou a técnica do deslocamento relativo de andar. No seu programa, poderia considerar a laje funcionando como diafragma rígido, bem como extremidades rígidas das vigas, como já se fazia nos trabalhos anteriores. Para introduzir

as condições de contorno, utilizou a técnica do número grande. A numeração dos pontos nodais foi feita segundo um critério pré-determinado.

Haas [12], em 1987, implementou um importante tópico para o assunto de edifícios altos. Desenvolveu um programa que abordava o empenamento de seções transversais abertas nos pilares. Isto é tão importante para o estudo de edifícios altos quanto as dependências entre deslocamentos, visto que os efeitos de empenamento de parede delgada com seção aberta podem ter grande influência nos esforços da estrutura [30]. Nos edifícios altos, este tipo de seção é muito comum, por exemplo, as caixas dos elevadores. O programa desenvolvido por Haas utilizou todos os desenvolvimentos anteriores acumulados na COPPE/UFRJ sobre edifícios altos e considerou, adicionalmente, o empenamento de seções transversais abertas nos pilares. O deslocamento relativo de andar continuou a ser usado para economizar memória central no computador.

Fonte [14], na sua tese de D.Sc., implementou um outro tópico muito importante para edifícios altos: a análise não-linear geométrica para pórtico espacial. Nesta tese, foi desenvolvido um programa que analisa as estruturas com diafragma rígido, a extremidade rígida das vigas devido às excentricidades com os pilares, a não linearidade geométrica e outros tópicos que podem ser vistos na referência [14].

Com esta pequena revisão do desenvolvimento do estudo de edifícios altos na COPPE/UFRJ, pode-se concluir que a questão da dependência entre deslocamentos desenvolveu-se devido às restrições de ordem computacional na análise de tais edificações.

Atualmente, o Sistema SALT - Sistema de Análise de Estruturas vem sendo desenvolvido na UFRJ, sob a orientação dos professores Humberto Lima Soriano e Silvio de Souza Lima. Este Sistema encontra-se em fase avançada de desenvolvimento, permitindo uma cômoda análise estática e dinâmica de estruturas. Possui amplos recursos de pré e pós-processamento, permitindo uma entrada gráfica de dados e uma manipulação versátil dos resultados, não importando a quantidade dos mesmos. Devido às amplas facilidades de pré e pós-processamento oferecidas pelo Sistema,

tornou-se importante a ampliação dos métodos de análise do Sistema, assim como a incorporação de novos desenvolvimentos de modelação.

Seguindo tal diretriva, esta tese tem o objetivo de aprimorar as técnicas computacionais no tocante à dependência entre deslocamentos. Uma vez conseguidos tais aprimoramentos, a implementação foi feita no Sistema SALT, permitindo assim que seus usuários usufruam desse desenvolvimento.

A dependência clássica entre deslocamentos é muito conhecida, mas tornou-se necessária a sua generalização para que o usuário possa impor qualquer relação de dependência linear que se faça necessária, permitindo a análise de qualquer modelo estrutural que possua tal dependência.

A presente dependência linear generalizada entre deslocamentos permite que um nó de pórtico espacial e de casca, por exemplo, possua doze dependências entre deslocamentos de doze nós distintos. Os dados são particionados para permitir a análise de qualquer número de dependências no modelo estrutural, pois o SALT analisa estruturas com qualquer número de nós e elementos [20].

Para expor o assunto de dependência generalizada entre deslocamentos, esta tese foi dividida em oito capítulos, sendo este o primeiro.

No segundo capítulo, faz-se um breve resumo sobre o método dos deslocamentos para estruturas reticuladas, a fim de tornar mais clara a apresentação dos assuntos de dependência.

No terceiro capítulo, é desenvolvida uma breve revisão sobre as placas e cascas, a fim de facilitar a abordagem em capítulos posteriores, no tocante à dependência entre deslocamentos das mesmas.

No quarto capítulo, é dado um destaque especial para a dependência clássica entre deslocamentos, pois esta será de capital importância na apresentação do assunto do capítulo seguinte.

O quinto capítulo aborda a dependência linear generalizada entre deslocamentos. São apresentados alguns exemplos que não podem ser resolvidos com a dependência clássica entre deslocamentos. Posteriormente é apresentada a dedução completa da matriz de transformação que possibilita a generalização entre os

deslocamentos das estruturas, evidenciando a originalidade da matriz desenvolvida.

Os principais aspectos da implementação computacional são apresentados no sexto capítulo. São discutidos alguns procedimentos necessários para a implementação computacional da dependência linear generalizada entre deslocamentos, bem como a possibilidade de aproveitar as rotinas de um programa comum, implementado sem dependência linear generalizada entre deslocamentos.

No sétimo capítulo, são apresentadas várias aplicações que podem ser resolvidas com a dependência clássica entre deslocamentos, além de outras que só podem ser resolvidas com a dependência linear generalizada entre deslocamentos, mostrando desta forma que a nova matriz pode resolver todas as dependências do caso clássico e outras que a clássica não resolve.

No oitavo capítulo, são apresentadas as conclusões e sugestões dos desenvolvimentos futuros que poderão ser implementados no Sistema SALT, tornando-o ainda melhor para seus usuários.

# **CAPÍTULO III**

## **MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS PARA ESTRUTURAS RETICULADAS**

Para tratar da dependência entre deslocamento de estruturas reticuladas, é conveniente fazer um breve resumo sobre estas. Nesta síntese, abordar-se-á apenas o elemento de pórtico espacial, uma vez que, de posse deste, pode-se obter os outros elementos reticulados por simples eliminação ou restrição dos deslocamentos desnecessários.

Muitas estruturas podem ser discretizadas por elementos de barras, nos quais predominam as deformações provenientes dos esforços de flexão, normal e torção e, em alguns casos, secundariamente, do esforço cortante. Estes elementos são representados pelo lugar geométrico dos centróides das seções transversais, constituindo um eixo reto ou curvo. Uma vez determinados os deslocamentos e esforços nos extremos destes elementos, pode-se calcular os deslocamentos e esforços em qualquer ponto dos mesmos, pois supõe-se que as seções permanecem planas após as deformações [19], quando os elementos são de seção de pequena altura.

### **II.1 SISTEMA DE REFERÊNCIA**

Para poder descrever as características geométricas da estrutura, deve-se ter um sistema de referência que descreva a posição dos pontos nodais, bem como a orientação dos membros no espaço ou no plano. Atendida esta necessidade, tem-se para a estrutura um sistema de referência global tri-ortogonal direto [1], como mostra a figura 1.

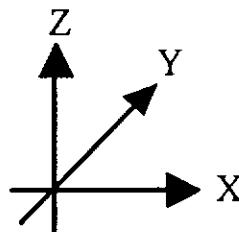


Figura II.1 - Sistema de referência global.

Os elementos também possuem um sistema de referência local tri-ortogonal direto, figura II.2, em relação ao qual são calculadas grandezas que dizem respeito aos elementos, e que podem depois ser transformadas para o referencial global, ou vice-versa.

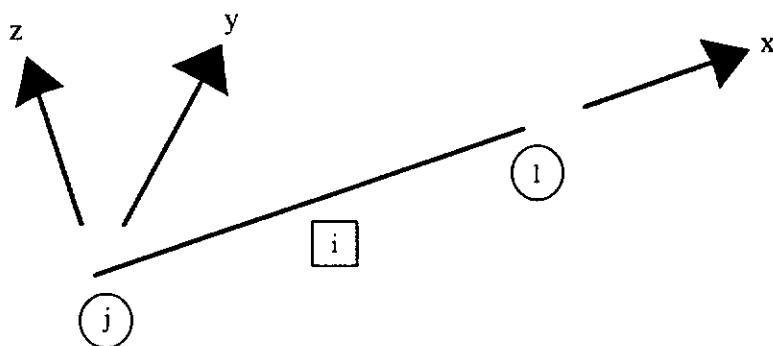


Figura II.2 - Sistema de referência local de elemento.

Cada elemento é definido por dois nós de coordenadas conhecidas em relação ao sistema global de referência. O primeiro nó, nó inicial, indica a origem do sistema local; e o segundo, nó final, a direção do eixo local x; os outros eixos locais serão definidos mais adiante.

## II.2 DESLOCAMENTOS NODAIS

Em cada ponto nodal da estrutura tem-se os deslocamentos que constituem as incógnitas do problema. Para a solução, apenas esses deslocamentos nodais são necessários, pois como foi dito anteriormente, uma vez determinados, os demais deslocamentos, bem como os esforços em qualquer seção, podem ser facilmente calculados.

Um ponto nodal para um modelo de estrutura espacial possui seis deslocamentos, sendo três de translação e três de rotação, como mostra a figura II.3.

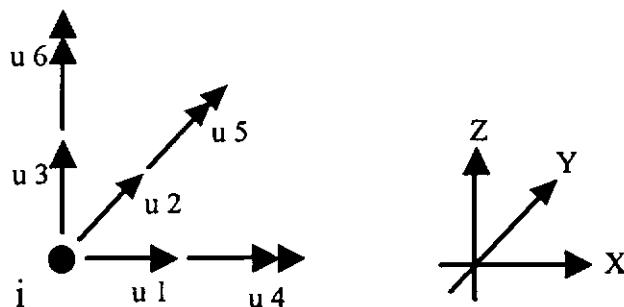


Figura II.3 - Deslocamentos nodais.

Estes deslocamentos estão no referencial global, mas os deslocamentos dos pontos nodais dos elementos são referidos ao referencial local dos mesmos. Na realidade, os deslocamento são os mesmos, estando apenas representados em sistemas de referência distintos, existindo uma relação única entre os dois sistemas, feita através de matriz de rotação.

## II.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

A matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial e dos que derivam do mesmo deve levar em consideração o efeito da força cortante, que é muito importante nos casos de elementos que possuam dimensões transversais grandes em relação ao comprimento dos mesmos. Isto é muito comum em edifícios altos, como pode ser visto em [2][3][4][5][6]. Nesses edifícios, são usadas paredes estruturais para reduzir os deslocamentos provocados pelas cargas laterais, que geralmente são oriundas da ação do vento ou de abalos sísmicos [2][3][6].

Assim, seguindo a numeração dos deslocamentos da figura II.3 para o nó inicial e continuando com a numeração de 7 até 12 para o nó final do elemento  $i$  de pórtico espacial, tem-se a matriz de rigidez  $\mathbf{S}_{\mathbf{i}i}$ , no sistema de referência local:

$$\begin{bmatrix}
\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{\ell^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_y)} & 0 & -\frac{12EI_z}{\ell^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_y)} \\
\frac{12EI_y}{\ell^3(1+\phi_z)} & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{\ell(1+\phi_z)} & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell(1+\phi_z)} & 0 \\
\frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(4+\phi_y)EI_y}{\ell(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{(2+\phi_z)EI_y}{\ell(1+\phi_z)} & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{\ell(1+\phi_y)} \\
\frac{(4+\phi_y)EI_z}{\ell(1+\phi_y)} & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{\ell^2(1+\phi_y)} \\
\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{\ell^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} \\
\frac{GJ_x}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_z)EI_y}{\ell(1+\phi_z)} & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{\ell(1+\phi_y)} \\
0 & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{\ell(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Simétrica

(II.1)

onde:

$$\phi_y = \frac{12 EI_z}{G A_y * \ell^2} \quad (II.2)$$

$$\phi_z = \frac{12 EI_y}{G A_z * \ell^2} \quad (II.3)$$

Nas equações II.1, II.2 e II.3, I é o momento de inércia em relação ao eixo mencionado, A é a área da seção transversal,  $\ell$  é o comprimento do elemento,  $A^*$  é a área efetiva ao cisalhamento devido ao esforço cortante na direção mencionada, E é o módulo de elasticidade longitudinal e G é o módulo de elasticidade transversal.

Para obter a matriz de rigidez dos outros elementos de barra, basta eliminar as linhas e colunas dos deslocamentos que não ocorrem no elemento. No caso dos elementos de treliça, deve-se incluir linhas e colunas para os deslocamentos que não sejam os axiais [1].

## II.4 VETOR DE FORÇAS NODAIS

As forças generalizadas que incidem diretamente nos nós da estrutura são arranjadas em um vetor denominado  $\mathbf{F}^*$ . Quando ocorrem ações no interior dos elementos, deve-se calcular suas equivalentes nodais [1][8] e incorporá-las ao vetor  $\mathbf{F}^*$  com o sinal

trocado [1]. Isto porque as equivalentes nodais, que podem ser calculadas pelo método das forças [1][7][8], estão agindo no elemento; enquanto que estas, com o sinal trocado, correspondem à ação do elemento sobre o nó. Assim, o vetor de forças do elemento  $\mathbf{F}_i$  pode ser calculado, um a um, para a formação do vetor de forças global  $\mathbf{F}^*$ .

## II.5 MATRIZ DE ROTAÇÃO

Considerando um vetor no espaço, pode-se construir uma matriz que transforme as componentes deste vetor de um referencial para outro. Tomando um vetor  $\mathbf{V}$  no espaço que possui componentes em um referencial local  $\mathbf{Vl}$  e o mesmo num referencial global  $\mathbf{Vg}$ , pode-se escrever a seguinte relação.

$$\mathbf{Vl} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

$$\mathbf{Vg} = \begin{Bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

$$\mathbf{Vl} = \mathbf{R} \mathbf{Vg} \quad (\text{II.6})$$

onde:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

Os coeficientes  $\lambda_{ij}$  são os co-senos diretores dos eixos locais em relação ao eixo global [1].

É fácil determinar os co-senos diretores do eixo de um elemento através dos seus nós extremos, mas, para determinar os co-

senos diretores dos eixos y e z, modernamente recorre-se ao uso de um nó auxiliar k que não seja colinear aos nós que definem o elemento. Este nó pode ser ou um nó inativo, sem elementos estruturais ligados a ele, ou um nó ligado a um elemento [1]. Desta maneira, o plano formado pelos nós do elemento, mais o nó k, será o plano local xy. Assim, o produto vetorial dos vetores formados ligando-se os pontos j,l e j,k, onde j é o nó inicial e l o nó final do elemento, define o eixo local z do elemento e permite que sejam calculados seus co-senos diretores. Os co-senos diretores do eixo y são obtidos de forma análoga, multiplicando-se o vetor unitário do eixo z pelo vetor unitário do eixo x. Desta maneira, todos os eixos locais do elemento, bem como os termos da matriz **R**, ficam perfeitamente determinados.

Através da equação II.6, pode-se calcular as componentes do vetor **V** no sistema local em função das componentes do mesmo no referencial global. A matriz **R** é ortogonal [1], ou seja, a sua inversa é igual à sua transposta. Assim, para calcular as componentes globais em função das locais, basta usar a seguinte expressão:

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{R}^t \mathbf{V}_l \quad (II.8)$$

Para um elemento i de pórtico espacial, que possui dois vetores de deslocamento em cada extremidade, ou seja, um de translação e outro de rotação, a matriz **R** terá a seguinte forma:

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & & \\ & \mathbf{R} & \\ & & \mathbf{R} \\ & & & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (II.9)$$

De posse da matriz de rigidez **Sli** do elemento i e da matriz de rotação **Ri**, pode-se calcular a matriz do elemento no referencial global, como segue:

$$\mathbf{Sli} \mathbf{Uli} = \mathbf{Fli} \quad (II.10)$$

Pela equação II.6, pode-se escrever que:

$$\mathbf{Uli} = \mathbf{Ri} \mathbf{Ugi} \quad (II.11)$$

substituindo II.11 em II.10, tem-se

$$\mathbf{Sli} \mathbf{Ri} \mathbf{Ugi} = \mathbf{Fli} \quad (II.12)$$

multiplicando a equação II.12 por  $\mathbf{Ri}^t$ , tem-se

$$\mathbf{Ri}^t \mathbf{Sli} \mathbf{Ri} \mathbf{Ugi} = \mathbf{Ri}^t \mathbf{Fli} \quad (\text{II.13})$$

e, através do princípio da contra-gradiência [1], sabe-se que

$$\mathbf{Fgi} = \mathbf{Ri}^t \mathbf{Fli} \quad (\text{II.14})$$

resultando em

$$\mathbf{Ri}^t \mathbf{Sli} \mathbf{Ri} \mathbf{Ugi} = \mathbf{Fgi} \quad (\text{II.15})$$

Pela equação II.15, nota-se que

$$\mathbf{Sgi} = \mathbf{Ri}^t \mathbf{Sli} \mathbf{Ri} \quad (\text{II.16})$$

obtendo-se assim a equação

$$\mathbf{Sgi} \mathbf{Ugi} = \mathbf{Fgi} \quad (\text{II.17})$$

## II.6 LIBERAÇÕES EM UM ELEMENTO

Algumas vezes, os elementos estruturais precisam ter um ou mais dos seus deslocamentos nodais liberados, para poder melhor representar a realidade da estrutura.

Soriano[1] desenvolveu um procedimento computacional que transforma a matriz de rigidez de um elemento bi-engastado em uma matriz de um elemento com liberação de um ou mais de seus deslocamentos nodais, com a correspondente modificação de seu vetor de forças nodais. Os deslocamentos a serem liberados podem ser quaisquer, rotação ou translação, devendo-se contudo ter o cuidado de não liberar deslocamentos que, em conjunto, transformem o elemento em um membro hipostático. As liberações podem ser feitas em qualquer tipo de elemento reticulado, plano ou espacial.

Stallings[9] também desenvolveu um procedimento computacional que transforma a matriz e o vetor de forças nodais do elemento bi-engastado em um com liberações. O seu procedimento, porém, aplica-se apenas às estruturas planas.

O procedimento desenvolvido por Soriano[1] é mais genérico e, por isso, mais recomendado.

## **II.7 MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL**

Uma vez feita a liberação de deslocamento, se for o caso, e a correspondente transformação da matriz de rigidez local do elemento para o referencial global, pode-se efetuar a formação da matriz de rigidez global. Isto pode ser feito elemento por elemento, computando-se a contribuição de sua matriz, devidamente transformada para o referencial global, para a montagem da matriz global  $\mathbf{S}^*$  do modelo estrutural.

## **II.8 VETOR DE FORÇAS GLOBAL**

Como foi dito no item II.4, as forças que incidem diretamente nos nós são acondicionadas ao vetor de forças global  $\mathbf{F}^*$ , bem como os esforços de engastamento perfeito dos elementos com sinais trocados. Antes de se adicionar as forças resultantes das ações aplicadas internamente nos elementos, deve-se fazer as correspondentes transformações relativas às liberações de deslocamentos e de rotação de eixos, esta última pela equação II.14.

Os recalques de apoio podem ser transformados em esforços nas extremidades dos elementos; e estes, incorporados ao vetor de forças.

O vetor  $\mathbf{F}^*$  inclui também as reações de apoio, que são desconhecidas.

## **II.9 CONDIÇÕES DE CONTORNO**

Como foi visto no item anterior, as condições de contorno em termos de deslocamentos impostos não-nulos podem ser levadas em consideração, no vetor de forças global.

Os deslocamentos impostos que são nulos, direções restrinvidas, podem ser modelados através de constantes de mola de

rigidez muito grande. Tal procedimento é denominado técnica do número grande [1][10]. Essa constante de mola é adicionada à diagonal principal da matriz de rigidez global  $\mathbf{S}^*$ , na linha correspondente ao deslocamento restrinrido. As constantes de mola que representam apoios elásticos também são adicionadas a essa diagonal. O referido número grande adicionado na diagonal principal não provoca erros numéricos na etapa de resolução do sistema de equação. Uma vez calculados os deslocamentos nodais, pode-se calcular as reações de apoio do modelo estrutural, multiplicando-se o deslocamento obtido para a direção restrinrida pelo número grande utilizado.

Uma vez obtidos os deslocamentos nodais, os esforços nos elementos podem ser calculados.

# **CAPÍTULO III**

## **PLACAS E CASCAS**

As placas e cascas são de grande importância em engenharia, por serem modelos estruturais que aparecem com grande freqüência no dia a dia e, pelo seu caráter bi-dimensional, permitem simplificações que viabilizam cálculos que seriam muito trabalhosos se fossem resolvidos computacionalmente com elementos sólidos. Devido à grande importância do assunto, muitos livros de elementos finitos reservam alguns capítulos especialmente para o seu estudo tais como [31] e [33]. Na referência [35] é apresentada uma relação, com uma breve descrição e referências bibliográficas, de 88 tipos de elementos finitos de placas.

### **III.1 PLACAS**

Placas são modelos estruturais bi-dimensionais, ou seja, duas dimensões predominam em relação à terceira, que é a espessura. Comumente seus carregamentos são cargas distribuídas e concentradas aplicadas transversalmente, podendo também estar submetidas a variação de temperatura de uma face para outra, de forma a provocar efeitos de flexão.

#### **III.1.1 FLEXÃO DE PLACAS**

Como os deslocamentos transversais são admitidos bem pequenos em relação à espessura e supõe-se a inexistência de ações que distendam a sua superfície média, as placas trabalham basicamente à flexão. Em alguns casos, o efeito das tensões

cisalhantes ao longo da espessura passa a ser significativo. As tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$ , figura III.1, são supostas variando linearmente ao longo da espessura  $t$  da placa, enquanto que  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , são supostas de lei parabólica [31][33].

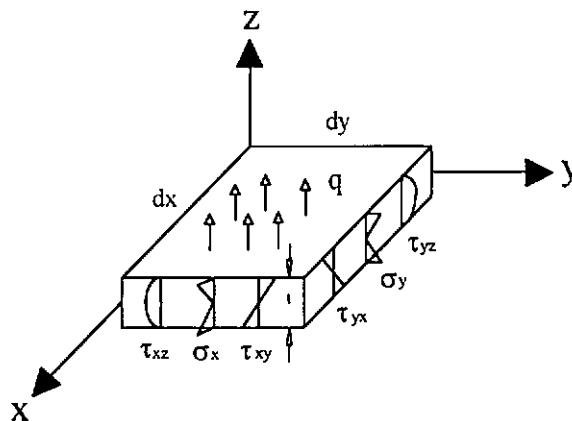


Figura III.1 - Elemento infinitesimal de placa.

Estas tensões têm como resultantes momentos e cortantes, figura III.2, definidos pelas seguintes expressões:

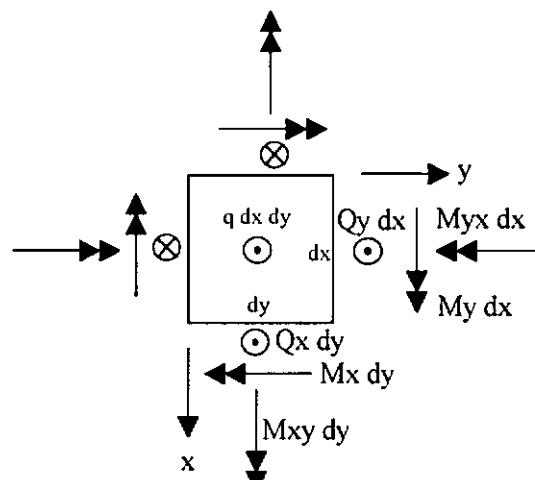


Figura III.2 - Esforços num elemento infinitesimal de placa de acordo com a convenção de sinais adotada para o Sistema SALT.

$$M_x = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad M_y = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad M_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad (III.1.a)$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \quad (\text{III.1.b})$$

### III.1.1.1 PLACAS DELGADAS (TEORIA DE KIRCHHOFF)

Nas placas delgadas, desprezam-se as deformações devidas aos esforços cortantes, sem prejuízo para os resultados.

A teoria clássica de placas delgadas é conhecida como teoria de placa de Kirchhoff [31][33]. De acordo com tal teoria, um ponto da superfície média da placa possui apenas deslocamento vertical  $w$ . Pontos fora do plano médio possuem deslocamentos segundo Z, Y e X. Um segmento perpendicular ao plano médio continua perpendicular à superfície média após a deformação da placa, porque as deformações devidas aos esforços cortantes são desprezadas [31][33][34][36].

Os momentos  $M_x$  e  $M_y$  associam-se às curvaturas  $w_{,xx}$  e  $w_{,yy}$ , respectivamente nas direções X e Y da superfície média; e  $M_{xy}$  relaciona-se à torção  $w_{,xy}$  da superfície média.

Por observação da figura III.3, pode-se escrever os deslocamentos  $u$  e  $v$ , respectivamente nas direções X e Y, em função das derivadas do deslocamento vertical  $w(x,y)$  de um determinado ponto.

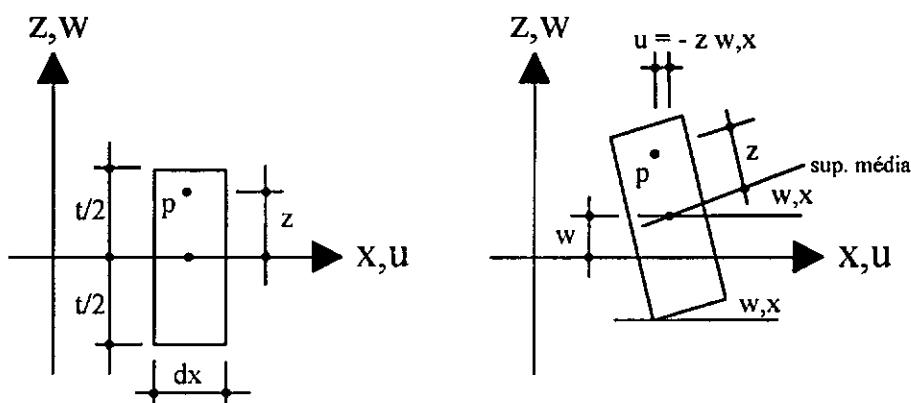


Figura III.3 - Deslocamento de um ponto p, teoria de Kirchhoff.

Assim, tem-se

$$u = -z w_{,x} \quad v = -z w_{,y} \quad (\text{III.2})$$

Como as deformações são derivadas dos deslocamentos, tem-se

$$\epsilon_x = -z w_{,xx} \quad \epsilon_y = -z w_{,yy} \quad (\text{III.3.a})$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = -2z w_{,xy} \quad (\text{III.3.b})$$

É oportuno frisar que a tensão  $\sigma_z$  provocada pela aplicação da carga  $q(x,y)$  é muito pequena em comparação com as tensões  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  e portanto desprezível nas relações tensão-deformação [31][33][34]. Escrevendo a relação tensão-deformação, para material ortotrópico, e incorporando o efeito de temperatura, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E' & E'' & 0 \\ E'' & E'y & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_x T \\ \alpha_y T \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{III.4})$$

onde  $\alpha$  é coeficiente de dilatação térmica e  $E'$ ,  $E''$  são coeficientes de elasticidade longitudinal e  $G$  transversal.

Considerando-se a lei linear para a temperatura ao longo da espessura

$$T = -2z T_0 / t \quad (\text{III.5})$$

com  $+T_0$  em  $z = -t/2$  e  $-T_0$  em  $z = t/2$  e calculando-se os momentos segundo a equação III.1.a, assim como utilizando-se as equações III.3, chega-se a

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{t^3}{12} \begin{bmatrix} E' & E'' & 0 \\ E'' & E'y & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} - \frac{2T_0}{t} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{III.6})$$

De uma forma genérica pode-se escrever

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_k (\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \quad (\text{III.7.a})$$

onde:  $\mathbf{M} = \{ M_x \ M_y \ M_{xy} \ }^t \quad (\text{III.7.b})$

$$\mathbf{K} = \{ w_{,xx} \ w_{,yy} \ 2w_{,xy} \ }^t \quad (\text{III.7.c})$$

$$\mathbf{K}_0 = \{ 2\alpha_x T_0 / t \ 2\alpha_y T_0 / t \ 0 \ }^t \quad (\text{III.7.d})$$

Em se tratando de material isotrópico, o coeficiente de dilatação térmica será  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$ .

$D_k$  é a matriz de elasticidade, que, para material isotrópico, tem os seguintes termos não-nulos

$$D_{k11} = D_{k22} = D_{k12}/v = D_k \text{ com } D_k = Et^3/(12(1-v^2)) \text{ e}$$

$$D_{k33} = ((1 - v)/2) D_k.$$

### III.1.1.2 PLACAS ESPESSAS (TEORIA DE MINDLIN)

Quando a espessura da placa deixa de ser muito pequena em relação às dimensões da superfície média, a deformação de cisalhamento associada ao esforço cortante passa a ser significativa, semelhante ao que acontece com as vigas de grande altura. Neste caso, em caráter aproximado, supõe-se que um segmento de reta normal à superfície média, antes da deformação, continue reto, porém não mais normal à superfície média depois da deformação [31][33][36]. Os deslocamentos de um ponto fora da superfície média não são mais governados pelas derivadas do deslocamento  $w(x,y)$ , e sim pelos pequenos ângulos  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , veja figura III.4.

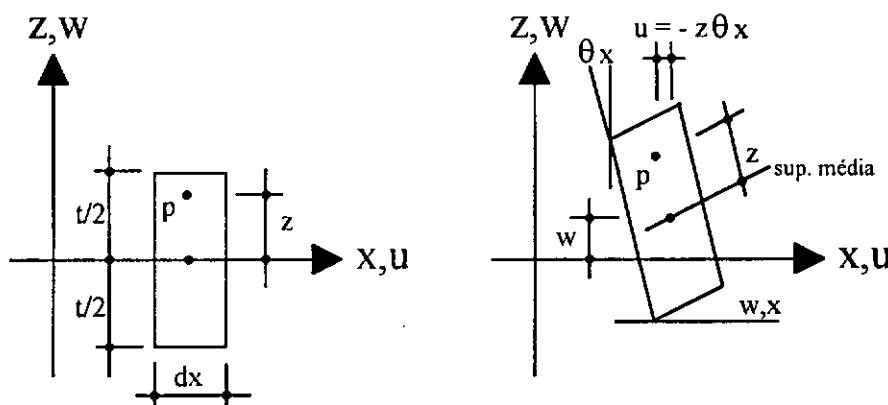


Figura III.4 - Deslocamento de um ponto p, teoria de Mindlin.

Deve-se frisar que  $w,x \neq \theta_x$  e que  $\gamma_{xz} = w,x - \theta_x \neq 0$ ; logo, tem-se

$$u = -z\theta_x \quad v = -z\theta_y \quad (\text{III.8})$$

$$\epsilon_{x,z} = -z\theta_{x,x} \quad \epsilon_{y,z} = -z\theta_{y,y} \quad (\text{III.9.a})$$

$$\gamma_{xy} = -z (\theta_x, y + \theta_y, x) \quad \gamma_{yz} = w, y - \theta_y \quad \gamma_{xz} = w, x - \theta_x \quad (\text{III.9.b})$$

As relações momento-curvatura para a teoria de Mindlin são obtidas da mesma forma que as da teoria de Kirchhoff, só que naquelas deve-se usar as equações III.9 e também incluir as tensões cisalhantes devidas às forças cortantes, que são

$$\tau_{yz} = G_{yz} \gamma_{yz} \quad \tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} \quad (\text{III.10})$$

Obtém-se, então

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_k & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yzt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xzt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x, x \\ \theta_y, y \\ \theta_x, y + \theta_y, x \\ w, y - \theta_y \\ w, x - \theta_x \end{Bmatrix} - \mathbf{K}_o \quad (\text{III.11})$$

Nesta equação III.11,  $\mathbf{K}_o$  é o mesmo da equação III.7.d, adicionando-se os termos nulos  $K_{o4} = K_{o5} = 0$ .

As tensões  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$ , embora de leis parabólicas, veja figura III.1, são aproximadas por uma tensão constante igual a  $5\tau_{yz}/6$  e  $5\tau_{xz}/6$ , respectivamente [31][33].

De uma forma compacta, pode-se escrever

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_m (\mathbf{K} - \mathbf{K}_o) \quad (\text{III.12})$$

### III.1.2 ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS

Existe uma grande variedade de elementos finitos para placas [35], formulados usualmente a partir do funcional energia potencial total.

Para os problemas nos quais não se conhece o funcional de energia, pode-se usar o método dos resíduos ponderados [31].

Para elasticidade linear, o funcional energia potencial total se escreve

$$\Pi_p = \int_V \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV - \int_V \mathbf{u}^t \mathbf{F} dV - \int_S \mathbf{u}^t \boldsymbol{\Phi} dS - \mathbf{D}^t \mathbf{P}$$

(III.13)

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  são deformações,  $\mathbf{E}$  é a matriz de elasticidade,  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  são deformações iniciais,  $\boldsymbol{\sigma}_0$  são tensões iniciais,  $\mathbf{u}$  são deslocamentos,  $\mathbf{F}$  são forças de volume,  $\boldsymbol{\Phi}$  são forças da superfície,  $\mathbf{D}$  são deslocamentos nodais e  $\mathbf{P}$  são forças externas concentradas.

No método dos elementos finitos, o domínio é dividido em sub-domínios denominados elementos, onde em cada um se adota uma aproximação para as variáveis dependentes em função de valores nodais e o referido funcional é escrito como a soma das contribuições dos diversos elementos.

Na teoria de Kirchhoff, o funcional energia potencial total tem derivadas segundas dos deslocamentos  $w$ , o que exige que os elementos finitos formulados com esta teoria sejam de classe  $C^1$ .

Na teoria de Mindlin, o funcional energia potencial total tem apenas derivadas primeiras de  $w$  e das rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , o que exige que os elementos finitos formulados com esta teoria sejam de classe  $C^0$ .

## III.2 CASCAS

Cascas são elementos estruturais de superfície média curva em que a espessura  $t$  é muito menor que os raios de curvatura da superfície média, e pode-se fazerem presentes os esforços de flexão e de membrana. A superfície média das cascas pode ser definida pelas linhas de curvatura principal, que formam duas famílias de curvas ortogonais entre si. O raio de curvatura pode variar de ponto a ponto ou ser constante em uma ou duas direções. Pode-se dizer que as placas e problemas de estado plano de tensões são casos particulares das cascas.

Desta forma, os esforços de flexão da casca são aqueles apresentados na equação III.1; e os de membrana são as resultantes das componentes de tensão do estado plano de tensões

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \quad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz \quad N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (\text{III.14})$$

onde x e y são coordenadas curvilineas ortogonais e z é perpendicular à superficie média.

Um elemento finito formulado a partir da teoria clássica de cascas é muito trabalhoso por ser de classe  $C^1$ . Para maior facilidade, é usual considerar que a superficie média da casca é formada por elementos finitos planos, triangulares ou quadrangulares. Desta forma, pode-se construir um elemento plano de casca que seja a soma de um elemento de estado plano de tensões[32][31] com um de flexão de placa [31][33]. Pode-se também degenerar um elemento sólido [32][31], ou seja, tornar a dimensão na direção z muito pequena, obtendo-se desta forma um elemento de casca plano ou curvo, que pode ser usado para casca delgada e espessa [31][33].

# **CAPÍTULO IV**

## **DEPENDÊNCIA LINEAR CLÁSSICA ENTRE DESLOCAMENTOS**

Em edifícios altos, é comum considerar a laje funcionando como um diafragma rígido [2][6][11][[12][13][14]]. Esta consideração leva a uma dependência entre certos deslocamentos de nós contidos no plano da laje. As vigas normalmente apresentam seus nós terminais excêntricos em relação aos nós dos pilares [2][6][11][[12][13][14][15][16][17]], formando trechos que podem ser considerados infinitamente rígidos. Estas excentricidades são entendidas como uma dependência total entre os deslocamentos dos nós terminais das vigas e os nós dos pilares. Pode-se expressar estas relações deduzindo-se diretamente a matriz de rigidez da viga em relação aos extremos dos trechos rígidos [15][16], ou em forma de produtos matriciais [1][11][12][13][14][16][17] que transformem a matriz de rigidez de uma viga comum na de uma viga com extremos rígidos. Os pilares podem sofrer redução excêntrica de seção, ocasionando excentricidade entre os nós dos mesmos [11][12][13]. Em blocos de estaqueamento, considerando-se o bloco rígido [18], ocorre também a dependência de todos os deslocamentos dos nós ligados ao bloco. Estes casos de dependência são facilmente considerados através de uma matriz, que está bem apresentada em [1].

Esta metodologia só permite considerar casos em que as rotações e translações estejam acopladas, como por exemplo, translações num plano com rotação perpendicular a este plano, o que ocorre em edifícios altos quando a laje é considerada como diafragma. Em bloco de estaqueamento e quando da consideração de extremos rígidos de elementos, onde a dependência entre deslocamentos é total, as rotações  $xx$  e  $yy$  se relacionam com a translação  $z$ , rotações  $xx$  e  $zz$  com a translação  $y$  e rotações  $yy$  e  $zz$  com a translação  $x$ .

## IV.1 FORMULAÇÃO DA DEPENDÊNCIA LINEAR CLÁSSICA ENTRE DESLOCAMENTOS

A dependência entre deslocamentos nodais de um modelo estrutural é conhecida na literatura internacional através do conceito de nós "master" e "slave"[1].

Para considerar esta dependência, pode-se construir uma matriz capaz de fazer as transformações entre deslocamentos correspondentes[1]. Considere-se que os deslocamentos do nó i sejam dependentes do nó j e que eles estejam afastados entre si, no espaço tridimensional, de  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  como mostra a figura IV.1. Expressando-se os deslocamentos do nó i em função dos deslocamentos do nó j, tem-se.

$$u_{1i} = u_{1j} - dz u_{5j} + dy u_{6j} \quad (\text{IV.1a})$$

$$u_{2i} = u_{2j} + dz u_{4j} - dx u_{6j} \quad (\text{IV.1b})$$

$$u_{3i} = u_{3j} - dy u_{4j} + dx u_{5j} \quad (\text{IV.1c})$$

$$u_{4i} = u_{4j} \quad (\text{IV.1d})$$

$$u_{5i} = u_{5j} \quad (\text{IV.1e})$$

$$u_{6i} = u_{6j} \quad (\text{IV.1f})$$

onde:

$$dx = X_j - X_i \quad (\text{IV.1g})$$

$$dy = Y_j - Y_i \quad (\text{IV.1h})$$

$$dz = Z_j - Z_i \quad (\text{IV.1i})$$

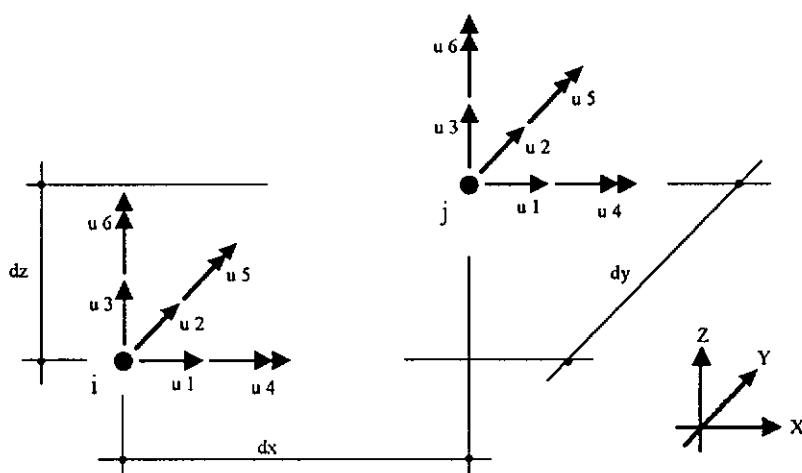


Figura IV.1 - Deslocamentos nodais e distância entre os nós i e j.

Com estas expressões pode-se escrever a seguinte matriz de transformação:

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -dz & dy \\ 0 & 1 & 0 & dz & 0 & -dx \\ 0 & 0 & 1 & -dy & dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

É mais prático escrever a matriz  $\mathbf{T}_{ij}$  com os seus termos referidos ao sistema de referência global. Desta maneira, pode-se escrever que

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{T}_{ij} \mathbf{U}_j \quad (\text{IV.3})$$

Agora, considere-se o sistema de forças localizado no nó i, figura IV.2, que será transformado num outro sistema de forças localizado no nó j. Reduzindo as três forças e os três momentos um a um, tem-se

$$f_{1j} = f_{1i} \quad (\text{IV.4a})$$

$$f_{2j} = f_{2i} \quad (\text{IV.4b})$$

$$f_{3j} = f_{3i} \quad (\text{IV.4c})$$

$$f_{4j} = f_{4i} + dz f_{2i} - dy f_{3i} \quad (\text{IV.4d})$$

$$f_{5j} = f_{5i} - dz f_{1i} + dx f_{3i} \quad (\text{IV.4e})$$

$$f_{6j} = f_{6i} + dy f_{1i} - dx f_{2i} \quad (\text{IV.4f})$$

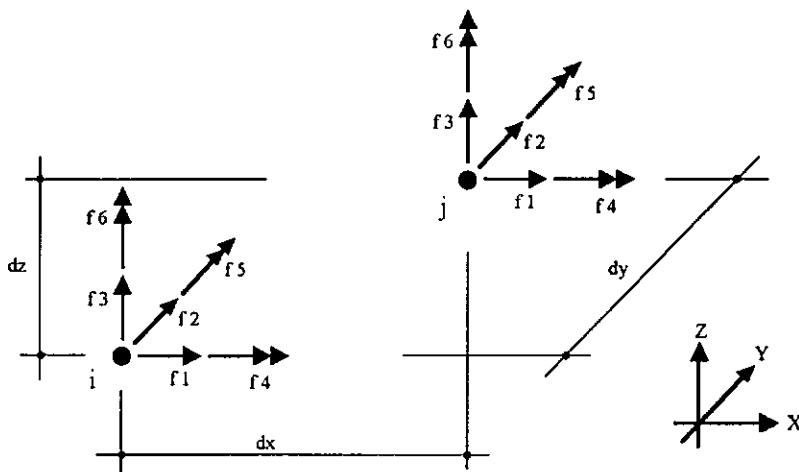


Figura IV.2 - Forças nodais e distância entre os nós i e j.

Com isto, pode-se escrever uma matriz que transforme o sistema de forças do nó i para o nó j:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dz & -dy & 1 & 0 & 0 \\ -dz & 0 & dx & 0 & 1 & 0 \\ dy & -dx & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Nota-se que a matriz (IV.5) é a transposta da matriz (IV.2), desta maneira pode-se escrever que

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{T}_{ij}^t \mathbf{F}_i \quad (\text{IV.6})$$

A equação IV.6 pode ser obtida também pelo princípio dos trabalhos virtuais. Sabe-se que a energia é invariável em relação ao sistema de coordenadas. Logo, o trabalho virtual no nó i é igual ao do nó j, e portanto, tem-se

$$\delta U_o = \delta \mathbf{U}_j^t \mathbf{F}_j = \delta \mathbf{U}_i^t \mathbf{F}_i \quad (\text{IV.7})$$

Substituindo-se a equação IV.3 em IV.7 obtem-se

$$\delta \mathbf{U}_j^t \mathbf{F}_j = \delta \mathbf{U}_j^t \mathbf{T}_{ij}^t \mathbf{F}_i \quad (\text{IV.8})$$

resultando em

$$\delta \mathbf{U}_j^t (\mathbf{F}_j - \mathbf{T}_{ij}^t \mathbf{F}_i) = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Como  $\delta \mathbf{U}_j$  é arbitrário, o termo entre parênteses deve ser igual a zero, resultando na equação IV.6.

Considerando-se, no sistema de equações de equilíbrio de um elemento estrutural, apenas os deslocamentos  $\mathbf{U}_i$  diferentes de zero, pode-se escrever

$$\mathbf{Sg}_i \mathbf{U}_i = \mathbf{F}_i \quad (\text{IV.10})$$

$\mathbf{Sg}_i$  é a matriz de rigidez do nó i no mesmo sistema de coordenadas dos vetores  $\mathbf{U}_i$  e  $\mathbf{F}_i$ ; logo, tem-se

$$\mathbf{Sg}_i \mathbf{T}_{ij} \mathbf{U}_j = \mathbf{F}_i \quad (\text{IV.11})$$

Multiplicando-se ambos os membros desta última equação por  $\mathbf{T}^t$ , tem-se

$$\mathbf{T}_{ij}^t \mathbf{Sg}_i \mathbf{T}_{ij} \mathbf{U}_j = \mathbf{T}_{ij}^t \mathbf{F}_i \quad (\text{IV.12})$$

Pode-se deduzir a equação IV.12 pelo princípio dos trabalhos virtuais. Assim, substituindo-se a equação IV.6 e IV.10 em IV.9, tem-se

$$\delta \mathbf{U}_j^t (\mathbf{T}_{ij}^t \mathbf{F}_i - \mathbf{T}_{ij}^t \mathbf{Sg}_i \mathbf{U}_i) = 0 \quad (\text{IV.13})$$

Substituindo-se a equação IV.3 em IV.13, tem-se

$$\delta \mathbf{U}_j^t (\mathbf{T}_{ij}^t \mathbf{F}_i - \mathbf{T}_{ij}^t \mathbf{Sg}_i \mathbf{T}_{ij} \mathbf{U}_j) = 0 \quad (\text{IV.14})$$

Como  $\delta \mathbf{U}_j$  é arbitrário, a expressão entre parênteses na equação IV.14 deve ser igual a zero, resultando na equação IV.12.

Para um elemento de dois nós i e k, em que i é dependente de j e k é dependente de l, tem-se

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{kl} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15.a})$$

Para um elemento de três nós, como de placa ou casca, onde o terceiro nó n é dependente do nó p, tem-se

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ij} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{kl} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{np} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15.b})$$

e assim por diante.

Fazendo as mesmas transformações das equações (IV.10), (IV.11) e (IV.12), a nível de elemento, tem-se

$$\mathbf{T}_e^t \mathbf{Sg}_e \mathbf{T}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{T}_e^t \mathbf{Fg}_e \quad (\text{IV.16})$$

onde:

$\mathbf{Sg}_e$  é a matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenada global;

$\mathbf{U}_e$  é o vetor dos deslocamentos do elemento no sistema global;

$\mathbf{Fg}_e$  é o vetor de forças do elemento no sistema global.

Se a transformação (IV.16) for feita com a matriz de rigidez do elemento no sistema local, a matriz de transformação  $\mathbf{T}_e$  também deve estar no sistema de referência local.

## IV.2 FORMAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA ESTRUTURA

Para a programação automática, é necessário descrever as dependências entre deslocamentos nodais dos modelos estruturais. Para isso, pode-se seguir o seguinte procedimento:

- O usuário fornecerá ao programa, além dos dados usuais de um programa comum, uma tabela com todos os nós dependentes e seus respectivos mestres, indicando as direções que são dependentes. Por exemplo, para uma estrutura com 7 nós e 4 nós dependentes, são fornecidos, veja tabela IV.1:

Nós		Direções					
Dependente	Mestre	x	y	z	xx	yy	zz
3	5	1	1	1	1	1	1
5	2	1	1	0	0	0	1
4	1	1	1	0	0	0	1
7	6	1	1	1	1	1	1

Tabela IV.1 - Dependência entre deslocamentos, fornecida pelo usuário.

Obs.: O número 1(um) nas direções representa dependência.

- Para maior eficiência computacional, o programa poderá construir uma outra tabela a partir da tabela IV.1, colocando-se nas colunas dos diversos deslocamentos nodais os correspondentes números dos nós mestres.

Nós	deslocamentos/nós mestres					
	x	y	z	xx	yy	zz
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	2	2	5	5	5	2
4	1	1	4	4	4	1
5	2	2	5	5	5	2
6	6	6	6	6	6	6
7	6	6	6	6	6	6

Tabela IV.2 - Dependências entre deslocamentos de uso interno do programa.

Caso não se queira ocupar memória principal (RAM) com toda a tabela IV.2, pode-se ter uma rotina (procedimento) pela qual, uma vez fornecido um nó, ela retorne à numeração das equações mestras dos deslocamentos daquele nó, através de simples consulta à tabela IV.2 e o uso da seguinte expressão:

$$\text{Num\_equa} = (j - 1) \text{ndesno} + \text{desl} \quad (\text{IV.17})$$

onde:

Num\_equa - Número da equação da direção do nó dependente i;

j - nó mestre em questão;

ndesno - número de deslocamento nodal;

desl - deslocamento em questão.

Os deslocamentos nodais dependentes não precisam ter suas numerações retiradas para a formação do vetor apontador necessário à montagem da matriz de rigidez pela técnica do perfil. Basta que se coloque nesta matriz de rigidez um número qualquer, maior do que zero, na diagonal principal nas posições correspondentes aos deslocamentos dependentes, para evitar a singularidade desta matriz.

## IV.3 VETOR DE FORÇAS E DE DESLOCAMENTOS

Quanto ao vetor de forças, se ele for formado com a numeração primitiva, ou seja, com a numeração anterior à formação da tabela IV.2, o mesmo pode ser corrigido com auxílio da equação IV.6, não se esquecendo de zerar as posições correspondentes aos deslocamentos dependentes. Mas, o vetor de forças pode ser construído diretamente com a numeração mestra com seus valores devidamente corrigidos pela equação IV.6, quando reduzido do nó dependente para o mestre.

Uma vez resolvido o sistema global de equações, tem-se todos os deslocamentos mestres. Os dependentes são obtidos com valores nulos ou próximos de zero, caso seja usada a técnica do número grande na direção dependente da diagonal principal da matriz de rigidez global. Assim, os deslocamentos dependentes devem ser corrigidos pela equação IV.3. Feita esta correção, os esforços nos elementos podem ser calculados.

## IV.4 ACOPLAMENTO ENTRE TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO

A matriz  $T_{ij}$  foi deduzida para um nó inteiramente dependente de outro, como é o caso do nó 7, da tabela IV.2. Entretanto, ela pode ser construída para casos de dependência parcial, como os nós 3, 4 e 5 da tabela IV.2. Para isto, faz-se cada coluna da matriz separadamente. Por exemplo: para o nó 3, constrói-se a coluna 1 com nó dependente 3 e nó mestre 2, coluna 2 com nó dependente 3 e nó mestre 2, coluna 3 com nó dependente 3 e nó mestre 5, coluna 4 com nó dependente 3 e nó mestre 5, coluna 5 com nó dependente 3 e nó mestre 5 e, finalmente, coluna 6 com nó dependente 3 e nó mestre 2. Esta nova matriz estará relacionando translações e rotações de nós distintos, como a translação x do nó 2 com a rotação yy do nó 5 e a rotação zz do nó 2. Para o nó 4 da tabela IV.2, que é equivalente ao caso de diafragma rígido em

edifícios altos, se os nós 4 e 1 estiverem no plano xy, as colunas 4 e 5 da matriz  $\mathbf{T}_{ij}$  terão apenas o número um na diagonal principal, com os demais termos dessas colunas nulos; e, neste caso, tornar-se-ão dependentes as translações do plano xy e a rotação zz. Apesar de todas estas considerações referentes à matriz  $\mathbf{T}_{ij}$ , ela só pode ser aplicada em alguns modelos estruturais, tais como extremidade rígida de elemento, consideração de diafragma rígido em edifício alto, bloco de estaqueamento e alteração de comprimento elástico de elemento de treliça.

Para o modelo da figura IV.3, a matriz  $\mathbf{T}_{ij}$  não é adequada, pois não desacopla as dependências do nó 3, em que a translação x é dependente da translação x e da rotação zz do nó 1, a translação y é dependente da translação y do nó 4 e a rotação zz do nó 3 é dependente de si mesma. Assim, com a matriz clássica de dependência, o usuário não pode considerar qualquer dependência linear entre deslocamentos, pois um deslocamento x de um nó não pode ser arbitrariamente dependente do deslocamento x de outro nó.

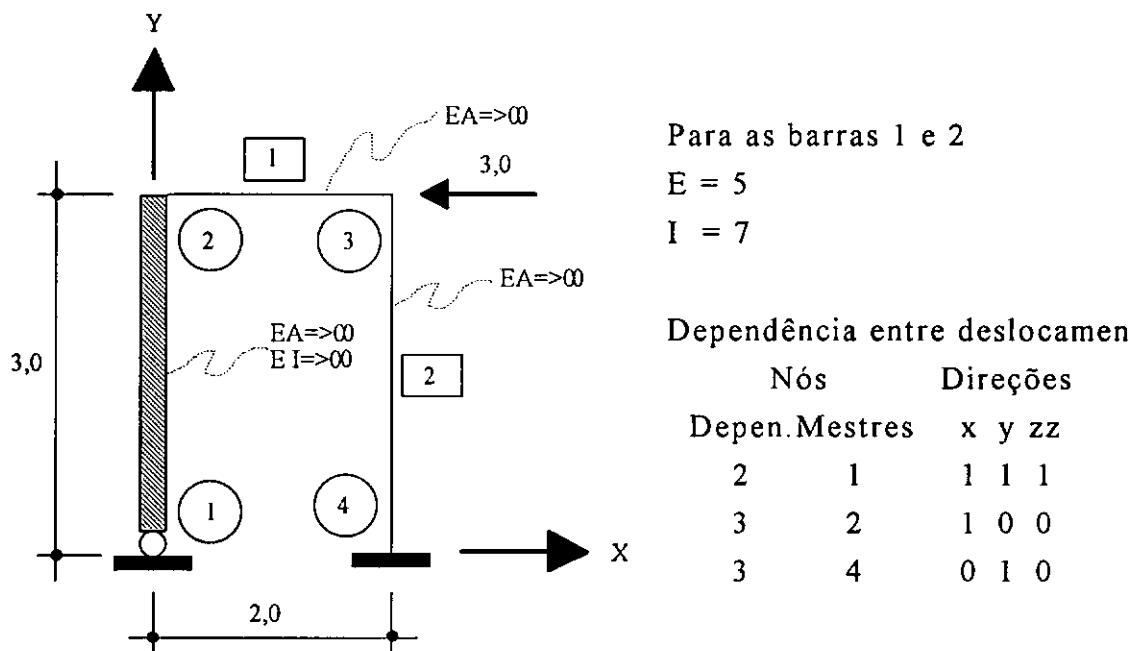


Figura IV.3 - Estrutura plana com dependência entre deslocamentos.

Para desenvolvimento de idéias, considere-se a estrutura do galpão mostrada na figura IV.4, onde a cobertura feita por uma treliça espacial é considerada como rígida no plano xy e com rigidez de flexão nula, para simplificar a análise dos pilares. Neste caso, os pilares são engastados na base e rotulados no ponto de conexão com a treliça espacial. Pode-se observar que os nós dependentes do movimento de corpo rígido da treliça não estão todos no mesmo plano. Considere-se que o nó 13, escolhido para representar o movimento de corpo rígido da treliça, esteja no mesmo plano que os nós 9 e 12; e que os nós 7, 8, 10 e 11 estejam num outro plano paralelo. Assim, ao se formar a matriz  $T_{ij}$  para os nós que não estão no plano do nó que representa o movimento de corpo rígido, tem-se uma matriz  $T_{ij}$  com todos os termos indicados na equação IV.2 diferentes de zero. Desta forma, as rotações de xx e yy estarão contribuindo com as translações do plano xy. Se os termos dz da matriz  $T_{ij}$  forem anulados, para impedir tal acoplamento, cometer-se-á um erro de mecânica, pois ao se reduzir uma força aplicada em um nó fora do plano onde está contido o nó que representa o movimento de corpo rígido da treliça, através da transposta de  $T_{ij}$ , não aparecerão os momentos em xx e yy. Desta forma, a estrutura da figura IV.4 não poderá ser calculada com o auxílio da matriz  $T_{ij}$ . Observe-se que as dependências deste modelo estrutural são todas possíveis e reais, podendo ser simuladas com a introdução de barras com rigidez elevada. Entretanto, a rigidez elevada destas barras introduz números muito grandes fora da diagonal principal, reduzindo, devido a erros numéricos, a precisão da solução.

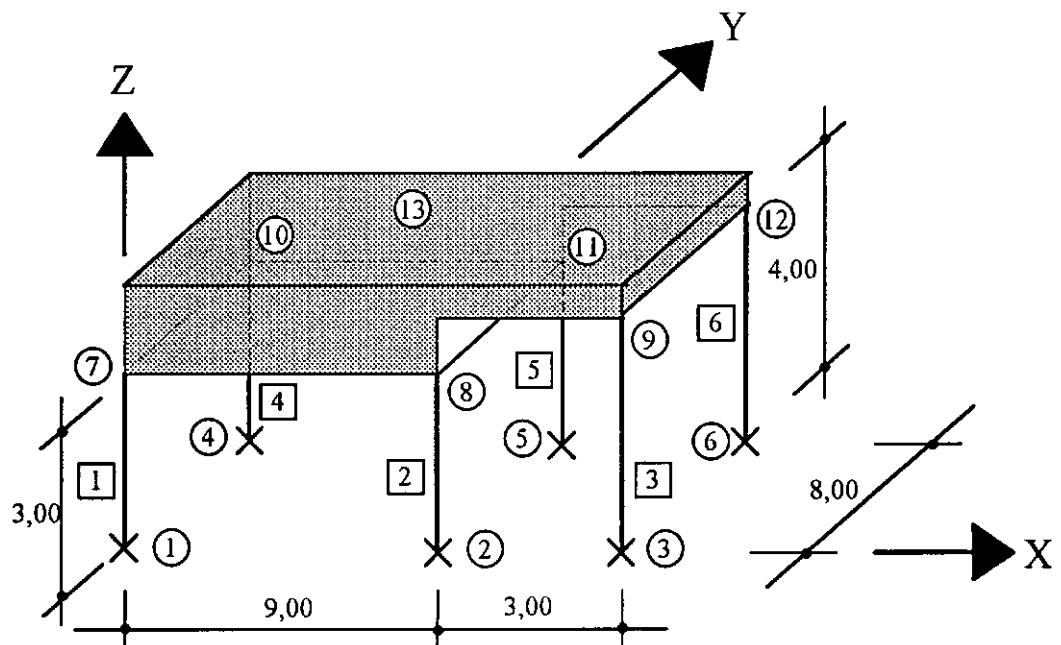


Figura IV.4 - Galpão com treliça espacial apoiada em pilares.

Para poder analisar os modelos da figura IV.3 e figura IV.4, bem como qualquer outra dependência linear entre deslocamentos, deve-se desacoplar os efeitos e causas relacionados com a translação e rotação.

# CAPÍTULO V

## DEPENDÊNCIA LINEAR GENERALIZADA ENTRE DESLOCAMENTOS

Diversas relações de dependência entre deslocamentos de certos modelos estruturais não podem ser levadas em consideração através da matriz (IV.2), pelos motivos expostos no final do capítulo IV. Com o intuito de generalizar essas dependências, propõe-se neste capítulo um desacoplamento entre as causas e os efeitos oriundos da translação e rotação dos pontos nodais da estrutura. Com este desacoplamento, poder-se-á considerar uma translação desvinculada da rotação e vice-versa.

### V.1 GENERALIZAÇÃO DAS DEPENDÊNCIAS NODAIS

Considere-se a dependência entre deslocamentos exemplificada pela figura V.1, onde o deslocamento  $u_{lj}$  é mestre do deslocamento  $u_{l_1}$ ,  $u_{2k}$  é mestre de  $u_{2_1}$ ,  $u_{3_1}$  de  $u_{3_1}$ ,  $u_{4m}$  de  $u_{4_1}$ ,  $u_{5n}$  de  $u_{5_1}$  e  $u_{6p}$  de  $u_{6_1}$ . Em princípio, as translações do nó i são iguais às translações dos seus mestres correspondentes, mais os efeitos de translações provocados pelas rotações do nó onde se define o deslocamento mestre. As rotações do nó i são iguais às rotações dos seus mestres equivalentes. As distâncias entre os nós que contém os deslocamentos mestres e dos dependentes são dadas por dx, dy e dz. Por exemplo, para o nó dependente i e seu mestre j, tem-se, pela figura V.2.a:

$$dx_{ij} = X_j - X_i \quad (V.1.a)$$

$$dy_{ij} = Y_j - Y_i \quad (V.1.b)$$

$$dz_{ij} = Z_j - Z_i \quad (V.1.c)$$

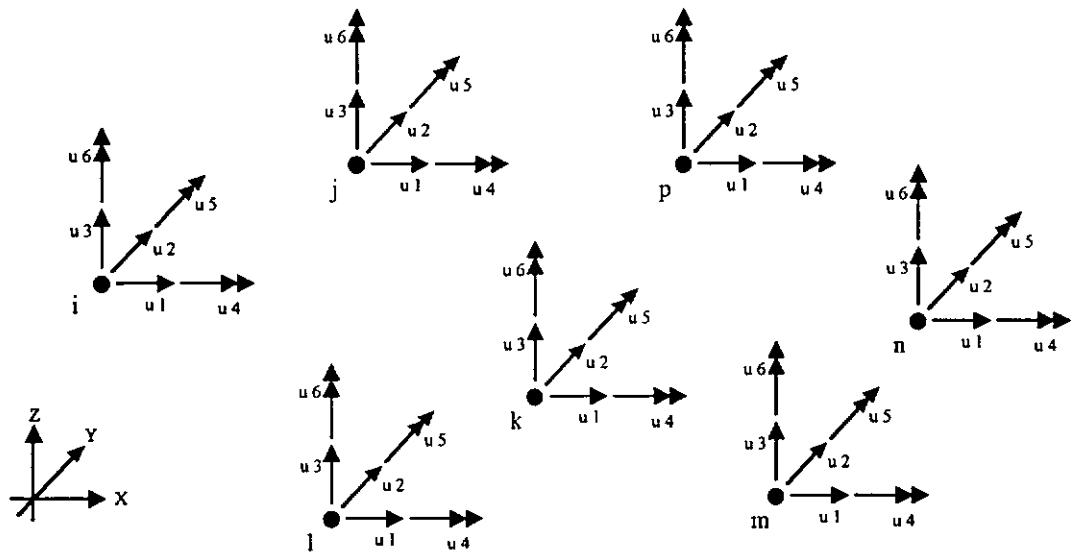


Figura V.1 - Numeração de nós e deslocamentos nodais.

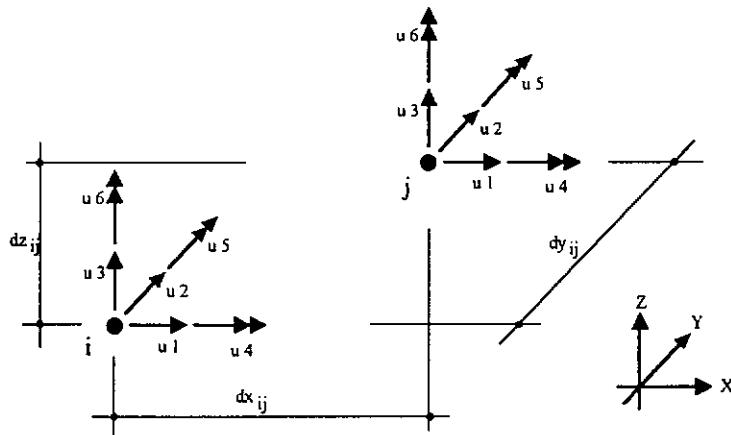


Figura V.2.a - Distância entre os nós i e j.

Para o nó dependente  $i$  e seu mestre  $k$ , tem-se, pela figura V.2.b:

$$dx_{ik} = X_k - X_i \quad (\text{V.1.d})$$

$$dy_{ik} = Y_k - Y_i \quad (\text{V.1.e})$$

$$dz_{ik} = Z_k - Z_i \quad (\text{V.1.f})$$

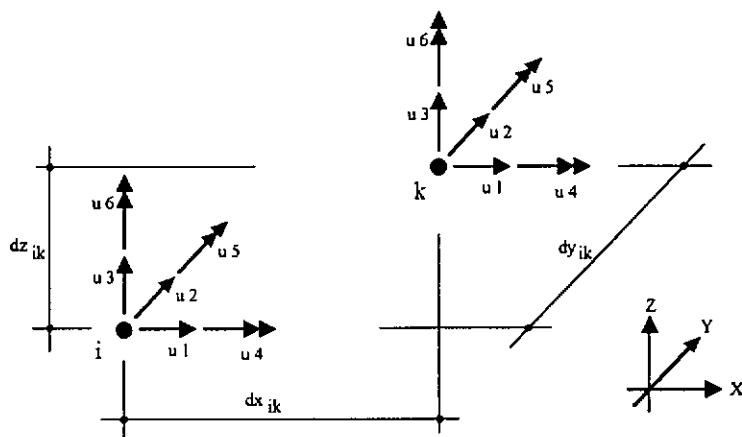


Figura V.2.b - Distância entre os nos i e k.

e analogamente, para os nós l, m, n e p da figura V.1.

A dependência descrita anteriormente permite escrever

$$u_{1i} = u_{1j} - dz_{ij} u_{5j} + dy_{ij} u_{6j} \quad (\text{V.2.a})$$

$$u_{2i} = u_{2k} + dz_{ik} u_{4k} - dx_{ik} u_{6k} \quad (\text{V.2.b})$$

$$u_{3i} = u_{3l} - dy_{il} u_{4l} + dx_{il} u_{5l} \quad (\text{V.2.c})$$

$$u_{4i} = u_{4m} \quad (\text{V.2.d})$$

$$u_{5i} = u_{5n} \quad (\text{V.2.e})$$

$$u_{6i} = u_{6p} \quad (\text{V.2.f})$$

Estas últimas equações, na forma matricial, fornecem

$$\begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -dz & dy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \end{Bmatrix}_j +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & dz & 0 & -dx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ik} \begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \end{Bmatrix}_k$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -dy & dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{il} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_l +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{im} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_m +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{in} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_n +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{ip} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_p \quad (V.3)$$

Escrevendo-se a equação anterior de uma forma matricial compacta, tem-se

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{T}'_{ij} \mathbf{U}_j + \mathbf{T}'_{ik} \mathbf{U}_k + \mathbf{T}'_{il} \mathbf{U}_l + \mathbf{T}'_{im} \mathbf{U}_m + \mathbf{T}'_{in} \mathbf{U}_n + \mathbf{T}'_{ip} \mathbf{U}_p \quad (V.4)$$

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{T}'_{ij} & \mathbf{T}'_{ik} & \mathbf{T}'_{il} & \mathbf{T}'_{im} & \mathbf{T}'_{in} & \mathbf{T}'_{ip} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_j \\ \mathbf{U}_k \\ \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_m \\ \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_p \end{Bmatrix} \quad (V.5)$$

$$\mathbf{T}''_i = \begin{bmatrix} \mathbf{T}'_{ij} & \mathbf{T}'_{ik} & \mathbf{T}'_{il} & \mathbf{T}'_{im} & \mathbf{T}'_{in} & \mathbf{T}'_{ip} \end{bmatrix} \quad (V.6)$$

$$\mathbf{U}''_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_j \\ \mathbf{U}_k \\ \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_m \\ \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_p \end{Bmatrix} \quad (V.7)$$

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{T}''_i \mathbf{U}''_i \quad (V.8)$$

A matriz  $\mathbf{T}''_i$  possui várias colunas de coeficientes nulos, evidenciando que os deslocamentos correspondentes no vetor  $\mathbf{U}''_i$  não são necessários para a determinação dos deslocamentos dependentes do nó  $i$ . Destarte, pode-se retirar esses deslocamentos, simplificando a matriz  $\mathbf{T}''_i$  e o vetor  $\mathbf{U}''_i$  evitando-se o cômputo de linhas e colunas nulas na matriz de rigidez transformada do elemento. Desta forma, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} 1 & -dz_{ij} & dy_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & dz_{ik} & -dx_{ik} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -dy_{il} & dx_{il} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1j} \\ u_{5j} \\ u_{6j} \\ u_{2k} \\ u_{4k} \\ u_{6k} \\ u_{3l} \\ u_{4l} \\ u_{5l} \\ u_{4m} \\ u_{5n} \\ u_{6p} \end{Bmatrix} \quad (V.9)$$

Assim, pode-se expressar  $\mathbf{U}_i$ , numa forma matricial compacta, como:

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{T}^*_i \mathbf{U}^{*_i} \quad (V.10)$$

É intuitivo que as forças devam ser levadas do nó i para os seus respectivos mestres, veja figura V.3. O sistema de forças do nó i será dividido em vários sistemas: uma força ou momento em cada nó (j, k, l, m, n e p). Deve-se observar que quando  $f_{1i}$  for levado para  $f_{1j}$ , aparecerão em j momentos devidos ao transporte de uma força para outro ponto no espaço. Por este motivo é que a translação  $u_{1i}$  é igual à translação  $u_{1j}$  mais as translações devidas às rotações  $u_5$  e  $u_6$ . Fazendo-se a redução das forças uma a uma, tem-se

$f_{1i}$  para o nó j

$$f_{1j} = f_{1i}; f_{5j} = -dz_{ij} f_{1i}; f_{6j} = dy_{ij} f_{1i} \quad (\text{V.11.a})$$

$f_{2i}$  para o nó k

$$f_{2k} = f_{2i}; f_{4k} = dz_{ik} f_{2i}; f_{6k} = -dx_{ik} f_{2i} \quad (\text{V.11.b})$$

$f_{3i}$  para o nó l

$$f_{3l} = f_{3i}; f_{4l} = -dy_{il} f_{3i}; f_{5l} = dx_{il} f_{3i} \quad (\text{V.11.c})$$

$f_{4i}$  para o nó m

$$f_{4m} = f_{4i} \quad (\text{V.11.d})$$

$f_{5i}$  para o nó n

$$f_{5n} = f_{5i} \quad (\text{V.11.e})$$

$f_{6i}$  para o nó p

$$f_{6p} = f_{6i} \quad (\text{V.11.f})$$

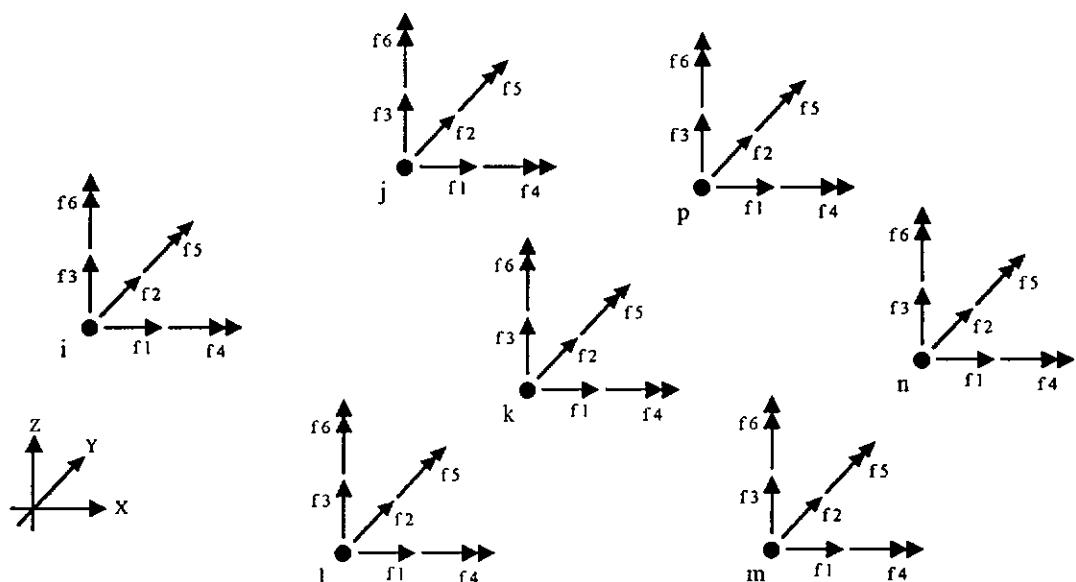


Figura V.3 - Numeração de nós e forças nodais.

Expressando-se as equações anteriores em forma matricial, tem-se

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -dz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_i \quad (V.12.a)$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dz & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dx & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ik} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_i \quad (V.12.b)$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -dy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{jl} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_i \quad (V.12.c)$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{im} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_i \quad (V.12.d)$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{in} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_i \quad (V.12.e)$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{ip} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_i \quad (V.12.f)$$

Analizando-se as matrizes das fórmulas (V.12.a,b,c,d,e,f), nota-se que estas são iguais às transpostas das matrizes da fórmula (V.3). Com isto, pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j \\ \mathbf{F}_k \\ \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_m \\ \mathbf{F}_n \\ \mathbf{F}_p \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}'_{ij} \quad \mathbf{T}'_{ik} \quad \mathbf{T}'_{il} \quad \mathbf{T}'_{im} \quad \mathbf{T}'_{in} \quad \mathbf{T}'_{ip}]^t \mathbf{F}_i \quad (V.13)$$

$$\mathbf{T}''_i^t = [\mathbf{T}'_{ij} \quad \mathbf{T}'_{ik} \quad \mathbf{T}'_{il} \quad \mathbf{T}'_{im} \quad \mathbf{T}'_{in} \quad \mathbf{T}'_{ip}]^t \quad (V.14)$$

$$\mathbf{F}''_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j \\ \mathbf{F}_k \\ \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_m \\ \mathbf{F}_n \\ \mathbf{F}_p \end{Bmatrix} \quad (V.15)$$

$$\mathbf{F}''_i = \mathbf{T}''_i^t \mathbf{F}_i \quad (V.16)$$

Da mesma forma como descrito para os deslocamentos, a matriz  $\mathbf{T}''_i$  possui várias colunas de coeficientes nulos, mostrando que várias posições do vetor  $\mathbf{F}''_i$  não recebem contribuições de forças e/ou momentos do nó i. Como foi simplificada a matriz  $\mathbf{T}''_i$ , resta simplificar o vetor  $\mathbf{F}''_i$ , resultando em

$$\begin{matrix}
 \left\{ \begin{array}{l} f_{1j} \\ f_{5j} \\ f_{6j} \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} f_{2k} \\ f_{4k} \\ f_{6k} \\ f_{3l} \\ f_{4l} \\ f_{5l} \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} f_{4m} \\ f_{5n} \\ f_{6p} \end{array} \right\}
 \end{matrix}
 = \begin{bmatrix}
 1 & -dz_{ij} & dy_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & dz_{ik} & -dx_{ik} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -dy_{il} & dx_{il} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}^t \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\}_j$$

(V.17)

Assim, pode-se expressar a transformação matricial anterior na forma compacta.

$$\mathbf{F}^{*_i}_j = \mathbf{T}^{*_i}_j \mathbf{F}_i \quad (\text{V.18})$$

Considere-se, agora, que o deslocamento  $u_{4j}$ , do nó  $j$ , figura V.1, seja dependente do deslocamento  $u_{4jm}$ , do nó  $jm$ , figura V.4;  $u_{5j}$  dependente de  $u_{5jn}$ ;  $u_{6j}$  de  $u_{6jp}$ ; e  $u_{1j}$ ,  $u_{2j}$  e  $u_{3j}$  dependentes de si mesmos. O nó  $j$  da figura V.1 é o mesmo que o da figura V.4. Desta forma, a matriz  $\mathbf{T}^{*_j}$  terá os coeficientes (1,2); (1,3); (2,5); (2,6); (3,8) e (3,9) nulos. Os termos unitários (1,1); (2,4) e (3,7) representam a dependência dos deslocamentos lineares do nó  $j$  para consigo mesmo, bem como o transporte de forças de  $j$  para o próprio  $j$ . Os termos unitários (4,10); (5,11) e (6,12) fazem as rotações  $u_{4j}$  igual a  $u_{4jm}$ ;  $u_{5j}$  igual a  $u_{5jn}$  e  $u_{6j}$  igual a  $u_{6jp}$ ; bem como transportam os momentos  $f_{4j}$  para  $f_{4jm}$ ;  $f_{5j}$  para  $f_{5jn}$  e  $f_{6j}$  para  $f_{6jp}$ . Isto ocorre porque rotações e momentos podem ser transportados de um ponto para outro no espaço sem provocar outros efeitos.

Uma outra forma de compreender as dependências do nó  $j$  é a seguinte: Considere-se que a dedução das dependências do nó  $i$  seja feita para o nó  $j$  e que o nó  $j$  desta dedução seja igual a  $j'$ . Para evitar confusão faz-se  $m$  igual a  $jm$ ,  $n$  igual a  $jn$  e  $p$  igual a  $jp$ . Desta forma tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \right\}_j = \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & -dz_{jj'} & dy_{jj'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & dz_{jk} & -dx_{jk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -dy_{jl} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_{1j'} \\ u_{5j'} \\ u_{6j'} \\ u^2_k \\ u^4_k \\ u^6_k \\ u^3_l \\ u^4_l \\ u^5_l \\ u^4_{jm} \\ u^5_{jn} \\ u^6_{jp} \end{array} \right\}$$

(V.19)

Considere-se também que o nó  $j'$  seja o próprio nó  $j$ , ou seja,  $j'$  é idêntico a  $j$ ,  $k$  idêntico a  $j$  e  $l$  idêntico a  $j$ . Desta forma, os nós  $j'$ ,  $k$  e  $l$  podem ser substituídos por  $j$  no vetor da equação V.19. Assim, a equação V.19 terá os termos (1,2), (1,3), (2,5), (2,6), (3,8) e (3,9) anulados, pois, com as coincidências física e geométrica citadas acima, a distância entre  $j$  e  $j'$  será nula, bem como as distâncias entre  $j$  e  $k$  e  $j$  e  $l$ , resultando na seguinte equação:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \right\}_j = \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_{1j} \\ u_{5j} \\ u_{6j} \\ u^2_j \\ u^4_j \\ u^6_j \\ u^3_j \\ u^4_j \\ u^5_j \\ u^4_{jm} \\ u^5_{jn} \\ u^6_{jp} \end{array} \right\}$$

(V.20)

Nota-se que a matriz de transformação da equação V.20 possui várias colunas nulas que podem ser retiradas, eliminando-se também as linhas correspondentes do vetor que se encontra do lado direito desta equação, resultando em

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1j} \\ u_{5j} \\ u_{6j} \\ u_{2jm} \\ u_{4jn} \\ u_{6jp} \end{Bmatrix} \quad (V.21)$$

A matriz de transformação da equação V.21 é uma matriz identidade, evidenciando que os vetores desta equação são iguais e portanto

$$U_j = \begin{Bmatrix} u_{1j} \\ u_{5j} \\ u_{6j} \\ u_{2jm} \\ u_{4jn} \\ u_{6jp} \end{Bmatrix} \quad (V.22)$$

A equação V.22 indica que os deslocamentos de rotação do nó j podem vir de nós diferentes, no caso jm, jn e jp, sem a necessidade de transformações ou produtos matriciais.

Destarte, as transformações para as dependências do nó j são desnecessárias, sendo necessário apenas que as rotações  $u_{5j}$  e  $u_{6j}$  do vetor  $\mathbf{U}^*_j$  sejam trocadas por  $u_{5jn}$  e  $u_{6jp}$ , respectivamente, e as forças  $f_{5j}$  e  $f_{6j}$ , do vetor  $\mathbf{F}^*_j$ , por  $f_{5jn}$  e  $f_{6jp}$ , respectivamente. Desta maneira, as dependências imaginadas na figura V.4 são implicitamente atendidas e este raciocínio pode ser repetido para os nós k e l da figura V.1. Os nós m, n e p não têm essa necessidade. Fazendo todas as alterações no vetor  $\mathbf{U}^*_j$  e  $\mathbf{F}^*_j$ , tem-se

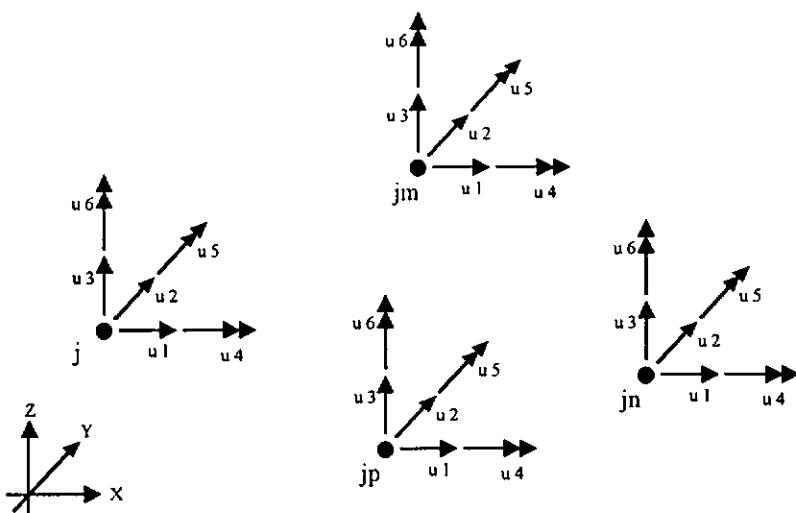


Figura V.4 - Numeração de nós e deslocamentos nodais.

$$\mathbf{U}^*_i = \begin{Bmatrix} u_{1j} \\ u_{5jn} \\ u_{6jp} \\ u_{2k} \\ u_{4km} \\ u_{6kp} \\ u_{3l} \\ u_{4lm} \\ u_{5ln} \\ u_{4m} \\ u_{5n} \\ u_{6p} \end{Bmatrix} \quad (V.23)$$

$$\mathbf{F}^*_i = \begin{Bmatrix} f_{1j} \\ f_{5jn} \\ f_{6jp} \\ f_{2k} \\ f_{4km} \\ f_{6kp} \\ f_{3l} \\ f_{4lm} \\ f_{5ln} \\ f_{4m} \\ f_{5n} \\ f_{6p} \end{Bmatrix} \quad (V.24)$$

Assim, as equações V.10 e V.18 se transformam em:

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{T}^*_i \mathbf{U}^*_i \quad (V.25)$$

$$\mathbf{F}^*_i = \mathbf{T}^*_i{}^t \mathbf{F}_i \quad (V.26)$$

Com tudo isto, os deslocamentos mestres para um nó dependente  $i$  podem ser oriundos de qualquer nó com translações e rotações desacopladas. Caberá ao usuário fornecer uma relação de dependência entre deslocamentos que descreva de forma correta o modelo que se deseja analisar.

Com as transformações V.25 e V.26, pode-se fazer as mesmas deduções das equação IV.10, IV.11 e IV.12, resultando em

$$\mathbf{T}^*_i{}^t \mathbf{S}_{gi} \mathbf{T}^*_i \mathbf{U}^*_i = \mathbf{T}^*_i{}^t \mathbf{F}_i \quad (V.27)$$

Para um elemento com os nós  $i$  e  $k$ , tem-se

$$\mathbf{T}^*_e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^*_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^*_k \end{bmatrix} \quad (V.28.a)$$

Para um elemento de  $n$  nós, como placa e casca, tem-se

$$\mathbf{T}^*_e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^*_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^*_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}^*_n \end{bmatrix} \quad (V.28.b)$$

Repetindo-se as transformações que foram feitas para obter a equação V.27, a nível de elemento estrutural, chega-se a

$$\mathbf{T}^*_e{}^t \mathbf{S}_{ge} \mathbf{T}^*_e \mathbf{U}^*_e = \mathbf{T}^*_e{}^t \mathbf{F}_{ge} \quad (V.29)$$

Com a transformação expressada na equação V.29, a matriz de rigidez tradicional do elemento estrutural será transformada para uma outra matriz que leva em consideração as dependências dos nós que se conectam ao elemento.

## V.2 NÚMERO DE DEPENDÊNCIAS NODAIS

Com a generalização das dependências nodais feitas no item V.1, pode-se observar, através da expansão das equações V.25 e

V.26, que um nó com seis deslocamentos - no caso, pórtico espacial ou casca, sendo três deslocamentos de translação e três de rotação - possui doze dependências, que podem ser oriundas de doze nós distintos. No vetor de deslocamentos generalizados, equação V.23, pode-se observar que cada deslocamento generalizado é oriundo de um nó e este nó é distinto dos nós dos outros deslocamentos. Isto não significa que um nó não possa depender apenas de um único nó ou que o nó  $k$  não possa ser igual a  $j$  ou a  $l$  ou a  $ln \dots$  ou igual a  $n$ . Um nó pode ser dependente de si mesmo, de um único nó, de dois nós, de três nós ... ou de doze nós distintos. Nestas condições, o usuário deverá definir para o programa de zero a doze dependências por nó, conforme a sua necessidade de descrever o modelo estrutural. Por comodidade, o usuário poderá fornecer apenas os dados dos nós que possuem dependências, ficando implícito que os outros nós não são dependentes ou dependem de si mesmo.

No capítulo IV foi apresentada a tabela IV.1 que é uma forma de entrada de dados de dependências para o caso clássico. Para dependências generalizadas, pode-se adaptar esta forma, através da inclusão de mais seis informações de rotações que ocorram no caso de deslocamentos generalizados, sendo duas rotações para cada translação, como é mostrado na tabela V.1.

Nós		Direções											
Dependente	Mestre	x	yy	zz	y	xx	zz	z	xx	yy	xx	yy	zz
3	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	2	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1
4	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1
7	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela V.1 - Dependência generalizada entre deslocamentos fornecida pelo usuário.

Obs.: O número 1(um) nas direções representa dependência.

As direções da tabela V.1 correspondem aos deslocamentos generalizados do vetor  $\mathbf{U}^*_j$ , equação V.23.

Na tabela V.1, o nó 3 é inteiramente dependente do nó 5, o que corresponde aos casos de bloco de estaqueamento, de redução de

seção de pilares com excentricidade ou de extremo rígido de viga, que ocorre em edifícios, ou extremo rígido de um elemento qualquer. O nó 5 corresponde ao caso de um diafragma rígido de edifício alto. Nota-se que o nó 5 não é dependente do nó 2 no segundo e quinto deslocamentos generalizados. Se estes dois deslocamentos forem colocados como dependentes, a relação entre os nós 5 e 2 não será mais de diafragma rígido, mas se  $dz$  entre os dois nós for igual a zero eles terão dependências equivalentes ao diafragma, por simples particularidade geométrica. É oportuno chamar a atenção para a importância da clara definição de dependência, como a da tabela V.1, para o caso de diafragma e outros, pois se forem utilizadas particularidades geométricas, um pequeno erro na geometria do modelo, sem muita importância para a estrutura, poderá alterar completamente a dependência que se pretende simular na análise.

A tabela V.1 é muito cômoda para o usuário, mas para agilizar o processamento é conveniente que o programa construa uma tabela similar à tabela IV.2, onde todos os nós estejam acompanhados dos seus mestres nas suas respectivas direções generalizadas. Admitindo-se que a tabela V.1 seja de uma estrutura de 7 nós, tem-se a tabela V.2.

Nós	direções/nós mestres												
	x	y	yy	zz	y	xx	zz	z	xx	yy	xx	yy	zz
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	5	2	2	5	2	5	5	5	5	5	5	2
4	1	4	1	1	4	1	4	4	4	4	4	4	1
5	2	5	2	2	5	2	5	5	5	5	5	5	2
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Tabela V.2 - Dependência generalizada entre deslocamentos, codificação de uso interno do programa.

As direções da tabela V.2 correspondem aos deslocamentos generalizados do vetor  $\mathbf{U}^*$ , equação V.23.

Com a tabela V.2 pode-se construir a matriz  $\mathbf{T}^*$ ; para cada nó, e, consequentemente, para os elementos, quando isto for necessário, bem como construir o vetor apontador e efetuar o cômputo da matriz de rigidez global, em tudo isto aproveitando um programa comum, como será mostrado na capítulo seguinte.

Com esta generalidade, o usuário poderá simular qualquer dependência linear entre deslocamentos, ficando a seu cargo o correto fornecimento de dados de dependências.

### V.3 ANÁLISE DAS DIMENSÕES DAS MATRIZES

Para um elemento de pórtico espacial, a matriz  $\mathbf{S}_{ge}$  é de dimensão  $12 \times 12$  e o vetor  $\mathbf{F}_{ge}$  tem 12 posições. A matriz de transformação  $\mathbf{T}^*_e$  é de dimensão  $12 \times 24$  e o vetor  $\mathbf{U}^*_e$  tem 24 posições. Logo, é fácil notar que a nova matriz de rigidez será de dimensão  $24 \times 24$  e o novo vetor de cargas, de 24 posições. Para elementos derivados do pórtico espacial, como elemento de pórtico plano, basta eliminar as linhas e colunas que não digam respeito ao elemento em questão.

Para elementos de quatro nós - por exemplo, de casca - a matriz de rigidez  $\mathbf{S}_{ge}$  é de dimensão  $24 \times 24$  e o vetor  $\mathbf{F}_{ge}$  tem 24 posições. A matriz de transformação  $\mathbf{T}^*_e$  será de dimensão  $24 \times 48$  e o vetor  $\mathbf{U}^*_e$  terá 48 posições. Desta forma, a matriz transformada será de dimensão  $48 \times 48$ . Para elementos de placa basta retirar as linhas e colunas desnecessárias ao elemento.

### V.4 LIMITAÇÕES

A dependência linear generalizada entre deslocamentos simula na análise qualquer excentricidade e trechos rígidos no modelo, sejam eles em apenas uma direção, um plano ou em ambos. Entretanto, devido à falta de possibilidade de se misturar elementos

no Sistema SALT e a questões relacionadas com o próprio modelo, têm-se algumas limitações, que merecem ser destacadas neste texto.

Começando com as treliças, tem-se a limitação de que os nós mestres e os nós do elemento sejam colineares, isto porque os elementos de treliça são idealizados apenas com deformação axial. Na implementação efetuada no Sistema SALT, o desalinhamento de nós não foi colocado como erro de modelação, ficando o seu uso da responsabilidade do usuário. Quando um elemento de treliça está inclinado em relação ao eixo global, pode-se colocar como dependente apenas um dos deslocamentos, mas deve-se questionar o significado de tal dependência.

Não existe significado uma dependência com um nó fora do plano de pórtico plano. Se isto acontecer no modelo físico, é necessário que se use o modelo de pórtico espacial.

Quando se tem uma placa apoiada numa grelha, além da excentricidade horizontal da borda da placa em relação ao eixo da grelha, pode-se ter ainda, uma excentricidade entre os nós dos dois modelos em relação ao eixo perpendicular à placa e à grelha, que, no caso do Sistema SALT, é o eixo Z. Considerando-se os outros três deslocamentos complementares aos seis deslocamentos de pórtico espacial e de casca, poder-se-ia colocar os pontos de discretização da grelha fora do plano da placa, mas, como modelos de placa e grelha não comportam esta situação, deve-se ter tais pontos no mesmo plano da placa, a menos que se use, no lugar do elemento de placa, um elemento de casca; e, no lugar do elemento de grelha, um elemento de pórtico espacial.

Quando for idealizado um trecho rígido dentro de um modelo de estado plano de tensões, deve-se prever um grau de liberdade de rotação perpendicular ao plano do modelo, pois tal trecho precisará desta rotação para uma correta modelação.

Os modelos de pórtico espacial e de casca são os que menos têm limitações quanto às dependências que podem ser impostas.

O usuário é responsável pelo uso desta dependência linear generalizada, bem como o é em qualquer aspecto ligado à modelação estrutural. Portanto, ele deve estar atento ao prescrever dependência que traduza o comportamento real do modelo que deseja analisar.

# **CAPÍTULO VI**

## **PRINCIPAIS ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL**

A implementação de dependência linear generalizada entre deslocamentos foi feita no Sistema SALT [20]. Este Sistema está em avançado estágio de desenvolvimento na Universidade Federal do Rio de Janeiro, sob coordenação dos professores Humberto Lima Soriano e Silvio de Souza Lima. O Sistema SALT utiliza a técnica do perfil, para o armazenamento da matriz de rigidez global [1], e a técnica do número grande, para prescrever deslocamentos[1][10].

Para a presente implementação, pode-se partir de um programa comum, fazendo-se algumas alterações na numeração dos deslocamentos da estrutura e incluindo-se algumas rotinas adicionais. É muito importante este aproveitamento, visto que em muitos casos pode-se deparar com sistemas que já apresentam grande desenvolvimento, não sendo prática a sua alteração por completo, como é o caso do Sistema SALT.

As rotinas que serão apresentadas têm apenas o objetivo de orientar uma futura implementação da dependência entre deslocamentos em outros programas de análise de estruturas. O Sistema SALT está sendo desenvolvido em Pascal e, por isso, as rotinas serão apresentadas nesta linguagem. O Pascal apresenta muitas vantagens quanto à estruturação de dados em programas científicos [21][22] e facilita o uso de alocação dinâmica de memória [23][24][25][26], o que torna o programa mais flexível [21][22][25].

## VI.1 PROCEDIMENTOS INICIAIS

Os dados a serem fornecidos pelo usuário são os dados usuais em análise estrutural (ver manual do Sistema SALT [20]) e os dados de dependência linear generalizada da estrutura em estudo, como mostra a tabela V.1.

Na implementação no Sistema SALT, alguns dados da tabela V.1 podem ser omitidos, pois serão determinados de forma implícita, internamente, pelo programa. Isto foi feito para facilitar a entrada de dados. Depois de cada deslocamento linear da tabela V.1 deve-se colocar uma letra r ou R; e, em seguida, os códigos de dependência ou não dependência das rotações. No caso da omissão da letra r ou R, o programa colocará essas rotações com a mesma dependência do deslocamento linear. Para exemplificar, a tabela V.1 é representada aqui com e sem o uso da letra r ou R.

Nós				Direções							
Dependente	Mestre	x	yy zz	y	xx zz	z	xx	yy	xx	yy	zz
3	5	1	r 1 1	1			1	R 1 1	1	1 1 1	
5	2	1	R 0 1	1	r 0 1	0			0 0 1		
4	1	1	r 0 1	1	r 0 1	0	r 0 0		0 0 1		
7	6	1		1		1			1 1 1		

Tabela VI.1 - Dependência linear generalizada entre deslocamentos, fornecida pelo usuário ou Sistema SALT.

Obs.: O número 1(um) nas direções representa dependência.

Os nós 3 e 7 têm os mesmos tipos de dependência generalizada entre deslocamentos, apesar de se omitirem alguns dados para o nó 3, e, para o nó 7, se omitirem seis dados de rotação. Os nós 5 e 4 têm os mesmos tipos de dependências, apesar de se omitirem para o nó 5 alguns dados.

Após a leitura da tabela VI.1, o programa deve construir a tabela V.2 para uso interno. Esta tabela facilitará a programação e acelerará os cálculos. É importante o desenvolvimento de uma rotina que gerencie a tabela V.2. No Sistema SALT, essa rotina é chamada

de gerente\_m\_e e gerencia os dados da tabela V.2 fazendo proveito de alocação dinâmica de memória [23][24][25][26], além de dividir os dados em blocos, caso não caibam todos na memória principal (RAM) [22]. Isto é necessário no Sistema SALT, pois ele analisa modelos com quaisquer quantidades de nós e elementos [20] através do particionamento dos dados e da matriz de rigidez, bem como do vetor de forças [1], além de usar a alocação dinâmica [23][24][25][26].

Deve-se também construir uma rotina que forneça a numeração exigida pelos vetores  $\mathbf{U}^*_i$ , equação V.23; e  $\mathbf{F}^*_i$ , equação V.24. A numeração das equações será feita através da equação IV.17. As rotinas são as seguintes:

```
Unit tipo_m_e;
{$F+}
Interface
Type
  m_e_tipo = Record
    dependente : Longint;
    direcao : Array [1..12] Of Longint;
  End;
  n_des_tipo = Array [1..48] Of Longint;
  t_reg_tipo = Array [1..48] Of Shortint;
  t_ele_tipo = Array [1..48] Of Real;
Var
  ndesno : Shortint; (* numero de deslocamento nodal sem dependencia. *)
  ndesno_me : Shortint; (* numero de deslocamento nodal com dependencia. *)
Implementation
End. (* fim da unidade tipo_m_e *)
```

É oportuno frisar que ndesno é igual a 6 para nó de pórtico espacial e casca e ndesno\_me é igual a 12 para nó destes mesmos modelos estruturais com dependência linear generalizada entre deslocamentos.

```
Unit geren_me;
{$o+}
{$f+}
Interface
  Uses tipo_m_e;
  Procedure gerente_m_e (Var dependente_pesq : Longint; Var m_e : m_e_tipo);
  Var
    m_e : m_e_tipo;
Implementation

Procedure gerente_m_e;
*****
  Este procedimento gerencia o acesso a tabela V.2.
*****
Begin
  Acessa a tabela V.2 e devolve os mestres do dependente_pesq nas suas
  respectivas direcoes;
End. (* fim da unidade geren_me *)

Unit SALTE23;
{$f+}
Interface
  Uses
```

```

TIPO_M_E;
Var
  n_des : n_des_tipo;
  incid : n_des_tipo;
Procedure n_des_no (Var noi : Longint; Var n_des : n_des_tipo);
Procedure n_des_ele (Var ele : Longint; Var n_des : n_des_tipo);
Procedure n_des_nodal (Var no : Longint; Var x);
Procedure incidencia_nodal (Var noi : Longint; Var incid : n_des_tipo);
Procedure incidencia_ele (Var ele : Longint; Var incid : n_des_tipo);
Procedure incidencia (Var no : Longint; Var x);
Implementation
Procedure n_des_nodal;
{*****}
  Este procedimento define a numeracao das equacoes dos deslocamentos do
  no, com desacoplamento entre translacao e rotacao e enderecos absolutos do
  vetor que contem a numeracao.
{*****}
Var
  n_desloc : Array [1..12] Of Longint Absolute x;
  k : Longint;
Begin
  Case tipo_estrutura Of
    1: (* portico plano *)
    Begin
      incidencia (no, n_desloc [1]);
      {*****}
      definicao do numero das equacoes
      {*****}
      n_desloc [1] := ndesno * (n_desloc [1] - 1) + 1;
      n_desloc [2] := ndesno * (n_desloc [2] - 1) + 3;
      n_desloc [3] := ndesno * (n_desloc [3] - 1) + 2;
      n_desloc [4] := ndesno * (n_desloc [4] - 1) + 3;
      n_desloc [5] := ndesno * (n_desloc [5] - 1) + 3;
    End;
    2, 6 : (* grelha e placa *)
    Begin
      incidencia (no, n_desloc [1]);
      {*****}
      definicao do numero das equacoes
      {*****}
      n_desloc [1] := ndesno * (n_desloc [1] - 1) + 1;
      n_desloc [2] := ndesno * (n_desloc [2] - 1) + 2;
      n_desloc [3] := ndesno * (n_desloc [3] - 1) + 3;
      n_desloc [4] := ndesno * (n_desloc [4] - 1) + 2;
      n_desloc [5] := ndesno * (n_desloc [5] - 1) + 3;
    End;
    3, 4 : (* trelica plana e espacial *)
    Begin
      incidencia (no, n_desloc [1]);
      {*****}
      definicao do numero das equacoes
      {*****}
      For k := 1 To ndesno Do
        n_desloc [k] := ndesno_me * (n_desloc [k] - 1) + k;
    End;
    7, 9 : (* portico espacial e casca *)
    Begin
      incidencia (no, n_desloc [1]);
      {*****}
      definicao do numero das equacoes
      {*****}
      n_desloc [1] := ndesno * (n_desloc [1] - 1) + 1;
      n_desloc [2] := ndesno * (n_desloc [2] - 1) + 5;
      n_desloc [3] := ndesno * (n_desloc [3] - 1) + 6;
      n_desloc [4] := ndesno * (n_desloc [4] - 1) + 2;
      n_desloc [5] := ndesno * (n_desloc [5] - 1) + 4;
      n_desloc [6] := ndesno * (n_desloc [6] - 1) + 6;
      n_desloc [7] := ndesno * (n_desloc [7] - 1) + 3;
      n_desloc [8] := ndesno * (n_desloc [8] - 1) + 4;
      n_desloc [9] := ndesno * (n_desloc [9] - 1) + 5;
      n_desloc [10] := ndesno * (n_desloc [10] - 1) + 4;
      n_desloc [11] := ndesno * (n_desloc [11] - 1) + 4;
      n_desloc [12] := ndesno * (n_desloc [12] - 1) + 6;
    End;
  Else
    Begin

```

```

        erro (59, -1); (* erro previsto no Sistema SALT *)
End;
End; (* fim de Case(Else) *)
End; (* fim do procedimento n_des_nodal *)

Procedure n_des_no;
*****
Este procedimento define a numeracao das equacoes dos deslocamentos do no
com desacoplamento entre translacao e rotacao.
*****
Begin
    n_des_nodal {noi, n_des [1]};
End; (* fim do procedimento n_des_no *)

Procedure n_des_ele;
*****
Este procedimento define a numeracao das equacoes dos deslocamentos do
elemento, com desacoplamento entre translacao e rotacao.
*****
Var
    p : Longint;
Begin
    propriedades_do_elemento (ele);
    *****
    define numero de nos do elemento
    *****
    noelemento := 0;
    Case tipo_estrutura Of
        1, 2, 3, 4, 7 : noelemento := 2;
        Else
            Begin
                For j := 1 To 8 Do
                    Begin
                        If elemento[ele].no[j] <> 0 Then
                            noelemento := noelemento + 1;
                    End; (* fim do laco j *)
            End; (* fim de Else *)
    End; (* fim de Case *)
    (* fim de define numero de nos do elemento *)
    For j := 1 To noelemento Do
    Begin
        p := (j - 1) * ndesno_me + 1;
        n_des_nodal (elemento[ele].no[j], n_des [p]);
    End; (* fim do laco j *)
End; (* fim do procedimento n_des_ele *)

Procedure incidencia;
*****
Este procedimento define os numeros mestres do no, com desacoplamento
entre translacao e rotacao e enderecos absolutos do vetor que contem os
numeros dos nos.
*****
Var
    n_nos : Array [1..12] Of Longint Absolute x;
    k : Longint;
Begin
    Case tipo_estrutura Of
        1, 2, 3, 4, 6, 7, 9 :
            Begin
                gerente_m_e (no, m_e);
                For k := 1 To ndesno_me Do n_nos [k] := m_e.direcao [k];
            End;
        Else
            Begin
                erro (59, -1); (* erro previsto no Sistema SALT *)
            End;
    End;
End; (* fim de Case(Else) *)
End; (* fim do procedimento incidencia *)

Procedure incidencia_nodal;
*****
Este procedimento define os numeros mestres do no com desacoplamento
entre translacao e rotacao.
*****
Begin
    incidencia {noi, incid [1]};
End; (* fim do procedimento incidencia_nodal *)

```

```

Procedure incidencia_ele;
{*****
Este procedimento define as numeros mestres do elemento, com
desacoplamento entre translacao e rotacao.
*****}
Var
  p : Longint;
Begin
  propriedades do elemento (ele);
  {*****
define numero de nos do elemento
*****}
  noelemento := 0;
  Case tipo_estrutura Of
    1, 2, 3, 4, 7 : noelemento := 2;
    Else
      Begin
        For j := 1 To 8 Do
          Begin
            If elemento[ele].no[j] <> 0 Then
              noelemento := noelemento + 1;
          End; (* fim do laco j *)
        End; (* fim de Else *)
      End; (* fim de Case *)
  (* fim de define numero de nos do elemento *)
  For j := 1 To noelemento Do
  Begin
    p := (j - 1) * ndesno_me + 1;
    incidencia (elemento[ele].no[j], incid [p]);
  End; (* fim do laco j *)
End; (* fim do procedimento incidencia_ele *)
End. (* fim da unidade SALTE23 *)

```

## VI.2 VETOR APONTADOR

Com as rotinas apresentadas no item VI.1, pode-se construir o vetor apontador utilizado no armazenamento em perfil. Primeiramente, coloca-se o número 1 (um) em todas as posições do vetor apontador e, a seguir, calcula-se as diversas alturas efetivas de colunas, usando-se a rotina n\_des\_ele, fazendo-se posteriormente sua acumulação. Deve-se observar que, um nó não conectado a elemento mas ligado a molas, como em laje de subsolo de edifício, por exemplo [11][12][16], deve ser considerado, na formação do vetor apontador, com a numeração fornecida pela rotina n\_des\_no.

## VI.3 FORMAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Uma vez computado o vetor apontador, pode-se fazer a formação da matriz de rigidez global da estrutura. Esta matriz é armazenada em perfil e dividida em blocos, possibilitando desta maneira a análise de estruturas com qualquer número de nós e elementos. Esta divisão e gerenciamento não interferem na implementação da dependência entre deslocamentos.

### VI.3.1 MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTO

Para adicionar a matriz de rigidez de um elemento à matriz global, faz-se primeiro a transformação da matriz do elemento do sistema local para o global - equação II.16 - o que já está implementado num programa comum. Depois são feitas as transformações de dependência linear generalizada entre deslocamentos - equação V.29. Para isto, forma-se a matriz  $\mathbf{T}^*_e$ , equação V.28. No armazenamento desta matriz não é necessário guardar os zeros da mesma, pois estes serão evitados em todos os produtos que envolvem a matriz  $\mathbf{T}^*_e$ , bastando guardar os termos não-nulos e o número da linha onde estão estes termos. A rotina apresentada a seguir mostra como deve ser formada a matriz  $\mathbf{T}^*_e$ .

```
Unit SALTE24;
Interface
  Uses
    TIPO_M_E, SALTE23;
    Procedure t_nodal (Var no : Longint; Var t_no : t_ele_tipo; Var
      t_reg : t_reg_tipo);
    Procedure t_elemento (Var ele : Longint; Var t_ele : t_ele_tipo; Var
      t_reg : t_reg_tipo);
    Procedure mat_t (Var no : Longint; Var mat, reg; Var pos : Longint);
    Procedure d_x_y_z (Var no_dependente, no_mestre : Longint; Var
      dx, dy, dz : Real);
    Procedure prod_tst_me (l_sg : Longint; c_t : Longint);
    Procedure prod_tf (c_t : Longint; Var vetor_forca);
    Procedure prod_td (l_t : Longint; c_t : Longint; Var deslocamento);
    Var
      t_reg : t_reg_tipo;
      t_ele : t_ele_tipo;
      t_no : t_ele_tipo Absolute t_ele;
Implementation
  Procedure t_nodal;
```

```

*****
 Esta rotina forma a matriz T do no, na forma de vetor e a regua que indica
 as linhas de T, com dependencia linear generalizada entre deslocamentos.
*****

```

**Var**

```

    pos : Longint;

```

**Begin**

```

    pos := 1;
    mat_t (no, t_no[1], t_reg[1], pos);

```

**End;**

**Procedure t\_elemento;**

```

*****
 Esta rotina forma a matriz T do elemento, na forma de vetor e a regua que
 indica as linhas de T, com dependencia linear generalizada entre deslocamentos.
*****

```

**Var**

```

    j, pos, p_reg : Longint;
    no : Longint;

```

**Begin**

```

    propriedades_do_elemento (ele);
    *****
    define numero de nos do elemento
    *****
    noelemento := 0;
    Case tipo_estrutura Of
        1, 2, 3, 4, 7 : noelemento := 2;
        Else
            Begin
                For j := 1 To 8 Do
                    Begin
                        If elemento[ele].no[j] <> 0 Then
                            noelemento := noelemento + 1;
                    End; (* fim do laco j *)
            End; (* fim de Else *)
    End; (* fim de Case *)
    (* fim de define numero de nos do elemento *)
    For j := 1 To noelemento Do
    Begin
        no := elemento [ele].no[j];
        pos := (j - 1) * ndesno + 1;
        p_reg := (j - 1) * ndesno_me + 1;
        mat_t (no, t_ele [p_reg], t_reg [p_reg], pos);
    End;
End; (* fim do procedimento t_elemento *)
```

**Procedure mat\_t;**

```

*****
 Esta rotina forma a matriz T, na forma de vetor e a regua que indica as
 linhas de T, com dependencia linear generalizada entre deslocamentos e
 endereco absoluto do vetor t e t_r.
*****
```

**Var**

```

    t : Array [1..12] Of Real Absolute mat;
    t_r : Array [1..12] Of Longint Absolute reg;
    k : Longint;
    no_dependente, no_mestre : Longint;
    dx, dy, dz : Real;

```

**Begin**

```

    For k := 1 To ndesno_me Do
    Begin
        t [k] := 0.0E0;
        t_r [k] := 0;
    End; (* fim do laco k *)
    Case tipo_estrutura Of
        1 : (* matriz t_no para portico plano *)
            Begin
                incidencia_nodal (no, incid);
                (* 1a linha *)
                t_r [1] := 1;
                t_r [2] := 1;
                t [1] := 1.0;
                d_x_y_z (no, incid [2], dx, dy, dz);
                t [2] := dy;
                (* 2a linha *)
                t_r [3] := 2;
                t_r [4] := 2;

```

```

t [3] := 1.0;
d_x_y_z (no, incid [4], dx, dy, dz);
t [4] := -dx;
(* 3a linha *)
t_r [5] := 3;
t [5] := 1.0;
End;
2, 6 : (* matriz t_no para grelha e placa *)
Begin
    incidencia_nodal (no, incid);
    (* 1a linha *)
    t_r [1] := 1;
    t_r [2] := 1;
    t_r [3] := 1;
    t [1] := 1.0;
    d_x_y_z (no, incid [2], dx, dy, dz);
    t [2] := -dy;
    d_x_y_z (no, incid [3], dx, dy, dz);
    t [3] := dx;
    (* 2a linha *)
    t_r [4] := 2;
    t [4] := 1.0;
    (* 3a linha *)
    t_r [5] := 3;
    t [5] := 1.0;
End;
3, 4 : (* matriz t_no = matriz identidade p/ treli. plana e espacial *)
Begin
    For k := 1 To ndesno_me Do
    Begin
        t_r [k] := k;
        t [k] := 1.0;
    End; (* fim do laço k *)
End;
7, 9 : (* matriz t_no para portico espacial e casca *)
Begin
    incidencia_nodal (no, incid);
    (* 1a linha *)
    t_r [1] := 1;
    t_r [2] := 1;
    t_r [3] := 1;
    t [1] := 1.0;
    d_x_y_z (no, incid [2], dx, dy, dz);
    t [2] := -dz;
    d_x_y_z (no, incid [3], dx, dy, dz);
    t [3] := dy;
    (* 2a linha *)
    t_r [4] := 2;
    t_r [5] := 2;
    t_r [6] := 2;
    t [4] := 1.0;
    d_x_y_z (no, incid [5], dx, dy, dz);
    t [5] := dz;
    d_x_y_z (no, incid [6], dx, dy, dz);
    t [6] := -dx;
    (* 3a linha *)
    t_r [7] := 3;
    t_r [8] := 3;
    t_r [9] := 3;
    t [7] := 1.0;
    d_x_y_z (no, incid [8], dx, dy, dz);
    t [8] := -dy;
    d_x_y_z (no, incid [9], dx, dy, dz);
    t [9] := dx;
    (* 4a linha *)
    t_r [10] := 4;
    t [10] := 1.0;
    (* 5a linha *)
    t_r [11] := 5;
    t [11] := 1.0;
    (* 6a linha *)
    t_r [12] := 6;
    t [12] := 1.0;
End;
End; (* fim de Case *)
For k := 1 to ndesno_me Do
Begin

```

```

    t_r [k] := t_r [k] + pos - 1;
End;
End; (* fim do procedimento mat_t *)

Procedure d_x_y_z;
{*****}
  Esta rotina calcula a diferenca de coord. entre os nos mestre e dependente
{*****}
Var
  x_mestre, y_mestre, z_mestre,
  x_dependente, y_dependente, z_dependente : Real;
Begin
  x_mestre := coordenada[no_mestre].x;
  y_mestre := coordenada[no_mestre].y;
  z_mestre := coordenada[no_mestre].z;
  x_dependente := coordenada[no_dependente].x;
  y_dependente := coordenada[no_dependente].y;
  z_dependente := coordenada[no_dependente].z;
  dx := x_mestre - x_dependente;
  dy := y_mestre - y_dependente;
  dz := z_mestre - z_dependente;
End; (* fim do procedimento d_x_y_z *)

```

Formada a matriz  $\mathbf{T}^*$ <sub>e</sub>, deve-se fazer o produto triplo  $\mathbf{T}^{* \top} \mathbf{Sg} \mathbf{T}^*$ <sub>e</sub>, o que pode ser feito evitando-se todos os produtos com os termos nulos de  $\mathbf{T}^*$ <sub>e</sub>, como mostra a rotina a seguir:

```

Procedure prod_tst_me;
{*****}
  Esta rotina faz o produto triplo mestre-dependente, com desacoplamento entre
translacao e rotacao.
{*****}
Var
  j, ii : Longint;
  v : Array [1..48] Of Real;
Begin
  {*****}
  1o produto sg := t(t) . sg
{*****}
  For j := 1 To l_sg Do
  Begin
    For ii := 1 To c_t Do
    Begin
      v[ii] := t_ele [ii] * sg[t_reg[ii], j]^;
    End; (* fim do laco ii *)
    For ii := 1 To c_t Do
    Begin
      sg[ii,j]^ := v[ii];
    End; (* fim do laco ii *)
  End; (* fim do laco j *)
{*****}
  2o produto sg := sg . t
{*****}
  For j := 1 To c_t Do
  Begin
    For ii := 1 To c_t Do
    Begin
      v[ii] := sg[j,t_reg[ii]]^ * t_ele[ii];
    End; (* fim do laco ii *)
    For ii := 1 To c_t Do
    Begin
      sg[j,ii]^ := v[ii];
    End; (* fim do laco ii *)
  End; (* fim do laco j *)
End; (* fim do procedimento prod_tst_me *)

Procedure prod_tf;
{*****}
  Esta rotina faz o produto t(t).f mestre-dependente, com desacoplamento entre
translacao e rotacao.
{*****}
Var

```

```

f : Array [1..12] Of Real Absolute vetor_forca;
f_aux : Array [1..12] Of Real;
k : Longint;
Begin
  For k := 1 to c_t Do
    Begin
      f_aux[k] := t_no[k] * f[t_reg(k)];
    End; (* fim do laco k *)
    For k := 1 To c_t Do f[k] := f_aux[k];
End; (* fim do procedimento prod_tf *)

Procedure prod_td;
{*****}
  Esta rotina faz o produto td mestre-dependente, com desacoplamento entre
translacao e rotacao.
{*****}
Var
  d : Array [1..12] Of Real Absolute deslocamento;
  k, n : Longint;
  aux : Real;
Begin
  For k := 1 to l_t Do
    Begin
      aux := 0.0E0;
      For n := 1 To c_t Do
        Begin
          If t_reg[n] = k Then aux := aux + t_no[n] * d[n];
        End; (* fim do laco n *)
        d[k] := aux;
      End; (* fim do laco k *)
    End; (* fim do procedimento prod_td *)
End. (* fim da unidade SALTE24 *)

```

Depois deste produto, nota-se que a matriz **Sg<sub>e</sub>** terá uma dimensão maior, por isso ela deve ter espaços reservados na memória para tal expansão. A acumulação desta nova matriz de rigidez na matriz global deve ser feita para a numeração fornecida pela rotina **n\_des\_ele**.

### VI.3.2 APOIOS ELÁSTICOS

Para nós que possuem molas, a formação da matriz de rigidez global deve ser feita para a numeração fornecida pela rotina **n\_des\_no**. Antes, porém, deve-se fazer a transformação  $\mathbf{T}^* \mathbf{i}^t \mathbf{Sg}_i \mathbf{T}^* \mathbf{i}$  com as mesmas rotinas apresentadas no item VI.3.1. A matriz **Sg<sub>i</sub>** possui as molas na sua diagonal principal e os outros termos nulos. Para nós que possuem apoios rígidos e molas, o Sistema não aceitará como direção dependente aquela que tiver um apoio rígido. Também neste caso, deve-se fazer o produto triplo apenas para as molas e, depois do produto, junta-lo com o número grande do apoio rígido e finalmente levar o resultado para a formação da matriz de rigidez.

global da estrutura. Isto é feito para evitar erros numéricos na execução do produto triplo, devido à presença do número grande.

## VI.4 VETOR DE CARGAS

O vetor de cargas pode ser montado diretamente com a numeração do vetor  $\mathbf{F}_i^*$ , equação V.24, uma vez feita a transformação da equação V.26, mas pode-se aproveitar o vetor já formado por um programa comum, como mostra a rotina a seguir:

```

Unit carr_m_e;
{$of,f+}
Interface
  Uses
    tipos, inicio, tipo_m_e, incid_me, n_des_me, geren_me, matriz_t,
    prod_m_e;
  Procedure carregamento_me;
Implementation
Procedure carregamento_me;
{*****}
  Esta rotina transforma um vetor de força montado sem relacao mestre-dependente
para um vetor com relacao mestre-dependente com dependencia linear generalizada
entre deslocamentos.
{*****}
Var
  f_auxiliar : Array [1..12] Of Real;
  i, l, num_desl : Longint;
  c, j : Longint;
  zero, valor_lido : Real;
  dependencia : Boolean;
Begin
  primeiro_m_e := Nil;
  Writeln ('  formacao do vetor de cargas com relacoes mestre-dependente');
  num_desl := ndesno * numnos;
  zero := 0.0;
  Reset (af);
  For c := 1 To ncar Do
  Begin
    For i := 1 To numnos Do
    Begin
      incidencia_nodal (i, incid);
      dependencia := False;
      For j := 1 To ndesno_me Do
      Begin
        If i <> incid [j] Then dependencia := True;
      End; (* fim do laço j *)
      If dependencia Then
      Begin
        n_des_no (i, n_des);
        {*****}
        le e zera no disco o vetor de cargas
        {*****}
        For j := 1 To ndesno Do
        Begin
          l := (c - 1) * num_desl + (i - 1) * ndesno + j - 1;
          Seek (af, l);
          Read (af, f_auxiliar[j]);
          Seek (af, l);
          Write (af, zero);
        End; (* fim do laço j *)
        t_nodal (i, t_no, t_reg);
      End;
    End;
  End;
End;

```

```

prod_tf (ndesno_me, f_auxiliar{1});
{*****}
grava o vetor de cargas transformado
{*****}
For j := 1 To ndesno_me Do
Begin
  l := (c - 1) * num_desl + n_des{j} - 1;
  Seek (af, l);
  Read (af, valor_lido);
  f_auxiliar[j] := f_auxiliar[j] + valor_lido;
  Seek (af, l);
  Write (af, f_auxiliar[j]);
End; (* fim do laco j *)
End; (* fim de If *)
End; (* fim do laco i *)
End; (* fim do laco c *)
Close (af);
i := 0;
gerente_m_e (i, m_e); (* desaloca lista da memoria *)
End; (* fim do procedimento carregamento_m_e *)
End. (* fim da unidade carr_m_e *)

```

## VI.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno são introduzidas, no Sistema SALT, através do uso da técnica do número grande [1][10]. Como foi dito anteriormente, uma direção dependente com um apoio rígido não será aceita pelo Sistema, devido às razões expostas no item VI.3.2.

A técnica do número grande é muito versátil, pois facilita a numeração dos deslocamentos da estrutura e não exige a retirada dos nós inativos [1] do sistema de equações. Os nós inativos podem ser usados para auxiliar a definição do sistema local de referência de elementos de pórtico espacial[1].

## VI.6 NÚMERO GRANDE E PRECISÃO

Poder-se-ia questionar que o número grande colocado na diagonal principal, para representar um apoio rígido, provoca erros numéricos na resolução do sistema de equações. O mesmo poderia ser questionado no tocante ao número grande colocado na diagonal principal, no caso de uma direção inativa ou dependente. Entretanto, pode-se mostrar facilmente que o número grande não traz prejuízo para a solução do sistema de equações em ambos os casos. Isso é mostrado através do Método de Cholesky.

Para tanto, considere-se os algoritmos abaixo para o Método de Cholesky [1]:

### Algoritmo para obter o fator de Cholesky

Faça  $i = 1$  até  $n$

$$u_{ii} = \sqrt{s_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$$

Faça  $j = (i+1)$  até  $n$

$$u_{ij} = \frac{s_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_{ii}}$$

Fim do laço  $j$

Fim do laço  $i$

### Algoritmo de substituição

Faça  $i = 1$  até  $n$

$$y_i = \frac{f_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} y_k}{u_{ii}}$$

Fim do laço  $i$

### Algoritmo de retrosubstituição

Faça  $i = n$  até  $1$

$$d_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} d_k}{u_{ii}}$$

Fim do laço  $i$

Os algoritmos para obter o fator de Cholesky e retrosubstituição podem ser alterados para operarem segundo as alturas efetivas das colunas [1].

Considere, também, o sistema de equações abaixo, onde o termo  $S_{33}$  é igual a um número grande NG.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ & & NG & S_{34} \\ & & & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.1})$$

Simétrica

Na obtenção do fator de Cholesky para o sistema de equações VI.1, o número grande da posição  $S_{33}$  aparece no cálculo de todos os termos da terceira linha. Nota-se que o termo  $u_{33}$ , equação VI.2, é um número grande obtido através da raiz quadrada do número grande; e que os demais termos da linha são divididos por este número grande tornando-se muito pequenos, denominados NP. Com isto, tem-se o seguinte fator de Cholesky:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & NG & NP \\ & Nulo & & u_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.2})$$

Aplicando-se o algoritmo de substituição para obter o vetor  $\mathbf{y}$ , nota-se que o número grande do fator de Cholesky entra no cálculo do terceiro termo do vetor  $\mathbf{y}$ , tornando-o muito pequeno, e esta influência será muito menor no cálculo dos outros termos de  $\mathbf{y}$ , devido à multiplicação do terceiro termo de  $\mathbf{y}$  com os termos da terceira linha do fator de Cholesky, que são muito pequenos. Com isto tem-se o seguinte vetor:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ NP \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.3})$$

Finalmente, aplicando-se o algoritmo de retrosubstituição, nota-se que nesta fase o número grande do fator de Cholesky, equação VI.2, torna o terceiro deslocamento do vetor  $\mathbf{d}$  muito

pequeno, o que era esperado e, consequentemente, não terá influência significativa no cálculo dos outros deslocamentos, resultando em

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ NP \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad (VI.4)$$

É importante frisar que o número grande deve ser convenientemente escolhido, de tal forma que os termos da sua linha no fator de Cholesky sejam muito pequenos e, consequentemente, gerem um número pequeno no vetor  $\mathbf{y}$ , no termo correspondente à linha do número grande; e, com tudo isto, gere deslocamentos muito pequenos, nas posições correspondentes do vetor de deslocamento  $\mathbf{d}$ , em relação aos outros deslocamentos da estrutura.

Com isto, para os apoios rígidos, se for colocado um número NG bem maior que o maior termo da diagonal principal da matriz de rigidez global, obter-se-á uma excelente solução. Em termos práticos, esse número pode ser  $10^{18}$  vezes maior que o maior termo da diagonal principal ou, o seu inverso,  $10^{18}$  vezes menor que os deslocamentos da estrutura em questão.

Considere-se agora que a terceira direção do sistema de equações VI.1 seja uma direção inativa ou dependente. Com isto, os termos  $S_{13}$ ,  $S_{23}$  e  $S_{34}$  serão nulos, bem como o termo  $f_3$  do vetor de forças. O termo da diagonal principal desta direção também será nulo e será substituído por um número qualquer, NQ, maior que zero, resultando em

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & S_{14} \\ & S_{22} & 0 & S_{24} \\ & & NQ & 0 \\ & & \text{Simétrica} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (VI.5)$$

Aplicando o algoritmo para obter o fator de Cholesky, nota-se que os termos da linha e da coluna correspondentes ao referido número qualquer, NQ, continuam nulos no fator de Cholesky; e que o

termo da diagonal principal da direção inativa é a raiz quadrada do número NQ, resultando em outro número qualquer. Assim, tem-se

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & u_{14} \\ u_{22} & 0 & u_{24} \\ NQ & 0 \\ \text{Nulo} & u_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6})$$

Na obtenção do vetor  $\mathbf{y}$ , aplicando-se o algoritmo de substituição, nota-se que o terceiro termo de  $\mathbf{y}$  será nulo e que, juntamente com a terceira linha e terceira coluna nulas do fator de Cholesky, não interferirão no cálculo dos outros termos de  $\mathbf{y}$ , resultando em

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.7})$$

Finalmente, aplicando o algoritmo de retrosubstituição, nota-se, que o terceiro termo do vetor de deslocamentos é nulo, devido ao terceiro termo nulo do vetor  $\mathbf{y}$  e dos termos nulos das terceiras linha e coluna do fator de Cholesky. Tudo isso fará com que esse deslocamento não interfira nos demais deslocamentos a serem calculados, independentemente do número que for colocado na diagonal principal correspondente à direção inativa ou dependente, resultando em

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.8})$$

Destarte, pode-se concluir que o número grande colocado na diagonal principal para simular um apoio rígido não interfere na precisão da solução do sistema. E que, para uma direção inativa ou dependente, qualquer número maior que zero não interferirá na

solução do sistema. Para o caso da dependência entre deslocamentos, implementada no Sistema SALT, esse número qualquer é o próprio número grande por simples comodidade.

Se o número grande estiver situado fora da diagonal principal, não se pode garantir adequada precisão da solução do sistema.

A argumentação anterior para o Método de Cholesky pode ser facilmente estendida para o Método de Gauss.

## VI.7 SINGULARIDADE DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Uma vez montada a matriz de rigidez global, levando-se em consideração todos os elementos e apoios elásticos, bem como os números grandes na diagonal principal devidos aos apoios rígidos, pode-se notar que esta matriz é singular, e por um motivo muito simples. As direções dependentes não receberão nenhuma contribuição de rigidez, uma vez que toda a sua rigidez foi deslocada para as direções mestras correspondentes. Como estas direções dependentes, ou mesmo um nó inteiramente dependente, não foram retirados do sistema de equações, passa-se a ter direções ou nó como se fossem inativos. Para quebrar esta falsa singularidade, pode-se colocar um número grande na diagonal principal da matriz de rigidez global, nas posições correspondentes a essas direções dependentes.

Poder-se-ia questionar que o número grande colocado na diagonal principal, na direção inativa ou dependente, virá a alterar a rigidez global da estrutura. Mas isto não ocorrerá, pois pode-se notar que na formação do vetor apontador, antes da sua acumulação, a direção dependente ou inativa tem um número unitário. Este número indica que a direção correspondente não possui nenhum acoplamento com os outros termos da matriz de rigidez. Desta forma, a linha e a coluna correspondentes à direção dependente ou inativa poderiam ser retiradas do sistema de equações. Mas, para se retirar esta linha e coluna seria necessária a não inclusão deste deslocamento na numeração dos deslocamentos da estrutura, bem como de outros

procedimentos computacionais. Por outro lado, pode-se evitar esta singularidade com a simples introdução de qualquer número positivo na direção dependente ou inativa, visto que esta não possui nenhum acoplamento com outros termos da matriz global. Nesta implementação escolheu-se o número grande, por simples comodidade. Desta forma, uma vez resolvido o sistema de equações, os deslocamentos destas direções serão nulos.

## VI.8 DESLOCAMENTOS NODAIS

Resolvido o sistema de equações, tem-se todos os deslocamentos mestres do modelo estrutural. Os dependentes serão nulos. Assim, os deslocamentos dependentes devem ser corrigidos pela equação V.25, como mostra a rotina a seguir:

```

Unit desl_m_e;
{$+{, f+}
Interface
  Uses
    tipos, inicio, tipo_m_e, geren_me, incid_me, n_des_me, matriz_t,
    prod_m_e;
    Procedure deslocamento_me;
Implementation
Procedure deslocamento_me;
{*****
  Esta rotina transforma o deslocamento mestre no(s) seu(s) respectivo(s)
  deslocamento(s) dependente(s) com dependencia linear generalizada entre
  deslocamentos.
*****}
Var
  d : Array [1..12] Of Real;
  num_desl, i, l : Longint;
  c, j : Longint;
  dependencia : Boolean;
Begin
  Writeln ('*** calculo dos deslocamentos dependente');
  primeiro_m_e := Nil;
  num_desl := ndesno * numnos;
  Reset (af);
  For c := 1 To ncar Do
  Begin
    For i := 1 To numnos Do
    Begin
      incidencia_nodal (i, incid);
      dependencia := False;
      For j := 1 To ndesno_me Do
      Begin
        If i <> incid [j] Then dependencia := True;
      End; (* fim do laco j *)
      If dependencia Then
      Begin
        n_des_no (i, n_des);
        {*****
          le os deslocamentos mestre
        *****}
        For j := 1 To ndesno_me Do

```

```

Begin
    l := (c - 1) * num_desl + n_desl[j] - 1;
    Seek (af, l);
    Read (af, d[j]);
End; (* fim do laço j *)
t_nodal (i, t_no, t_reg);
prod_td (ndesno, ndesno_me, d[1]);
*****
grava deslocamentos dependente
*****
For j := 1 To ndesno Do
Begin
    l := (c - 1) * num_desl + (i - 1) * ndesno + j - 1;
    Seek (af, l);
    Write (af, d[j]);
End; (* fim do laço j *)
End; (* fim de If *)
End; (* fim do laço i *)
End; (* fim do laço c *)
Close (af);
i := 0;
gerente_m_e (i, m_e); (* desaloca lista da memoria *)
End; (* fim do procedimento deslocamento_me *)
End. (* fim da unidade desl_m_e *)

```

## VI.9 ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DOS MEMBROS E NOS ELEMENTOS DE PLACA E CASCA

Após o cálculo dos deslocamentos mestres e dependentes, pode-se calcular os esforços nos extremos das barras ou em qualquer ponto dos elementos de placa e de casca, como se faz num programa comum.

## VI.10 RENUMERADOR

O Sistema SALT possui dois procedimentos que permitem a renumeração nodal da estrutura com o objetivo de diminuir a soma das alturas efetivas de colunas da matriz de rigidez global [27][28]. Os métodos implementados são de Sloan [27] e de Wilson [28].

A aplicação do renumerador, tanto nas estruturas comuns como nas que possuem dependência generalizada entre deslocamentos, pode não reduzir a largura de banda da matriz de rigidez global, mas reduz a soma das alturas efetivas das colunas. É a minimização desta soma que é importante para os sistemas que

resolvem o sistema de equações pela técnica do perfil [28]. Para matriz esparsa, como no caso de elementos finitos, o armazenamento da matriz de rigidez global e resolução do sistema pela técnica da banda não são muito eficientes, pois incluem muitos termos nulos na largura da banda [27].

Na dependência generalizada entre deslocamentos um elemento poderá ter ligações com vários nós; ou seja, alguns deslocamentos num nó e outros, em outro nó. Para contornar esse problema com pequeno esforço computacional, a conectividade desses elementos é informada ao renumerador, como se o elemento tivesse vários nós, e entre esses nós deverão constar todos os nós envolvidos na dependência dos deslocamentos dos nós daquele elemento. A incidência do elemento pode ser formada com os dados topológicos fornecidos pela rotina `incidencia_ele`. Os números dos nós repetidos podem ser eliminados, para que apenas um deles figure na conectividade do elemento.

Os nós que possuem apoios elásticos e são dependentes, e também não possuem nenhum elemento ligado a eles, serão tratados pelo renumerador como nós inativos e colocados como um dos últimos nós do modelo, o que acontecerá também com os nós inativos. O fato do renumerador colocar os nós inteiramente dependentes entre os últimos não traz prejuízo para a minimização do perfil, pois esses nós, por possuírem todas as direções dependentes, terão colunas de altura unitária na matriz de rigidez global. O renumerador não terá nenhum efeito nas estruturas que não possuem nenhum elemento, pois todos os nós desta serão tratados como se fossem inativos.

# **CAPÍTULO VII**

## **APLICAÇÕES**

No intuito de demonstrar a eficiência e originalidade da matriz desenvolvida no capítulo V e da implementação feita no Sistema SALT, neste capítulo são apresentados vários exemplos de estruturas que podem ser resolvidas apenas com esta matriz, bem como outros exemplos que poderiam ser resolvidos com a matriz tradicional apresentada no capítulo IV. Desta forma, pode-se notar as vantagens da matriz generalizada em relação à matriz tradicional.

Alguns exemplos foram criados para esta demonstração e outros foram retirados de artigos e teses. Desta forma, para estes últimos, as soluções encontradas nesta tese podem ser confrontadas com resultados disponíveis na bibliografia, no tocante a estruturas que possam ser resolvidas com a matriz tradicional.

As listagens dos resultados apresentam os dados da estrutura, segundo o manual do Sistema SALT [20], bem como os resultados.

## VII.1 EXEMPLO I - PÓRTICO PLANO

O modelo em pórtico plano da figura IV.3 é um tipo de estrutura que não pode ser resolvido com a matriz tradicional apresentada no capítulo IV. Ele foi resolvido analiticamente e também pelo Sistema SALT [20].

### Solução analítica:

Rotação do nó 1 = 0,0451 rad;

Rotação do nó 3 = 0,0135 rad;

Translação horizontal da barra 1 = -0,1353 un.

### Solução obtida no Sistema SALT:

TITULO : Exemplo com dependencia entre deslocamentos

-----  
DATA : 26/JULHO/1994 (terca-feira)  
HORA : 14:53:24  
ARQUIVO DE DADOS : p\_pia\_14  
TIPO DA ESTRUTURA : portico plano

-----

c o r d e n a d a s		n o d a i s	
no	sistema	coordenada	coordenada
		x	y
1	global	0.00E+0000	0.00E+0000
2	global	0.00E+0000	3.00E+0000
3	global	2.00E+0000	3.00E+0000
4	global	2.00E+0000	0.00E+0000

numero de nos ..... 4

r e s t r i c o e s		n o d a i s	
		constante de mola	
no	codigo	transl. x	transl. y
1	110	0.00000E+00	0.00000E+00
4	111	0.00000E+00	0.00000E+00

numero de nos com restricao ..... 2

p r o p r i e d a d e s		d o s e l e m e n t o s		
barra	material	secao no inicial	no final	comprimento
1	1	1	2	3 2.00E+0000
2	1	1	4	3 3.00E+0000

numero de elementos ..... 2

d e p e n d e n c i a		e n t r e d e s l o c a m e n t o s		
no dependente	no mestre	translacao/rotacao	rotacao	zz
2	1	1 1	1 1	1
3	2	1 1	0 0	0
3	4	0 0	1 1	0

numero de no(s) na relacao mestre-dependente ... 3

## propriedades dos materiais

material : 1

M. Elasticidade .....	5.0E+0000
M. E. Transversal ...	0.0E+0000
C. Poisson .....	0.0E+0000
C. D. Termica .....	0.0E+0000
P. Especifico .....	0.00

numero de tipos de material ..... 1

## propriedades das secoes

tipo	area x	area y	inercia z
1	2.00E+0000	0.00E+0000	7.00E+0000

## modulos de flexao

tipo	wz
1	1.00E+0000

numero de tipos secoes ..... 1

carregamento 1

## cargas nodais

no	sistema	forca	forca	momento
		x	y	z
3	global	-3.00	0.00	0.00

fim do carregamento ..... 1  
numero de carregamentos ..... 1

-----  
DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 1.1E+0000Existe probabilidade de que o numero de algarismos corretos nos deslocamentos calculados seja 10  
-----

carregamento 1

## deslocamentos nodais

no	sistema	deslocamento	deslocamento	rotacao
		x	y	z
1	global	-2.85140E-0020	-7.25248E-0020	4.51128E-0002
2	global	-1.35338E-0001	-7.25248E-0020	4.51128E-0002
3	global	-1.35338E-0001	7.25248E-0020	1.35338E-0002
4	global	-4.21512E-0020	7.25248E-0020	6.69460E-0020

## reacoes nos apoios

no	sistema	forca	forca	momento
		x	y	z
1	global	1.21	3.08	0.00
4	global	1.79	-3.08	-2.84

## diferenca de equilibrio

(o equilibrio de momento e feito em relacao a origem )

forca	forca	momento
x	y	z
0.000	-0.000	0.000

barra	e s f o r c o s	n a s	b a r r a s		
	sistema	no	forca	forca	momento
			normal	cortante	fletor
1	local	2	0.00	3.08	3.63
		3	0.00	-3.08	2.53
2	local	4	0.00	-1.79	-2.84
		3	-0.00	1.79	-2.53

Fim Do Programa

## VII.2 EXEMPLO II - TRELIÇA PLANA

As treliças também podem ter dependência entre deslocamentos quando as suas ligações possuem elementos de dimensões avantajadas. Neste caso, o comprimento elástico dos membros que concorrem nestas ligações é diminuído. Os nós que participam da dependência entre deslocamentos de um elemento devem ser colineares com os nós do elemento, isto porque os elementos de treliça possuem apenas deformação axial.

Para as treliças planas, a dependência pode ser em X e/ou Y, plano das treliças; uma dependência em apenas um dos eixos, porém, pode não ter significado físico.

Na figura VII.1 está representada esquematicamente uma treliça com algumas dependências entre deslocamentos e que foi resolvida pelo Sistema SALT apenas para demonstrar a habilidade deste Sistema no tocante a este tipo de estrutura.

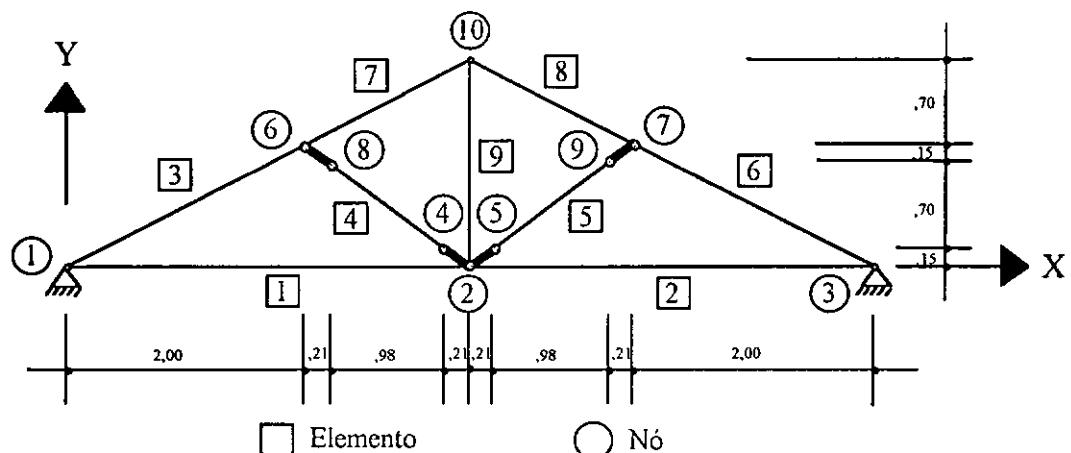


Figura VII.1 - Treliça plana com dependência entre deslocamentos.



c a r r e g a m e n t o 1 - carga de telhado

no	sistema	c a r g a s      n o d a i s	
		forca	forca
		x	y
6	global	0.50	-1.00
10	global	1.00	-2.00
7	global	0.50	-1.00

fim do carregamento ..... 1  
numero de carregamentos ..... 1

---

DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 8.0E+0000  
Existe probabilidade de que o numero de algarismos corretos nos deslocamentos calculados seja 10

---

c a r r e g a m e n t o 1

---

no	sistema	d e s l o c a m e n t o s      n o d a i s	
		deslocamento	deslocamento
		x	y
1	global	-5.54521E-0020	-2.96288E-0020
2	global	6.48148E-0003	-3.40654E-0001
3	global	9.24201E-0020	-4.43073E-0020
4	global	6.48148E-0003	-3.40654E-0001
5	global	6.48148E-0003	-3.40654E-0001
6	global	6.11937E-0002	-2.88327E-0001
7	global	-2.88218E-0002	-3.05791E-0001
8	global	6.11937E-0002	-2.88327E-0001
9	global	-2.88218E-0002	-3.05791E-0001
10	global	2.96102E-0002	-3.22135E-0001

no	sistema	r e a c o e s      n o s      a p o i o s	
		forca	forca
		x	y
1	global	3.00	1.60
3	global	-5.00	2.40

barra	sistema	d i f e r e n c a      d e      e q u i l i b r i o	
		forca	forca
		x	y
		0.000	0.000

barra	sistema	e s s      f o r c o s      n a s      b a r r a s	
		no	forca
			normal
1	local	1	-0.21
		2	0.21
2	local	2	0.21
		3	-0.21
3	local	1	3.58
		6	-3.58
4	local	8	1.27
		4	-1.27
5	local	5	0.76
		9	-0.76
6	local	7	5.36
		3	-5.36
7	local	6	2.99
		10	-2.99
8	local	10	4.11
		7	-4.11
9	local	2	-1.18
		10	1.18

Fim Do Programa

### VII.3 EXEMPLO III - TRELIÇA ESPACIAL

Também para as treliças espaciais é apresentado um pequeno exemplo, visando apenas demonstrar a aplicabilidade do programa na dependência nodal deste tipo de estrutura. Nas treliças espaciais, os nós dependentes de um elemento também devem ser colineares. Uma dependência nodal em apenas uma das direções X e/ou Y e/ou Z pode não ter significado físico.

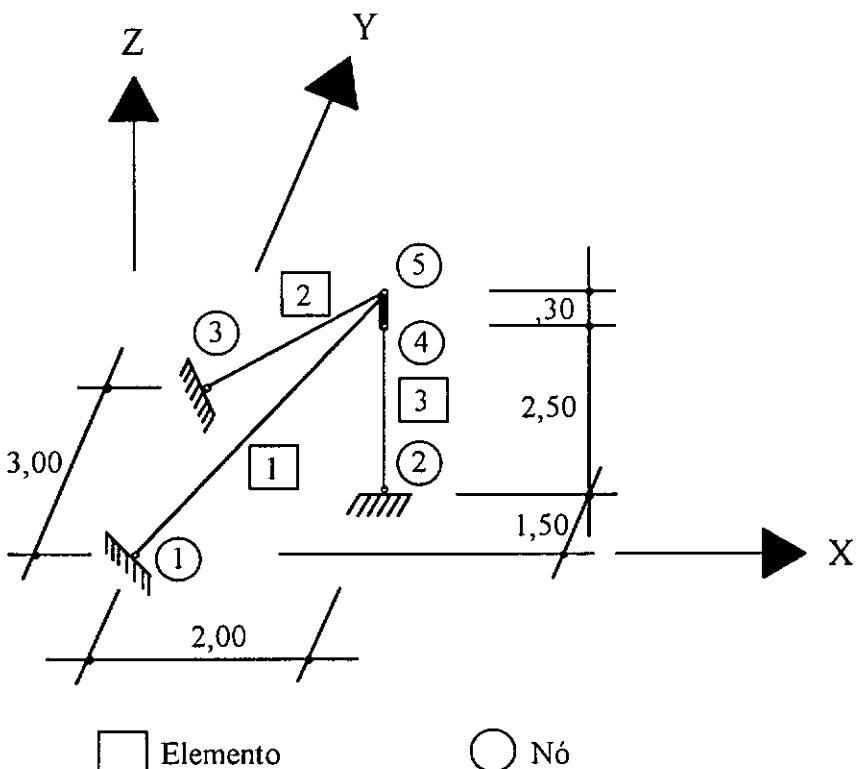


Figura VII.2 - Treliça espacial com dependência entre deslocamentos.

## Solução obtida no Sistema SALT:

TITULO : Exemplo com dependencia entre deslocamentos

-----  
DATA : 26/JULHO/1994 (terca-feira)  
HORA : 14:54:20  
ARQUITIVO DE DADOS : t\_esp\_01  
TIPO DA ESTRUTURA : trelica espacial  
-----

c o o r d e n a d a s n o d a i s  
no sistema coordenada coordenada coordenada  
x y z  
1 global 0.00E+0000 0.00E+0000 0.00E+0000  
2 global 2.00E+0000 1.50E+0000 0.00E+0000  
3 global 0.00E+0000 3.00E+0000 0.00E+0000  
4 global 2.00E+0000 1.50E+0000 2.50E+0000  
5 global 2.00E+0000 1.50E+0000 2.80E+0000  
numero de nos ..... 5

r e s t r i c o e s n o d a i s  
constante de mola  
no codigo transl. x transl. y transl. z  
1 111 0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00  
2 111 0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00  
3 111 0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00  
numero de nos com restricao ..... 3

p r o p r i e d a d e s d o s e l e m e n t o s  
barra material secao no inicial no final comprimento  
1 1 1 1 5 3.75E+0000  
2 1 1 3 5 3.75E+0000  
3 1 1 2 4 2.50E+0000  
numero de elementos ..... 3

d e p e n d e n c i a e n t r e d e s l o c a m e n t o s  
translacao  
no dependente no mestre x y z  
4 5 1 1 1  
numero de no(s) na relacao mestre-dependente ... 1

p r o p r i e d a d e s d o s m a t e r i a i s  
material : 1

M. Elasticidade ..... 1.5E+0004  
M. E. Transversal ... 0.0E+0000  
C. Poisson ..... 0.0E+0000  
C. D. Termica ..... 1.0E-0005  
P. Especifico ..... 12.00

numero de tipos de material ..... 1

p r o p r i e d a d e s d a s s e c o e s  
tipo area  
1 7.20E-0003

numero de tipos secoes ..... 1

c a r r e g a m e n t o 1

c a r g a s n o d a i s  
no sistema forca forca forca  
x y z  
5 global 2.00 5.00 -3.00

fim do carregamento ..... 1  
numero de carregamentos ..... 1

-----  
DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 1.7E+0000  
Existe probabilidade de que o numero de algarismos  
corretos nos deslocamentos calculados seja 10  
-----

c a r r e g a m e n t o      l

---

d e s l o c a m e n t o s      n o d a i s

no	sistema	desloc. x	desloc. y	desloc. z
1	global	3.22601E-0019	2.41950E-0019	4.51641E-0019
2	global	0.000000E+0000	0.000000E+0000	-4.31789E-0019
3	global	-1.73708E-0019	1.30281E-0019	-2.43191E-0019
4	global	3.10392E-0001	5.44127E-0001	-1.34259E-0001
5	global	3.10392E-0001	5.44127E-0001	-1.34259E-0001

r e a c o e s      n o s      a p o i o s

no	sistema	forca x	forca y	forca z
1	global	-4.33	-3.25	-6.07
2	global	0.00	0.00	5.80
3	global	2.33	-1.75	3.27

d i f e r e n c a      d e      e q u i l i b r i o

forca	forca	forca
x	y	z
0.000	0.000	0.000

b a r r a s      e s f o r c o s      n a s

barra	sistema	no	forca
normal			
1	local	1	-8.13
		5	8.13
2	local	3	4.38
		5	-4.38
3	local	2	5.80
		4	-5.80

Fim Do Programa

## VII.4 EXEMPLO IV - GRELHA

Para exemplificar uma grelha com dependência entre deslocamentos, foi considerado o pequeno modelo apresentado na figura VII.3. Esta estrutura foi analisada no Sistema SALT, com as propriedades e resultados apresentados na listagem que se segue.

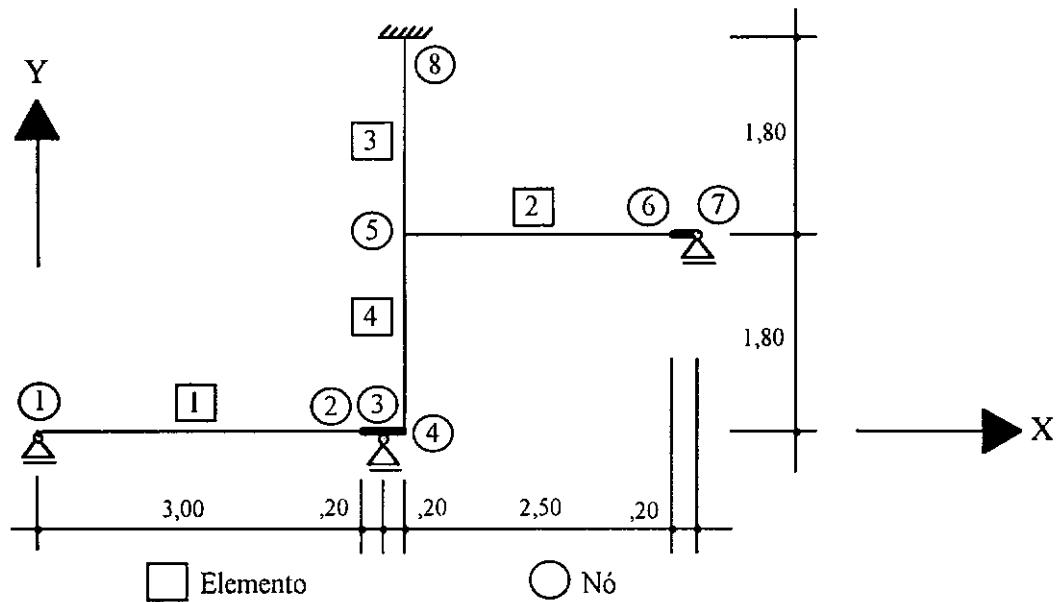


Figura VII.3 - Grelha com dependência entre deslocamentos.

## Solução obtida no Sistema SALT:

TITULO : Exemplo com dependencia entre deslocamentos

-----  
DATA : 26/JULHO/1994 (terca-feira)

HORA : 14:54:41

ARQUIVO DE DADOS : gre\_02

TIPO DA ESTRUTURA : grelha

-----

no	sistema	coordenadas nodais		
		coordenada x	coordenada y	coordenada z
1	global	0.00E+0000	0.00E+0000	0.00E+0000
2	global	3.00E+0000	0.00E+0000	0.00E+0000
3	global	3.20E+0000	0.00E+0000	0.00E+0000
4	global	3.40E+0000	0.00E+0000	0.00E+0000
5	global	3.40E+0000	1.80E+0000	0.00E+0000
6	global	5.90E+0000	1.80E+0000	0.00E+0000
7	global	6.10E+0000	1.80E+0000	0.00E+0000
8	global	3.40E+0000	3.60E+0000	0.00E+0000

numero de nos ..... 8

restricoes nodais  
constante de mola

no	codigo	transl. z	rotacao	
			x	y
1	100	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3	100	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
7	100	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8	111	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

numero de nos com restricao ..... 4

barra	material	propriedades dos elementos				
		secao	no inicial	no final	comprimento	
1	1	1	1	2	3.00E+0000	
2	1	1	5	6	2.50E+0000	
3	1	1	5	8	1.80E+0000	
4	1	1	4	5	1.80E+0000	

numero de elementos ..... 4

dependencia entre deslocamentos  
translacao/rotacao rotacao

no dependente	no mestre	z xx yy xx yy			
		z	xx	yy	xx
2	3	1	1	1	1
4	3	1	1	1	1
6	7	1	1	1	1

numero de no(s) na relacao mestre-dependente ... 3

propriedades dos materiais

material : 1

M. Elasticidade .....	2.1E+0007
M. E. Transversal ...	8.8E+0006
C. Poisson .....	2.0E-0001
C. D. Termica .....	1.0E-0005
P. Especifico .....	25.00

numero de tipos de material ..... 1

propriedades das secoes

tipo	area x	area z	inercia	
			x	y
1	6.00E-0002	0.00E+0000	2.00E-0004	8.00E-0004

modulos de flexao

tipo	wy		
		1	1.00E+0000

numero de tipos secoes ..... 1

c a r r e g a m e n t o 1

c a r g a s a p l i c a d a s n a s b a r r a s						
barra	sistema	tipo	la	lb	pz	mx wza
1	local	c	1.50		-3.0E+0000	0.0E+0000
2	local	u	0.00	2.50	-2.0E+0000	wzb

fim do carregamento ..... 1  
numero de carregamentos ..... 1

-----  
DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 1.5E+0000  
Existe probabilidade de que o numero de algarismos  
corretos nos deslocamentos calculados seja 10  
-----

c a r r e g a m e n t o 1

d e s l o c a m e n t o s n o d a i s						
no	sistema	deslocamento	rotacao z	rotacao x	rotacao y	
1	global	-8.01821E-0023	-7.43356E-0005	1.05889E-0004		
2	global	-1.85551E-0005	-7.43356E-0005	-9.27756E-0005		
3	global	-1.28564E-0022	-7.43356E-0005	-9.27756E-0005		
4	global	1.85551E-0005	-7.43356E-0005	-9.27756E-0005		
5	global	-6.41360E-0005	1.08526E-0005	6.14470E-0005		
6	global	-2.22506E-0005	1.08526E-0005	-1.11253E-0004		
7	global	-1.20254E-0022	1.08526E-0005	-1.11253E-0004		
8	global	-1.01024E-0022	9.63661E-0023	3.21121E-0024		

r e a c o e s n o s a p o i o s						
no	sistema	forca z	momento x	momento y		
1	global	1.49	0.00	0.00		
3	global	2.39	0.00	0.00		
7	global	2.24	0.00	0.00		
8	global	1.88	-1.79	-0.06		

d i f e r e n c a d e e q u i l i b r i o						
( o equilibrio de momento é feito em relacao a origem )						
		forca z	momento x	momento y		
		-0.000	-0.000	0.000		

barra	e s f o r c o s n a s b a r r a s				
	sistema	no	forca cortante	momento torcor	momento fletor
1	local	1	1.49	-0.00	0.00
		2	1.51	0.00	0.02
2	local	5	2.76	-0.00	-0.21
		6	2.24	0.00	-0.45
3	local	5	-1.88	0.06	1.59
		8	1.88	-0.06	1.79
4	local	4	0.88	-0.15	-0.00
		5	-0.88	0.15	-1.59

Fim Do Programa

## VII.5 EXEMPLO V - PÓRTICO ESPACIAL, EDIFÍCIO

Os pórticos espaciais são os mais comuns em dependência entre deslocamentos. Esta dependência pode aparecer em modelos de estaqueamento, bem como de edifícios altos, como é exemplificado adiante, ou em outros tipos de estruturas. Para exemplificar qualitativamente um pórtico espacial com dependência linear generalizada entre deslocamentos, foi resolvida a estrutura apresentada em planta na figura VII.4.a.b.c. Nesta estrutura, tem-se extremos rígidos de final de viga associados com diafragma rígido devido à presença da laje, redução de pilar e um simples diafragma no terceiro pavimento e na cobertura. Os pilares 17 e 20, do terceiro pavimento, são ligados com o diafragma como um pino, ou seja, o diafragma deste pavimento não provoca torção destes pilares. Os pilares 18 e 19 são ligados rigidamente com o diafragma, sofrendo torção provocada pelo diafragma. Esta diferença de modelação pode ser constatada nos dados de dependência linear generalizada entre deslocamentos dos nós 23, 26, 24 e 25 desse pavimento. A ligação em pino dos pilares 17 e 20 com o diafragma do terceiro pavimento não pode ser simulada com a matriz de dependência clássica, pois estes pilares continuam até a cobertura. Quando o pilar termina no plano do diafragma, a ligação em pino pode ser simulada com simples liberação do deslocamento axial de torção do elemento naquela extremidade. A ligação dos pilares 21, 22, 23 e 24 com o diafragma da cobertura é rígida, ou seja, é como se os pilares fossem soldados em uma chapa, sofrendo desta maneira a influência da rotação do diafragma, na sua torção. A laje do primeiro pavimento sofre interferência de um talude que é representado pelas molas dos nós 10 e 12, molas estas que podem ser colocadas em nós que não conectam elementos. As vigas de todos os pavimentos são de 0,20 m x 0,40 m e o momento de inércia à torção foi calculado segundo a expressão  $I_t = \eta b^3 h$  ( $b < h$ ), com  $\eta = 0,229$  para todos os membros. Neste exemplo, não foi considerado o efeito da deformação por esforço cortante, devido à dimensão dos mesmos, porém o Sistema SALT permite tal

consideração [1][20]. Foram considerados dois carregamentos simples.

Os nós 33, 34, 35 e 36 são inativos [1][20] e usados apenas para alocar o sistema de referência local de elementos.

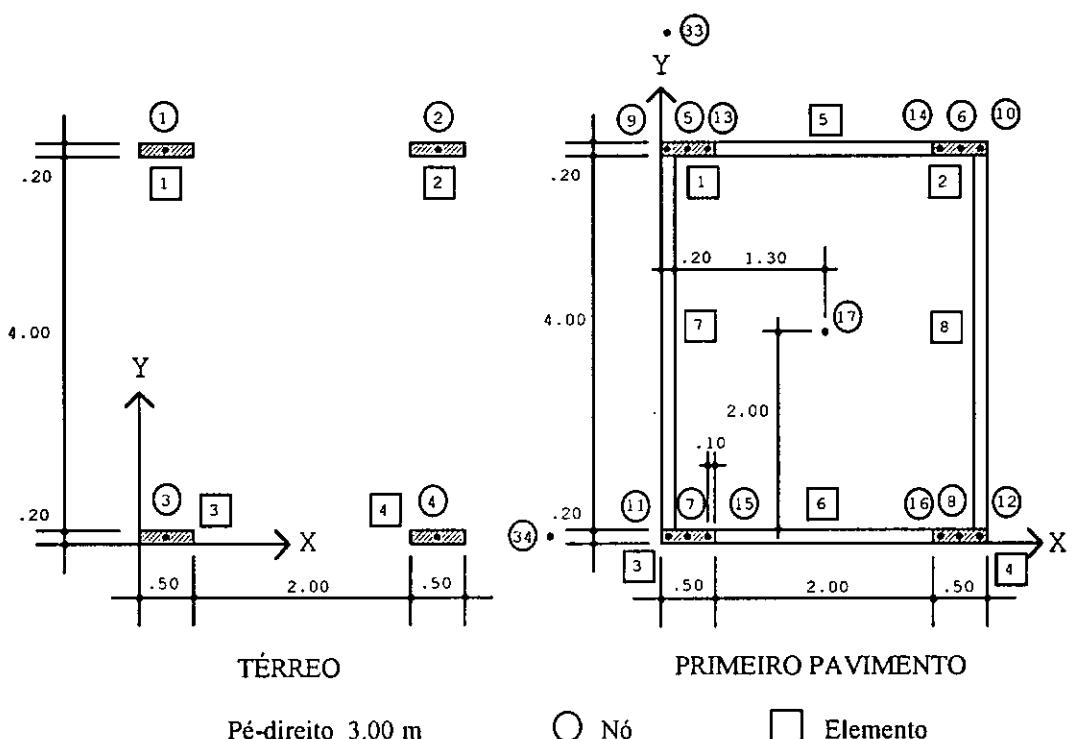


Figura VII.4.a - Pórtico espacial com dependência entre deslocamentos.

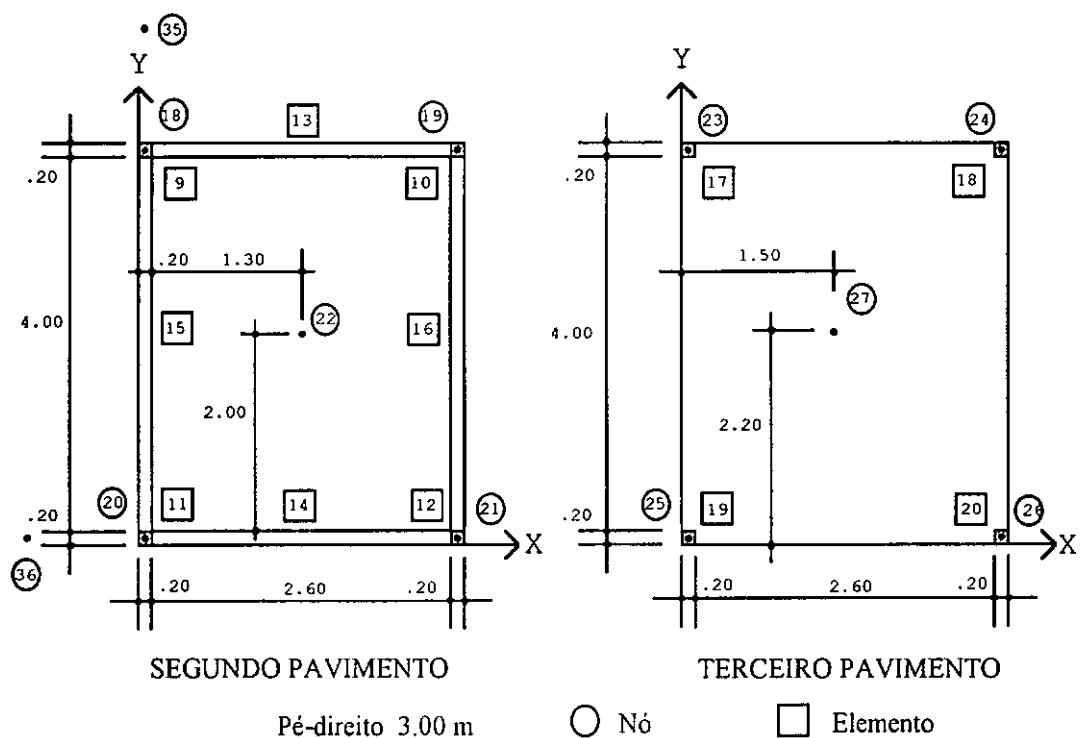


Figura VII.4.b - Pórtico espacial com dependência entre deslocamentos.

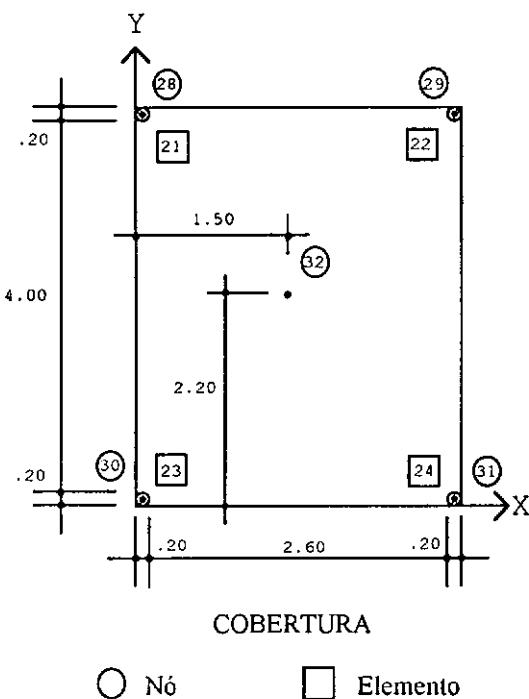


Figura VII.4.c - Pórtico espacial com dependência entre deslocamentos.





modulos de flexao

tipo	wy	wz
1	1.00E+0000	1.00E+0000
2	1.00E+0000	1.00E+0000
3	1.00E+0000	1.00E+0000
4	1.00E+0000	1.00E+0000

numero de tipos secoes ..... 4

nos inativos  
( nos sem elementos conectados )

33	34	35	36
----	----	----	----

numero de nos inativos ..... 4

carregamento 1 - carregamento simetrico

cargas nodais

no sistema	forca x	forca y	forca z	momento x	momento y	momento z
9 global	8.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
11 global	8.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
18 global	9.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
20 global	9.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
23 global	1.0E+0002	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
25 global	1.0E+0002	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
28 global	1.2E+0002	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
30 global	1.2E+0002	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000

fim do carregamento ..... 1

carregamento 2 - carregamento assimetrico

cargas nodais

no sistema	forca x	forca y	forca z	momento x	momento y	momento z
9 global	8.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
18 global	9.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
23 global	1.0E+0002	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
28 global	1.2E+0002	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000

fim do carregamento ..... 2  
numero de carregamentos ..... 2

---

DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 2.3E+0001  
Existe probabilidade de que o numero de algarismos  
corretos nos deslocamentos calculados seja 9

---

carregamento 1

---

deslocamentos nodais

no sistema	desloc. x	desloc. y	desloc. z	rotacao x	rotacao y	rotacao z
1 global	2.84E-21	-4.14E-34	1.41E-20	5.37E-34	5.90E-21	2.15E-34
2 global	2.84E-21	3.79E-34	-1.41E-20	-5.68E-34	5.90E-21	2.15E-34
3 global	2.84E-21	-3.71E-34	1.41E-20	4.95E-34	5.90E-21	2.15E-34
4 global	2.84E-21	3.79E-34	-1.41E-20	-5.68E-34	5.90E-21	2.15E-34
5 global	2.04E-02	-5.15E-15	1.31E-03	-2.33E-15	7.28E-03	5.22E-15
6 global	2.04E-02	7.90E-15	-1.31E-03	7.17E-18	7.28E-03	5.22E-15
7 global	2.04E-02	-5.15E-15	1.31E-03	-1.74E-15	7.28E-03	5.22E-15
8 global	2.04E-02	7.90E-15	-1.31E-03	9.25E-18	7.28E-03	5.22E-15
9 global	2.04E-02	-5.93E-15	2.40E-03	-2.33E-15	7.28E-03	5.22E-15
10 global	2.04E-02	8.68E-15	-2.40E-03	7.17E-18	7.28E-03	5.22E-15
11 global	2.04E-02	-5.93E-15	2.40E-03	-1.74E-15	7.28E-03	5.22E-15
12 global	2.04E-02	8.68E-15	-2.40E-03	9.25E-18	7.28E-03	5.22E-15
13 global	2.04E-02	-4.37E-15	2.17E-04	-2.33E-15	7.28E-03	5.22E-15
14 global	2.04E-02	7.12E-15	-2.17E-04	7.17E-18	7.28E-03	5.22E-15
15 global	2.04E-02	-4.37E-15	2.17E-04	-1.74E-15	7.28E-03	5.22E-15
16 global	2.04E-02	7.12E-15	-2.17E-04	9.25E-18	7.28E-03	5.22E-15
17 global	2.04E-02	1.38E-15	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.22E-15
18 global	1.83E-01	3.21E-14	4.27E-03	-1.24E-14	1.83E-02	-1.90E-14
19 global	1.83E-01	-2.11E-14	-4.27E-03	5.44E-15	1.83E-02	-1.90E-14
20 global	1.83E-01	3.21E-14	4.27E-03	-1.33E-14	1.83E-02	-1.90E-14
21 global	1.83E-01	-2.11E-14	-4.27E-03	1.21E-14	1.83E-02	-1.90E-14
22 global	1.83E-01	5.54E-15	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.90E-14
23 global	8.81E-01	5.61E-13	4.27E-03	-3.57E-13	3.88E-01	-6.66E-13





12	local	12	202.40	31.69	-31.06	23.07	47.48	51.55
		21	-202.40	-31.69	31.06	-23.07	45.68	43.52
13	local	18	0.00	-0.00	-360.39	-10.24	504.55	-0.00
		19	-0.00	0.00	360.39	10.24	504.55	-0.00
14	local	20	-0.00	-0.00	-162.62	-10.24	227.67	-0.00
		21	0.00	0.00	162.62	10.24	227.67	-0.00
15	local	20	0.00	-0.00	-39.78	-10.51	83.53	0.00
		18	-0.00	0.00	39.78	10.51	83.53	0.00
16	local	21	0.00	-0.00	39.78	-10.51	-83.53	0.00
		19	-0.00	0.00	-39.78	10.51	-83.53	0.00
17	local	18	0.00	-79.30	-9.95	49.16	48.09	-336.36
		23	-0.00	79.30	9.95	-49.16	-18.25	98.45
18	local	19	-0.00	79.30	-9.95	51.93	48.09	336.36
		24	0.00	-79.30	9.95	-51.93	-18.25	-98.45
19	local	20	-0.00	-30.70	-9.95	51.93	48.09	-173.64
		25	0.00	30.70	9.95	-51.93	-18.25	81.55
20	local	21	0.00	30.70	-9.95	49.16	48.09	173.64
		26	-0.00	-30.70	9.95	-49.16	-18.25	-81.55
21	local	23	0.00	-32.82	-6.08	49.16	18.25	-98.45
		28	-0.00	32.82	6.08	-49.16	0.00	0.00
22	local	24	0.00	32.82	-6.08	47.97	18.25	98.45
		29	-0.00	-32.82	6.08	-47.97	-0.00	-0.00
23	local	25	0.00	-27.18	-6.08	47.97	18.25	-81.55
		30	-0.00	27.18	6.08	-47.97	-0.00	-0.00
24	local	26	0.00	27.18	-6.08	49.16	18.25	81.55
		31	-0.00	-27.18	6.08	-49.16	-0.00	0.00

Fim Do Programa

## VII.6 EXEMPLO VI - PÓRTICO ESPACIAL, GALPÃO

O galpão da figura IV.4 também é uma estrutura espacial que não pode ser resolvida com a matriz clássica de dependência entre deslocamentos. A cobertura deste galpão é uma treliça espacial. Para facilitar a análise dos pilares, estes podem ser analisados separadamente, considerando que a treliça é um corpo rígido similar a um diafragma. No nó 13 são considerados os deslocamentos do diafragma e o plano deste contém os nós 12 e 13. Os nós 7, 8, 10 e 11, situados fora do plano do diafragma, são considerados possuindo dependência entre deslocamentos com o diafragma igual aos nós 12 e 13. Para fazer uma interpretação mais clara deste problema, pode-se dizer que a dependência dos nós 7, 8, 10 e 11 com o nó 13 do diafragma é equivalente à consideração de um extremo rígido dos pilares 1, 2, 4 e 5 até o diafragma e, neste ponto, com as mesmas dependências dos nós 9 e 12 com o nó 13. Os pilares estão ligados à treliça como uma ligação em pino, ou seja, a rotação em torno do eixo z da treliça espacial não provoca torção nos pilares. Como os pilares terminam na treliça, este efeito poderia ser conseguido simplesmente liberando a torção dos pilares neste extremo. As dependências dos nós para estas hipóteses estão descritas no arquivo de saída de dados gerado pelo SALT, que é apresentado a seguir.

Dependendo das condições da treliça espacial em questão, o projetista pode considerar que a mesma seja muito rígida quanto às deformações axiais e a flexões. Para corrigir isto, basta mudar a dependência entre deslocamentos.

## Solução obtida no Sistema SALT:

TITULO : Diaflagma rígido num galpão, pilares circul r=.15.

-----  
 DATA : 26/JULHO/1994 (terça-feira)  
 HORA : 17:11:16  
 ARQUIVO DE DADOS : p\_esp\_06  
 TIPO DA ESTRUTURA : portico espacial

no	sistema	coordenadas		noda is		
		coordenada	x	coordenada	y	coordenada
1	global	0.00E+0000		0.00E+0000		0.00E+0000
2	global	9.00E+0000		0.00E+0000		0.00E+0000
3	global	1.20E+0001		0.00E+0000		0.00E+0000
4	global	0.00E+0000		8.00E+0000		0.00E+0000
5	global	9.00E+0000		8.00E+0000		0.00E+0000
6	global	1.20E+0001		8.00E+0000		0.00E+0000
7	global	0.00E+0000		0.00E+0000		3.00E+0000
8	global	9.00E+0000		0.00E+0000		3.00E+0000
9	global	1.20E+0001		0.00E+0000		4.00E+0000
10	global	0.00E+0000		8.00E+0000		3.00E+0000
11	global	9.00E+0000		8.00E+0000		3.00E+0000
12	global	1.20E+0001		8.00E+0000		4.00E+0000
13	global	1.00E+0001		4.00E+0000		4.00E+0000

numero de nos ..... 13

no	codigo	restricoes noda is		
		constante de mola	transl. x	transl. y
1	111111	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
		0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	111111	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
		0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3	111111	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
		0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
4	111111	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
		0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5	111111	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
		0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
6	111111	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
		0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

numero de nos com restricao ..... 6

barra	material	propriedades dos elementos			no K
		secao	no inicial	no final	
1	1	1	1	7	3.00E+0000
2	1	1	2	8	3.00E+0000
3	1	1	3	9	4.00E+0000
4	1	1	4	10	3.00E+0000
5	1	1	5	11	3.00E+0000
6	1	1	6	12	4.00E+0000

numero de elementos ..... 6

no dependente	no mestre	dependencia entre deslocamentos			no K
		x	yy	zz	
7	13	1	0	1	1 0 1 0 0 0 0 0 0
8	13	1	0	1	1 0 1 0 0 0 0 0 0
9	13	1	0	1	1 0 1 0 0 0 0 0 0
10	13	1	0	1	1 0 1 0 0 0 0 0 0
11	13	1	0	1	1 0 1 0 0 0 0 0 0
12	13	1	0	1	1 0 1 0 0 0 0 0 0

numero de no(s) na relacao mestre-dependente ... 6

propriedades dos materiais

material : 1

M. Elasticidade ..... 2.1E+0007  
M. E. Transversal ... 8.8E+0006  
C. Poisson ..... 2.0E-0001  
C. D. Termica ..... 0.0E+0000  
P. Especifico ..... 0.00

numero de tipos de material ..... 1

propriedades das secoes

tipo	area x	area y	area z	inercia x	inercia y	inercia z
1	3.53E-0002	0.00E+0000	0.00E+0000	7.95E-0004	3.98E-0004	3.98E-0004

modulos de flexao

tipo	wy	wz
1	1.00E+0000	1.00E+0000

numero de tipos secoes ..... 1

carregamento 1 - Carregamento simetrico

cargas nodais

no sistema	forca x	forca y	forca z	momento x	momento y	momento z
7 global	6.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
10 global	6.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000

fim do carregamento ..... 1

carregamento 2 - Carregamento assimetrico

cargas nodais

no sistema	forca x	forca y	forca z	momento x	momento y	momento z
7 global	6.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
10 global	9.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000

fim do carregamento ..... 2

carregamento 3 - Carregamento assimetrico

cargas nodais

no sistema	forca x	forca y	forca z	momento x	momento y	momento z
7 global	0.0E+0000	9.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
8 global	0.0E+0000	6.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
9 global	0.0E+0000	3.0E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000

fim do carregamento ..... 3

numero de carregamentos ..... 3

-----  
DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 1.1E+0001

Existe probabilidade de que o numero de algarismos corretos nos deslocamentos calculados seja 9

-----

carregamento 1

=====

deslocamentos nodais

no sistema	desloc. x	desloc. y	desloc. z	rotacao x	rotacao y	rotacao z
1 global	6.33E-22	6.23E-34	0.00E+00	-2.49E-33	1.43E-21	0.00E+00
2 global	2.38E-22	-1.81E-34	0.00E+00	7.24E-34	9.53E-22	0.00E+00
3 global	2.34E-22	-4.42E-34	0.00E+00	1.77E-33	9.38E-22	0.00E+00
4 global	6.33E-22	6.23E-34	0.00E+00	-2.49E-33	1.43E-21	0.00E+00
5 global	2.38E-22	-1.81E-34	0.00E+00	7.24E-34	9.53E-22	0.00E+00
6 global	2.34E-22	-4.42E-34	0.00E+00	1.77E-33	9.38E-22	0.00E+00
7 global	2.32E-02	5.46E-14	0.00E+00	-3.04E-14	9.30E-03	0.00E+00
8 global	2.09E-02	-1.59E-14	0.00E+00	8.82E-15	1.16E-02	0.00E+00
9 global	3.25E-02	-6.12E-14	0.00E+00	2.30E-14	1.22E-02	0.00E+00
10 global	2.32E-02	5.46E-14	0.00E+00	-3.04E-14	9.30E-03	0.00E+00
11 global	2.09E-02	-1.59E-14	0.00E+00	8.82E-15	1.16E-02	0.00E+00
12 global	3.25E-02	-6.12E-14	0.00E+00	2.30E-14	1.22E-02	0.00E+00
13 global	3.25E-02	-3.69E-14	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.22E-14





## VII.7 EXEMPLO VII - PÓRTICO PLANO, ESTAQUEAMENTO PLANO

Os blocos de estaqueamentos são estruturas que podem ser analisadas com a matriz de dependência clássica, pois nestes blocos considera-se que eles funcionem como um corpo rígido à deformação axial e à flexão. Desta forma, os nós que fazem parte do bloco possuem uma dependência total com o nó que representa o corpo rígido. Na análise desses blocos, pode-se incluir as constantes de rigidez devidas à interação das estacas com o solo ou considerar, de forma simplista, que as estacas são rotuladas na base e na ligação com o bloco. Na figura VII.5 tem-se um estaqueamento plano onde as estacas são consideradas rotuladas na base e na ligação com o bloco. Quando for necessário analisar um estaqueamento plano degenerado [18], como por exemplo cavalete, pode-se incluir estacas adicionais para eliminar a hipostaticidade da estrutura [18] sem que esta absorva carga do estaqueamento ou pode-se ainda adicionar molas de pequena rigidez na base da estaca ou em outros nós, de tal forma que a singularidade da matriz de rigidez seja evitada. A reação nessas molas deve ser a mínima possível para não descharacterizar as hipóteses iniciais.

Os dados de geometria, topologia e outros pertinentes ao modelo, bem como à solução, encontram-se no arquivo que segue, gerado pelo Sistema SALT.

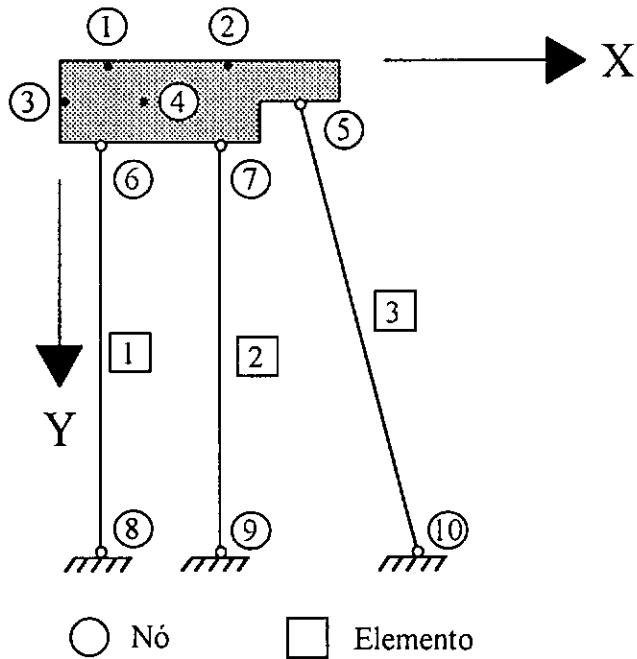


Figura VII.5 - Estaqueamento plano.

### Solução obtida no Sistema SALT:

TITULO : Estaqueamento plano.

DATA : 27/JULHO/1994 (quarta-feira)  
HORA : 9:4:0  
ARQUIVO DE DADOS : est\_p\_03  
TIPO DA ESTRUTURA : portico plano

no	sistema	coordenadas nodais		
		coordenada x	coordenada y	coordenada z
1	global	6.00E-0001	0.00E+0000	0.00E+0000
2	global	2.10E+0000	0.00E+0000	0.00E+0000
3	global	0.00E+0000	5.00E-0001	0.00E+0000
4	global	1.05E+0000	5.00E-0001	0.00E+0000
5	global	3.00E+0000	5.00E-0001	0.00E+0000
6	global	5.00E-0001	1.00E+0000	0.00E+0000
7	global	2.00E+0000	1.00E+0000	0.00E+0000
8	global	5.00E-0001	6.00E+0000	0.00E+0000
9	global	2.00E+0000	6.00E+0000	0.00E+0000
10	global	4.47E+0000	6.00E+0000	0.00E+0000

numero de nos ..... 10

no	codigo	transl. x	transl. y	rotacao z
8	110	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9	110	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	110	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

numero de nos com restricao ..... 3

barra	material	secao no inicial	no final	comprimento
1	1	1	6	8 5.00E+0000
2	1	1	7	9 5.00E+0000
3	1	1	5	10 5.69E+0000

numero de elementos ..... 3

barra sistema	barras com articulacoes'					
	forca x	forca y	mome z	forca x	forca y	mome z
1 local	1	1	0	1	1	1
2 local	1	1	0	1	1	1
3 local	1	1	0	1	1	1

numero de elementos com articulacoes ..... 3

dependencia entre deslocamentos  
translacao/rotacao rotacao

no dependente	no mestre	x zz	y zz	zz
		1	1 1	1 1
1	4	1 1	1 1	1
2	4	1 1	1 1	1
3	4	1 1	1 1	1
5	4	1 1	1 1	1
6	4	1 1	1 1	1
7	4	1 1	1 1	1

numero de no(s) na relacao mestre-dependente ... 6

propriedades dos materiais

material : 1

M. Elasticidade ..... 2.1E+0007  
M. E. Transversal ... 8.8E+0006  
C. Poisson ..... 2.0E-0001  
C. D. Termica ..... 1.0E-0005  
P. Especifico ..... 25.00

numero de tipos de material ..... 1

propriedades das secoes

tipo	area x	area y	inercia z
			1 2.25E-0002 0.00E+0000 4.22E-0005

modulos de flexao

tipo	wz
	1 1.00E+0000

numero de tipos secoes ..... 1

carregamento 1

no	sistema	cargas nodais		
		forca x	forca y	momento z
1	global	0.00	1000.00	0.00
2	global	0.00	1500.00	0.00
3	global	30.00	0.00	0.00

fim do carregamento ..... 1

numero de carregamentos ..... 1

---

DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 3.7E+0000  
Existe probabilidade de que o numero de algarismos  
corretos nos deslocamentos calculados seja 10

---

carregamento 1

---

no	sistema	deslocamentos nodais		
		deslocamento x	deslocamento y	rotacao z
1	global	-6.62266E-0002	1.00133E-0002	4.03124E-0003
2	global	-6.62266E-0002	1.60602E-0002	4.03124E-0003
3	global	-6.82422E-0002	7.59457E-0003	4.03124E-0003
4	global	-6.82422E-0002	1.18274E-0002	4.03124E-0003
5	global	-6.82422E-0002	1.96883E-0002	4.03124E-0003

```

6 global -7.02578E-0002 9.61019E-0003 4.03124E-0003
7 global -7.02578E-0002 1.56571E-0002 4.03124E-0003
8 global -2.52962E-0034 2.85564E-0020 -1.40516E-0002
9 global -2.14570E-0034 4.65245E-0020 -1.40516E-0002
10 global 9.43324E-0022 3.52944E-0021 -1.24734E-0002

```

		reações nos apoios		
no	sistema	força	força	momento
		x	y	z
8	global	0.00	-908.16	0.00
9	global	0.00	-1479.59	0.00
10	global	-30.00	-112.24	0.00

d i f e r e n c a d e e q u i l i b r i o  
{ o equilibrio de momento é feito em relacao a origem }

		força	força	momento
		x	y	z
		-0.000	0.000	-0.000

barra	esforços	nós		barras	
		sistema	no	força	força
			normal	cortante	fletor
1	local	6	908.16	0.00	0.00
		8	-908.16	-0.00	0.00
2	local	7	1479.59	0.00	0.00
		9	-1479.59	-0.00	0.00
3	local	5	116.18	-0.00	0.00
		10	-116.18	0.00	-0.00

Fim Do Programa

Pode-se também analisar um estaqueamento que tenha apenas constantes de rigidez, simulando as estacas ou o solo, no caso de outro tipo de estrutura. Um exemplo simplista está representado na figura VII.6. Neste caso a hipostaticidade foi eliminada com a introdução de uma pequena constante de mola, na direção horizontal, em um dos nós. Este exemplo é um problema proposto por Süsskind, volume 2 [7], onde a solução das reações foram confirmadas para  $P = 1$  e  $K = 1$ .

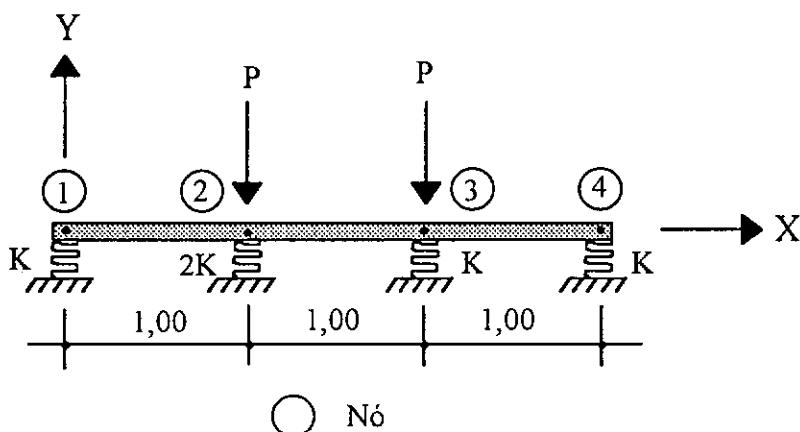


Figura VII.6 - Estrutura sobre molas.

## Solução obtida no Sistema SALT:

TITULO : Estaqueamento plano sem elemento.

-----

DATA : 27/JULHO/1994 (quarta-feira)

HORA : 22:37:14

ARQUIVO DE DADOS : est\_p\_01

TIPO DA ESTRUTURA : portico plano

-----

c o o r d e n a d a s   n o d a i s  
no sistema coordenada coordenada coordenada  
                 x       y       z  
1 global 0.00E+0000 0.00E+0000 0.00E+0000  
2 global 1.00E+0000 0.00E+0000 0.00E+0000  
3 global 2.00E+0000 0.00E+0000 0.00E+0000  
4 global 3.00E+0000 0.00E+0000 0.00E+0000

numero de nos ..... 4

r e s t r i c o e s   n o d a i s  
constante de mola  
no codigo transl. x transl. y rotacao z  
1 000 0.00000E+00 1.00000E+00 0.00000E+00  
2 000 0.00000E+00 2.00000E+00 0.00000E+00  
3 000 0.00000E+00 1.00000E+00 0.00000E+00  
4 000 1.00000E-09 1.00000E+00 0.00000E+00

numero de nos com restricao ..... 4

p r o p r i e d a d e s   d o s   e l e m e n t o s  
barra material secao no inicial no final comprimento

numero de elementos ..... 0

d e p e n d e n c i a   e n t r e   d e s l o c a m e n t o s  
translacao/rotacao rotacao  
no dependente no mestre x zz y zz zz  
1              3        1    1    1    1  
2              3        1    1    1    1  
4              3        1    1    1    1

numero de no(s) na relacao mestre-dependente ... 3

p r o p r i e d a d e s   d o s   m a t e r i a i s

numero de tipos de material ..... 0

tipo p r o p r i e d a d e s   d a s   s e c o e s  
area x area y inercia z

tipo m o d u l o s   d e   f l e x a o  
wz

numero de tipos secoes ..... 0

c a r r e g a m e n t o 1

c a r g a s   n o d a i s  
no sistema forca forca momento  
                 x       y       z  
2 global 0.00 -1.00 0.00  
3 global 0.00 -1.00 0.00

fim do carregamento ..... 1

numero de carregamentos ..... 1

-----  
DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 1.3E+0000  
Existe probabilidade de que o numero de algarismos  
corretos nos deslocamentos calculados seja 10

-----

c a r r e g a m e n t o    1

---

deslocamentos nodais  
no sistema deslocamento deslocamento rotacao  
                      x                  y                  z  
1 global 0.00000E+0000 -3.46154E-0001 -3.84615E-0002  
2 global 0.00000E+0000 -3.84615E-0001 -3.84615E-0002  
3 global 0.00000E+0000 -4.23077E-0001 -3.84615E-0002  
4 global 0.00000E+0000 -4.61538E-0001 -3.84615E-0002

reacoes nos apoios  
no sistema forca forca momento  
                      x                  y                  z  
1 global 0.00 0.35 0.00  
2 global 0.00 0.77 0.00  
3 global 0.00 0.42 0.00  
4 global 0.00 0.46 0.00

diferenca de equilibrio  
{ o equilibrio de momento e feito em relacao a origem }  
forca forca momento  
                      x                  y                  z  
0.000 -0.000 -0.000

esforcos nas barras  
barra sistema no forca normal forca cortante momento fletor

Fim Do Programa

## VII.8 EXEMPLO VIII - PÓRTICO ESPACIAL, ESTAQUEAMENTO ESPACIAL

Para exemplificar um estaqueamento espacial, é apresentado um cavalete espacial [18]. Na figura VII.7 tem-se o caso com quatro estacas. Estas são consideradas rotuladas na base e na ligação com o bloco rígido. Como se trata de um estaqueamento degenerado [18], a hipostaticidade é eliminada com a inclusão de pequenas molas de rigidez à rotação na base das estacas. Quando as reações ou os deslocamentos nessas molas forem diferentes de zero ou elevados, ter-se-á um carregamento incompatível com o cavalete ou bloco degenerado. A hipostaticidade também pode ser eliminada com as recomendações da referência [18]. Quando a rigidez devida à interação estaca-solo for conhecida, estas constantes de mola poderão ser colocadas ao longo das estacas, não sendo mais necessário impor a hipótese de que as estacas são rotuladas na base. Os nós 10, 11, 12 e 13 são inativos.

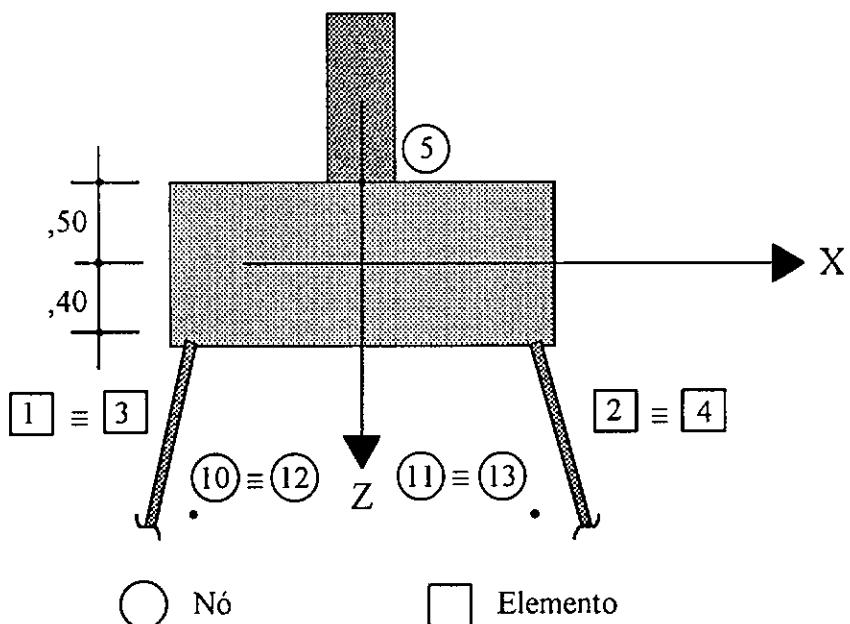
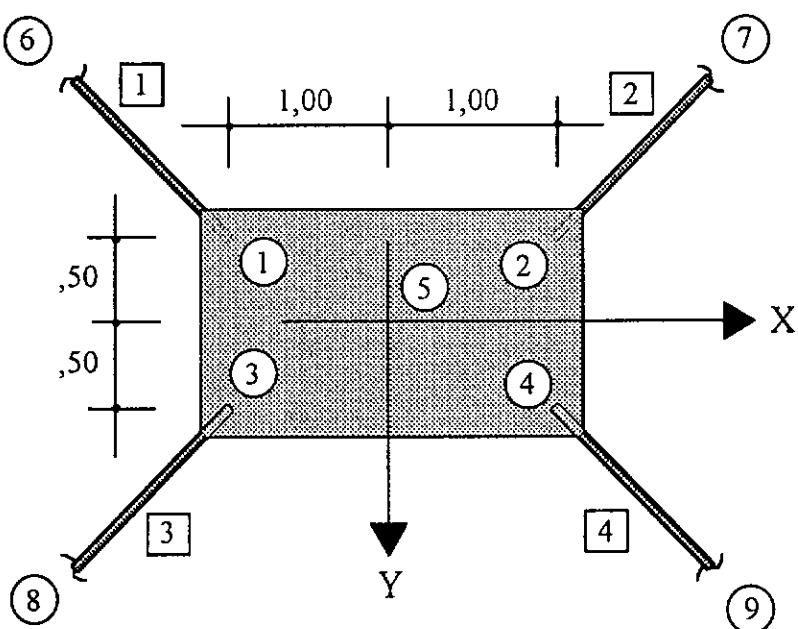


Figura VII.7 - Estaqueamento espacial.

**Solução obtida no Sistema SALT:**

TITULO : Estaqueamento espacial

---

DATA : 28/JULHO/1994 (quinta-feira)  
 HORA : 16:54:46  
 ARQUIVO DE DADOS : est\_e\_02  
 TIPO DA ESTRUTURA : portico espacial

---

no	sistema	coordenadas nodais			
		coordenada x	coordenada y	coordenada z	
1	global	-1.00E+0000	-5.00E-0001	4.00E-0001	
2	global	1.00E+0000	-5.00E-0001	4.00E-0001	
3	global	-1.00E+0000	5.00E-0001	4.00E-0001	
4	global	1.00E+0000	5.00E-0001	4.00E-0001	
5	global	0.00E+0000	0.00E+0000	-5.00E-0001	
6	global	-6.37E+0000	-5.87E+0000	8.00E+0000	
7	global	6.37E+0000	-5.87E+0000	8.00E+0000	
8	global	-6.37E+0000	5.87E+0000	8.00E+0000	
9	global	6.37E+0000	5.87E+0000	8.00E+0000	
10	global	-1.00E+0000	-5.00E-0001	6.00E-0001	
11	global	1.00E+0000	-5.00E-0001	6.00E-0001	
12	global	-1.00E+0000	5.00E-0001	6.00E-0001	
13	global	1.00E+0000	5.00E-0001	6.00E-0001	

numero de nos ..... 13

no	codigo	restricoes nodais			
		constante de mola	transl. x	transl. y	transl. z
			rotacao x	rotacao y	rotacao z
6	111000	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
		1.00000E-03	1.00000E-03	1.00000E-03	
7	111000	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
		1.00000E-03	1.00000E-03	1.00000E-03	
8	111000	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
		1.00000E-03	1.00000E-03	1.00000E-03	
9	111000	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
		1.00000E-03	1.00000E-03	1.00000E-03	

numero de nos com restricao ..... 4

barra	material	propriedades dos elementos					no K
		secao	no inicial	no final	comprimento		
1	1	1	1	6	1.07E+0001	10	
2	1	1	2	7	1.07E+0001	11	
3	1	1	3	8	1.07E+0001	12	
4	1	1	4	9	1.07E+0001	13	

numero de elementos ..... 4

barra	sistema	barras com articulacoes				no K						
		no inicial	no final	x	y		z	x	y	z	x	y
1	local	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	local	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
3	local	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
4	local	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1

numero de elementos com articulacoes ..... 4

no dependente	no mestre	dependencia entre deslocamentos						no K			
		x	yy	zz	y	xx	zz		z	xx	yy
1	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

numero de no(s) na relacao mestre-dependente ... 4

propriedades dos materiais

material : 1

M. Elasticidade .....	2.1E+0007
M. E. Transversal .....	8.8E+0006
C. Poisson .....	2.0E-0001
C. D. Termica .....	1.0E-0005
P. Especifico .....	25.00

numero de tipos de material ..... 1

propriedades das secoes  
tipo area x area y area z inercia x inercia y inercia z  
1 4.00E-0002 0.00E+0000 0.00E+0000 2.67E-0005 1.33E-0004 1.33E-0004

modulos de flexao  
tipo wy wz  
1 1.00E+0000 1.00E+0000

numero de tipos secoes ..... 1

nos inativos  
( nos sem elementos conectados )  
10 11 12 13

numero de nos inativos ..... 4

carregamento 1

cargas nodais  
no sistema forca x forca y forca z momento x momento y momento z  
5 global 0.0E+0000 0.0E+0000 1.0E+0003 0.0E+0000 0.0E+0000 0.0E+0000

fim do carregamento ..... 1  
numero de carregamentos ..... 1

-----  
DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 2.3E+0005  
Existe probabilidade de que o numero de algarismos  
corretos nos deslocamentos calculados seja 5  
-----

carregamento 1

deslocamentos nodais  
no sistema desloc. x desloc. y desloc. z rotacao x rotacao y rotacao z  
1 global 5.38E-09 9.19E-09 6.39E-03 -1.30E-08 3.80E-09 -7.69E-19  
2 global 5.38E-09 9.19E-09 6.39E-03 -1.30E-08 3.80E-09 -7.69E-19  
3 global 5.38E-09 9.19E-09 6.39E-03 -1.30E-08 3.80E-09 -7.69E-19  
4 global 5.38E-09 9.19E-09 6.39E-03 -1.30E-08 3.80E-09 -7.69E-19  
5 global 1.96E-09 -2.50E-09 6.39E-03 -1.30E-08 3.80E-09 -7.69E-19  
6 global -2.04E-20 -2.04E-20 2.89E-20 2.97E-04 -2.97E-04 2.23E-10  
7 global 2.04E-20 -2.04E-20 2.89E-20 2.97E-04 2.97E-04 -7.31E-10  
8 global -2.04E-20 2.04E-20 2.89E-20 -2.97E-04 -2.97E-04 8.59E-10  
9 global 2.04E-20 2.04E-20 2.89E-20 -2.97E-04 2.97E-04 -8.53E-11

reacoes nos apoios  
no sistema forca x forca y forca z momento x momento y momento z  
6 global 176.64 176.64 -250.00 -0.00 0.00 -0.00  
7 global -176.64 176.64 -250.00 -0.00 -0.00 0.00  
8 global 176.64 -176.64 -250.00 0.00 0.00 -0.00  
9 global -176.64 -176.64 -250.00 0.00 -0.00 0.00

diferenca de equilibrio  
( o equil. de momento e feito em relacao a origem )  
forca x forca y forca z momento x momento y momento z  
-0.00 0.00 0.00 -0.00 0.00 0.00

esforcos nas barras  
barra sistema no forca cortante cortante momento momento momento  
normal y z de torque fletor y fletor z  
1 local 1 353.42 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00  
6 -353.42 -0.00 -0.00 0.00 0.00 -0.00 0.00  
2 local 2 353.42 0.00 -0.00 0.00 0.00 0.00  
7 -353.42 -0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00  
3 local 3 353.42 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00  
8 -353.42 -0.00 -0.00 0.00 0.00 -0.00 0.00  
4 local 4 353.42 0.00 -0.00 0.00 0.00 0.00  
9 -353.42 -0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00

Fim Do Programa

## VII.9 EXEMPLO IX - PÓRTICO ESPACIAL, EDIFÍCIO ALTO

As dependências entre deslocamentos são muito comuns em edifícios altos. Nestes, é usual encontrar excentricidades de vigas em relação aos eixos geométricos dos pilares [2][6][11][[12][13][14][15][16][17], redução de pilares [11][12][13] e diafragma rígido devido à alta rigidez da laje no seu plano [2][6][11][[12][13][14]. No exemplo VII.5, todas estas dependências foram consideradas, além de outras. Porém, para exemplificar um edifício alto, ou seja, edifícios que são sensíveis a cargas laterais [12][6], será apresentada uma estrutura simples da referência [29], com 20 andares, cuja laje funciona como diafragma rígido.

A planta do primeiro pavimento está representada esquematicamente na figura VII.8. O nó 26 representa o primeiro nó do pavimento. Nos outros pavimentos a seqüência de numeração é a mesma, apenas acrescida de  $(n-1)*25$ , onde  $n$  é o número do andar. No térreo, os nós também têm a mesma seqüência, começando de 1 até 25, sendo que todos os apoios são engastados. Todos os elementos possuem seção de  $0,30 \times 0,30$  m e o pé-direito do térreo e demais andares é de 3,00 m. O módulo de elasticidade longitudinal é de  $2.10E8$  kN/m<sup>2</sup>, com coeficiente de Poisson de 0,30. A inércia à torção para todos os elementos é de  $I_x = \eta b^3 h$ , com  $(b < h)$  e  $\eta = 0,140$  e não se considerou o efeito do esforço cortante na deformação dos elementos. O carregamento é de 25 kN, aplicado no primeiro nó de cada andar na direção positiva do eixo global X. Para as dependências entre deslocamentos do diafragma rígido, o primeiro nó do pavimento foi escolhido para ser o nó mestre. Este nó poderia ser qualquer um dos outros nós, inclusive poderia ser criado um outro nó sem ligação com elementos estruturais, para ser o nó mestre do diafragma. A origem do sistema de coordenadas é considerada no nó 1 da base do edifício.

O outro exemplo assimétrico da mesma referência, também foi processado e os resultados confrontados, mas não será apresentado devido a limitações de espaço.

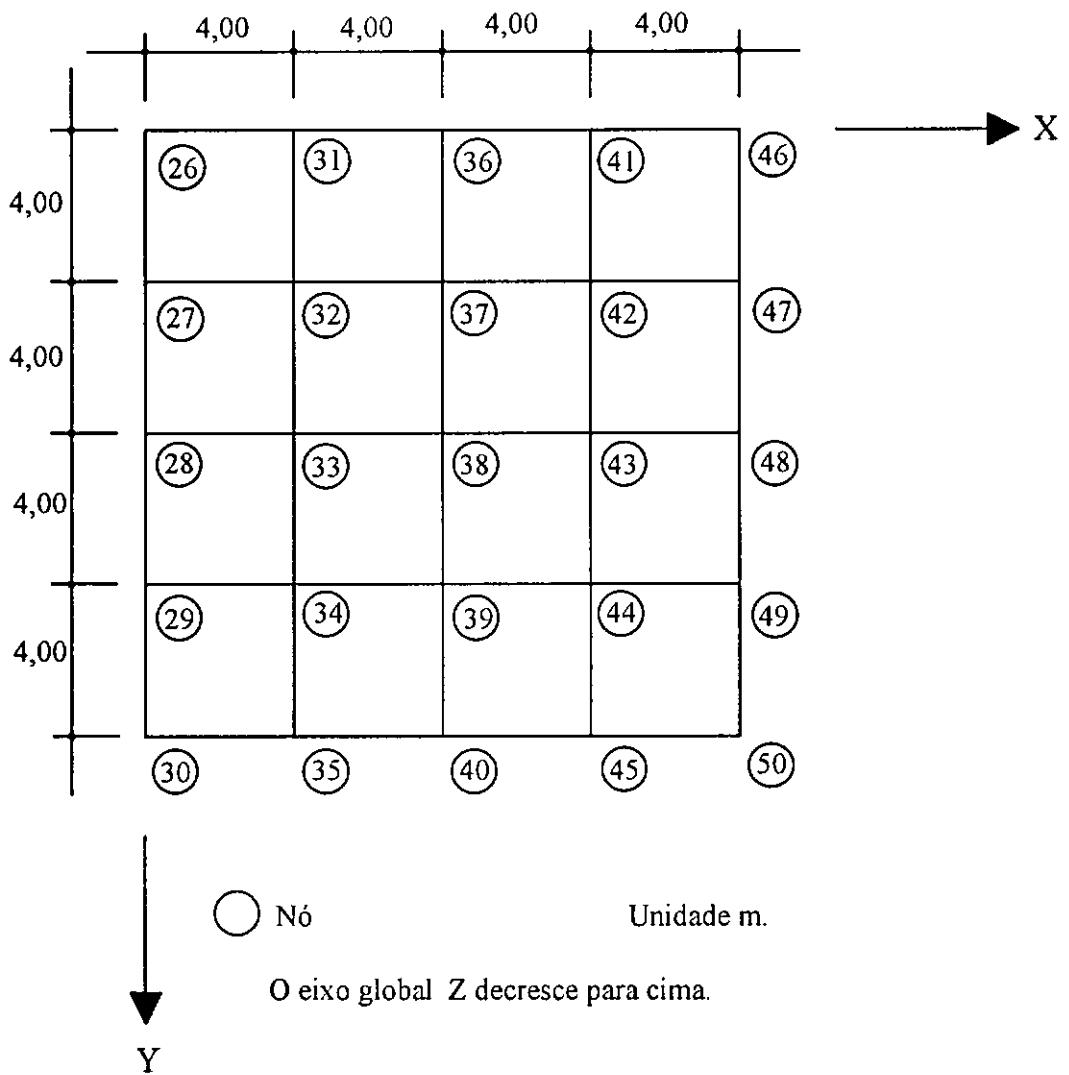


Figura VII.8 - Edificio alto.

Os dados de entrada estão apresentados abaixo, sendo que para maiores esclarecimentos da entrada pode-se consultar o manual do Sistema SALT [20].

#### Arquivo de entrada de dados para o Sistema SALT:

PORTICO ESPACIAL		Edificio alto						
Coordenadas dos nos								
1	0.0	0.0	0.0	20	25	0.0	0.0	-3.0
2	0.0	4.0	0.0	20	25	0.0	0.0	-3.0
3	0.0	8.0	0.0	20	25	0.0	0.0	-3.0
4	0.0	12.0	0.0	20	25	0.0	0.0	-3.0
5	0.0	16.0	0.0	20	25	0.0	0.0	-3.0
6	4.0	0.0	0.0	20	25	0.0	0.0	-3.0
7	4.0	4.0	0.0	20	25	0.0	0.0	-3.0
8	4.0	8.0	0.0	20	25	0.0	0.0	-3.0
9	4.0	12.0	0.0	20	25	0.0	0.0	-3.0
10	4.0	16.0	0.0	20	25	0.0	0.0	-3.0

11 8.0 0.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
12 8.0 4.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
13 8.0 8.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
14 8.0 12.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
15 8.0 16.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
16 12.0 0.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
17 12.0 4.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
18 12.0 8.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
19 12.0 12.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
20 12.0 16.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
21 16.0 0.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
22 16.0 4.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
23 16.0 8.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
24 16.0 12.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
25 16.0 16.0 0.0 20 25 0.0 0.0 -3.0  
0  
Condicoes de contorno  
1 111 111 g 24 1  
0

Tipos de material  
1 21.0E7 0.3 0.0 0.0  
0

Tipos de secao  
1 0.090 0.0 0.0 0.001134 0.000675 0.000675  
0

Propriedades dos elementos

1 1 26 1 1 6 19 25 25  
2 2 27 1 1 7 19 25 25  
3 3 28 1 1 8 19 25 25  
4 4 29 1 1 9 19 25 25  
5 5 30 1 1 10 19 25 25  
6 6 31 1 1 11 19 25 25  
7 7 32 1 1 12 19 25 25  
8 8 33 1 1 13 19 25 25  
9 9 34 1 1 14 19 25 25  
10 10 35 1 1 15 19 25 25  
11 11 36 1 1 16 19 25 25  
12 12 37 1 1 17 19 25 25  
13 13 38 1 1 18 19 25 25  
14 14 39 1 1 19 19 25 25  
15 15 40 1 1 20 19 25 25  
16 16 41 1 1 21 19 25 25  
17 17 42 1 1 22 19 25 25  
18 18 43 1 1 23 19 25 25  
19 19 44 1 1 24 19 25 25  
20 20 45 1 1 25 19 25 25  
21 21 46 1 1 16 19 25 25  
22 22 47 1 1 17 19 25 25  
23 23 48 1 1 18 19 25 25  
24 24 49 1 1 19 19 25 25  
25 25 50 1 1 20 19 25 25  
501 26 31 1 1 1 19 40 25  
502 31 36 1 1 1 19 40 25  
503 36 41 1 1 1 19 40 25  
504 41 46 1 1 1 19 40 25  
505 27 32 1 1 2 19 40 25  
506 32 37 1 1 2 19 40 25  
507 37 42 1 1 2 19 40 25  
508 42 47 1 1 2 19 40 25  
509 28 33 1 1 3 19 40 25  
510 33 38 1 1 3 19 40 25  
511 38 43 1 1 3 19 40 25  
512 43 48 1 1 3 19 40 25  
513 29 34 1 1 4 19 40 25  
514 34 39 1 1 4 19 40 25  
515 39 44 1 1 4 19 40 25  
516 44 49 1 1 4 19 40 25  
517 30 35 1 1 5 19 40 25  
518 35 40 1 1 5 19 40 25  
519 40 45 1 1 5 19 40 25  
520 45 50 1 1 5 19 40 25  
521 30 29 1 1 5 19 40 25  
522 29 28 1 1 5 19 40 25  
523 28 27 1 1 5 19 40 25  
524 27 26 1 1 5 19 40 25  
525 35 34 1 1 6 19 40 25  
526 34 33 1 1 6 19 40 25

```

527 33 32 1 1 6 19 40 25
528 32 31 1 1 6 19 40 25
529 40 39 1 1 11 19 40 25
530 39 38 1 1 11 19 40 25
531 38 37 1 1 11 19 40 25
532 37 36 1 1 11 19 40 25
533 45 44 1 1 16 19 40 25
534 44 43 1 1 16 19 40 25
535 43 42 1 1 16 19 40 25
536 42 41 1 1 16 19 40 25
537 50 49 1 1 21 19 40 25
538 49 48 1 1 21 19 40 25
539 48 47 1 1 21 19 40 25
540 47 46 1 1 21 19 40 25
0
Dependencia entre deslocamentos : Laje funcionando como diafragma rígido
27 26 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
52 51 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
77 76 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
102 101 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
127 126 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
152 151 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
177 176 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
202 201 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
227 226 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
252 251 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
277 276 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
302 301 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
327 326 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
352 351 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
377 376 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
402 401 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
427 426 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
452 451 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
477 476 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
502 501 1 r 0 1 1 r 0 1 0 0 0 1 g 23 1 0
0
Número de carregamentos 1
Carregamento 1 carregamento assimétrico
Cargas nodais
26 px 25.0 g 19 25
0
Fim

```

### Solução obtida no Sistema SALT:

TITULO : Edificio alto

---

DATA : 28/JULHO/1994 (quinta-feira)  
HORA : 16:58:52  
ARQUIVO DE DADOS : b16\_ex02  
TIPO DA ESTRUTURA : portico espacial

---

no	sistema	coordenadas nodais		
		coordenada x	coordenada y	coordenada z

Suprimido, veja arquivo de entrada de dados!

numero de nos ..... 525

no	codigo	restrições nodais		
		transl. x	transl. y	transl. z
		constante de mola		
		rotacao x	rotacao y	rotacao z

Suprimido, veja arquivo de entrada de dados!

numero de nos com restricao ..... 25

propriedades dos elementos  
barra material secao no inicial no final comprimento no K

Suprimido, veja arquivo de entrada de dados!

numero de elementos ..... 1300

dependencia entre deslocamentos  
no dependente no mestre x yy zz y xx zz z xx yy xx yy zz  
translacao/rotacao rotacao

Suprimido, veja arquivo de entrada de dados!

numero de no(s) na relacao mestre-dependente ... 480

propriedades dos materiais

material : 1

M. Elasticidade ..... 2.1E+0008  
M. E. Transversal ... 8.1E+0007  
C. Poisson ..... 3.0E-0001  
C. D. Termica ..... 0.0E+0000  
P. Especifico ..... 0.00

numero de tipos de material ..... 1

propriedades das secoes  
tipo area x area y area z inercia x inercia y inercia z  
1 9.00E-0002 0.00E+0000 0.00E+0000 1.13E-0003 6.75E-0004 6.75E-0004

modulos de flexao  
tipo wy wz  
1 1.00E+0000 1.00E+0000

numero de tipos secoes ..... 1

carregamento 1 - carregamento assimetrico

		cargas		nodais		
no sistema	forca x	forca y	forca z	momento x	momento y	momento z
26 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
51 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
76 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
101 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
126 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
151 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
176 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
201 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
226 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
251 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
276 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
301 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
326 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
351 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
376 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
401 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
426 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
451 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
476 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000
501 global	2.5E+0001	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000	0.0E+0000

fim do carregamento ..... 1  
numero de carregamentos ..... 1

-----  
DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 1.5E+0002  
Existe probabilidade de que o numero de algarismos  
corretos nos deslocamentos calculados seja 8



18	global	-22.19	-10.61	-14.05	-19.16	39.88	-2.07
19	global	-11.39	-10.81	-14.05	-19.36	20.52	-2.07
20	global	-0.33	-8.27	-83.17	-16.83	0.91	-2.07
21	global	-33.81	-16.89	-178.07	-34.01	68.61	-2.07
22	global	-25.19	-21.86	-247.19	-38.97	51.43	-2.07
23	global	-16.91	-21.48	-178.07	-38.59	34.60	-2.07
24	global	-8.64	-21.86	-108.95	-38.97	17.78	-2.07
25	global	-0.02	-16.89	-178.07	-34.01	0.60	-2.07

d i f e r e n c a   d e   e q u i l i b r i o  
 ( o equil. de momento é feito em relacao a origem )  
 forca x   forca y   forca z   momento x   momento y   momento z  
 0.00       -0.00       -0.00       -0.00       -0.00       -0.00

e s f o r c o s   n a s   b a r r a s	
barra sistema	no      forca cortante   cortante momento   momento   momento
	normal                  y                  z de torque   fletor y   fletor z

Suprimido devido ao tamanho!

Fim Do Programa

## VII.10 EXEMPLO X - PLACA

Para ilustrar a aplicação de dependência generalizada entre deslocamentos em placas, será apresentada uma placa, como mostra a figura VII.9.a. Nesta, o bordo em  $Y = 0$  é engastado e no bordo oposto, ela se apóia numa viga com largura de 0,20 m. Esta viga se apóia no solo. Se houvesse a possibilidade de misturar elementos de modelos matemáticos distintos no Sistema SALT, poder-se-ia calcular esta placa diretamente com a viga sobre apoios elásticos, levando em consideração o trecho muito rígido entre a posição  $Y = 1.0$  m na placa e o eixo da viga, que se encontra em  $Y = 1.10$ m. Este trecho muito rígido é simulado através do uso de dependência linear generalizada entre deslocamentos.

A dependência linear generalizada entre deslocamentos foi implementada para os dois elementos de placa disponível no Sistema SALT. Porém, no presente exemplo será usado o elemento isoparamétrico linear com quatro pontos nodais[20]. A viga citada será representada por molas de translação na direção Z, que serão somadas com as molas que representam o solo.

A placa possui módulo de elasticidade longitudinal igual a  $2,10E7$  kN/m $^2$  e coeficiente de Poisson igual a 0,20. O carregamento é uniformemente distribuído em todo o domínio da placa e é igual a  $-2,00$  kN/m $^2$ . Outras características podem ser encontradas na figura VII.9 e na listagem que é apresentada.

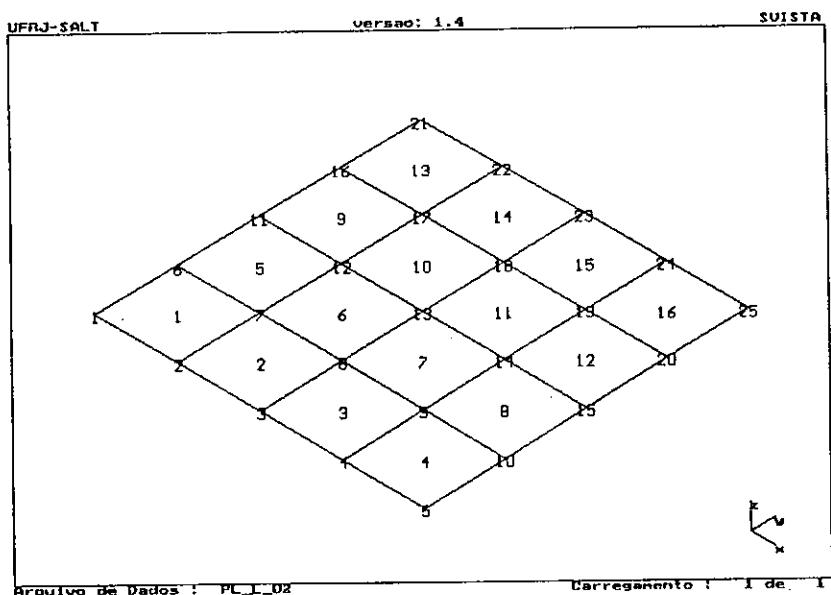


Figura VII.9.a - Geometria da placa.

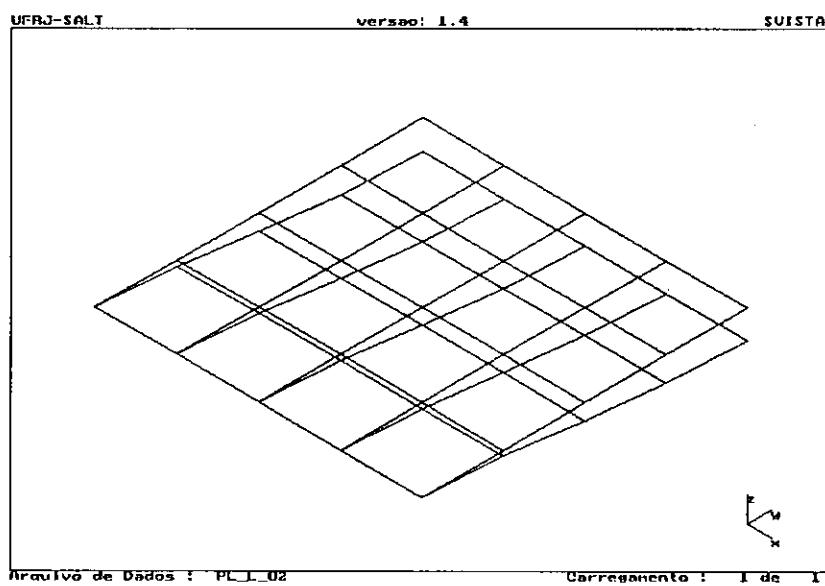


Figura VII.9.b - Deformada da placa.

## Arquivo de entrada de dados para o Sistema SALT:

```
PLACA Exemplo com dependencia entre deslocamentos
Coordenadas dos nos
 1 0.00 0.00 4 1 0.25 0.00
 6 0.00 0.25 4 1 0.25 0.00
11 0.00 0.50 4 1 0.25 0.00
16 0.00 0.75 4 1 0.25 0.00
21 0.00 1.00 4 1 0.25 0.00
26 0.00 1.10 4 1 0.25 0.00
0
Condicoes de contorno
 1 111 0.00 0.00 0.00 4 1
26 011 4.00 0.00 0.00
27 011 3.00 0.00 0.00
28 011 2.00 0.00 0.00
29 011 3.00 0.00 0.00
30 011 4.00 0.00 0.00
0
Tipos de material
 1 2.10E7 0.2 1.0E-5 25.00
0
Propriedades dos elementos
 1 eqp 1 2 7 6 1 0.10 3 1 1
 5 eqp 6 7 12 11 1 0.10 3 1 1
 9 eqp 11 12 17 16 1 0.10 3 1 1
13 eqp 16 17 22 21 1 0.10 3 1 1
0
Dependencia entre deslocamentos
21 26 1 1 1 g 4 1 1
0
Numero de carregamentos 1
Carregamento 1 carregamento uniforme
Cargas nos elementos
 1 u pz -2.00 g 15 1
0
fim
```

## Solução obtida no Sistema SALT:

```
SALT - Marca Registrada da UFRJ
SALTE - analise estatica linear - versao 2.3
TITULO : Exemplo com dependencia entre deslocamentos
-----
DATA : 29/JULHO/1994 (sexta-feira)
HORA : 11:43:50
ARQUIVO DE DADOS : C:\USR\CCN\PL_L_02
TIPO DA ESTRUTURA : flexao de placa
-----
```

```
coordenadas nodais
no sistema coordenada coordenada coordenada
          x       y       z
Suprimido devido ao tamanho! Veja arquivo de entrada de dados.
```

```
numero de nos ..... 30
```

```
restricoes nodais
constante de mola
no codigo transl. z rotacao x rotacao y
```

```
Suprimido devido ao tamanho! Veja arquivo de entrada de dados.
```

```
numero de nos com restricao ..... 10
```

propriedades dos elementos  
elemento tipo material espessura nos incidentes

Suprimido devido ao tamanho! Veja arquivo de entrada de dados.

numero de elementos ..... 16

dependencia entre deslocamentos  
translacao/rotacao rotacao  
no dependente no mestre z xx yy xx yy  
21 26 1 1 1 1 1  
22 27 1 1 1 1 1  
23 28 1 1 1 1 1  
24 29 1 1 1 1 1  
25 30 1 1 1 1 1

numero de no(s) na relacao mestre-dependente ... 5

propriedades dos materiais

material : 1

Suprimido devido ao tamanho! Veja arquivo de entrada de dados.

numero de tipos de material ..... 1

carregamento 1 - carregamento uniforme

cargas nos elementos  
elemento tipo pz1 pz2 pz3 pz4  
pz5 pz6 pz7 pz8

Suprimido devido ao tamanho! Veja arquivo de entrada de dados.

fim do carregamento ..... 1  
numero de carregamentos ..... 1

-----  
DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 2.1E+0001  
Existe probabilidade de que o numero de algarismos  
corretos nos deslocamentos calculados seja 9  
-----

carregamento 1

=====

deslocamentos nodais  
no sistema deslocamento rotacao rotacao  
z x y  
1 global -8.40627E-0025 -3.03110E-0025 3.33914E-0026  
2 global -1.88452E-0024 -6.15682E-0025 -2.39005E-0027  
3 global -2.08710E-0024 -6.37717E-0025 -6.95633E-0036  
4 global -1.88452E-0024 -6.15682E-0025 2.39005E-0027  
5 global -8.40627E-0025 -3.03110E-0025 -3.33914E-0026  
6 global -7.91384E-0006 -6.02571E-0005 4.65586E-0006  
7 global -8.28132E-0006 -6.04127E-0005 -1.23847E-0006  
8 global -8.06707E-0006 -6.00739E-0005 2.91595E-0016  
9 global -8.28132E-0006 -6.04127E-0005 1.23847E-0006  
10 global -7.91384E-0006 -6.02571E-0005 -4.65586E-0006  
11 global -2.49427E-0005 -6.95873E-0005 -1.70511E-0006  
12 global -2.46833E-0005 -6.97441E-0005 -2.85975E-0008  
13 global -2.46365E-0005 -6.72796E-0005 3.25493E-0016  
14 global -2.46833E-0005 -6.97441E-0005 2.85975E-0008  
15 global -2.49427E-0005 -6.95873E-0005 1.70511E-0006  
16 global -3.95394E-0005 -4.30805E-0005 -6.66917E-0006  
17 global -3.88035E-0005 -4.29878E-0005 -7.47149E-0007  
18 global -3.89020E-0005 -4.31878E-0005 3.59913E-0015  
19 global -3.88035E-0005 -4.29878E-0005 7.47149E-0007  
20 global -3.95394E-0005 -4.30805E-0005 6.66917E-0006  
21 global -4.47315E-0005 -1.60374E-0025 -3.43304E-0026  
22 global -4.44804E-0005 -3.18346E-0025 -2.07814E-0026  
23 global -4.42283E-0005 -3.34343E-0025 2.98441E-0035  
24 global -4.44804E-0005 -3.18346E-0025 2.07814E-0026  
25 global -4.47315E-0005 -1.60374E-0025 3.43304E-0026  
26 global -4.47315E-0005 -1.60374E-0025 -3.43304E-0026  
27 global -4.44804E-0005 -3.18346E-0025 -2.07814E-0026

```
28     global -4.42283E-0005 -3.34343E-0025 2.98441E-0035
29     global -4.44804E-0005 -3.18346E-0025 2.07814E-0026
30     global -4.47315E-0005 -1.60374E-0025 3.43304E-0026
```

reacoes nos apoiros

no	sistema	forca	momento	momento
		z	x	y
1	global	0.223	0.080	-0.009
2	global	0.500	0.163	0.001
3	global	0.554	0.169	0.000
4	global	0.500	0.163	-0.001
5	global	0.223	0.080	0.009
26	global	0.000	0.043	0.009
27	global	0.000	0.084	0.006
28	global	0.000	0.089	-0.000
29	global	0.000	0.084	-0.006
30	global	0.000	0.043	-0.009

diferenca de equilibrio

{ o equilibrio de momento e feito em relacao a origem }

	forca	momento	momento
	z	x	y
	0.000	0.000	-0.000

forcas nos elementos

Suprimido devido ao tamanho!

Fim Do Programa

## VII.11 EXEMPLO XI - CASCA

O Sistema SALT possui um elemento de casca com quatro pontos nodais. Ele foi obtido a partir da degeneração do elemento sólido, sendo conhecido na literatura como BDS. Este pode ser usado para analisar cascas finas e espessas.

Como os elementos de casca podem ser usados para analisar modelos de estado plano de tensões e de placa, para exemplificar um modelo de casca será usada a mesma estrutura utilizada no caso de placa do exemplo anterior. Pequenas diferenças de resultados se devem às formas distintas de implementação dos dois modelos em questão.

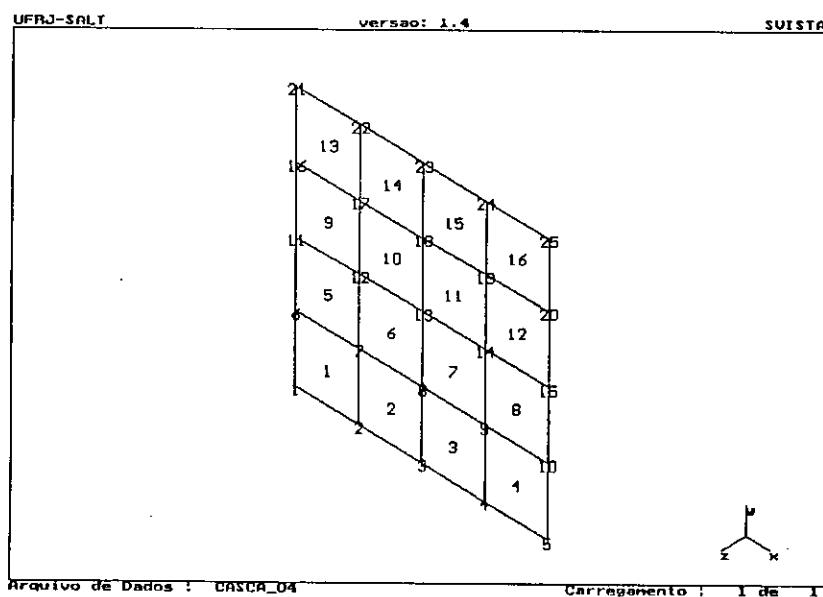


Figura VII.10.a - Geometria da casca.

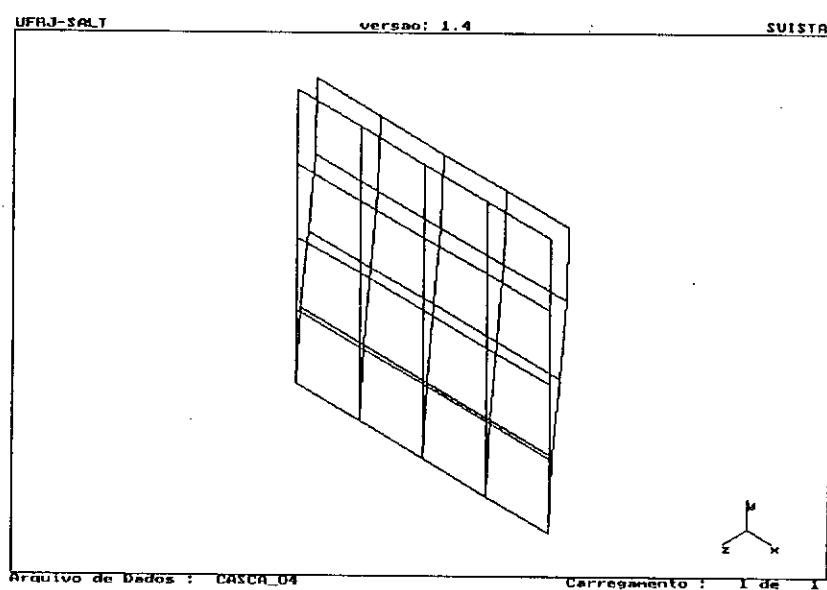


Figura VII.10.b - Deformada da casca.

## Arquivo de entrada de dados para o Sistema SALT:

```
CASCA Exemplo com dependencia entre deslocamentos
Coordenadas dos nos
 1  0.00  0.00  0.00    4  1  0.25  0.00  0.00
 6  0.00  0.25  0.00    4  1  0.25  0.00  0.00
11  0.00  0.50  0.00    4  1  0.25  0.00  0.00
16  0.00  0.75  0.00    4  1  0.25  0.00  0.00
21  0.00  1.00  0.00    4  1  0.25  0.00  0.00
26  0.00  1.10  0.00    4  1  0.25  0.00  0.00
 0
Condicoes de contorno
 1  111 111  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  4  1
26  110 111  0.00  0.00  4.00  0.00  0.00  0.00
27  110 111  0.00  0.00  3.00  0.00  0.00  0.00
28  110 111  0.00  0.00  2.00  0.00  0.00  0.00
29  110 111  0.00  0.00  3.00  0.00  0.00  0.00
30  110 111  0.00  0.00  4.00  0.00  0.00  0.00
 0
Tipos de material
 1  2.10E7  0.2  1.0E-5  25.00
 0
Propriedades dos elementos
 1  eqp   1   2   7   6      1  0.10      3  1   1
 5  eqp   6   7   12  11     1  0.10      3  1   1
 9  eqp   11  12  17  16    1  0.10      3  1   1
13  eqp  16  17  22  21    1  0.10      3  1   1
 0
Dependencia entre deslocamentos
21  26  1 1 1  1 1 1      g  4  1  1
 0
Numero de carregamentos 1
Carregamento 1  carregamento uniforme
Cargas nos elementos
 1  u  -2.00  g  15  1
 0
fim
```

## Solução obtida no Sistema SALT:

SALT - Marca Registrada da UFRJ  
SALTE - analise estatica linear - versao 2.3

TITULO : Exemplo com dependencia entre deslocamentos

-----  
DATA : 16/AGOSTO/1994 (terca-feira)  
HORA : 9:39:6  
ARQUIVO DE DADOS : casca\_04  
TIPO DA ESTRUTURA : casca

coordenadas nodais  
no sistema coordenada coordenada coordenada  
          x      y      z  
Suprimido devido ao tamanho! Veja arquivo de entrada de dados.

numero de nos ..... 30

restricoes nodais  
          constante de mola  
no codigo transl. x transl. y transl. z rotacao x rotacao y rotacao z  
Suprimido devido ao tamanho! Veja arquivo de entrada de dados.

numero de nos com restricao ..... 10

propriedades dos elementos  
elemento tipo material espessura nos incidentes

Suprimido devido ao tamanho! Veja arquivo de entrada de dados.

numero de elementos ..... 16

dependencia entre deslocamentos		translacao/rotacao			rotacao									
no dependente	no mestre	x	yy	zz	y	xx	zz	z	xx	yy	xx	yy	zz	
21	26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
24	29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25	30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

numero de no(s) na relacao mestre-dependente ... 5

propriedades dos materiais

material : 1

M. Elasticidade .....	2.100E+07
M. E. Transversal ...	8.750E+06
C. Poisson .....	2.000E-01
C. D. Termica .....	1.000E-05
P. Especifico .....	25.00

numero de tipos de material ..... 1

carregamento 1 - carregamento uniforme

cargas nos elementos					
elemento	sistema	tipo	pz1	pz2	pz3

Suprimido devido ao tamanho! Veja arquivo de entrada de dados.

fim do carregamento ..... 1  
numero de carregamentos ..... 1

-----  
DECAIMENTO MAXIMO DOS ELEM. DA DIAGONAL: 1.8E+04  
Existe probabilidade de que o numero de algarismos  
corretos nos deslocamentos calculados seja 6  
-----

carregamento 1

deslocamentos nodais						
no	sistema	desloc. x	desloc. y	desloc. z	rotacao x	rotacao y
1	global	0.00E+00	0.00E+00	-2.10E-25	-7.58E-26	8.35E-27
2	global	0.00E+00	0.00E+00	-4.71E-25	-1.54E-25	-5.98E-28
3	global	0.00E+00	0.00E+00	-5.22E-25	-1.60E-25	2.61E-36
4	global	0.00E+00	0.00E+00	-4.71E-25	-1.54E-25	5.98E-28
5	global	0.00E+00	0.00E+00	-2.10E-25	-7.58E-26	-8.35E-27
6	global	0.00E+00	0.00E+00	-7.91E-06	-6.03E-05	4.66E-06
7	global	0.00E+00	0.00E+00	-8.28E-06	-6.04E-05	-1.24E-06
8	global	0.00E+00	0.00E+00	-8.07E-06	-6.01E-05	-4.38E-16
9	global	0.00E+00	0.00E+00	-8.28E-06	-6.04E-05	1.24E-06
10	global	0.00E+00	0.00E+00	-7.91E-06	-6.03E-05	-4.66E-06
11	global	0.00E+00	0.00E+00	-2.49E-05	-6.96E-05	-1.71E-06
12	global	0.00E+00	0.00E+00	-2.47E-05	-6.97E-05	-2.86E-08
13	global	0.00E+00	0.00E+00	-2.46E-05	-6.73E-05	1.35E-15
14	global	0.00E+00	0.00E+00	-2.47E-05	-6.97E-05	2.86E-08
15	global	0.00E+00	0.00E+00	-2.49E-05	-6.96E-05	1.71E-06
16	global	0.00E+00	0.00E+00	-3.95E-05	-4.31E-05	-6.67E-06
17	global	0.00E+00	0.00E+00	-3.88E-05	-4.30E-05	-7.47E-07
18	global	0.00E+00	0.00E+00	-3.89E-05	-4.32E-05	-2.80E-15
19	global	0.00E+00	0.00E+00	-3.88E-05	-4.30E-05	7.47E-07
20	global	0.00E+00	0.00E+00	-3.95E-05	-4.31E-05	6.67E-06
21	global	0.00E+00	0.00E+00	-4.47E-05	-4.01E-26	-8.59E-27
22	global	0.00E+00	0.00E+00	-4.45E-05	-7.96E-26	-5.20E-27
23	global	0.00E+00	0.00E+00	-4.42E-05	-8.36E-26	-9.29E-36
24	global	0.00E+00	0.00E+00	-4.45E-05	-7.96E-26	5.20E-27

```

25 global 0.00E+00 0.00E+00 -4.47E-05 -4.01E-26 8.59E-27 0.00E+00
26 global 0.00E+00 0.00E+00 -4.47E-05 -4.01E-26 -8.59E-27 0.00E+00
27 global 0.00E+00 0.00E+00 -4.45E-05 -7.96E-26 -5.20E-27 0.00E+00
28 global 0.00E+00 0.00E+00 -4.42E-05 -8.36E-26 -9.29E-36 0.00E+00
29 global 0.00E+00 0.00E+00 -4.45E-05 -7.96E-26 5.20E-27 0.00E+00
30 global 0.00E+00 0.00E+00 -4.47E-05 -4.01E-26 8.59E-27 0.00E+00

```

		r e a c o e s		n o s		a p o i o s	
no	sistema	forca x	forca y	forca z	momento x	momento y	momento z
1	global	0.00	0.00	0.22	0.08	-0.01	0.00
2	global	0.00	0.00	0.50	0.16	0.00	0.00
3	global	0.00	0.00	0.55	0.17	-0.00	0.00
4	global	0.00	0.00	0.50	0.16	-0.00	0.00
5	global	0.00	0.00	0.22	0.08	0.01	0.00
26	global	0.00	0.00	0.00	0.04	0.01	0.00
27	global	0.00	0.00	0.00	0.08	0.01	0.00
28	global	0.00	0.00	0.00	0.09	0.00	0.00
29	global	0.00	0.00	0.00	0.08	-0.01	0.00
30	global	0.00	0.00	0.00	0.04	-0.01	0.00

d i f e r e n c a d e e q u i l i b r i o  
 ( o equil. de momento é feito em relacao a origem )  
 forca x forca y forca z momento x momento y momento z  
 0.00 0.00 -0.00 -0.00 0.00 0.00

f o r c a s n o s e l e m e n t o s  
 ( no referencial local dos elementos )

elem	Nxx	Nyy	Nxy	Mxx	Myy	Mxy	Qx	Qy
------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----	----

Suprimido devido ao tamanho!

Fim Do Programa

# **CAPÍTULO VIII**

## **CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS**

A dependência entre deslocamentos em certos modelos estruturais pode levar a grandes simplificações na análise.

A dependência clássica entre deslocamentos é um assunto amplamente difundido entre os engenheiros e pesquisadores, devido à sua aplicação em modelos corriqueiros da prática.

Nesta tese, foi desenvolvida e implementada no Sistema SALT uma nova matriz capaz de considerar todas as dependências clássicas apresentadas no capítulo IV e as dependências demonstradas no capítulo V, evidenciando a originalidade da matriz desenvolvida. Esta nova dependência foi nomeada de **DEPENDÊNCIA LINEAR GENERALIZADA ENTRE DESLOCAMENTOS**. Assim, um nó de pórtico espacial ou de casca, por exemplo, passa a ter doze dependências entre deslocamentos, como foi apresentado no capítulo V, cabendo ao usuário fornecer um conjunto de dependências que modele de forma adequada o sistema ou a estrutura real.

Esta generalização foi feita para os elementos de modelos de estruturas reticuladas, placas e cascas. Porém, poderá ser feita futuramente para elementos sólidos e de estados planos de tensão e de deformação.

É de grande importância implementar no Sistema SALT um módulo que possibilite a mistura de elementos de modelos matemáticos distintos, pois, como foi visto nos últimos dois exemplos, esta deficiência restringe a possibilidade de discretização que simule com mais confiabilidade a realidade das estruturas complexas.

Em termos de edifício alto, é de grande importância que se implemente no Sistema SALT o empenamento de seções abertas delgadas, visto que o uso destas seções é comum e de grande importância nos edifícios altos. Uma outra implementação importante

é a da não-linearidade geométrica em pórtico espacial, pois os edifícios na atualidade são cada vez mais altos e esbeltos devido ao aprimoramento dos materiais de construção, tal como concreto de alta resistência. É importante que estas implementações incorporem a dependência linear generalizada entre deslocamentos. A análise dinâmica com dependência linear generalizada entre deslocamento também é outro tópico importante que poderá ser implementado no Sistema SALT.

Com os recursos que o Sistema SALT já possui, mais essas contribuições, os profissionais que trabalham com análise estrutural têm e terão uma grande ferramenta de trabalho à sua disposição.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- [1] SORIANO, HUMBERTO L. e LIMA, SILVIO DE S. - "Análise Estrutural em Computadores", Volume 1 - Estruturas reticuladas, EE/UFRJ, (1993).
- [2] MARK FINTEL and others - "Response of Buildings to Lateral Forces", ACI JOURNAL, Title Nº 68-11, pp. 81-106, February 1971.
- [3] FORNIES, ALFONSO R. Y JIMENEZ, JOSE P. G. - "Análise de Edificio de Altura Sometidos a Acciones Horizontales: Sistemas Planos", Monografia del Instituto Eduardo Torraja de la Construcción y del Cemento, Madrid, Noviembre 1976.
- [4] HÁJEK, P. and FRANGOPOL, D. M. - "Optimum Design of Shear-Wall Systems", Computers & Structures, Vol. 38, Nº 2, pp. 171-184, 1991.
- [5] SAVASSI, W. - "Non-Uniform Tall Building Structures: Global Discrete Solution Based on the Continuous Medium Technique", Computers & Structures, Vol. 46, Nº 3, pp. 413-419, 1993.
- [6] TARANATH, BUNGALE S. - "Structural Analysis and Design of Tall Buildings", Editora McGraw-Hill, 1988.
- [7] SÜSSEKIND, JOSÉ CARLOS - "Curso de Análise Estrutural", Vol. 2 e 3, Rio de Janeiro, Editora Globo, 1987.
- [8] GERE, JAMES M. e WEAVER, WILLIAM Jr. - "Análise de Estruturas Reticuladas", Editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro - RJ, 1981.

- [9] STALLINGS, J. M. - "Member and Releases in Framed Structures", *Computers & Structures*, Vol. 46, Nº 3, pp. 443-449, 1993.
- [10] SORIANO, H. L. e PAULA, R. P. - "Generalização da Técnica do Número Grande no Método dos Deslocamentos", *Revista Escola de Minas*, Vol. XXXVIII - 1º Trimestre/85 - Nº 1.
- [11] CAMARA JÚNIOR, V. F. DA - "Análise dos Esforços em Edifícios Altos", Tese de M.Sc., Engenharia Civil, VIII, 196 p., Rio de Janeiro - RJ, COPPE/UFRJ, 1978.
- [12] HAAS, JOÃO W. - "Contribuição à Análise Tridimensional de Estruturas de Edifícios", Tese de M.Sc., Engenharia Civil, XI, 308 p., Rio de Janeiro - RJ, COPPE/UFRJ, 1987.
- [13] SILVA, JORGE LUIZ - "Análise Aproximada de Edifícios Altos em Microcomputadores", Tese de M.Sc., Engenharia Civil, XI, 91 p., Rio de Janeiro - RJ, COPPE/UFRJ, 1986.
- [14] FONTE, ANTÔNIO O. C. - "Análise Não Linear Geométrica de Edifícios Altos", Tese de D.Sc., Engenharia Civil, X, 223 p., Rio de Janeiro - RJ, COPPE/UFRJ, 1992.
- [15] SORIANO, HUMBERTO L. - "Cálculo Automático do Efeito de Vento em Estruturas de Edifício", Tese de M.Sc., Engenharia Civil, Rio de Janeiro - RJ, COPPE/UFRJ, 1971.
- [16] FONTE, ANTÔNIO O. C. - "Análise Tridimensional de Estruturas de Edifício", Tese de M.Sc., Engenharia Civil, Rio de Janeiro - RJ, COPPE/UFRJ, 1972.
- [17] MENEZES, NILSON C. - "Dimensionamento Automático de Estruturas de Edifícios em Concreto Armado", Tese de M.Sc., Engenharia Civil, Rio de Janeiro - RJ, COPPE/UFRJ, 1977.

- [18] STAMATO, M. C. - "Cálculo Elástico de Estaqueamentos", Publ. Nº 70 (2<sup>a</sup> Ed.), São Carlos, 1971.
- [19] TIMOSHENKO, STEPHEN P. - "Mecânica dos Sólidos", Vol. 1 e 2, Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 1983.
- [20] SALT - Sistema de Análise de Estruturas, Manual do Usuário, Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas EE/UFRJ, 1994.
- [21] SORIANO, HUMBERTO L. e CARVALHO, SÉRGIO R. F. - "Técnicas de Estruturação de Dados com a Linguagem Pascal na Análise Estrutural". VII Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, São Carlos, SP, Brasil, 4 a 7 de novembro de 1986.
- [22] SORIANO, HUMBERTO L. e LIMA, SILVIO DE S. - "Structured Types in Pascal for Structural Analysis", Computers & Structures, Vol. 45, Nº 4, pp. 799-800, 1992.
- [23] SCHMITZ, EBER A. - "Pascal e Técnicas de Programação", Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1986.
- [24] SOYBEL, JEREMY G. - "Programando em Turbo Pascal Versão 5.5 Inclui Apêndice da Versão 6.0", São Paulo, Makron Books, 1992.
- [25] O'BRIEN, STEPHEN K. - "Turbo Pascal 6: Completo e Total", São Paulo, Makron, McGraw-Hill, 1992.
- [26] Manual do Turbo Pascal, Borland International, Inc.

- [27] SLOAN, S. W. - "An Algorithm for Profile and Wavefront Reduction of Sparse Matrices", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 239-251, 1986.
- [28] WILSON, E. L. and HOIT, MARC - "An Equation Numbering Algorithm Based on a Minimum Front Criteria", Computers & Structures, Vol. 16, Nº 1-4, pp. 225-239, 1983.
- [29] LEUNG, A. Y. T.; KWAN, A. K. H. and ZHOU, W. E. - "Static-Dynamic Distribution Factors Method for Tall Building Analysis", Computers & Structures, Vol. 46, Nº 3, pp. 495-503, 1993.
- [30] TARANATH, BUNGALE S. - "Analysis of Interconnected Open Section Shear Wall Structures", Journal of the Structural Division, Vol. 101, Nº ST11, pp. 2367-2384, November 1975.
- [31] COOK, ROBERT D.; MALKUS, DAVID S.; PLESHA, MICHAEL E. - "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", University of Wisconsin-Madison, Third Edition, Editora John Wiley & Sons, 1989.
- [32] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. - "The Finite Element Method, Basic Formulation and Linear Problems", Volume 1, Fourth Edition, Editora McGraw-Hill Book Company, 1989.
- [33] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. - "The Finite Element Method, Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity", Volume 2, Fourth Edition, Editora McGraw-Hill Book Company, 1991.
- [34] TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. - "Theory of Plates and Shells" Second Edition, Editora McGraw-Hill Book Company, 1959

- [35] HRABOK, M. M.; HRUDEY, T. M. - "A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements" Computers & Structures, Vol. 19, Nº 3, pp. 479-495, 1984.
- [36] SORIANO, HUMBERTO L. e LIMA, SILVIO DE S. - "Análise de Estruturas em Computadores: Método dos Elementos Finitos", Volume 2, EE/UFRJ, 1994.