FUNÇÃO DE GREEN NUMÉRICA APLICADA A PROBLEMAS 3-D DA MECÂNICA DA FRATURA

Guilherme Silveira Castor

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.
(Presidente)

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. Solange Guimarães, D.Sc.

Prof. Luís Paulo da Silva Barra, D.Sc.

Prof. Ney Augusto Dumont, Dr.-Ing.

RIO DE JANEIRO – RJ – BRASIL
MARÇO DE 1999

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. José Claudio de Faria Telles.

Aos professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE, em especial ao Prof. Webe João Mansur.

Ao Prof. Márcio Miranda Soares, a quem devo minha passagem pela COPPE.

Aos professores do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Mato Grosso.

Aos companheiros de república Cláudio, David e Helder.

Aos colegas do Programa de Engeharia Civil da COPPE, em especial aos colegas do LAMEC.

À Universidade Federal de Mato Grosso.

À CAPES.

CASTOR, GUILHERME SILVEIRA

Função de Green numérica aplicada a problemas 3-D da Mecânica da Fratura [Rio de Janeiro] 1999.

viii, 92 p., 29.7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 1999)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Elementos de Contorno

2. Mecânica da Fratura

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

FUNÇÃO DE GREEN NUMÉRICA APLICADA A PROBLEMAS 3-D DA MECÂNICA DA FRATURA

Guilherme Silveira Castor.

MARÇO de 1999

Orientador: Prof. José Claudio de Faria Telles.

Programa: Engenharia Civil.

O Método dos Elementos de Contorno combinado com uma função de Green numérica é aplicado a problemas tridimensionais da Mecânica da Fratura Linear Elástica.

O uso de funções de Green tem sido considerada uma técnica poderosa no tratamento dos problemas da Mecânica da Fratura pelo Método dos Elementos de Contorno, embora tenha sido restrito a aplicações bidimensionais simples, para as quais a obtenção analítica das funções de Green apropriadas pudesse ser conseguida. O presente autor introduziu com sua tese de mestrado, sob a mesma orientação, uma nova técnica para a obtenção numérica de funções de Green e apresentou sua implementação e resultados numéricos para aplicações bidimensionais.

Esta técnica, entretanto, não é restrita a aplicações 2-D e neste trabalho o autor desenvolve uma implementação 3-D bastante geral da função de Green numérica. Resultados numéricos são apresentados e mostram boa concordância com aqueles obtidos por outros pesquisadores.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

NUMERICAL GREEN'S FUNCTION APLIED TO 3-D FRACTURE MECHANICS PROBLEMS

Guilherme Silveira Castor

MARCH of 1999

Advisor: Prof. José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

The Boundary Element Method combined with a numerical Green's function is applied to three-dimensional Linear Elastic Fracture Mechanics problems.

The use of Green's functions has been considered a powerful technique in the treatment of Fracture Mechanics problems by the Boundary Element Method, although was restricted to basic two-dimensional applications in which the analytical derivation of the appropriate Green's functions could be achieved. The present author introduced with his master's thesis, under the same supervision, a new technique to the numerical derivation of Green's functions and presented its implementation and numerical results for two-dimensional applications.

This technique, however, is not restricted to 2-D applications and in this work the author develops a quite general 3-D implementation of the numerical Green's function. Numerical results are presented and show a good agreement with those obtained by other researchers.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 2 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO 7

2.1 - Introdução 7
2.2 - Teoria da Elasticidade 7
2.3 - Identidade de Somigliana 10
2.4 - Solução fundamental de Kelvin 13
2.5 - Cálculo das tensões em pontos internos 15
2.6 - Equação integral no contorno 16
2.7 - Implementação numérica 20

CAPÍTULO 3 - FUNÇÃO DE GREEN NUMÉRICA 26

3.1 - Equação integral de contorno na Mecânica da Fratura 26
3.2 - Função de Green numérica 28
3.3 - Problemas envolvendo fissuras carregadas 32
3.4 - Cálculo de tensões em pontos internos 33
3.5 - Aberturas da fissura para problemas finitos 35

CAPÍTULO 4 - IMPLEMENTAÇÃO DA FUNÇÃO DE GREEN NUMÉRICA 36

4.1 - Introdução 36
4.2 - Interpolação geométrica e funcional na fissura 37
4.3 - Regularização por elementos tangentes 41
4.4 - Integração de Kutt 45
4.5 - Integração com pesos específicos 49
4.6 - Quase-singularidades introduzidas pelas aberturas da fissura 51
4.7 - Quase-singularidades na geração da função de Green numérica 63

CAPÍTULO 5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS 65

5.1 - Introdução 65

5.2 - Fissura elíptica em meio infinito 68

5.3 - Fissura circular sob pressão interna uniforme em uma placa infinita 71

5.4 - Fissura circular em uma barra cilíndrica sob tensão uniaxial uniforme 73

5.5 - Fissura circular sob pressão interna uniforme em uma esfera 74

5.6 - Fissura de bordo em forma de quarto de círculo 76

5.7 - Fissura de bordo semi-elíptica em cilindro de parede espessa 77

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES 82

BIBLIOGRAFIA 87

Capítulo 1

Introdução

Devido à sofisticação com que vêm sendo feitos os componentes estruturais modernos, tem sido cada vez mais freqüente o colapso de estruturas por fratura, muitas vezes com resultados catastróficos. Como as fissuras surgem a partir de defeitos internos ou impurezas do material, introduzidos durante sua fase de fabricação, e a ocorrência deles não pode ser totalmente evitada, torna-se imperativo qualificar e prever o comportamento de uma fissura. Com este intuito surgiu uma nova ciência, intitulada Mecânica da Fratura.

A Mecânica da Fratura tenta qualificar e quantificar a gravidade da fissura, com o objetivo de prever a vida útil de um componente estrutural ou evitar situações catastróficas. Enfim, estudar o comportamento de componentes estruturais fissurados, o que se torna cada vez mais justificável, devido ao alto e crescente custo de manutenção de componentes estruturais. O parâmetro mais importante criado pela Mecânica da Fratura Linearmente Elástica foi o fator de intensidade de tensões, conhecido como K, que quantifica a magnitude do campo de tensão na frente de fissura, permitindo a previsão do comportamento do componente estrutural fissurado por comparação com a magnitude crítica suportada por sua configuração física e geométrica.

A grande aplicabilidade da Mecânica da Fratura Linearmente Elástica se deve ao fato de que, além do fator de intensidade de tensões permitir a determinação estática da resistência de um componente estrutural fissurado, a propagação estável de fissuras, intimamente ligada à fadiga, ocorre com a formação de pequenas zonas plásticas. Paris [1], por exemplo, sugeriu que a taxa de crescimento da fissura por ciclo de carregamento poderia ser calculada como função da variação do fator de intensidade de tensões, o que é confirmado experimentalmente para um grande número de casos, geralmente com pequenas flutuações do carregamento aplicado. Esta taxa de

crescimento, por sua vez, permite a avaliação da vida útil do componente estrutural fissurado.

Em virtude de sua grande aplicabilidade, o fator de intensidade de tensões foi tabelado para diversos tipos de componentes estruturais, em diversas configurações geométricas e sob condições de carregamento variadas, mas com a sofisticação e ousadia modernas, a obtenção destes fatores para problemas cada vez mais complexos tem sido necessária. Como os fatores de intensidade de tensões só podem ser obtidos analiticamente para um número bastante restrito de casos, a aplicação de métodos numéricos é necessária. Os métodos que mais se destacaram em aplicações da Mecânica da Fratura foram o Método dos Elementos Finitos, devido a sua grande abrangência, e o Método dos Elementos de Contorno. Sendo este último o objeto desta pesquisa, será feito adiante um breve histórico sobre os avanços que o método tem experimentado recentemente, no tratamento dos problemas da Mecânica da Fratura.

Estes problemas estão entre os mais difíceis de serem resolvidos com boa precisão, devido ao campo de tensões singular que ocorre na frente de fissura. O Método dos Elementos de Contorno reduz bastante as conseqüências desta singularidade na solução do problema, pelo fato de não implicar em discretizações de domínio, reduzindo assim a dimensão da dificuldade. Por outro lado, a presença de duas superfícies dividindo a mesma posição geométrica faz com que, na melhor das hipóteses, as equações integrais do Método dos Elementos de Contorno se degenerem de forma que a continuidade de deslocamentos através da fissura seja sempre mantida. Poderão ocorrer até singularidades no sistema de equações gerado, caso haja pontos nodais ocupando a mesma posição geométrica nessas faces. Cruse [2], em 1972, foi o primeiro pesquisador a apresentar os motivos dessa degeneração.

Diversos foram os caminhos seguidos na tentativa de se resolver ou contornar estes problemas, usando o Método dos Elementos de Contorno. Inicialmente, Cruse e Van Buren [3], em 1971, propuseram a substituição da fissura por um entalhe estreito, de forma elíptica, mas este modelo foi de uso bastante restrito porque o condicionamento do sistema de equações gerado melhorava à medida que se afastam as faces da fissura, enquanto que a representação do problema real pelo modelo físico piorava. Em 1974 Cruse [4] conseguiu maior precisão nas análises de problemas simétricos, introduzindo uma malha de elementos de contorno, com condições de contorno convenientes, unindo as pontas da fissura com o contorno externo do problema. Esta técnica, bem como a dos domínios múltiplos ou sub-regiões, introduzida

em 1968 por Rizzo e Shippy [5] e aplicada com sucesso à Mecânica da Fratura em 1981, por Blandford, Ingraffea e Liggett [6], apesar de largamente aceita e difundida, apresenta o inconveniente de introduzir aproximação no interior do domínio do problema. A técnica dos domínios múltiplos, em contrapartida, pode ser usada em qualquer tipo de problema da Mecânica da Fratura, incluindo problemas não simétricos, tridimensionais, com fissuras curvas e múltiplas. Nesta técnica, cada face da fissura é discretizada na região do contorno de cada domínio onde há coincidência com o contorno do domínio vizinho. Na interface criada artificialmente entre estes domínios, a compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças de superfície são impostos.

Crouch [7]-[8], em 1976, sugeriu o Método da Descontinuidade de Deslocamentos, que usa como solução fundamental a solução correspondente a uma descontinuidade de deslocamentos ao longo de um segmento de reta no meio infinito. A equação integral sobre o contorno da fissura passa a ser expressa em termos destas descontinuidades. Numa das variantes do método, usa-se a equação para as tensões nos pontos internos, que tem singularidades mais fortes que as da formulação para deslocamentos. Por este motivo, esse método é considerado precursor da aplicação da equação integral para forças de superfície à Mecânica da Fratura.

O uso simultâneo das equações integrais para deslocamento e suas derivadas, na solução de problemas da Mecânica da Fratura pelo Método dos Elementos de Contorno, vem sendo objeto de muitos trabalhos recentes. Para evitar a degeneração da formulação para deslocamentos sobre a fissura, esta é usada apenas em uma de suas faces, enquanto que na outra é usada a equação integral para forças de superfície, também chamada de formulação hipersingular. Esta é uma técnica bastante eficiente, principalmente quando se tomam cuidados especiais no sentido de se conseguir funções de interpolação para deslocamentos e forças de superfície que consigam representar corretamente o comportamento singular destas grandezas nas proximidades das pontas da fissura, o que pode ser feito, por exemplo, usando-se elementos tipo *Quarter-Point*. Um estudo bastante extenso desta bem como de outras técnicas, aplicadas a problemas bidimensionais, foi apresentado recentemente à COPPE por Guimarães [9].

Martha, Gray e Ingraffea [10], em 1992, aplicaram esta técnica, também chamada de formulação mista, a problemas com forte interação entre fissuras em meio tridimensional, apresentando inclusive um processo para a obtenção da necessária continuidade das derivadas dos deslocamentos nos pontos nodais onde é aplicada a formulação hipersingular, já que o uso de elementos descontínuos aumentaria

demasiadamente o custo da análise. Também em 1992, Ang e Noone [11], usando a mesma técnica, resolveram, para o estado anti-plano de deformações, o problema de múltiplas fissuras coplanares de uma maneira que não requer o uso de elementos de contorno propriamente ditos sobre as fissuras. Como no Método da Descontinuidade de Deslocamentos, as aberturas da fissura (descontinuidades de deslocamentos ao longo do contorno da fissura) é que foram tomadas como incógnita. O cálculo destas aberturas é feito para o problema real e não para o fundamental, estando acoplado ao cálculo das incógnitas usuais do contorno externo.

Paralelamente a estas, uma outra linha de pesquisa vem se desenvolvendo desde 1975, quando Snyder e Cruse [12] introduziram uma modificação na solução fundamental do plano anisotrópico, de forma a permitir a representação exata de uma fissura plana e descarregada pela equação integral de contorno, sem a necessidade de se efetuar a discretização da fissura: as integrações são feitas somente sobre o contorno externo do problema, que pode inclusive interceptar a fissura, exceto nas suas pontas. Estas soluções fundamentais, atendendo a determinadas condições de contorno especiais, são conhecidas na literatura como funções de Green. Apesar de estas funções de Green analíticas atualmente só serem disponíveis a problemas bidimensionais, e assim mesmo para configurações geométricas bastante simples, e levarem a uma formulação bastante complicada, envolvendo inclusive álgebra complexa, não há hoje ferramenta mais precisa no tratamento dos problemas a que elas se aplicam. A solução dentro do domínio é analítica e o cálculo do fator de intensidade de tensões de todos os modos de carregamento podem ser efetuados de maneira formal, pelo limite quando o ponto fonte tende à frente da fissura. Por esses motivos, estas funções de Green se difundiram rapidamente, após o trabalho de Snyder e Cruse.

Em 1983, Clements e Haselgrove [13] estenderam o trabalho de Snyder e Cruse de modo a permitir a análise de problemas generalizados de fissura plana no caso mais geral de elasticidade anisotrópica, chegando a uma formulação mais compacta e geral que a anterior. Nenhum tipo de simetria das características do material foi considerada, de modo que a placa pode sofrer deslocamentos em todas as direções, inclusive fora do seu plano. Os problemas relevantes do estado anti-plano também estão presentes como casos especiais.

Mews [14] apresentou, em 1987, uma função de Green, baseada na de Snyder e Cruse, para placas isotrópicas, que só podem ser calculadas aproximadamente pela formulação anisotrópica. O trabalho abrange o estado plano e anti-plano de

deformações, de modo que os três modos de carregamento são considerados. Além disso, os problemas de fissura carregada, não explícitos no trabalho anterior, foram estudados e resolvidos analiticamente, desde que as forças de superfície nas faces da fissura possam ser representadas, pelo menos trecho a trecho, por polinômios do segundo grau. No mesmo ano, Ang e Clements [15] apresentaram uma função de Green para a importante classe de problemas na qual as faces da fissura permanecem em contato após as deformações, sendo permitido apenas o deslizamento de uma sobre a outra. Também em 1987 foi apresentada a primeira função de Green para problemas de fissuras curvas. Ela foi desenvolvida por Ang [16], sendo válida para uma fissura em forma de arco de círculo, com ângulo interno variável. Apenas o caso isotrópico foi considerado.

Seguindo essa tendência de aplicação de funções de Green a problemas da Mecânica da Fratura, Castor [17], em 1993, apresentou em sua tese de mestrado, orientada pelo professor José Claudio de Faria Telles, um processo para a geração numérica de funções de Green que estendeu a disponibilidade destas funções a problemas para os quais sua obtenção analítica, com as ferramentas então disponíveis, não poderia ser conseguida. O resultado foi uma formulação bastante geral, aplicável tanto a problemas bidimensionais quanto tridimensionais, e sem limitações quanto ao número ou forma das fissuras, embora a implementação apresentada estivesse restrita a problemas bidimensionais com múltiplas fissuras colineares. Esta formulação se mostrou competitiva, mesmo quando comparada às funções de Green analíticas disponíveis, apresentando resultados virtualmente idênticos aos destas últimas, e muitas vezes com custo computacional inferior. Uma das principais características das funções de Green analíticas, que é permitir que as integrações sobre as faces da fissura sejam evitadas, é mantida. O cálculo das aberturas da fissura é desacoplado do cálculo das incógnitas nodais do contorno externo do problema, de modo que o tamanho do sistema de equações para o cálculo destas incógnitas é o mesmo que o dos sistemas gerados com o uso das funções de Green analíticas.

Este trabalho produziu diversas publicações internacionais [18]-[20], e foi continuado por outros pesquisadores, engajados no mesmo grupo de trabalho da COPPE, que estudaram a aplicação da função de Green numérica a problemas bidimensionais dinâmicos [21], a problemas envolvendo fissuras curvas [22] e a problemas envolvendo fissuras em placas de Reissner [23]. Encontra-se ainda em fase de estudos preliminares a sua aplicação a problemas de propagação de fissuras.

Tendo em vista a potencialidade da função de Green numérica e a escassez de métodos computacionais específicos para a análise de problemas da Mecânica da Fratura, em especial para os tridimensionais, nosso objetivo, quando do inicio deste trabalho, foi dar continuidade a esta linha de pesquisa, com o desenvolvimento de uma implementação numérica voltada para problemas tridimensionais, visto que até aquele momento suas implementações se achavam restritas ao âmbito bidimensional. Neste contexto teve início o presente trabalho que, no seu decurso, vem produzindo publicações internacionais [24]-[25] que atestam sua conveniência e aceitação.

Capítulo 2

Método dos Elementos de Contorno

2.1 - Introdução

Neste capítulo será mostrado como um problema da elasticidade, governado pela equação de Navier e sujeito a condições de contorno prescritas, pode ser reduzido a uma equação integral de contorno passível de uma solução numérica. A formulação direta de Método dos Elementos de Contorno será usada.

A identidade de Somigliana para deslocamentos será obtida a partir das relações de reciprocidade de Betti. A aplicação numérica desta identidade, usando a solução fundamental de Kelvin, será abordada na última seção, mas os mesmos conceitos se aplicam quando se usam soluções fundamentais especiais, como as funções de Green. Portanto, essa mesma formulação pode ser aplicada sem restrições aos problemas envolvendo trincas, que serão tratados nos capítulos subseqüentes.

O desenvolvimento e as expressões apresentados são particularizados para o caso tridimensional, em que o trabalho se restringe. Uma dedução mais formal e completa do método, abrangendo inclusive o caso bidimensional, pode ser encontrado nas referências [26] e [27]. O leitor já familiarizado com o método e com a notação normalmente usada é convidado a saltar ao próximo capítulo.

2.2 - Teoria da Elasticidade

Nesta seção será apresentado um breve resumo dos conceitos básicos da Teoria da Elasticidade, com o intuito de fixar a notação utilizada. O material é considerado isotrópico, linear e perfeitamente elástico, sujeito a pequenas deformações.

Segundo a notação tensorial, para o caso bidimensional, tem-se:

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$
$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \tag{2.1}$$

Será também usado o delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{2.2}$$

O equilíbrio estático de forças e momentos em um paralelepípedo retangular infinitesimal, envolvendo um dado ponto no interior de um corpo, requer a satisfação da seguinte expressão:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \tag{2.3}$$

onde σ_{ij} são as componentes do tensor de tensões, $\sigma_{ij,i}$ são suas derivadas em relação à coordenada x_i do Sistema Cartesiano de Coordenadas no ponto dado e b_j são as componentes das forças de volume.

Se todas as componentes do tensor de tensões forem conhecidas num dado ponto, as componentes das forças de superfície atuantes neste ponto em qualquer plano definido pelos cossenos diretores de sua normal, n_i, podem ser calculadas pela expressão:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \tag{2.4}$$

Se as derivadas parciais dos deslocamentos forem tão pequenas que seus quadrados e produtos possam ser desprezados, as deformações poderão ser representadas pelo tensor de deformações de Cauchy:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.5}$$

A Lei de Hooke, relacionando tensões e deformações, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = 2G\,\varepsilon_{ij} + \frac{2G\,\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk} \tag{2.6}$$

ou inversamente:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\,\sigma_{kk}\right) \tag{2.7}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e G é o módulo de elasticidade transversal dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.8}$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Alternativamente, a expressão (2.6) pode ser escrita de forma ainda mais concisa, fazendo-se uso do tensor isotrópico de quarta ordem das constantes elásticas, C_{ijkl}:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \tag{2.9}$$

onde:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\,\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + G\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{2.10}$$

Substituindo-se a expressão (2.5) na (2.6), obtêm-se as tensões em função das derivadas dos deslocamentos que, substituídas na expressão (2.3), fornecem duas equações diferenciais parciais de segunda ordem para as duas componentes de deslocamento, conhecidas como equações de Navier:

$$G\,u_{i,jj} + \frac{G}{1-2\nu} u_{j,ji} + b_i = 0 \tag{2.11}$$

Esta expressão é particularmente conveniente quando condições de contorno de deslocamentos são especificadas.

Usando-se as mesmas expressões (2.5) e (2.6), mas agora substituindo-as na expressão (2.4) para pontos do contorno, obtêm-se as condições de contorno para forças de superfície:

$$\frac{2G\,\nu}{1-2\nu} u_{k,k} n_i + G\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) n_j = p_i \tag{2.12}$$

onde n_i representa os cossenos diretores da normal externa ao contorno do corpo no ponto considerado.

Como agora as condições de equilíbrio são expressas pela equação de Navier, em termos de deslocamentos, as equações de compatibilidade se tornam desnecessárias. Os deslocamentos u_i são calculados pela equação de Navier em todo o corpo, satisfazendo às condições de contorno e, a seguir, as deformações são obtidas pela expressão (2.5) e as tensões pela Lei de Hooke.

2.3 - Identidade de Somigliana

Considere-se dois corpos em equilíbrio, definidos pelos domínios Ω e Ω^* e pelos contornos Γ e Γ^*, um contido no outro, como mostra a Figura 2.1:

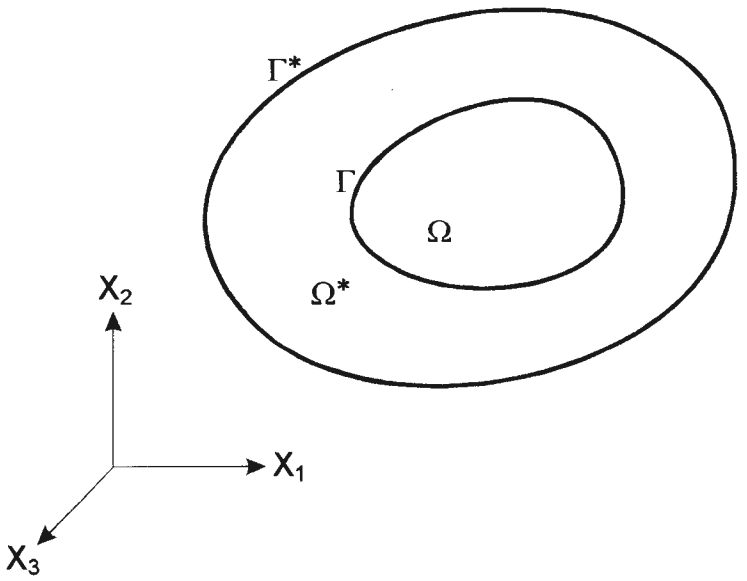

Figura 2.1
Região Ω^* + Γ^* contendo o corpo Ω + Γ, com mesmas propriedades físicas.

O corpo definido por $\Omega + \Gamma$ está sob a ação de forças e deslocamentos prescritos, e seu estado de equilíbrio é representado pelo conjunto de parâmetros σ_{ij}, ε_{ij}, u_i, p_i e b_i. Por sua vez, $\Omega^* + \Gamma^*$ tem seu estado de equilíbrio representado por σ^*_{ij}, ε^*_{ij}, u^*_i, p^*_i e b^*_i. Se as mesmas propriedades elásticas permanecem válidas em ambos os domínios, pode-se afirmar que:

$$\int_\Omega \sigma^*_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij}\,\varepsilon^*_{ij}\,d\Omega \tag{2.13}$$

pela simples simetria dos tensores envolvidos.

Integrando-se por partes ambos os lados e usando-se as expressões (2.3) e (2.5), obtém-se uma expressão correspondente ao segundo teorema da reciprocidade de Betti:

$$\int_\Omega b^*_i u_i d\Omega + \int_\Gamma p^*_i u_i d\Gamma = \int_\Omega b_i u^*_i d\Omega + \int_\Gamma p_i u^*_i d\Gamma \tag{2.14}$$

Esta equação pode ser modificada, admitindo-se que as componentes das forças de volume b_i^* correspondam a cargas concentradas unitárias aplicadas no ponto ξ, pertencente a Ω^*, em cada uma das direções ortogonais, dadas pelas componentes unitárias P_i, o que pode ser representado da seguinte maneira:

$$b_i^*(x) = \delta(\xi, x)P_i \tag{2.15}$$

onde $\delta(\xi, x)$ representa a função delta de Dirac, ξ é o ponto de aplicação da força, ou ponto fonte, e x é um ponto do domínio, ou ponto campo. A função delta de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\delta(\xi, x) = \begin{cases} 0, \text{se } \xi \neq x \\ \infty, \text{se } \xi = x \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\int_{\Omega^*} g(x)\delta(\xi, x)d\Omega^*(x) = g(\xi) \tag{2.17}$$

Portanto, se ξ pertence a Ω, a primeira integral da expressão (2.14) pode ser representada por:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = u_i(\xi)P_i \tag{2.18}$$

Além disso, se se considerar cada carga concentrada agindo independentemente, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} u_j^*(x) &= u_{ij}^*(\xi, x)P_i \\ p_j^*(x) &= p_{ij}^*(\xi, x)P_i \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde $u_{ij}^*(\xi, x)$ e $p_{ij}^*(\xi, x)$ representam o deslocamento e força de superfície na direção j, no ponto x, devidos à aplicação de uma carga concentrada unitária na direção i, no ponto ξ.

Usando-se os resultados acima, a expressão (2.14) pode ser reescrita para representar separadamente as componentes do deslocamento no ponto ξ, da seguinte forma:

$$u_i(\xi) = \int_\Gamma u_{ij}^*(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) - \int_\Gamma p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) + \\ + \int_\Omega u_{ij}^*(\xi,x)b_j(x)d\Omega(x) \tag{2.20}$$

Esta expressão é conhecida como identidade de Somigliana para os deslocamentos. A última integral à direita é a única efetuada sobre o domínio e deve ser desprezada sempre que se desprezarem as forças de volume no problema em questão. Como neste trabalho não foram consideradas as forças de volume, esta integral será, daqui em adiante, suprimida.

2.4 - Solução fundamental de Kelvin

Soluções fundamentais são soluções da equação de Navier e podem ser classificadas segundo o tipo de região $\Omega^* + \Gamma^*$ envolvida. Será apresentada, a seguir, a solução de Kelvin, na qual Ω^* é considerado um meio elástico infinito e, conseqüentemente, Γ^* é considerado no infinito. As expressões para os deslocamentos e forças de superfície para o estado plano de deformações, no contexto tridimensional, são as seguintes:

$$u_{ij}^K(\xi,x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr}\left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\right] \tag{2.21}$$

$$p_{ij}^K(\xi,x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left\{\left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}\right]\frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i)\right\} \tag{2.22}$$

onde o sobrescrito * foi substituído por K para que se possa visualmente identificar a solução como sendo a de Kelvin. Os Termos r, r_i e $r_{,i}$ são dados por:

$$r = (r_i r_i)^{1/2}$$

$$r_i = x_i(x) - x_i(\xi) \tag{2.23}$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r}$$

Esta solução pode ser alterada pelo acréscimo de novos termos, de modo a permitir novas configurações para a região $\Omega^* + \Gamma^*$, como, por exemplo, o plano semi-infinito e o plano infinito com trinca implícita. A solução para a distribuição de tensões devido à aplicação de cargas concentradas no plano semi-infinito é conhecida como solução de Melan, e é apresentada detalhadamente, juntamente com a solução para os deslocamentos, em Telles [27]. No caso do plano infinito com trinca implícita estas soluções são usualmente conhecidas como funções de Green.

A principal característica destas funções é dispensar a discretização do contorno interno da trinca. Isto ocorre porque estas funções de Green têm a propriedade de produzir forças de superfície nulas ao longo deste contorno, para qualquer posição do ponto fonte. Portanto, a segunda integral da expressão (2.20) se anula identicamente no contorno da trinca. Se as forças de superfície prescritas na trinca forem igualmente nulas, a primeira integral também se anulará e nenhuma integração e, conseqüentemente, nenhuma aproximação numérica sobre a trinca será necessária. No caso contrário, esta última integral contribuirá apenas para o termo independente do sistema de equações do Método dos Elementos de Contorno. A obtenção de uma aproximação numérica para uma destas funções, aplicável a problemas tridimensionais da Mecânica da Fratura, é o principal objetivo deste trabalho e o assunto dos capítulos que se seguem.

2.5 - Cálculo das tensões em pontos internos

O cálculo das tensões em pontos internos pode ser efetuado mediante a aplicação da expressão:

$$\sigma_{ij} = G\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}u_{k,k} \tag{2.24}$$

onde $u_{i,j}$ pode ser obtido pela simples derivação da expressão (2.20) em relação às coordenadas do ponto fonte, ξ, já que esta expressão é uma representação contínua dos deslocamentos no domínio do problema, Ω.

Portanto, derivando-se a expressão (2.20) e usando-se as soluções fundamentais de Kelvin, chega-se a:

$$u_{i,k}(\xi) = \int_\Gamma u^K_{ij,k}(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) - \int_\Gamma p^K_{ij,k}(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) \tag{2.25}$$

onde:

$$u^K_{ij,k}(\xi,x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr^2}\left\{(3-4\nu)\delta_{ij}r_{,k} - \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i} + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right. \tag{2.26}$$

e:

$$\begin{aligned} p^K_{ij,k}(\xi,x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^3}\Bigg\{ & 3\left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} - \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i} + 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]\frac{\partial r}{\partial n} + \\ & + (1-2\nu)\left[3n_i r_{,j}r_{,k} - 3n_j r_{,i}r_{,k} - \delta_{ij}n_k + \delta_{ik}n_j - \delta_{jk}n_i\right] - 3n_k r_{,i}r_{,j}\Bigg\} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Combinando-se as expressões acima, chega-se à expressão final para as tensões em pontos internos:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^{K}(\xi,x)p_k(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^{K}(\xi,x)u_k(x)d\Gamma(x) \tag{2.28}$$

onde:

$$u_{ijk}^{K}(\xi,x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left\{(1-2\nu)\left[r_{,i}\delta_{jk} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,k}\delta_{ij}\right] + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right. \tag{2.29}$$

e:

$$\begin{aligned} p_{ijk}^{K}(\xi,x) = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3}\Bigg\{ & 3\left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu\left(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j}\right) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]\frac{\partial r}{\partial n} + \\ & + (1-2\nu)\left[\delta_{jk}n_i + \delta_{ik}n_j + 3n_k r_{,i}r_{,j}\right] + 3\nu\left(r_{,j}r_{,k}n_i + r_{,i}r_{,k}n_j\right) - (1-4\nu)\delta_{ij}n_k \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.30}$$

2.6 - Equação integral no contorno

A identidade de Somigliana só é aplicável a pontos internos quando os deslocamentos e forças de superfície são conhecidos em todo o contorno. Havendo incógnitas no contorno, elas deverão ser previamente calculadas e, para isto, deve-se efetuar o limite da expressão (2.20) quando o ponto fonte tende ao contorno do problema. Este limite pode ser feito integrando-se o ponto fonte, situado no contorno, ao domínio, através de uma bolha de raio ε e fazendo-se, em seguida, ε tender a zero. A Figura 2.2 ilustra este procedimento:

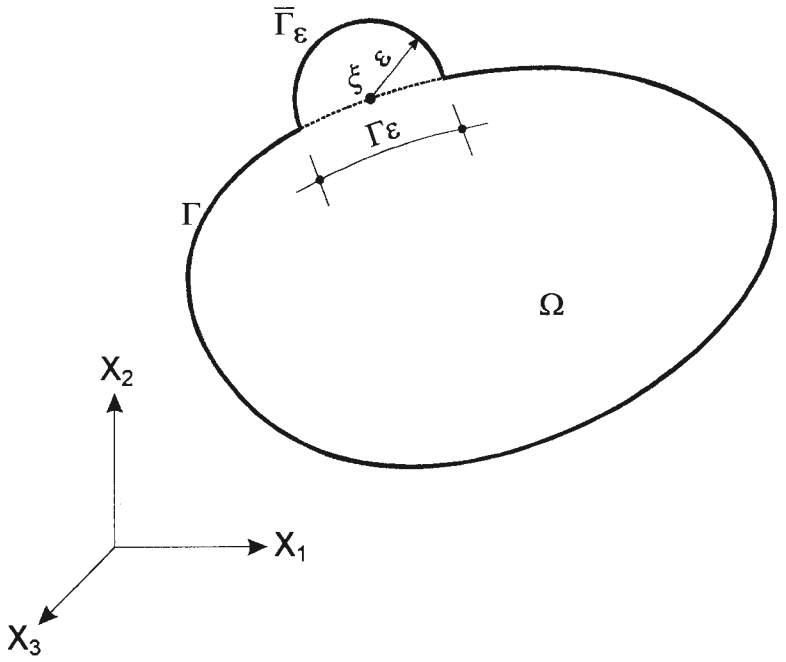

Figura 2.2
Ponto singular ξ integrado ao domínio Ω por meio de um setor circular infinitesimal de raio ε.

Considerando-se os diversos intervalos do contorno que surgiram com a introdução da bolha de raio ε, a expressão (2.20) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon} u^*_{ij}(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*_{ij}(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) \tag{2.31}$$

Os termos u^*_{ij} e p^*_{ij}, presentes nas integrais da expressão acima, apresentam singularidades de ordem $1/r$ e $1/r^2$, respectivamente. Será mostrado, entretanto, que, apesar destas singularidades, o limite das integrais existe quando ε tende a zero.

Aplicando-se o limite quando ε tende a zero à primeira integral da expressão (2.31), chega-se a:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon} u^*_{ij}(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} u^*_{ij}(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) + \\ + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} u^*_{ij}(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x)\end{aligned} \tag{2.32}$$

A primeira integral à direita da expressão anterior é absolutamente convergente, podendo ser interpretada no sentido normal de integração. O limite da última integral da mesma expressão é nulo, pois $d\Gamma$ é da ordem de $\varepsilon^2 d\theta$ e $u_{ij}^*(\xi,x)$ da ordem de $1/\varepsilon$.

Aplicando-se, agora, o limite quando ε tende a zero à segunda integral da expressão (2.31), tem-se:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\overline{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x)+ \\ +\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) \tag{2.33}$$

O limite da primeira integral do lado direito da expressão acima existe e é finito, devendo ser interpretado no sentido de valor principal de Cauchy no ponto ξ. A segunda integral do lado direito da mesma expressão pode ser decomposta, por conveniência, da seguinte maneira:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi,x)\left[u_j(x)-u_j(\xi)\right]d\Gamma(x)+ \\ +\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{u_j(\xi)\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi,x)d\Gamma(x)\right\} \tag{2.34}$$

A primeira integral do lado direito da expressão anterior é nula, pela própria condição de continuidade de $u_j(x)$. A última integral não é singular, podendo ser representada, juntamente com o lado esquerdo da expressão (2.31), da seguinte forma:

$$C_{ij}(\xi)=\delta_{ij}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi,x)d\Gamma(x) \tag{2.35}$$

Portanto, quando ε tende a zero, a expressão (2.31) toma a seguinte forma:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi)=\int_\Gamma u_{ij}^*(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x)-\fint_\Gamma p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) \tag{2.36}$$

sendo a segunda integral um valor principal de Cauchy no ponto ξ.

O coeficiente $C_{ij}(\xi)$, definido pela expressão (2.35), é dependente do ângulo entre as tangentes ao contorno à direita e à esquerda do ponto fonte, e para contornos suaves em ξ, vale $\delta_{ij}/2$. Para aplicações práticas, entretanto, será visto, posteriormente, que se pode calcular $C_{ij}(\xi)$ indiretamente, juntamente com o correspondente valor principal de Cauchy, fazendo-se com que a expressão (2.36) represente movimentos de corpo rígido.

A validade da expressão (2.36) pode ser estendida inclusive para regiões infinitas, como nos problemas de cavidade em meio infinito, representados pela Figura 2.3, abaixo:

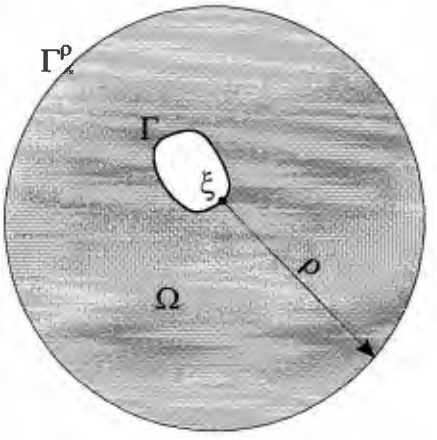

Figura 2.3
Problema de cavidade em meio infinito.

Para que a expressão (2.36) possa ser escrita somente em termos das integrais sobre o contorno interno, Γ, se faz necessário que:

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_{\Gamma^{\rho}} \left[p^*_{ij}(\xi,x)u_j(x) - u^*_{ij}(\xi,x)p_j(x)\right] d\Gamma(x) = 0 \qquad (2.37)$$

Se a igualdade acima é verificada, diz-se que foram satisfeitas as condições de regularidade no infinito.

Para casos tridimensionais, tem-se:

$$d\Gamma(x) = O\left(\rho^2\right)$$

$$u_{ij}^{*}(\xi,x)=O(1/\rho) \tag{2.38}$$

$$p_{ij}^{*}(\xi,x)=O(1/\rho^{2})$$

onde O(...) representa o comportamento assintótico das funções quando ρ tende ao infinito.

Sabendo-se que $d\Gamma = O(\rho^2)$, se $u_j(x)$ e $p_j(x)$ apresentarem, quando muito, um comportamento da ordem de $1/\rho$ e $1/\rho^2$ no infinito, as condições de regularidade são satisfeitas. Deve-se notar que se o carregamento aplicado sobre o contorno Γ não for auto-equilibrado, pelo princípio de Saint-Venant, sabe-se que o seu comportamento no infinito será o mesmo da solução fundamental correspondente a uma carga concentrada atuando na direção da resultante desse carregamento. Assim, $u_j(x) = O(1/\rho)$ e $p_j(x) = O(1/\rho^2)$ são verificados, o que garante que cada termo da equação (2.37) se anule separadamente. Conseqüentemente, fica garantida a aplicabilidade da expressão (2.36) a problemas envolvendo regiões infinitas, sem a consideração das integrais no contorno infinito.

2.7 - Implementação numérica

Como a solução exata da identidade de Somigliana pode ser conseguida apenas para configurações geométricas e condições de contorno bastante simples, nesta seção será apresentado um processo numérico aproximado para a sua solução, que, por sua generalidade, pode ser usado tanto com as soluções fundamentais de Kelvin, quanto com as funções de Green. Alguns aspectos sobre a implementação da função de Green numérica, estendida nesta tese para aplicações tridimensionais, serão tratados posteriormente.

Este processo numérico implica na discretização do contorno do problema por uma série de elementos Γ_j. As coordenadas cartesianas dos pontos situados em cada um destes elementos são expressas em termos das funções de interpolação Ψ e das coordenadas nodais $\mathbf{x}^m$ do elemento, pela seguinte relação matricial:

$$\mathbf{x} = \Psi^T \mathbf{x}^m \tag{2.39}$$

onde m é o número de pontos nodais do elemento necessários para definir sua geometria. O vetor de coordenadas **x** é dado por:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \tag{2.40}$$

onde x_1, x_2 e x_3 são as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer do elemento.

Da mesma maneira, os deslocamentos e forças de superfície são interpolados em cada elemento por funções de interpolação:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \Phi^T \mathbf{u}^n \\ \mathbf{p} &= \Phi^T \mathbf{p}^n \end{aligned} \tag{2.41}$$

onde $\mathbf{u}^n$ e $\mathbf{p}^n$ contêm os deslocamentos e forças de superfície nodais do elemento, respectivamente. n é o número de pontos nodais aos quais os valores de deslocamentos e forças de superfície estão associados. A princípio, m e n podem assumir valores diferentes, mas para a correta representação de movimentos de corpo rígido eles devem obedecer à relação $m \leq n$. Φ são as funções de interpolação e podem, no caso geral, ser diferentes para a interpolação de deslocamentos e forças de superfície.

u e **p** são vetores de deslocamentos e forças de superfície, dados pelas expressões:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \tag{2.43}$$

Podemos ainda definir as seguintes matrizes:

$$\mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{Bmatrix} \tag{2.44}$$

$$\mathbf{p}^* = \begin{Bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{Bmatrix} \tag{2.45}$$

onde u_{ij}^* e p_{ij}^* são os deslocamentos e forças de superfície na direção j, devido à ação da forca unitária na direção i.

Se o contorno Γ é subdividido em N elementos Γ_j, a expressão (2.36), aplicada ao i-ésimo ponto nodal, considerando-se as expressões matriciais acima, toma a seguinte forma:

$$\mathbf{C}\,\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{N}\left[\left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^*\Phi^T d\Gamma\right)\mathbf{p}^n - \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^*\Phi^T d\Gamma\right)\mathbf{u}^n\right] \tag{2.46}$$

Como as funções de interpolação são expressas em termos das coordenadas naturais η_1 e η_2, se faz necessária a transformação da área elementar $d\Gamma$ do sistema global para esse sistema intrínseco de coordenadas:

$$d\Gamma = |J| d\eta_1 d\eta_2 \tag{2.47}$$

onde $|J|$ é o jacobiano da transformação envolvida.

As integrais presentes em (2.46) são usualmente avaliadas numericamente, levando a:

$$\mathbf{C}\,\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{l=1}^{L}\left(\mathbf{u}^*\Phi^T\right)_l |J|_l W_l\right]\mathbf{p}^n - \sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{l=1}^{L}\left(\mathbf{p}^*\Phi^T\right)_l |J|_l W_l\right]\mathbf{u}^n \tag{2.48}$$

onde L é o número de pontos de integração e W_l é o peso associado ao l-ésimo deles.

A equação anterior fornece um conjunto de equações para o no i que podem ser escritas como:

$$\mathbf{c}_i\mathbf{u}_i + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{i1} & \hat{\mathbf{h}}_{i2} & \cdots & \hat{\mathbf{h}}_{ii} & \cdots & \hat{\mathbf{h}}_{ir} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{i1} & \mathbf{g}_{i2} & \cdots & \mathbf{g}_{ii} & \cdots & \mathbf{g}_{ir} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_r \end{Bmatrix} \tag{2.49}$$

onde $\mathbf{u}_j$ e $\mathbf{p}_j$ são as incógnitas no nó j. $\hat{\mathbf{h}}_{ij}$ e $\mathbf{g}_{ij}$ são submatrizes de dimensão 3x3 contendo os coeficientes de interação relacionando o no i a todos os nós no contorno do elemento.

A equação acima pode ser escrita para cada um dos nos considerados. Todas elas podem ser agrupadas na seguinte equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \hat{\mathbf{h}}_{12} & \cdots & \hat{\mathbf{h}}_{1i} & \cdots & \hat{\mathbf{h}}_{1r} \\ \hat{\mathbf{h}}_{21} & \mathbf{h}_{22} & \cdots & \hat{\mathbf{h}}_{2i} & \cdots & \hat{\mathbf{h}}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_{i1} & \hat{\mathbf{h}}_{i2} & & \mathbf{h}_{ii} & & \hat{\mathbf{h}}_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_{r1} & \hat{\mathbf{h}}_{r2} & & \hat{\mathbf{h}}_{ri} & & \mathbf{h}_{rr} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \cdots & \mathbf{g}_{1i} & \cdots & \mathbf{g}_{1r} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \cdots & \mathbf{g}_{2i} & \cdots & \mathbf{g}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{g}_{i1} & \mathbf{g}_{i2} & & \mathbf{g}_{ii} & & \mathbf{g}_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{g}_{r1} & \mathbf{g}_{r2} & & \mathbf{g}_{ri} & & \mathbf{g}_{rr} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_r \end{Bmatrix} \tag{2.50}$$

onde as submatrizes $\mathbf{h}_{ii}$ contêm a contribuição dos termos $\mathbf{c}_i$:

$$\mathbf{h}_{ii} = \mathbf{C}_i + \hat{\mathbf{h}}_{ii} \tag{2.51}$$

A expressão (2.50) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}\,\mathbf{U} = \mathbf{G}\,\mathbf{P} \tag{2.52}$$

Há dois tipos de condições de contorno a serem impostas na equação acima. O primeiro é a condição de contorno do tipo deslocamentos prescritos, ou seja, $\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i$ em Γ_1. O segundo é a condição de contorno do tipo forças de superfície prescritas, ou seja, $\mathbf{p}_i = \bar{\mathbf{p}}_i$ em Γ_2. Se os deslocamentos são conhecidos, podemos encontrar as forças de superfície e vice-versa. Assim, o sistema de equações (2.52) pode ser reordenado de forma que todas as incógnitas sejam escritas num vetor **Y**, da seguinte maneira:

$$\mathbf{AY} = \mathbf{F} \tag{2.53}$$

onde **A** é uma matriz cheia, de ordem 3r, o vetor **Y** contém valores desconhecidos tanto de deslocamentos quanto de forças de superfície e o vetor **F** contém a contribuição dos valores prescritos. Para uma maior eficiência computacional, a matriz **A** e o vetor **F** são montados diretamente a partir das integrais dos elementos, sem a passagem pelas matrizes **H** e **G** e posterior reordenação do sistema.

Os coeficientes $\mathbf{C}_i$ da equação (2.51) podem ser obtidos indiretamente pela condição de que movimentos de corpo rígido resultam em forças de superfície nulas em um corpo finito. Considerando a aplicação de movimentos de corpo rígido em qualquer direção, a equação (2.52) se transforma em

$$\mathbf{H}\,\mathbf{I}_l = 0 \tag{2.54}$$

onde $\mathbf{I}_l$ é um vetor que define o movimento de corpo rígido na direção l. Assim, os termos da diagonal de **H** são simplesmente:

$$\mathbf{h}_{ii} = -\sum_{j \neq i} \mathbf{h}_{ij} \tag{2.55}$$

o que significa que nem os termos $\mathbf{C}_i$ nem os coeficientes da submatriz $\hat{\mathbf{h}}_{ii}$ precisam ser determinados explicitamente.

A expressão acima é válida para regiões finitas. Para regiões infinitas a aplicação de movimentos de corpo rígido viola as condições de regularidade e o cálculo da submatriz $\mathbf{h}_{ii}$ da diagonal deve ser feito através da expressão (2.36). Aplicando-se,

então, esta expressão ao problema da Figura 2.3 e considerando-se a aplicação do movimento de corpo rígido, o limite quando ρ tende ao infinito leva a:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi)+u_j\int_{\Gamma}p^*_{ij}(\xi,x)d\Gamma(x)+\lim_{\rho\to\infty}u_j\int_{\Gamma^\rho}p^*_{ij}(\xi,x)d\Gamma(x)=0 \tag{2.56}$$

onde Γ^ρ é o contorno de uma região esférica infinita, u_j corresponde a qualquer movimento de corpo rígido constante e ξ pertence a Γ.

Como $p^*_{ij}(\xi,x)$ corresponde a uma carga pontual unitária aplicada na direção i, pela condição de equilíbrio do problema fundamental, a última integral vale:

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\Gamma^\rho}p^*_{ij}(\xi,x)d\Gamma(x)=-\delta_{ij} \tag{2.57}$$

Substituindo-se a expressão (2.57) em (2.56) e reescrevendo-se o resultado na forma discretizada, a seguinte equação é obtida:

$$\mathbf{h}_{ii}=\mathbf{I}-\sum_{j\neq i}\mathbf{h}_{ij} \tag{2.58}$$

onde **I** é a matriz identidade.

O programa desenvolvido para a solução dos problemas específicos da Mecânica da Fratura foi implementado seguindo-se esta mesma metodologia, bastando que se somem à solução fundamental de Kelvin as contribuições das parcelas complementares, que serão estudadas adiante. O ponto de partida desta implementação foi o programa inicialmente desenvolvido por Silva [28].

Capítulo 3

Função de Green numérica

3.1 - Equação integral de contorno na Mecânica da Fratura

Um problema típico da Mecânica da Fratura pode ser representado esquematicamente pela Figura 3.1, onde o domínio do problema, Ω, é circundado pelo seu contorno externo, Γ^E, e contém uma fissura definida pelo contorno Γ^F, constituído pelas superfícies coincidentes Γ^S e Γ^I.

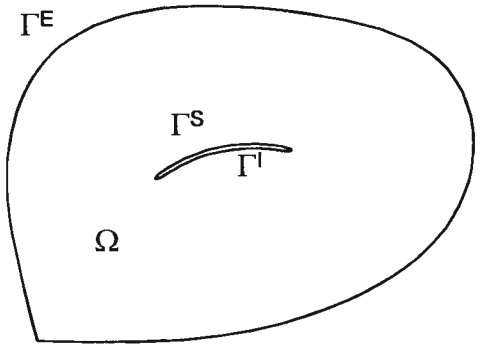

Figura 3.1
Problema típico da Mecânica da Fratura.

A aplicação da identidade de Somigliana a este tipo de problema, considerando forças de volume nulas, leva à expressão:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = \int_{\Gamma^E} u_{ij}^K(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma^E} p_{ij}^K(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma^F} u_{ij}^K(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma^F} p_{ij}^K(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) \tag{3.1}$$

onde $u_j(x)$ e $p_j(x)$ representam as componentes de deslocamentos e forças de superfície do problema e $C_{ij}(\xi)$ é a usual matriz de coeficientes, dependente da localização do ponto fonte, ξ. Os tensores $u_{ij}^K(\xi,x)$ e $p_{ij}^K(\xi,x)$ correspondem à solução fundamental de Kelvin para deslocamentos e forças de superfície no ponto campo, x.

Para a solução dos problemas da Mecânica da Fratura, a equação (3.1) não pode ser usada isoladamente, mas em combinação com a equação hipersingular de contorno, levando à formulação mista do Método dos Elementos de Contorno [29]. A equação hipersingular é obtida a partir da equação (3.1), por derivação em relação às coordenadas do ponto ξ, pertencente a Ω:

$$\begin{aligned} p_i(\xi) = & \int_{\Gamma^E} U_{ij}^K(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma^E} P_{ij}^K(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma^F} U_{ij}^K(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma^F} P_{ij}^K(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nesta equação, os novos tensores $U_{ij}^K(\xi,x)$ e $P_{ij}^K(\xi,x)$ são definidos em relação à normal a uma superfície interna passando por ξ, cujos cosenos diretores são dados por m_i. Suas expressões para domínios tridimensionais são:

$$U_{ij}^K(\xi,x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left\{\left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}\right]\frac{\partial r}{\partial m} + (1-2\nu)(m_i r_{,j} - m_j r_{,i})\right\} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} P_{ij}^K(\xi,x) = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3}\Bigg\{ & -3\left[\nu n_i r_{,j} + (1-2\nu)n_j r_{,i} + \left(\nu\delta_{ij} - 5r_{,i}r_{,j}\right)\frac{\partial r}{\partial n}\right]\frac{\partial r}{\partial m} \\ & + 3\left[(1-2\nu)m_i r_{,j} + \nu m_j r_{,i}\right]\frac{\partial r}{\partial n} + \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3\nu r_{,i}r_{,j}\right]m_k n_k \\ & - (1-4\nu)m_i n_j + (1-2\nu)m_j n_i \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde δ_{ij} representa a função delta de Kronecker, n_i, os cosenos diretores da normal externa ao contorno no ponto x, r, a distância entre ξ e x, e $r_{,i}$, suas derivadas em relação

às coordenadas do segundo ponto. G e ν são, respectivamente, o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson do material.

A forma limite da equação (3.2), quando ξ tende a Γ^F, pode ser usada juntamente com a equação (3.1), de modo a se completarem mutuamente, adotando-se uma delas em cada uma das faces coincidentes da fissura. Desta maneira, haverá a necessidade de discretização do contorno da fissura, como no caso do uso de sub-regiões, e a aproximação será penalizada pelo campo singular de tensões nas frentes da fissura.

A única metodologia que elimina a necessidade de discretização do contorno da fissura é o uso de funções de Green, em substituição aos tensores de Kelvin, na identidade de Somigliana. Isto se dá pelo fato de estas funções satisfazerem a condição de forças de superfícies nulas em toda a superfície da fissura, eliminando a necessidade de interpolação de deslocamentos nesta região crítica do problema. Esta técnica produz resultados bastante precisos, mas esteve restrita a problemas bidimensionais geometricamente simples, para os quais o desenvolvimento analítico das funções de Green adequadas pôde ser conseguido. A função de Green numérica (FGN) proposta supera esta limitação.

3.2 - Função de Green numérica

Nesta seção, apresentaremos a FGN, que será deduzida a partir do princípio da superposição de efeitos. O problema G, na Figura 3.2, corresponde ao problema de um domínio infinito contendo uma fissura de geometria qualquer, com condição de contorno de forças de superfície nulas sobre toda a sua superfície. A solução em termos de deslocamentos e forças de superfície, para esta configuração, em presença de uma carga unitária pontual F_i, aplicada no ponto ξ, é a própria função de Green procurada.

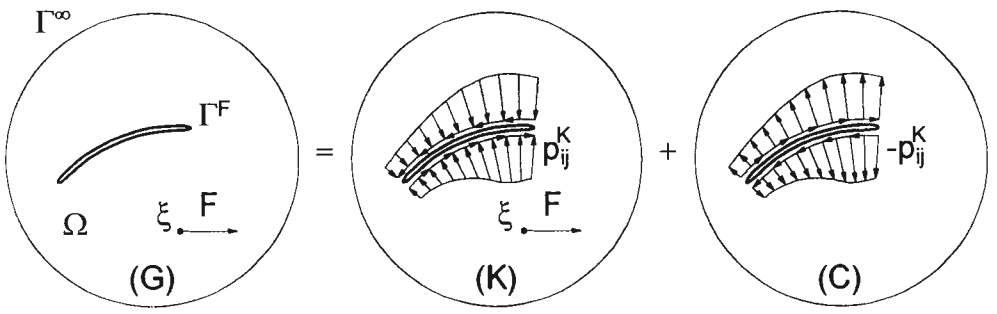

Figura 3.2
Obtenção da função de Green pela superposição de efeitos das soluções parciais de Kelvin e complementar.

Este problema pode ser simulado pela superposição de efeitos dos problemas K e C. O primeiro difere do problema G pela adição das forças de superfície p_{ij}^{K} sobre a superfície da fissura. Estas forças de superfície são as que seriam verificadas sobre uma superfície imaginária e coincidente com a superfície Γ^F num problema semelhante mas sem a fissura. Quando aplicadas, estas forças de superfície restituem a continuidade de deslocamentos e a validade da solução de Kelvin em todo o domínio do problema. No segundo, chamado problema complementar, a fissura está sob a ação de forças de superfície opostas àquelas agindo sobre a fissura do problema K. Desta maneira, estas forças de superfície se anulam mutuamente quando os dois problemas são somados, dando origem à fissura descarregada do problema G. Assim, a função de Green poderá ser escrita da seguinte maneira:

$$u_{ij}^{G}(\xi,x)=u_{ij}^{K}(\xi,x)+u_{ij}^{C}(\xi,x) \tag{3.5}$$

$$p_{ij}^{G}(\xi,x)=p_{ij}^{K}(\xi,x)+p_{ij}^{C}(\xi,x) \tag{3.6}$$

onde o sobrescrito G está relacionado à função de Green e os sobrescritos K e C indicam, respectivamente, as soluções parciais de Kelvin e complementar.

Para a solução do problema complementar, a equação (3.1) será aplicada ao problema C, da Figura 3.2. Uma vez que o ponto ξ e o primeiro índice, indicando a direção da carga unitária F_i, aplicada ao problema real, serão introduzidos na definição do problema C, a equação (3.1) será reescrita para um ponto fonte x, interno, e um

ponto campo ζ, localizado no contorno da fissura. Como as condições de regularidade são satisfeitas [26], as integrais no contorno externo se anulam no infinito, e a seguinte expressão é obtida:

$$u_{ij}^{C}(\xi,x) = -\int_{\Gamma^F} u_{jk}^{K}(x,\zeta)p_{ik}^{K}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) - \int_{\Gamma^F} p_{jk}^{K}(x,\zeta)u_{ik}^{C}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) \tag{3.7}$$

Lembrando-se de que as forças de superfície têm sinais opostos, nas duas faces da fissura, devido à mudança de sentido do vetor normal, as integrais em Γ^F podem ser reescritas somente em Γ^I, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_{ij}^{C}(\xi,x) = &-\int_{\Gamma^I} u_{jk}^{K}(x,\zeta)\left[p_{ik}^{K}(\xi,\zeta^S) + p_{ik}^{K}(\xi,\zeta^I)\right]d\Gamma(\zeta) \\ &+ \int_{\Gamma^I} p_{jk}^{K}(x,\zeta)\left[u_{ik}^{C}(\xi,\zeta^S) - u_{ik}^{C}(\xi,\zeta^I)\right]d\Gamma(\zeta) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como a solução de Kelvin produz um campo de tensões contínuo através de Γ^F, a primeira integral, na equação anterior, é nula. Definindo-se, de agora em diante, as aberturas da fissura da função de Green como $c_{ij}(\xi,\zeta) = u_{ij}^{C}(\xi,\zeta^S) - u_{ij}^{C}(\xi,\zeta^I)$, a equação (3.8) pode ser simplificada para:

$$u_{ij}^{C}(\xi,x) = \int_{\Gamma^I} p_{jk}^{K}(x,\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) \tag{3.9}$$

A equação anterior fornece os deslocamentos da solução complementar num ponto interno x, não contido na superfície Γ^F, devido a uma carga pontual unitária aplicada no ponto ξ, como função das aberturas da fissura $c_{ik}(\xi,\zeta)$.

As forças de superfície complementares podem ser obtidas a partir da equação anterior, seguindo-se o desenvolvimento indicado na passagem da equação (3.1) para (3.2), mas com derivação em relação às coordenadas do ponto x, que agora toma o papel de ponto fonte para o tensor forças de superfície de Kelvin. Desta maneira, a seguinte expressão é obtida:

$$p_{ij}^{C}(\xi,x) = \int_{\Gamma^I} P_{jk}^{K}(x,\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) \tag{3.10}$$

Se as aberturas da fissura são conhecidas, as equações (3.9) e (3.10) fornecem a solução complementar. A forma limite da equação anterior, quando x tende a Γ^I, leva à seguinte equação hipersingular de contorno [29]:

$$p_{ij}^{C}(\xi,\bar{\zeta}) = \oint_{\Gamma^I} P_{jk}^{K}(\bar{\zeta},\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) \tag{3.11}$$

onde $\bar{\zeta}$ pertence a Γ^I e a integral deve ser interpretada no sentido de parte finita de Hadamard. Como a condição de contorno de forças de superfície nulas em Γ^F implica em $p_{ij}^{C}(\xi,\bar{\zeta}) = -p_{ij}^{K}(\xi,\bar{\zeta})$, a equação anterior pode ser reescrita como uma equação integral hipersingular de contorno para as aberturas da fissura:

$$\oint_{\Gamma^I} P_{jk}^{K}(\bar{\zeta},\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) = -p_{ij}^{K}(\xi,\bar{\zeta}) \tag{3.12}$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método dos resíduos ponderados, com a técnica da colocação pontual. Se a função delta de Dirac é usada como função peso em M pontos $\bar{\zeta}_m$, a seguinte expressão é encontrada:

$$\oint_{\Gamma^I} P_{jk}^{K}(\bar{\zeta}_m,\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) = -p_{ij}^{K}(\xi,\bar{\zeta}_m), \quad m = 1,\cdots,M \tag{3.13}$$

Desde que as aberturas da fissura sejam tomadas como incógnitas num número M de pontos e, em função destes, obtidas por interpolação em todo o domínio de integração Γ^I, a integral acima pode ser avaliada numericamente por um método capaz de lidar com a singularidade do seu integrando no ponto $\bar{\zeta}_m$. Estes métodos se encontram detalhados no Capítulo 4.

Assim, a equação (3.13) passa a representar um sistema de equações determinado, para o cálculo das aberturas da fissura. Um exame cuidadoso dos seus índices, mostra que o sistema de 9M equações se subdivide em três sistemas de 3M equações, compartilhando a mesma matriz de coeficientes. Estes últimos sistemas, podem ser representados de forma matricial, da seguinte maneira:

$$\mathbf{S}\,\mathbf{c}_i(\xi) = \mathbf{p}_i(\xi) \tag{3.14}$$

onde os vetores $\mathbf{c}_i(\xi)$ e $\mathbf{p}_i(\xi)$ contém os valores pontuais das aberturas da fissura e das forças de superfície de Kelvin, nas três direções, correspondendo à carga pontual aplicada em ξ na direção i. **S** é uma matriz quadrada, de dimensão 3M, independente da posição do ponto fonte ξ, podendo ser montada e triangularizada uma única vez e sujeita a apenas uma retrosubstituição para cada ponto fonte considerado.

Conhecidas as aberturas da fissura, a solução complementar poderá ser obtida pela integração numérica de Gauss das equações (3.9) e (3.10), e a FGN poderá ser reescrita, com base nas equações (3.5) e (3.6), da seguinte maneira:

$$u_{ij}^{G}(\xi,x) = u_{ij}^{K}(\xi,x) + \sum_{a=1}^{A}\sum_{b=1}^{B} |J|_{ab}\, p_{jk}^{K}(x,\zeta_{ab})\, c_{ik}(\xi,\zeta_{ab})\, W_a W_b \tag{3.15}$$

$$p_{ij}^{G}(\xi,x) = p_{ij}^{K}(\xi,x) + \sum_{a=1}^{A}\sum_{b=1}^{B} |J|_{ab}\, P_{jk}^{K}(x,\zeta_{ab})\, c_{ik}(\xi,\zeta_{ab})\, W_a W_b \tag{3.16}$$

onde as integrações numéricas, agora regulares, são efetuadas em coordenadas retangulares. A e B representam os números de pontos de integração em cada uma das variáveis de integração. Normalmente, serão iguais, e seu produto, igual a M.

É importante notar que as aberturas incógnitas, por conveniência, podem ser locadas nos próprios pontos de integração, representados por ζ_{ab}. Assim, a FGN será integrada, na maioria das vezes, sem a necessidade de qualquer tipo de interpolação.

3.3 - Problemas envolvendo fissuras carregadas

A identidade de Somigliana para problemas com fissuras carregadas toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = &\int_{\Gamma} u_{ij}^{G}(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^{G}(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Gamma^I+\Gamma^S} u_{ij}^{G}(\xi,\zeta)p_j(\zeta)d\Gamma(\zeta) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Se as forças de superfície em cada ponto da face superior da fissura são iguais em módulo e de sinais contrários às do ponto coincidente na face inferior, como no caso de fissuras pressurizadas, a última integral na expressão (3.17) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Gamma^I+\Gamma^S} u_{ij}^G(\xi,\zeta)p_j(\zeta)d\Gamma(\zeta) = -\int_{\Gamma^I}\left(u_{ij}^G(\xi,\zeta^S)-u_{ij}^G(\xi,\zeta^I)\right)p_j(\zeta^I)d\Gamma(\zeta) = \\ = -\int_{\Gamma^I} c_{ij}(\xi,\zeta)p_j(\zeta)d\Gamma(\zeta) \tag{3.18}$$

Portanto, nesse caso a expressão (3.17) se simplifica para:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = \int_\Gamma u_{ij}^G(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) - \int_\Gamma p_{ij}^G(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) + \\ - \int_{\Gamma^I} c_{ij}(\xi,\zeta)p_j(\zeta)d\Gamma(\zeta) \tag{3.19}$$

onde a última integral contribui apenas para o termo independente do sistema de equações (2.53), pelo qual é calculada a resposta para o contorno externo do problema, pelo Método dos Elementos de Contorno.

3.4 - Cálculo de tensões em pontos internos

O cálculo das tensões em pontos internos, como visto no Capítulo 2, seção 5, requer a derivação da identidade de Somigliana para deslocamentos em relação às coordenadas do ponto fonte e, em seguida, a aplicação da expressão (2.24).

A derivação da identidade de Somigliana envolve a derivação das soluções fundamentais para deslocamentos e forças de superfície, conforme a expressão (2.25). Como agora as funções de Green são usadas no lugar das soluções fundamentais usuais, será necessária a derivação de suas partes complementares, o que pode ser verificado pelas expressões (3.5) e (3.6). As derivadas da parte correspondente às soluções de Kelvin já foram apresentadas no Capítulo 2, seção 5.

A partir das expressões (3.9) e (3.10), escreve-se:

$$u^{C}_{ij,k}(\xi,x)=\int_{\Gamma^{I}} p^{K}_{jl}(x,\zeta)c_{il,k}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) \tag{3.20}$$

$$p^{C}_{ij,k}(\xi,x)=\int_{\Gamma^{I}} P^{K}_{jl}(x,\zeta)c_{il,k}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) \tag{3.21}$$

As derivadas das aberturas da fissura podem ser calculadas a partir da expressão (3.12):

$$\oint_{\Gamma^{I}} P^{K}_{jl}(\bar{\zeta},\zeta)c_{il,k}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta)=-p^{K}_{ij,k}(\xi,\bar{\zeta}) \tag{3.22}$$

Chega-se, portanto, a sistemas de equações iguais aos representados pela expressão (3.14), exceto pela mudança das incógnitas e termos independentes:

$$\mathbf{S}\,\mathbf{c}_{i,j}(\xi)=\mathbf{p}_{i,j}(\xi) \tag{3.23}$$

onde $\mathbf{c}_{i,j}(\xi)$ e $\mathbf{p}_{i,j}(\xi)$ agora contém os valores pontuais das derivadas das aberturas da fissura e das derivadas do tensor para forças de superfície da solução fundamental de Kelvin, respectivamente.

Tendo-se as derivadas das aberturas da fissura nos pontos de Gauss, da mesma forma que os deslocamentos e forças de superfície, as derivadas da função de Green serão calculadas pela integração numérica das expressões (3.20) e (3.21):

$$u^{G}_{ij,k}(\xi,x)=u^{K}_{ij,k}(\xi,x)+\sum_{a=1}^{A}\sum_{b=1}^{B}|J|_{ab}\,p^{K}_{jl}(x,\zeta_{ab})c_{il,k}(\xi,\zeta_{ab})W_a W_b \tag{3.24}$$

$$p^{G}_{ij,k}(\xi,x)=p^{K}_{ij,k}(\xi,x)+\sum_{a=1}^{A}\sum_{b=1}^{B}|J|_{ab}\,P^{K}_{jl}(x,\zeta_{ab})c_{il,k}(\xi,\zeta_{ab})W_a W_b \tag{3.25}$$

3.5 - Aberturas da fissura para problemas finitos

Para um problema real, cujo contorno externo é finito, como o da Figura 3.1, o cálculo das aberturas da fissura, agora representadas por $c_j(x)$, poderá ser efetuado a partir da forma limite da equação (3.2), quando ξ tende a Γ^I:

$$\oint_{\Gamma^I} P_{ij}^K(\xi,x)c_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma^E} P_{ij}^K(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma^E} U_{ij}^K(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) \qquad (3.26)$$

Uma vez que sua primeira integral é a mesma da equação (3.12), a equação acima conduz a um sistema se equações idêntico ao da equação (3.14), exceto pela mudança do termo independente, que agora envolve a integração dos resultados obtidos para o contorno externo do problema. A partir das aberturas da fissura para o problema real, os fatores de intensidade de tensões podem ser calculados com o emprego das fórmulas de Irwin [30], para todos os modos de carregamento envolvidos.

Calculadas as aberturas da fissura para o problema em questão, a implementação usual de Elementos de Contorno, usando as soluções fundamentais de Kelvin, pode ser usada para o cálculo dos deslocamentos ou tensões em pontos internos. A equação para deslocamentos, por exemplo, seria:

$$\begin{aligned} u_i(\xi) = \int_{\Gamma^E} u_{ij}^K(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma^E} p_{ij}^K(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) + \\ + \int_{\Gamma^I} p_{ij}^K(\xi,x)c_j(x)d\Gamma(x) \end{aligned} \qquad (3.27)$$

conseqüência direta da equação (3.1).

Deve-se notar que as expressões apresentadas desde o início deste capítulo não fazem nenhuma restrição quanto a forma ou orientação da fissura, que pode admitir inclusive formas curvas. Também não há restrição quanto ao número de fissuras, apesar de as deduções terem sido feitas para apenas uma. No caso de problemas com mais de uma fissura, basta que se considere um somatório a mais nas expressões (3.15), (3.16), (3.24) e (3.25), para o número total de fissuras. Neste caso, as integrais avaliadas nas fissuras que não contêm o ponto singular $\bar{\zeta}_m$ são regulares e podem ser integradas numericamente sem maiores dificuldades.

Capítulo 4

Implementação da função de Green numérica

4.1 - Introdução

Para a obtenção da FGN, como demonstrado no Capítulo anterior, é necessário o conhecimento prévio da solução de um problema de região infinita, contendo uma fissura, geometricamente igual à do problema real, sob a ação de uma carga pontual unitária. Este é o chamado problema complementar e sua solução, em termos de aberturas da fissura, pode ser obtida a partir da equação:

$$\oint_{\Gamma^I} P_{jk}^{K}(\bar{\zeta},\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) = -p_{ij}^{K}(\xi,\bar{\zeta}) \tag{4.1}$$

onde Γ^I representa a superfície inferior da fissura e contém os pontos ζ e $\bar{\zeta}$.

P_{jk}^{K} é o tensor equivalente, na formulação Hipersingular, ao tensor p_{jk}^{K} de Kelvin, que representa forças de superfície. Entretanto, sua singularidade é mais forte, da ordem de $1/r^3$, no ponto $\bar{\zeta}$. Devido a esta singularidade, a integral na equação (4.1) só existe no sentido de parte finita de Hadamard, e só pode ser avaliada numericamente com o emprego de algum processo adequado a este tipo de integral.

Neste Capítulo são apresentados três procedimentos adotados para a obtenção numérica da integral na equação (4.1). O primeiro deles emprega elementos lineares tangentes ao elemento de fissura original no ponto singular. O mesmo integrando é simultaneamente avaliado nos dois elementos, de forma a se conseguir uma subtração de singularidades. Este procedimento foi o mais exaustivamente estudado e sua implementação se encontra bastante geral e completa. O segundo procedimento empregado tem como principal característica o uso do processo de

integração de Kutt [31] para integrais singulares e o terceiro usa uma técnica de integração com pesos específicos para integrais singulares, desenvolvida por Dumont e Souza [32] e Noronha [33]. Estas duas últimas implementações, embora possam ser usadas em alguns problemas, não tem ainda a generalidade da primeira e ainda inspiram maiores esforços neste sentido. São também apresentados processos para a avaliação desta integral na presença de quase-singularidades introduzidas pela aproximação do ponto fonte ξ à superfície da fissura, comum nos problemas de fissura de bordo. Os mesmos processos são usados para a avaliação de integrais quase singulares durante a geração numérica da função de Green no contorno externo dos problemas.

Antes, porém, são apresentados alguns aspectos comuns a ambas as implementações, como a interpolação geométrica e funcional na fissura.

4.2 - Interpolação geométrica e funcional na fissura

Para a integração da equação (4.1), a superfície Γ^l da fissura será aproximada geometricamente por um elemento quadrangular ou triangular, representados na Figura 4.1.

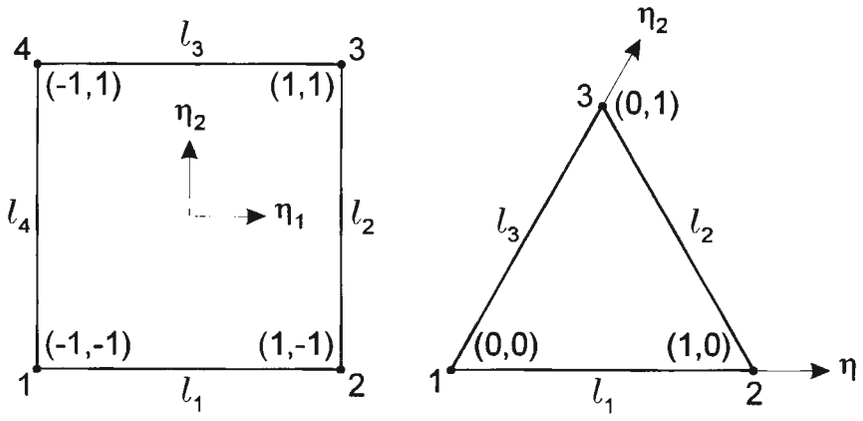

Figura 4.1
Elementos de fissura quadrangular e triangular e suas coordenadas naturais.

onde η_1 e η_2 são as coordenadas naturais do elemento. Elas variam entre –1 e 1, no elemento quadrangular e 0 e 1, o elemento triangular. Os nós geométricos representados

na Figura 4.1 são relativos aos elementos de interpolação geométrica linear. Para os elementos de interpolação de ordem mais elevada, eles representam apenas os nós de vértice, sendo os demais distribuídos de maneira uniforme no perímetro e no interior do elemento. l_i são os lados dos elementos mapeados.

A interpolação geométrica, no elemento de fissura, poderá ser de qualquer ordem. Neste trabalho são usados elementos lagrangeanos desde lineares até quárticos, que permitem uma boa representação de fissuras circulares ou elípticas.

A interpolação funcional na fissura, neste caso a interpolação das próprias aberturas da fissura, será baseada em pontos nodais internos ao elemento e coincidentes com pontos de integração de Gauss, considerando uma integração em coordenadas retangulares no elemento mapeado quadrangular. A coincidência destes pontos nodais com os pontos de integração não é uma imposição do método, mas, como discutido no Capítulo 3, ao final da seção 2, evita a interpolação das aberturas da fissura em boa parte das integrações a serem efetuadas. Assim, para um número de pontos de integração igual a quatro, a distribuição dos pontos nodais funcionais do elemento pode ser vista na Figura 4.2.

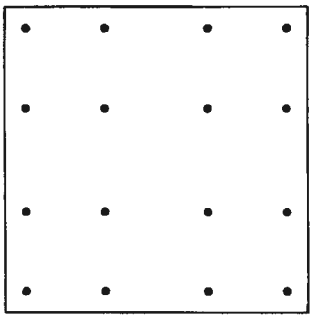

Figura 4.2
Distribuição dos pontos nodais funcionais no elemento de fissura mapeado.

Para pontos do elemento não coincidentes com seus pontos de integração, as aberturas podem ser interpoladas por uma função de interpolação polinomial, como na seguinte equação:

$$c_{ik}(\xi,\zeta(\eta_1,\eta_2)) = \sum_{a=1}^{A}\sum_{b=1}^{B} L^a(\eta_1)L^b(\eta_2)c_{ik}\left(\xi,\zeta\left(\eta_1^a,\eta_2^b\right)\right) \tag{4.2}$$

Nesta equação, A e B, usualmente iguais, são os números de pontos de integração nas direções η_1 e η_2. L^a e L^b são polinômios interpolantes unidimensionais de Lagrange, de graus A-1 e B-1, respectivamente. η_1^a e η_2^b são as coordenadas naturais do a-ésimo ponto de Gauss, na direção η_1, e b-ésimo ponto de Gauss, na direção η_2, de modo que $c_{ik}\left(\xi,\zeta\left(\eta_1^a,\eta_2^b\right)\right)$ representa as aberturas da fissura num nó funcional específico do elemento. Esta expressão pode ser modificada pela introdução de termos que simulem o comportamento de $\sqrt{\rho}$ das aberturas das fissuras na vizinhança das frentes de fissura, sendo ρ a distância do ponto considerado à frente de fissura. Como pode ser verificado nas soluções analíticas disponíveis [37]-[38], este comportamento deve estar presente nas soluções para aberturas de fissuras, tanto em meios bidimensionais quanto tridimensionais, podendo ser adequadamente representado pela seguinte função de interpolação:

$$c_{ik}(\xi,\zeta(\eta_1,\eta_2))=\sqrt{R_1R_2R_3R_4}\sum_{a=1}^{A}\sum_{b=1}^{B}L^a(\eta_1)L^b(\eta_2)\frac{c_{ik}\left(\xi,\zeta\left(\eta_1^a,\eta_2^b\right)\right)}{\sqrt{S_1S_2S_3S_4}} \tag{4.3}$$

onde as variáveis R_i e S_i estão relacionadas aos lados l_i do elemento quadrangular e são dadas pelas fórmulas:

$$R_1=1+\eta_2 \qquad S_1=1+\eta_2^b \tag{4.4}$$

$$R_2=1-\eta_1 \qquad S_2=1-\eta_1^a \tag{4.5}$$

$$R_3=1-\eta_2 \qquad S_3=1-\eta_2^b \tag{4.6}$$

$$R_4=1+\eta_1 \qquad S_4=1+\eta_1^a \tag{4.7}$$

para o caso usual de fissura em meio infinito, quando suas aberturas apresentam o referido comportamento em todo o seu perímetro ou em todos os seus lados, tendo em mente o elemento mapeado.

Desta forma, a equação (4.2) passa a ser um caso particular da equação (4.3), para os seguintes valores das variáveis R_i e S_i:

$$R_i = 1 \qquad S_i = 1 \tag{4.8}$$

Em casos práticos, pode ocorrer que o comportamento de raiz de ρ esteja presente apenas em determinadas regiões do perímetro do elemento. Nestes casos devem ser escolhidos adequadamente os termos R_i e S_i das expressões (4.4) a (4.7), para os lados l_i onde se deseja o comportamento de raiz de ρ , e da expressão (4.8) para os lados l_i livres. Estes últimos são geralmente aqueles lados que estão em contado com o contorno externo do problema, nos problemas de fissura de bordo. Nestes casos a escolha errada dos termos R_i e S_i poderia fazer com que a boca da fissura não se abrisse para o meio externo. As respostas assim obtidas seriam completamente erradas. Por outro lado, o uso exclusivo da equação (4.2) não comprometeria a resposta do problema. Apenas o nível de precisão da resposta obtida, em termos de fatores de intensidade de tensões, seria inferior.

Para o estabelecimento da interpolação funcional no elemento triangular, este é novamente mapeado para um elemento quadrangular pela seguinte transformação de coordenadas:

$$\eta_1 = -1 + 2\left(\eta_1^{\Delta} + \eta_2^{\Delta}\right)$$

$$\eta_2 = \begin{cases} \dfrac{\eta_2^{\Delta} - \eta_1^{\Delta}}{\eta_1^{\Delta} + \eta_2^{\Delta}}, \text{se}\left(\eta_1^{\Delta} + \eta_2^{\Delta}\right) > 0 \\ 0, \text{se}\left(\eta_1^{\Delta} + \eta_2^{\Delta}\right) = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

onde η_i^{Δ} e η_i são as coordenadas naturais dos elementos triangulares e quadrangulares, respectivamente.

Desta forma a mesma interpolação funcional usada para o elemento quadrangular pode ser utilizada para o elemento triangular. A transformação inversa é dada por:

$$\eta_1^{\Delta} = \frac{(1+\eta_1)(1-\eta_2)}{4}$$
$$\eta_2^{\Delta} = \frac{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}{4} \tag{4.10}$$

e seu jacobiano, por:

$$J = \frac{(1+\eta_1)}{8} \tag{4.11}$$

Esta transformação de coordenadas já vinha sendo usada com sucesso nas integrações não singulares dos elementos da malha externa do problema em análise, no programa computacional MEC3DE [28], que serviu como base para a nossa implementação. É interessante notar que todo o lado l_1 do elemento quadrangular é mapeado para o nó 1 do elemento triangular, de forma que a transformação não é biunívoca.

Assim, os elementos triangulares foram capazes de gerar a solução complementar da função de Green com precisão equivalente à alcançada pelos elementos quadrangulares, mas os fatores de intensidade de tensões foram sistematicamente melhor aproximados por estes últimos. Como a degeneração dos resultados se dá mais acentuadamente nas proximidades do nó 1 do elemento triangular, acreditamos que ela seja decorrência da transformação adicional envolvida, que é mais atuante nesta região do elemento. Um processo de interpolação funcional específico para os elementos triangulares deve contornar este problema. Por este motivo, os elementos quadrangulares foram usados em todos os exemplos numéricos apresentados.

4.3 - Regularização por elementos tangentes

Nesta seção será mostrado como a integral de parte finita de Hadamard na equação (4.1), que apresenta singularidade de $1/\rho^3$ no ponto $\bar{\zeta}$, pode ser avaliada tendo como base o método de integração de Gauss, com o emprego de um processo de regularização.

Esta equação, resolvida pelo método dos resíduos ponderados, como indicado no Capítulo 3, leva à seguinte equação:

$$\oint_{\Gamma^I} P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m,\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) = -p_{ij}^K(\xi,\bar{\zeta}_m), \quad m = 1,\cdots,M \tag{4.12}$$

Para a avaliação numérica desta integral, a superfície Γ^I da fissura será aproximada geometricamente pelo elemento quadrangular, representado na Figura 4.1. A integração sobre este elemento será efetuada num sistema de coordenadas polares, com centro no ponto singular $\bar{\zeta}_m$. Assim, o elemento quadrangular se subdivide em outros quatro triangulares, e as novas variáveis de integração passam a ser ρ e θ representados na Figura 4.3, abaixo:

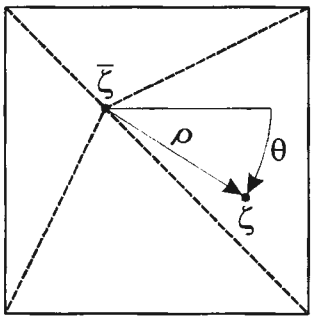

Figura 4.3
Sistema de coordenadas polares com centro no ponto singular.

No novo sistema de coordenadas, a integral na equação (4.12) se mostra regular na direção angular e tem sua singularidade reduzida em uma unidade na direção radial pela introdução do termo ρ no seu integrando, uma decorrência da mudança do diferencial de área. Assim, a equação acima pode ser reescrita numericamente da seguinte forma:

$$\sum_{\Delta}\left\{|J|_{\theta}\sum_{\theta}\sum_{\rho}|J|_{\zeta_{\theta\rho}} P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m,\zeta_{\theta\rho})c_{ik}(\xi,\zeta_{\theta\rho})\rho W_{\theta}W_{\rho} - E_{ij}(\bar{\zeta}_m)\right\} = -p_{ij}^K(\xi,\bar{\zeta}_m), \quad m = 1,\cdots,M \tag{4.13}$$

onde o primeiro somatório é efetuado sobre os subelementos triangulares, acima mencionados, θ e ρ são, respectivamente, as variáveis de integração angular e radial, $|J|_{\zeta_{\theta\rho}}$ e $|J|_{\theta}$ são os jacobianos, introduzidos pelo mapeamento e subdivisão de Γ^{I}, no ponto de integração $\zeta_{\theta\rho}$, e W_{θ} e W_{ρ} são os pesos associados a este ponto.

O termo corretor $E_{ij}(\bar{\zeta}_m)$ é introduzido pelo processo de regularização empregado, cuja principal etapa é a expansão das aberturas da fissura em série de Taylor, ao redor do ponto singular:

$$c_{ik}(\xi,\zeta)=c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)+(\eta_1-\bar{\eta}_1)\frac{\partial c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)}{\partial\bar{\eta}_1}+(\eta_2-\bar{\eta}_2)\frac{\partial c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)}{\partial\bar{\eta}_2}+\cdots \tag{4.14}$$

onde η_1 e η_2 são as coordenadas naturais do ponto ζ e $\bar{\eta}_1$ e $\bar{\eta}_2$ são as coordenadas naturais do ponto singular $\bar{\zeta}_m$.

Somente os três primeiros termos desta série necessitam tratamento especial, sendo, os demais, regulares [20]. Assim, o termo $E_{ij}(\bar{\zeta}_m)$ pode ser expresso da seguinte maneira:

$$E_{ij}(\bar{\zeta}_m)=c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)e^{(1)}_{jk}(\bar{\zeta}_m)+\frac{\partial c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)}{\partial\bar{\eta}_1}e^{(2)}_{jk}(\bar{\zeta}_m)+\frac{\partial c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)}{\partial\bar{\eta}_2}e^{(3)}_{jk}(\bar{\zeta}_m) \tag{4.15}$$

sendo que as derivadas das aberturas da fissura podem ser obtidas a partir da equação (4.2) ou (4.3). Os termos $e^{(i)}_{jk}(\bar{\zeta}_m)$ podem ser computados pelas expressões abaixo:

$$\begin{aligned} e^{(1)}_{jk}(\bar{\zeta}_m)=&-\left\{\left[\int_{\Gamma}P^{K}_{jk}(\bar{\zeta}_m,\zeta)d\Gamma(\zeta)-\int_{\gamma}P^{K}_{jk}(\bar{\zeta}_m,\zeta')d\gamma(\zeta')\right]+\int_{\gamma}P^{K}_{jk}(\bar{\zeta}_m,\zeta')d\gamma(\zeta')\right\} \\ &+\int_{\Gamma}P^{K}_{jk}(\bar{\zeta}_m,\zeta)d\Gamma(\zeta) \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$e_{jk}^{(2)}(\bar{\zeta}_m) = -\left\{\left[\int_\Gamma (\eta_1 - \bar{\eta}_1) P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta) d\Gamma(\zeta) - \int_\gamma (\eta_1 - \bar{\eta}_1) P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta') d\gamma(\zeta')\right]\right.$$

$$\left. + \int_\gamma (\eta_1 - \bar{\eta}_1) P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta') d\gamma(\zeta')\right\} + \int_\Gamma (\eta_1 - \bar{\eta}_1) P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta) d\Gamma(\zeta) \tag{4.17}$$

$$e_{jk}^{(3)}(\bar{\zeta}_m) = -\left\{\left[\int_\Gamma (\eta_2 - \bar{\eta}_2) P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta) d\Gamma(\zeta) - \int_\gamma (\eta_2 - \bar{\eta}_2) P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta') d\gamma(\zeta')\right]\right.$$

$$\left. + \int_\gamma (\eta_2 - \bar{\eta}_2) P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta') d\gamma(\zeta')\right\} + \int_\Gamma (\eta_2 - \bar{\eta}_2) P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta) d\Gamma(\zeta) \tag{4.18}$$

As últimas integrais em cada uma das expressões anteriores produzem um erro de integração, quando integradas numericamente pelo método de Gauss. Os valores corretos destas integrais são computados pelos termos entre chaves, de modo que $e_{jk}^{(i)}(\bar{\zeta}_m)$ representam os erros de integração referentes aos três primeiros termos da série de Taylor na equação (4.14). Nestas expressões, γ representa um elemento plano em forma de paralelogramo, tangente ao elemento de fissura no ponto singular. Este elemento contém os pontos ζ' e é definido pela expressão abaixo:

$$\gamma(\eta_1, \eta_2) = \Gamma(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) + (\eta_1 - \bar{\eta}_1)\frac{\partial\Gamma(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)}{\partial\bar{\eta}_1} + (\eta_2 - \bar{\eta}_2)\frac{\partial\Gamma(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)}{\partial\bar{\eta}_2} \tag{4.19}$$

Individualmente, cada um dos integrandos da equação (4.16) têm singularidade de ordem $1/\rho^2$, uma vez que P_{ij}^K tem singularidade de ordem $1/\rho^3$ e a passagem das integrais para coordenadas polares introduz o termo ρ, nos integrandos, reduzindo o grau da singularidade em uma unidade $\left(P_{ij}^K = O(1/\rho^3)\right.$ e $\left.d\Gamma = d\gamma = O(\rho)\right)$. O termo entre colchetes representa a diferença de duas integrais com o mesmo integrando, uma sobre o elemento de fissura real e outra sobre o seu elemento tangente. Como estes dois elementos se tangenciam no ponto singular, as singularidades envolvidas são reduzidas novamente em uma unidade, desde que ambas as integrações sejam efetuadas

sobre o mesmo elemento mapeado nas coordenadas naturais η_1 and η_2. Desta maneira, o termo entre colchetes apresenta uma singularidade radial de ordem $1/\rho$ e pode ser integrado por um processo numérico para integrais de partes finitas, conjugado com um método padrão para integração angular. Esta técnica foi devidamente discutida por Silveira, Guimarães e Telles [34] no contexto bidimensional. Neste trabalho o processo de integração gaussiana de Kutt [31] foi empregado para a integração radial. Este processo de integração vem sendo utilizado no programa base da corrente implementação, nas integrais singulares do contorno do problema, que apresentam a mesma ordem de singularidade. A última integral entre chaves é calculada analiticamente.

Devido à introdução dos termos $(\eta_1 - \overline{\eta}_1)$ e $(\eta_2 - \overline{\eta}_2)$, as integrais entre colchetes nas equações (4.17) e (4.18) apresentam singularidade reduzida e podem ser avaliadas numericamente pelo método de Gauss em ambas as direções. Como na equação (4.16), as últimas integrais entre chaves são calculadas analiticamente.

Se as aberturas da fissura são tomadas como incógnitas num número M de pontos, o que implica em A B = M na equação (4.2) ou (4.3), a expressão (4.13), conduz ao já conhecido sistema de equações para o cálculo das aberturas da fissura:

$$\mathbf{S}\,\mathbf{c}_i(\xi) = \mathbf{p}_i(\xi) \tag{4.20}$$

onde as aberturas da fissura incógnitas são representadas pelos termos $c_{ik}\left(\xi, \zeta\left(\eta_1^a, \eta_2^b\right)\right)$ das equações (4.2) e (4.3).

Vale lembrar que a equação (4.20) representa três sistemas de 3M equações, cujas matrizes de coeficientes são idênticas e independentes da posição do ponto fonte considerado. Após a solução destes sistemas de equações, a função de Green pode ser obtida pelas integrações numéricas indicadas nas expressões (3.15) e (3.16).

4.4 - Integração de Kutt

O processo de integração de Kutt [31] utiliza abscissas e pesos de integração específicos para a ordem de singularidade de uma dada integral e apresenta teoricamente o mesmo nível de precisão do método convencional de Gauss, sendo capaz

de integrar exatamente uma função cuja parte regular seja um polinômio de grau máximo 2 m - 1, sendo m o número de pontos de integração considerados. Para o caso em que λ é um inteiro e $r > s$, sendo s o ponto singular, a integral de uma função genérica é aproximada da seguinte maneira:

$$\fint_s^r \frac{f(x)}{(x-s)^{\lambda}} dx = (r-s)^{1-\lambda} \sum_{i=1}^{N} f(s + x_i(r-s))W_i + f^{(\lambda-1)}(s)\frac{\ln|r-s|}{(\lambda-1)!} \tag{4.21}$$

sendo f(x) a parte regular do integrando

Pela fórmula acima verifica-se que a função integrada deve ser derivada e avaliada no seu ponto de singularidade, por meio de limites, o que representa uma dificuldade considerável. Entretanto, será mostrado que estes limites podem ser facilmente avaliados sobre os mesmos elementos tangentes usados na seção anterior.

Esta técnica de integração será aplicada à equação:

$$\fint_{\Gamma^I} P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta) c_{ik}(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta) = -p_{ij}^K(\xi, \bar{\zeta}_m), \quad m = 1, \cdots, M \tag{4.22}$$

Esta integral, reescrita no elemento mapeado quadrangular, toma a seguinte forma:

$$\fint_{-1}^{1} \fint_{-1}^{1} P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta_{\eta_1\eta_2}) c_{ik}(\xi, \zeta_{\eta_1\eta_2}) |J|_{\zeta_{\eta_1\eta_2}} d\eta_2 d\eta_1 = -p_{ij}^K(\xi, \bar{\zeta}_m), \quad m = 1, \cdots, M \tag{4.23}$$

onde $|J|_{\zeta_{\eta_1\eta_2}}$ é o Jacobiano da transformação de coordenadas envolvida, num ponto ζ de coordenadas naturais η_1 e η_2.

Em coordenadas polares esta equação pode ser reescrita da seguinte forma, considerando o ponto $\bar{\zeta}_m$ como a origem do sistema de coordenadas polares, como na Figura 4.3:

$$\sum_{\Delta} |J|_{\theta} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \fint_0^{\rho_{max}} P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta_{\theta\rho}) c_{ik}(\xi, \zeta_{\theta\rho}) |J|_{\zeta_{\theta\rho}} \rho \, d\rho \, d\theta = -p_{ij}^K(\xi, \bar{\zeta}_m), \quad m = 1, \cdots, M \tag{4.24}$$

Observa-se que a integral angular continua sendo regular e o processo de integração de Kutt deve ser aplicado apenas à integral radial. O ponto singular desta integral passa a ser o 0 da variável radial ρ, enquanto seu limite superior passa a ser ρ_{max}, o maior valor de ρ para um determinado ângulo θ. Escrita desta forma, verificamos que a ordem de singularidade da integral é de $1/r^2$, ou ρ/r^3. Para que o integrando possa ser representado como na equação (4.21) ele será multiplicado por ρ^2/ρ^2. Assim, reescrevendo-se a integral polar da maneira descrita pela equação (4.21), chega-se finalmente a:

$$\sum_{\Delta}\left\{|J|_{\theta}\sum_{\theta}\left[\frac{1}{\rho_{max}}\sum_{\rho}P_{jk}^{K}(\bar{\zeta}_m,\zeta_{\theta\rho})c_{ik}(\xi,\zeta_{\theta\rho})|J|_{\zeta_{\theta\rho}}\rho^3 W_n + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(P_{jk}^{K}(\bar{\zeta}_m,\zeta_{\theta\rho})c_{ik}(\xi,\zeta_{\theta\rho})|J|_{\zeta_{\theta\rho}}\rho^3\right)\Big|_{\rho=0}\ln|\rho_{max}|\right]W_{\theta}\right\}= \tag{4.25}$$

$$=-p_{ij}^{K}(\xi,\bar{\zeta}_m),\quad m=1,\cdots,M$$

onde os números de pontos de integração usados nas integrais radial e angular foram omitidos, para simplificar a notação.

Esta fórmula dá origem ao sistema de equações definido na expressão (4.20), desde que as aberturas da fissura sejam tomadas como incógnitas num número M de pontos. Como antes, esta condição implica em A B = M na equação (4.2) ou (4.3).

Na implementação desta técnica de integração, a derivada da parte regular do integrando, definida por:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(P_{jk}^{K}(\bar{\zeta}_m,\zeta_{\theta\rho})c_{ik}(\xi,\zeta_{\theta\rho})|J|_{\zeta_{\theta\rho}}\rho^3\right) \tag{4.26}$$

foi, a princípio, avaliada numericamente, nas proximidades do ponto $\rho = 0$. Este procedimento deu bons resultados, praticamente indistinguíveis daqueles obtidos pela técnica dos elementos tangentes. Ainda assim, na tentativa de se superar os resultados

até então obtidos, este termo foi expandido pela regra de Leibniz para a diferenciação de produtos, da seguinte maneira:

$$\frac{\partial P_{jk}^{K}\left(\bar{\zeta}_m,\zeta_{\theta\rho}\right)}{\partial\rho}c_{ik}\left(\xi,\zeta_{\theta\rho}\right)\left|J\right|_{\zeta_{\theta\rho}}\rho^3+P_{jk}^{K}\left(\bar{\zeta}_m,\zeta_{\theta\rho}\right)\frac{\partial c_{ik}\left(\xi,\zeta_{\theta\rho}\right)}{\partial\rho}\left|J\right|_{\zeta_{\theta\rho}}\rho^3+$$

$$+P_{jk}^{K}\left(\bar{\zeta}_m,\zeta_{\theta\rho}\right)c_{ik}\left(\xi,\zeta_{\theta\rho}\right)\frac{\partial\left|J\right|_{\zeta_{\theta\rho}}}{\partial\rho}\rho^3+3P_{jk}^{K}\left(\bar{\zeta}_m,\zeta_{\theta\rho}\right)c_{ik}\left(\xi,\zeta_{\theta\rho}\right)\left|J\right|_{\zeta_{\theta\rho}}\rho^2 \tag{4.27}$$

Em seguida, com exceção do primeiro, cada termo da expressão acima foi avaliado analiticamente. O primeiro passo para a diferenciação analítica do termo $P_{jk}^{K}\left(\bar{\zeta}_m,\zeta_{\theta\rho}\right)$ em relação a ρ, que continua sendo feita numericamente, seria sua diferenciação em relação às coordenadas globais do ponto campo:

$$P_{ij,k}\left(\xi,x\right)=\frac{3G}{4\pi(1-\nu)r^4}\left\{\left[-\nu\delta_{ij}n_k-\nu\delta_{jk}n_i+5n_kr_{,i}r_{,j}+5\nu n_ir_{,j}r_{,k}-(1-2\nu)\right.\right.$$

$$\left.\left(\delta_{ik}n_j-5n_jr_{,i}r_{,k}\right)+5\left(\delta_{jk}r_{,i}+\delta_{ik}r_{,j}+\nu\delta_{ij}r_{,k}-7r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right)\frac{\partial r}{\partial n}\right]\frac{\partial r}{\partial m}$$

$$+\left[\nu\delta_{ij}m_k+\nu\delta_{ik}m_j-5m_kr_{,i}r_{,j}-5\nu m_jr_{,i}r_{,k}+(1-2\nu)\left(\delta_{jk}m_i-5m_ir_{,j}r_{,k}\right)\right] \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial r}{\partial n}+\left[\nu\delta_{jk}r_{,i}+\nu\delta_{ik}r_{,j}-(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k}-5\nu r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]m_ln_l+(1-2\nu)$$

$$\left.\left(m_kn_jr_{,i}+m_in_kr_{,j}-m_jn_ir_{,k}\right)+(1-4\nu)m_in_jr_{,k}+\nu m_jn_kr_{,i}+\nu m_kn_ir_{,j}\right\}$$

A partir da expressão anterior, a derivada de $P_{jk}^{K}\left(\bar{\zeta}_m,\zeta_{\theta\rho}\right)$ em relação a ρ pode ser obtida sem maiores dificuldades, pela regra da cadeia. Os termos diferenciados analiticamente deveriam ser avaliados no ponto de singularidade, o que envolveria um complexo cálculo de limites. Isto pode ser evitado se estes termos forem avaliados sobre o mesmo elemento tangente definido pela equação (4.19). Como este elemento apresenta em toda a sua superfície as mesmas características do elemento verdadeiro no ponto singular, os valores corretos dos limites podem ser obtidos mesmo em pontos

distantes do ponto de singularidade. Este procedimento pode ser implementado facilmente e não introduz nenhuma aproximação nos resultados obtidos.

Vale ainda lembrar que o primeiro par de abscissas e pesos de Kutt para integrações com singularidade de ordem $1/\rho^2$ ($\lambda = 2$) são complexos. Por esse motivo, o método exige uma implementação mais bem elaborada. As abscissas e pesos complexos e reais devem ser tratados separadamente, para uma boa performance computacional da técnica de integração.

4.5 - Integração com pesos específicos

A técnica de integração com pesos específicos usada vem sendo desenvolvida na PUC do Rio de Janeiro por diversos pesquisadores, sob a orientação do Prof. Ney Augusto Dumont. O trabalho que marca formalmente a origem desta linha de pesquisa foi publicado em 1992 por Dumont e Sousa [32], sendo, portanto, bastante recente. Por isso, acreditamos que a técnica tenha sido pouco implementada computacionalmente com o Método dos Elementos de Contorno e que tenhamos sido, de certa forma, pioneiros na sua utilização. O trabalho em que o nosso se baseou foi a tese de doutorado de Noronha [33], em uma versão preliminar.

Será apresentada a seguir apenas a fórmula que define o uso prático do método no caso específico de integrais bidimensionais. As deduções do método e os processos computacionais para obtenção dos pesos específicos são bastante complexos, a meu ver, para serem reapresentados aqui e estão descritos na referência dada acima.

No caso em estudo, a singularidade de $1/r^3$ é introduzida na integral bidimensional pelo tensor hipersingular P_{ij}^K. Uma vez obtidos os pesos específicos para esta função de singularidade, o uso desta técnica de integração é semelhante ao da técnica de Gauss, desde que o ponto singular não pertença ao domínio de integração ou desde que não haja normalização do intervalo de integração:

$$\int_0^1 \int_0^1 \omega\, g\, d\xi\, d\eta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(\xi_i, \eta_j) h_{ij} \tag{4.29}$$

onde $\omega(\xi,\eta)$ e $g(\xi,\eta)$ representam respectivamente as parcelas singular e regular da integral e h_{ij} são os pesos específicos para a função de singularidade $\omega(\xi,\eta)$ e para o ponto específico onde ocorre esta singularidade. As abscissas ξ_i e η_j são coincidentes com as abscissas de integração de Gauss, para regras de integração de m e n pontos, respectivamente. A parcela regular do integrando é aproximada por um polinômio de grau m - 1, na direção de ξ, multiplicado por outro polinômio de grau n - 1, na direção de η.

Quando o integrando apresenta singularidade no domínio de integração e este domínio tem que ser normalizado ou mapeado para um quadrado de lado unitário, a equação (4.29) carece de um termo de normalização, semelhante ao termo logarítmico da integral de Kutt, na equação (4.21). Este termo não foi apresentado na referência citada. Como nossas tentativas de obtê-lo através de uma integração polar ao redor do ponto singular, da mesma forma em que ele é obtido quando se usa a técnica de integração de Kutt, foram frustadas, a implementação que desenvolvemos é válida, até o momento, somente para problemas envolvendo fissuras quadradas.

Outro detalhe não discutido nas referências citadas é o fato de que a parte regular das funções normalmente integradas no Método dos Elementos de Contorno são descontínuas no ponto singular, devido à presença dos termos $r_{,i}$. Como este processo de integração é baseado em expansões polinomiais da parte regular do integrando e polinômios não são capazes de representar adequadamente estas descontinuidades, estas integrais singulares devem ser subdivididas nos seus pontos de singularidade. Por outro lado, estas integrais subdivididas têm o ponto singular sempre num de seus vértices e isso pode dispensar uma reavaliação dos pesos específicos para cada uma das integrais geradas pela subdivisão.

De modo geral a técnica se mostrou bastante precisa e computacionalmente econômica, pelo menos quando comparada com a primeira implementação apresentada, que faz uso de elementos tangentes. Vale lembrar que esta última é bastante geral, válida inclusive para fissuras curvas.

4.6 - Quase-singularidades introduzidas pelas aberturas da fissura

Para a obtenção da FGN é necessário o conhecimento prévio da solução de um problema de região infinita, contendo uma fissura, geometricamente igual ou contendo a fissura do problema real a ser resolvido, sob a ação de uma carga pontual unitária. Esse é o chamado problema complementar [20], e sua solução está discutida nas seções anteriores, onde foram apresentados processos capazes de superar as dificuldades inerentes à singularidade do tensor hipersingular P_{ij}^{K} presente na equação:

$$\oint_{\Gamma^{I}} P_{jk}^{K}(\bar{\zeta},\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)d\Gamma(\zeta) = -p_{ij}^{K}(\xi,\bar{\zeta}) \tag{4.30}$$

Nesta equação, c_{ij} representa as aberturas da fissura devido à ação de uma carga pontual unitária no ponto ξ, sendo normalmente uma função bem comportada. Entretanto, ela cresce à razão de 1/r, com a aproximação do ponto ξ à superfície Γ^{I} e, dependendo das características geométricas do problema e do ponto fonte considerado, também pode provocar uma grande deterioração no resultado da integral numérica.

Nesta seção são discutidos os meios pelos quais são tratadas estas eventuais quase-singularidades, introduzidas pela função c_{ij}. Foram usadas duas técnicas, ambas bem estabelecidas e sedimentadas: a subdivisão do domínio de integração e a transformação polinomial cúbica de coordenadas, desenvolvida por Telles [35]. A técnica de integração com pesos específicos, discutida na seção anterior, deve se aplicar bem a este caso e ainda deverá ser experimentada. São apresentados como exemplos o cálculo de aberturas de fissuras para alguns problemas específicos, que permitem a observação dos resultados normalmente obtidos e a melhora destes resultados com a adição de alguma técnica para o tratamento da quase-singularidade. As fissuras têm sempre raio unitário e o material tem módulo de cisalhamento também unitário e coeficiente de Poisson nulo. A interpolação das aberturas das fissuras são sempre feitas pela equação (4.3), com os termos R_i e S_i dados pelas expressões (4.4) a (4.7), de modo que as aberturas têm o comportamento de raiz de ρ em todo o perímetro das fissuras.

4.6.1 - Abertura de fissura sujeita a pressão interna uniforme

O cálculo da abertura de fissura sujeita a pressão interna em meio infinito é o caso mais simples com que se pode deparar. Ele pode ser efetuado diretamente pelo sistema de equações (4.20), sem a necessidade de discretização do contorno infinito, bastando que se atribua ao vetor de termos independentes o valor correspondente à pressão interna aplicada à fissura. Este problema é apresentado para que o leitor tenha uma primeira idéia da precisão obtida pela FGN. O problema tem solução analítica, dada pela expressão:

$$c = \frac{4a(1-\nu)\sigma}{\pi G}\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}} \tag{4.31}$$

onde a é o raio da fissura, σ é a pressão interna aplicada e r é a distância do ponto considerado ao centro da fissura. A resposta obtida pela FGN para $A = B = 12$ é mostrada na Figura 4.4.

Figura 4.4
Abertura de fissura sujeita a pressão interna uniforme em meio infinito.

Na Figura 4.5 a abertura da fissura calculada numericamente é mostrada, juntamente com a resposta analítica, ao longo de um raio da fissura. Observa-se a quase coincidência das duas soluções.

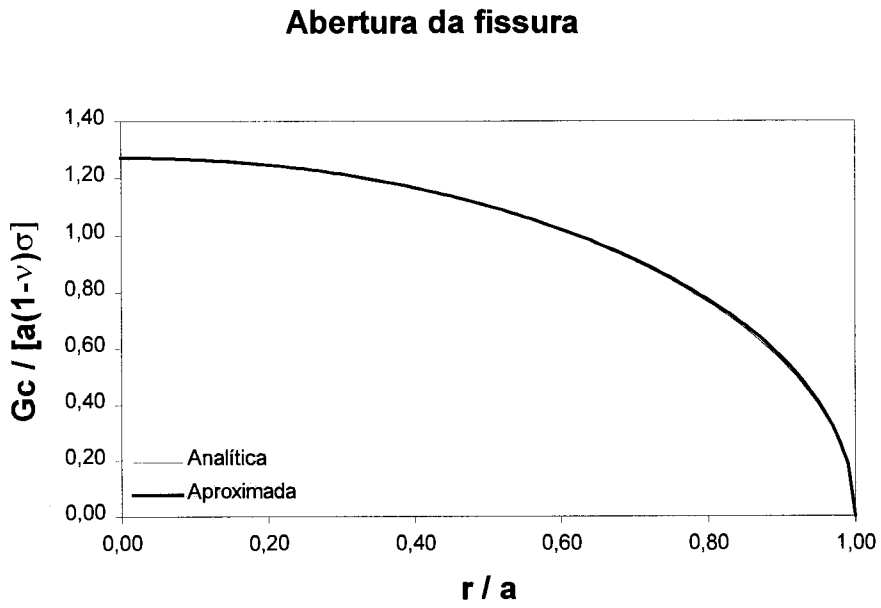

Figura 4.5
Abertura de fissura sujeita a pressão interna uniforme em meio infinito.

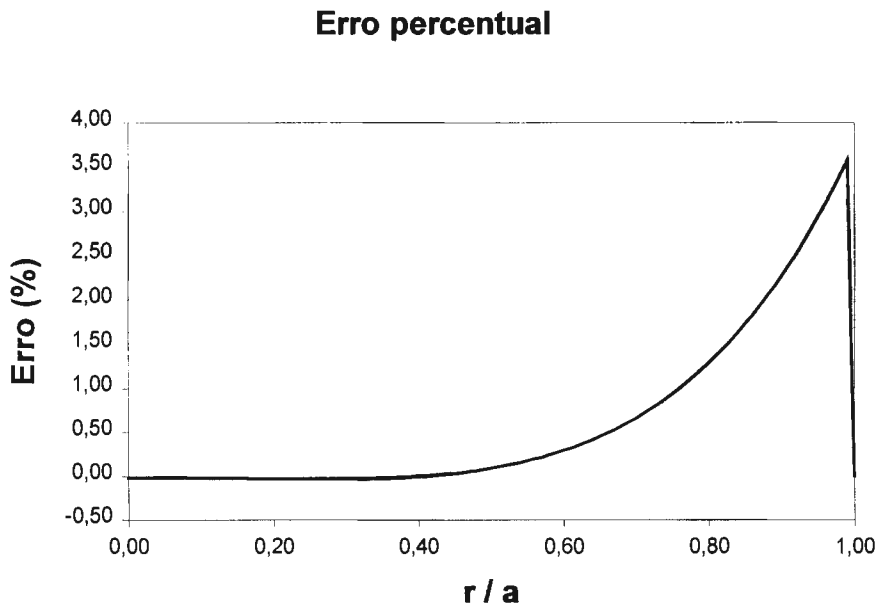

Figura 4.6
Erro no cálculo da abertura da fissura em relação ao resultado analítico.

Os erros percentuais apresentados na Figura 4.6, embora ultrapassem a casa dos 3%, são pouco significativos por ocorrerem numa região em que as aberturas da fissura tendem a zero, contribuindo pouco na integração da função de Green. Nos casos em que se procura a resposta em termos de fatores de intensidade de tensões, a resposta obtida pela FGN pode ser melhorada tanto pelo aumento do grau da interpolação funcional na fissura, quanto pelo aumento do número de pontos de integração durante a geração da matriz **S**.

4.6.2 - Abertura de fissura devido à ação de um ponto fonte

O cálculo da abertura de fissura em meio infinito devido à ação de um ponto fonte também pode ser efetuado diretamente pelo sistema de equações (4.20), sem a necessidade de discretização do contorno infinito, mas neste caso o vetor de termos independentes deve obedecer à distribuição de forças de superfície dadas pela solução fundamental de Kelvin, na equação (2.22).

Nos três problemas que se seguem, as fissuras estão contidas no plano XY e as coordenadas Z dos pontos fontes são iguais a 0,20. As suas coordenadas X e Y foram

ajustadas para que a projeção normal do ponto fonte sobre a fissura coincida com o ponto, no elemento mapeado, de coordenadas naturais $\eta_1 = 0{,}20$ e $\eta_2 = 0{,}30$. Posicionado desta maneira, o ponto fonte induz um mau comportamento nas aberturas das fissuras que precisa ser levado em consideração. Os cortes apresentados são feitos, no elemento mapeado, ao longo de uma reta com η_2 constante, passando pelo ponto de projeção do ponto fonte no elemento mapeado.

As aberturas das fissuras, mostradas nas figuras, são sempre medidas na direção Z do sistema de coordenadas, e são decorrência da aplicação da carga unitária nesta mesma direção. Os erros apresentados são relativos a um resultado de referência, obtido pelo processo de integração com transformação cúbica de coordenadas, com A = B = 16.

4.6.2.1 - Integração sem tratamento da quase-singularidade

Neste caso, a equação (4.1) foi integrada sem qualquer cuidado com a proximidade do ponto fonte. Como a sua distância à superfície da fissura é relativamente pequena, a abertura da fissura tem um comportamento quase singular e o resultado obtido fica bem distante do resultado de referência, mesmo com o uso de uma interpolação de grau elevado para a abertura da fissura. O resultado mostrado na Figura 4.7 foi obtido para A = B = 16.

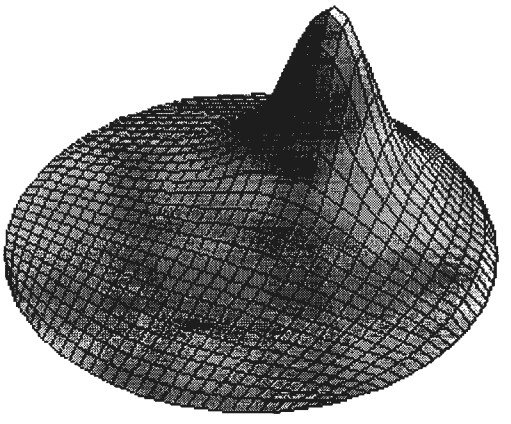

Figura 4.7
Abertura calculada sem tratamento da quase-singularidade.

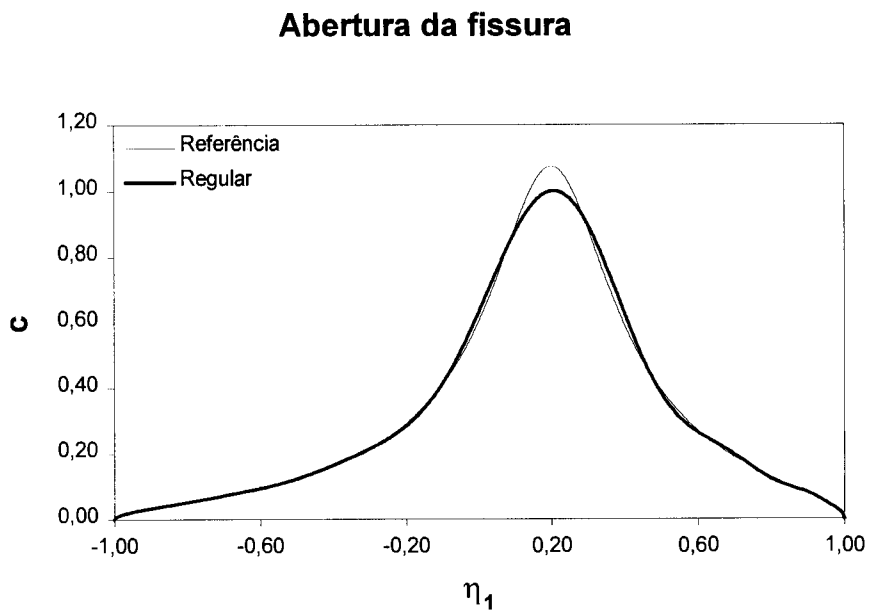

Figura 4.8
Abertura calculada sem tratamento da quase-singularidade.

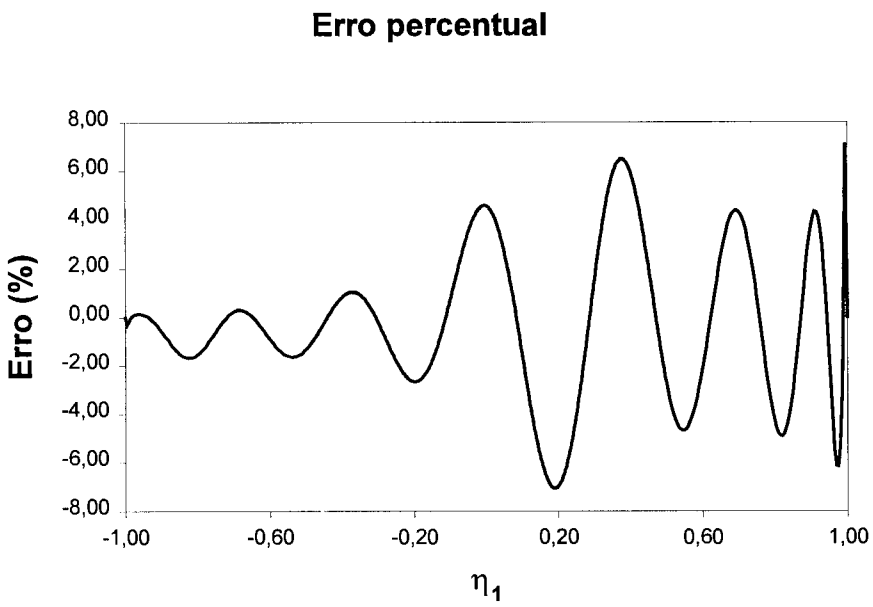

Figura 4.9
Erro no cálculo da abertura da fissura em relação ao resultado de referência.

Contrariamente ao que se verificou no exemplo anterior, os erros obtidos agora são significativos por ocorrerem na região em que a abertura da fissura tende ao seu valor máximo, com grande contribuição na geração da função de Green. Isto justifica o controle dessa quase-singularidade.

4.6.2.2 - Integração com subdivisão de domínio

Neste caso, o comportamento quase singular da abertura da fissura foi tratado com o processo de subdivisão do domínio de integração, usando uma interpolação de grau relativamente baixo para a abertura da fissura de modo geral. Em cada subdomínio gerado é usada uma interpolação de grau cúbico, definida por A = B = 4. O processo de subdivisão é automático e de característica recursiva, atuando do espaço mapeado. Os domínios de integração gerados para esta situação específica podem ser vistos na Figura 4.10, já levados para o espaço real. O resultado, em termos de abertura da fissura, é mostrado nas Figuras 4.11 e 4.12 e apresenta boa concordância com o resultado de referência.

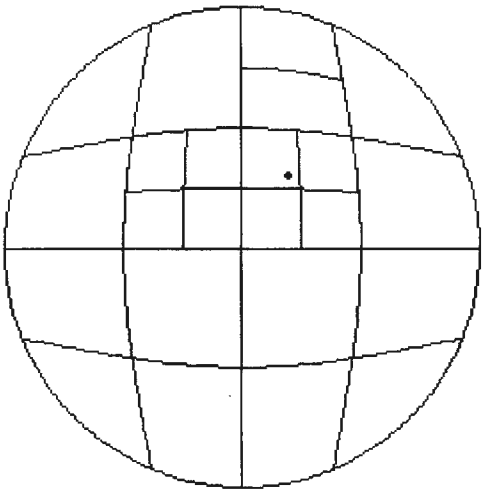

Figura 4.10
Domínios de integração no espaço real e projeção do ponto fonte.

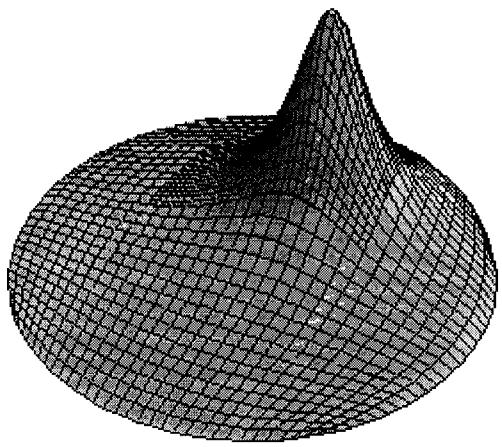

Figura 4.11
Abertura calculada com o uso do processo de subdivisão do domínio de integração.

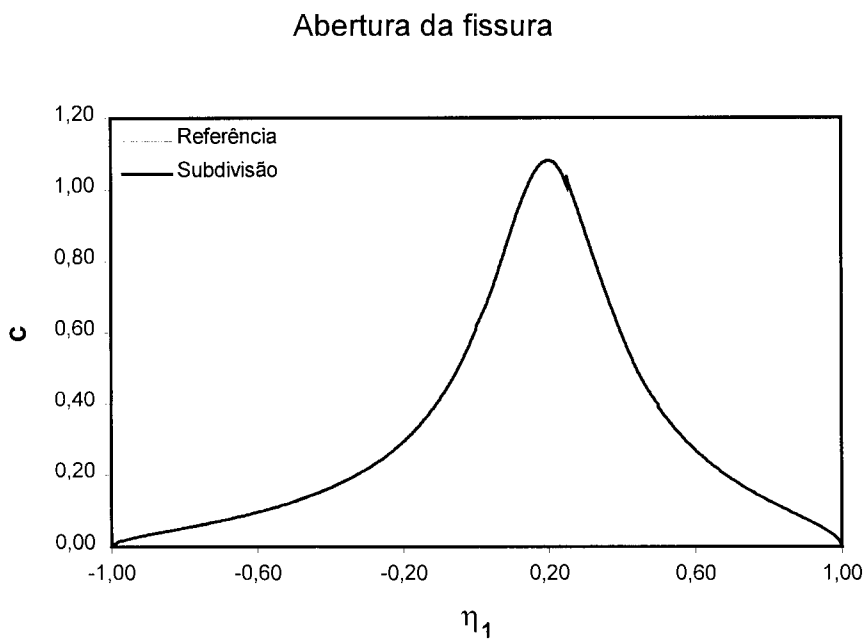

Figura 4.12
Abertura calculada com o uso do processo de subdivisão do domínio de integração.

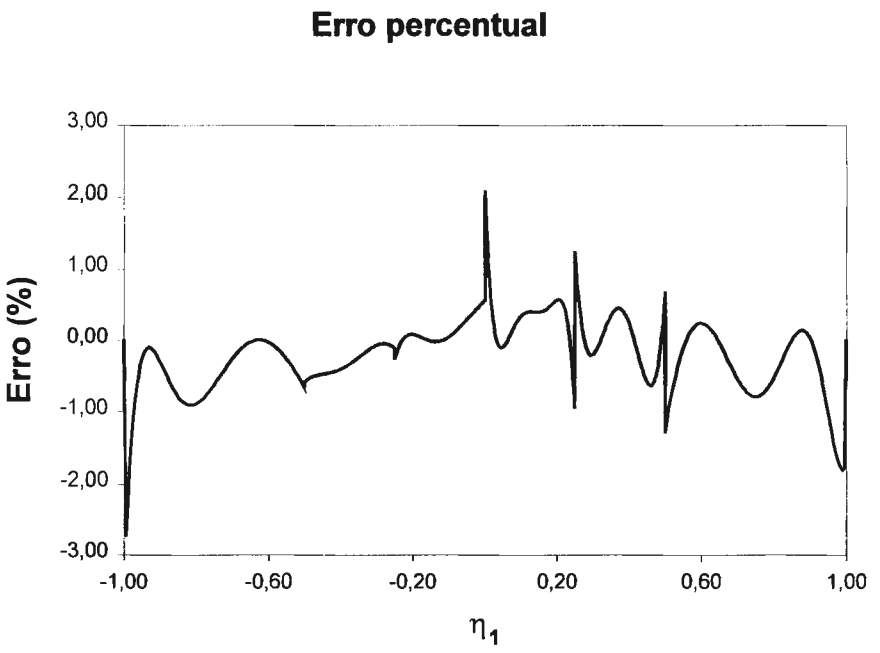

Figura 4.13
Erro no cálculo da abertura da fissura em relação ao resultado de referência.

Na implementação corrente, a subdivisão do domínio de integração só é ativada quando a quase-singularidade é muito severa para ser tratada unicamente pela transformação polinomial cúbica de coordenadas, apresentada a seguir. Nestes casos, o grau da interpolação das aberturas da fissura não é fixo, como no exemplo dado, mas variável de acordo com a proximidade relativa do ponto fonte a cada subdomínio.

4.6.2.3 - Integração com transformação polinomial cúbica de coordenadas

Neste caso, o comportamento quase singular da abertura foi tratado com a transformação polinomial cúbica de coordenadas [35], que desloca os pontos de integração para a região mal comportada do problema. Foram usados doze pontos para a interpolação da abertura da fissura em cada direção, ou seja A = B = 12.

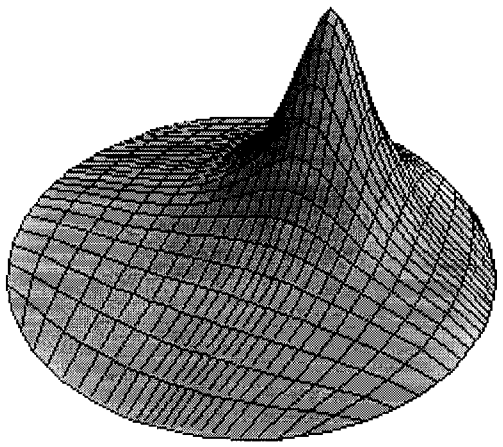

Figura 4.14
Abertura calculada com o uso da transformação polinomial cúbica de coordenadas.

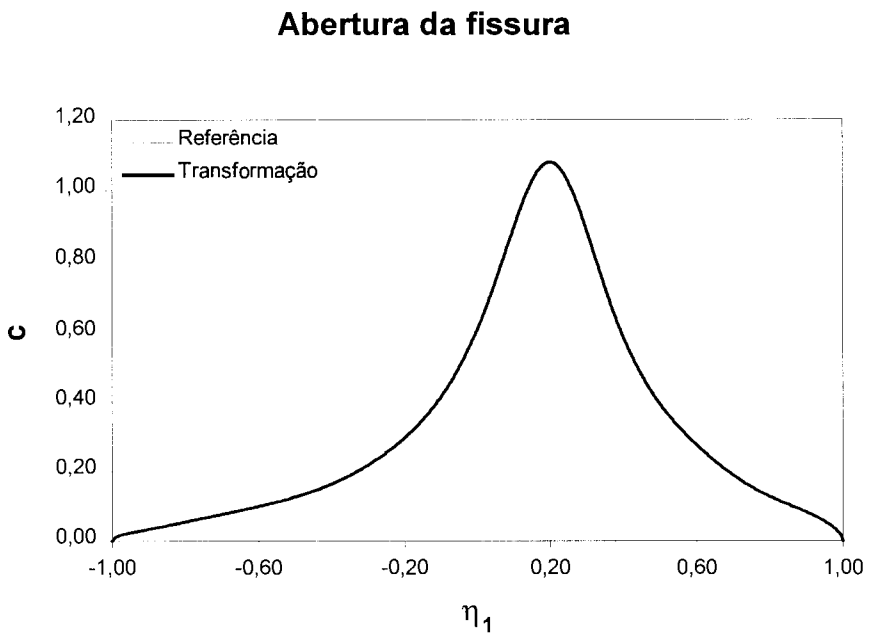

Figura 4.15
Abertura calculada com o uso da transformação polinomial cúbica de coordenadas.

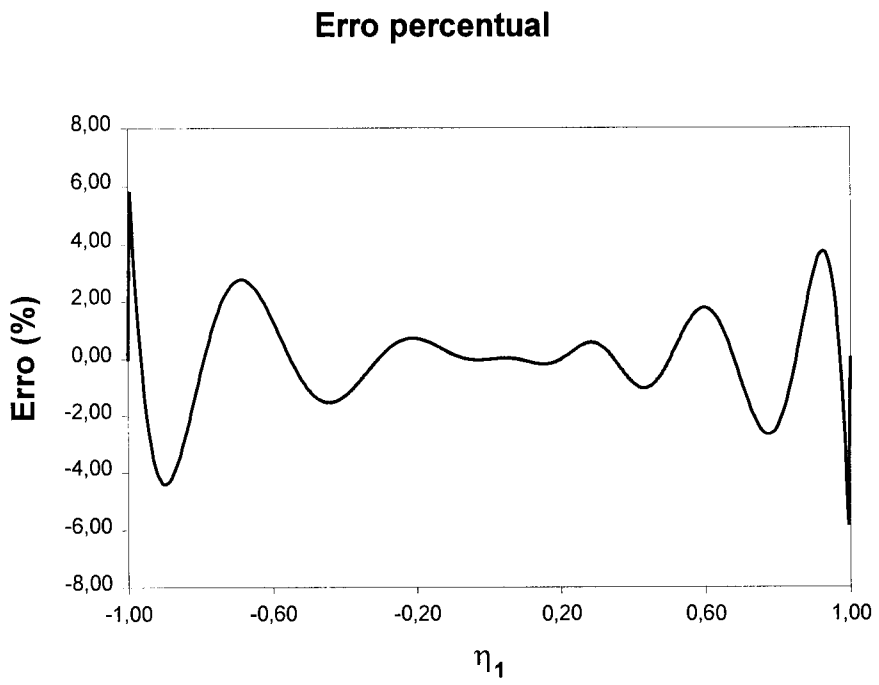

Figura 4.16
Erro no cálculo da abertura da fissura em relação ao resultado de referência.

Pelo gráficos acima, se comprova a quase coincidência das duas soluções, na vizinhança do ponto de máximo da abertura da fissura. Isoladamente, esta é a técnica que apresentou os melhores resultados, sendo usada preferencialmente. Entretanto, quando a quase-singularidade se torna bastante severa, ela deve ser usada em combinação com a técnica da subdivisão do domínio de integração.

4.6.3 - Abertura para um problema de interação entre fissuras

Neste problema, as duas fissuras têm seus centros sobre o eixo X, nas coordenadas X = -1,20 e X = 1,20. O ponto fonte foi colocado nas coordenadas globais X = 2,40, Y = 0 e Z = 2,40. Foi usado o processo de integração usual, sem qualquer preocupação com quase-singularidades. A interpolação funcional em ambas as fissuras obedecem a A = B = 6.

Figura 4.17
Abertura calculada para o problema de in eração entre fissuras.

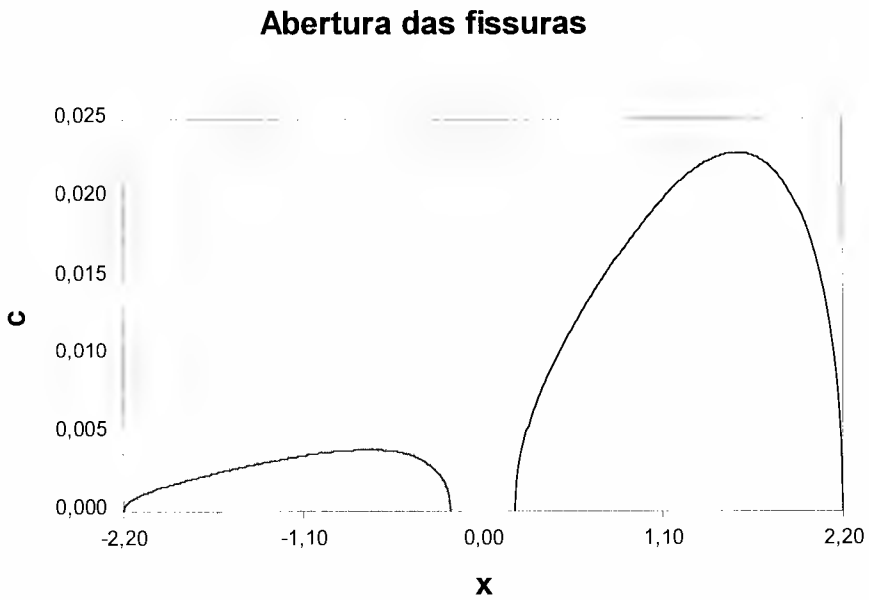

Figura 4.18
Abertura calculada para o problema de interação entre fissuras.

Este exemplo foi incluído por dois motivos principais. O primeiro é que nos exemplos numéricos do próximo capítulo não foi apresentado nenhum problema envolvendo fissuras múltiplas. Com este, embora simples, fica atestada a generalidade da implementação efetuada e, também, para os pesquisadores que seguirem linha de pesquisa semelhante, fica uma base de comparação relativamente difícil de ser encontrada. O segundo é que com a aproximação de duas ou mais fissuras ocorre uma

quase-singularidade nas integrações efetuadas nas fissuras que não contêm o corrente ponto singular $\bar{\zeta}_m$, durante a geração da matriz **S**. Esta quase-singularidade foi estudada e prevista em versões preliminares da nossa implementação da FGN, mas foi eliminada na implementação atual. O motivo foi que o efeito desta quase-singularidade só era notado quando as fissuras se encontravam demasiadamente próximas umas das outras. Em tal situação elas logo se uniriam numa única fissura de maiores dimensões, num problema real. Assim, esta implementação só era justificada para a análise de problemas de propagação de fissuras. Portanto, um futuro usuário desta implementação deve se precaver ao lidar com problemas puramente acadêmicos, envolvendo interação entre fissuras. A solução apresentada acima teve sua convergência verificada, estando seus erros dentro de limites aceitáveis, como as duas anteriores.

4.7 – Quase-singularidades na geração da função de Green numérica

Uma vez calculadas as aberturas da fissura com uma precisão adequada, a função de Green é obtida por integrações numéricas sobre a superfície da fissura. Estas integrações são definidas pelas expressões:

$$u_{ij}^{G}(\xi,x)=u_{ij}^{K}(\xi,x)+\sum_{a=1}^{A}\sum_{b=1}^{B}|J|_{ab}\,p_{jk}^{K}(x,\zeta_{ab})c_{ik}(\xi,\zeta_{ab})W_aW_b \tag{4.32}$$

$$p_{ij}^{G}(\xi,x)=p_{ij}^{K}(\xi,x)+\sum_{a=1}^{A}\sum_{b=1}^{B}|J|_{ab}\,P_{jk}^{K}(x,\zeta_{ab})c_{ik}(\xi,\zeta_{ab})W_aW_b \tag{4.33}$$

Nestas expressões, x representa um ponto no contorno externo do problema a ser resolvido. É o usual ponto campo, mas que toma a função de ponto fonte na integração da parte complementar da FGN.

Em determinados problemas este ponto pode se aproximar da superfície da fissura provocando uma forte quase-singularidade, da ordem dos tensores p_{jk}^{K} e P_{jk}^{K} envolvidos. Isto se dá, em especial, nos problemas de fissura de bordo, nos quais ocorre a interseção dos contornos da fissura e externo. Mesmo com a devida adoção de

elementos de contorno descontínuos na vizinhança da fissura o efeito desta quase-singularidade pode deteriorar o resultado da FGN no ponto campo x.

As soluções adotadas para contornar este problema foram as mesmas usadas na geração de aberturas de fissuras para pontos singulares ξ muito próximos das superfícies das fissuras, ou seja, subdivisão do domínio de integração e transformação polinomial cúbica de coordenadas.

Como estas técnicas podem já ter sido usadas na geração das aberturas das fissuras, ocorre que elas podem ser aplicadas pela segunda vez quando da integração da FGN no contorno externo do problema em estudo. Assim, um elemento de fissura que tenha sido subdividido em domínios de integração, para a geração das suas aberturas, pode ter estes domínios novamente subdivididos para a integração da FGN no contorno externo do problema. Da mesma forma, a transformação polinomial cúbica de coordenadas pode ter sido usada na geração dessas mesmas aberturas e ser novamente aplicada para a integração da FGN no mesmo contorno externo. Num caso específico, pode ocorrer a aplicação simultânea de duas fazes de subdivisão do domínio de integração e duas transformações polinomiais cúbicas de coordenadas, agindo em diferentes pontos de singularidade.

A dupla aplicação da transformação polinomial cúbica de coordenadas nunca foi testada anteriormente e pode parecer contraditória, uma vez que os pontos de integração seriam inicialmente deslocados na direção do primeiro foco de singularidade e depois novamente deslocados na direção do segundo, se afastando do primeiro. Entretanto, a migração dos pontos de integração na direção do foco de singularidade é apenas um dos mecanismos de ação da transformação. Ocorre também a introdução do seu jacobiano, que induz um forte efeito regularizador no integrando, tendendo a um valor mínimo onde este tende a um máximo. Na prática, o uso simultâneo de duas transformações de coordenadas se mostrou adequado, tanto pelo aumento de precisão apresentado quanto por evitar uma transformação inversa quando da aplicação da transformação relativa ao segundo ponto singular, o que envolveria a solução de uma equação cúbica dentro de um dos laços mais internos do programa desenvolvido.

Capítulo 5

Exemplos numéricos

5.1 - Introdução

Nos exemplos que se seguem, a geometria das fissuras foi aproximada por elementos lagrangeanos quárticos, com 25 nós geométricos no seu perímetro e internamente. A subdivisão de elementos não foi aplicada para o cálculo das aberturas das fissuras, contrariamente ao que foi apresentado anteriormente [20] para exemplos numéricos bidimensionais. Entretanto, ela é acionada automaticamente durante a integração da solução complementar nos pontos de integração dos elementos do contorno externo dos problemas, em especial naqueles envolvendo fissuras de bordo. O cálculo das aberturas das fissuras fundamentais, a partir da equação (3.13), para a avaliação da função de Green numérica (FGN) pelas equações (3.15) e (3.16), foi efetuado em um número variável de nós funcionais, de acordo com o comportamento esperado destas aberturas. Este comportamento está intimamente ligado à proximidade relativa do ponto fonte ξ à superfície da fissura. No caso de pontos fonte remotos, a regra de integração de 4 pontos de Gauss é adequada. Para pontos fonte tão próximos da fissura quanto 0,025 d, onde d é o diâmetro máximo da fissura, não necessariamente a fissura real, mas também aquela no meio infinito, a regra de integração de 16 pontos de Gauss é usada em combinação com a transformação de coordenadas auto-adaptável proposta por Telles [35]. Esta combinação é adotada principalmente no caso de problemas de fissura de bordo, onde se têm nós funcionais do contorno externo do problema muito próximos da superfície da fissura, mesmo com a devida adoção de elementos descontínuos na vizinhança da fissura.

As aberturas das fissuras para os problemas reais ou finitos, na equação (3.26), foram interpoladas segundo a equação (4.3), com $A = B = 12$. Buscando melhores resultados, em termos de fatores de intensidade de tensões, o comportamento

de $\sqrt{\rho}$ das funções de interpolação foi ativado sempre que verificado em cada um dos lados dos elementos de fissura, de acordo com o problema a ser resolvido e de maneira a permitir a devida representação da boca da fissura, nos problemas de fissura de bordo.

Calculadas as aberturas das fissuras, os fatores de intensidade de tensões foram avaliados com o emprego das fórmulas de Irwin [30]. Geralmente estas fórmulas foram aplicadas a pontos na segunda fila de pontos de Gauss, mais próxima da frente de fissura. A posição geométrica destes pontos é mostrada na Figura 5.1, para o caso de uma fissura circular.

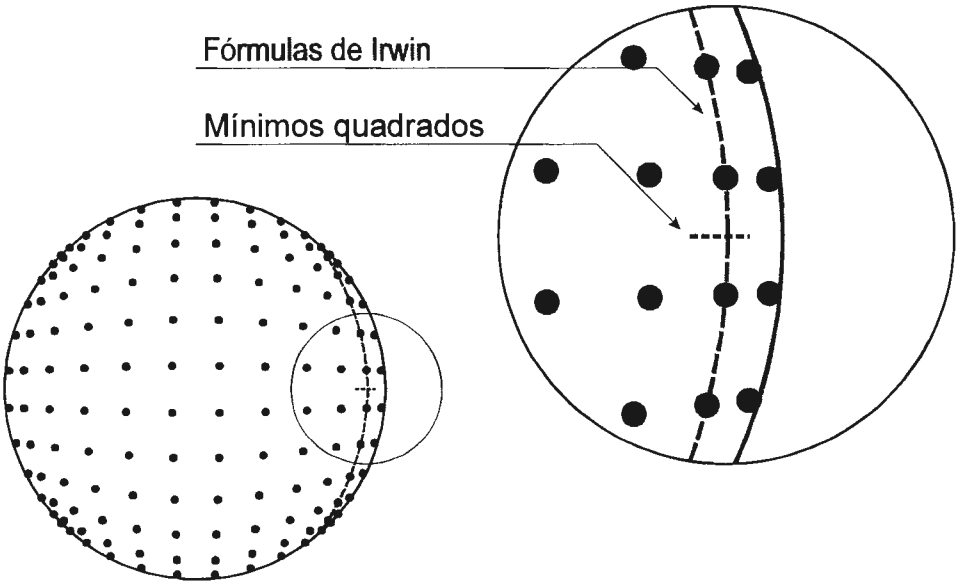

Figura 5.1
Posição geométrica dos pontos para a aplicação das fórmulas de Irwin e de mínimos quadrados.

Em alguns casos, nos quais se demandou um procedimento mais estável e preciso, a seguinte fórmula, deduzida a partir do processo de mínimos quadrados, foi empregada:

$$K = \frac{2G\sqrt{2\pi}\sum_{i=1}^{n} c_i\sqrt{\rho_i}}{4(1-\eta)\sum_{i=1}^{n}\rho_i} \tag{5.1}$$

onde ρ_i é a distância do ponto i à frente de fissura, c_i é a correspondente abertura da fissura e n é o número total de pontos considerados. Esta fórmula é derivada das fórmulas de Irwin e foi aplicada a conjuntos de pontos na vizinhança da segunda fila de pontos de Gauss mais próxima da frente de fissura e localizados sobre uma linha perpendicular a ela, conforme a Figura 5.1. É uma fórmula de uso bastante simples, especialmente nos casos em que a normal à frente de fissura coincide com um dos eixos coordenados intrínsecos do elemento mapeado. Todos os resultados axissimétricos e alguns dos outros resultados apresentados foram obtidos com a aplicação desta fórmula. É importante salientar que processos baseados em energia, como por exemplo a integral J, podem ser aplicados sem restrições.

Os resultados alcançados pela FGN são usualmente comparados com aqueles dados pelo *Compendium of Stress Intensity Factors*, de Rooke e Cartwright [36]. No que se segue, estes resultados são referenciados por CSIF. Alguns resultados foram também comparados com os obtidos por uma implementação axissimétrica de Elementos de Contorno. Neste caso, a discretização dos problemas foi feita unicamente por elementos lineares comuns. Os elementos em contato com as frentes de fissura têm comprimentos iguais a a/10.000, sendo a o raio das fissuras. Os demais crescem de maneira que seus comprimentos obedeçam a uma progressão geométrica de razão próxima da unidade, sendo que os maiores elementos sobre as fissuras têm comprimentos iguais a a/50. Todas as discretizações axissimétricas usadas têm um número de elementos variando entre 1000 e 1200, dependendo do problema. Os resultados em termos de fatores de intensidade de tensões para discretizações bem mais pobres, com cerca da metade do número de elementos, são praticamente idênticos aos apresentados adiante. Estes resultados são referenciados por AXS.

Exceto quando especificado de maneira diferente, todos os resultados apresentados são normalizados por K_0, o fator de intensidade de tensões de uma fissura circular de raio a num meio infinito sujeito a um estado de tensão uniforme, normal à superfície da fissura e de intensidade σ:

$$K_0 = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}} \tag{5.2}$$

No caso de fissuras elípticas, K_0 está relacionado ao seu maior raio.

5.2 - Fissura elíptica em meio infinito

Os problemas de fissura elíptica plana em meio infinito sob estado de tensão uniforme, agindo na direção do eixo Z, e sob cisalhamento uniforme, agindo na direção do eixo X, podem ser resolvidos diretamente pelo sistema de equações (3.14), com o termo independente equivalente à tensão aplicada. Não há a necessidade da discretização do contorno externo do problema. A geometria da fissura elíptica é mostrada na Figura 5.2, sendo o ângulo θ medido na circunferência circunscrita.

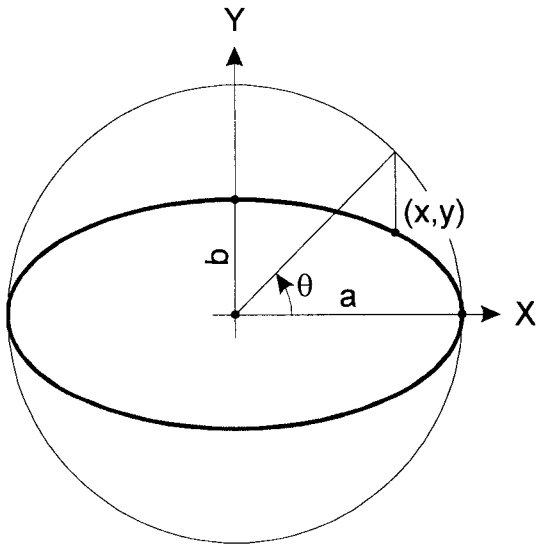

Figura 5.2
Geometria da fissura elíptica.

Os resultados são apresentados nas Figuras 5.3 a 5.5 para os três modos de carregamento. Os resultados analíticos para o modo I são devidos a Kassir and Sih [37], para o caso de tensão uniforme, e para os modos II e III são devidos a Kassir and Sih [38], para o caso de cisalhamento uniforme.

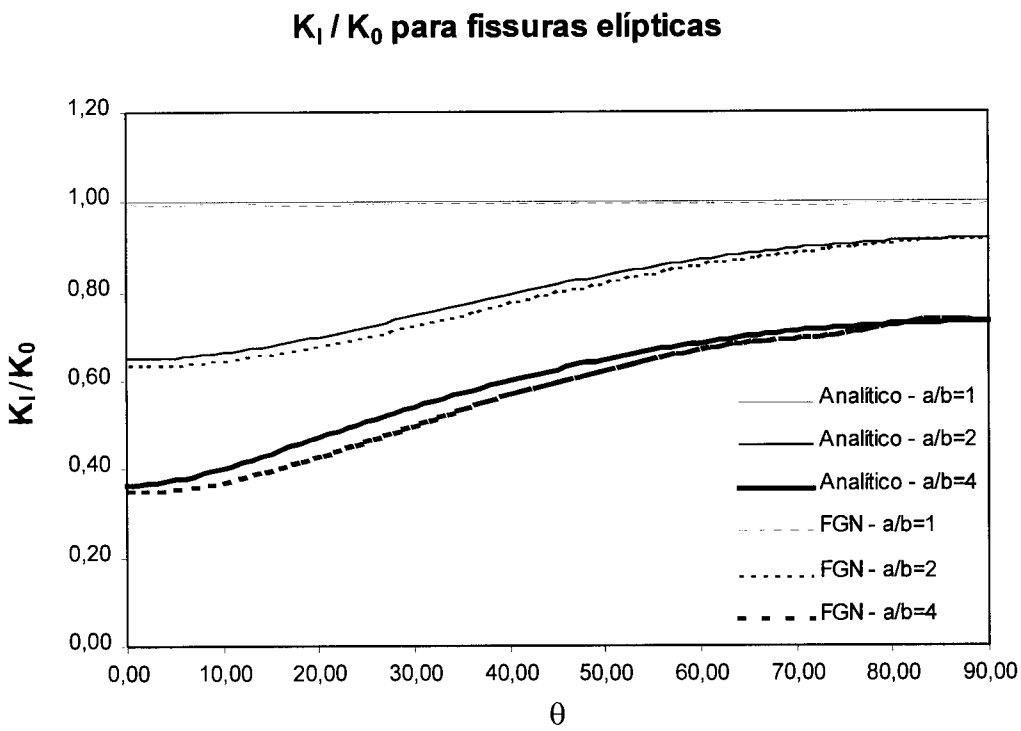

Figura 5.3

K_I/K_0 para fissuras elípticas em meio infinito sob tensão normal uniforme.

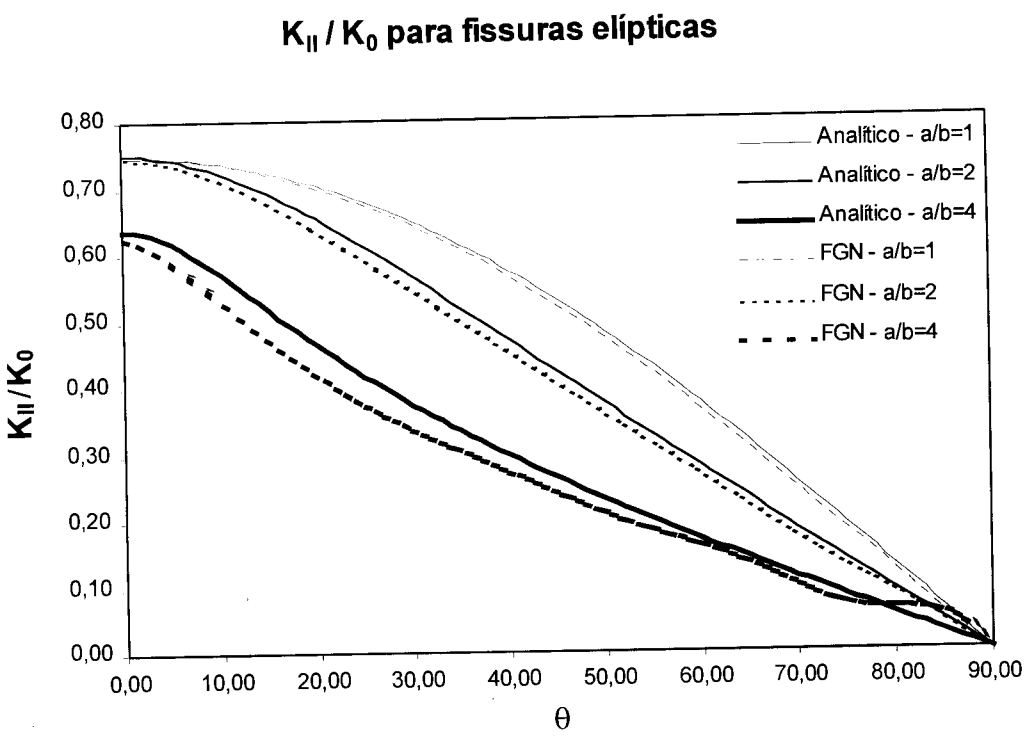

Figura 5.4

K_{II}/K_0 para fissuras elípticas em meio infinito sob cisalhamento uniforme.

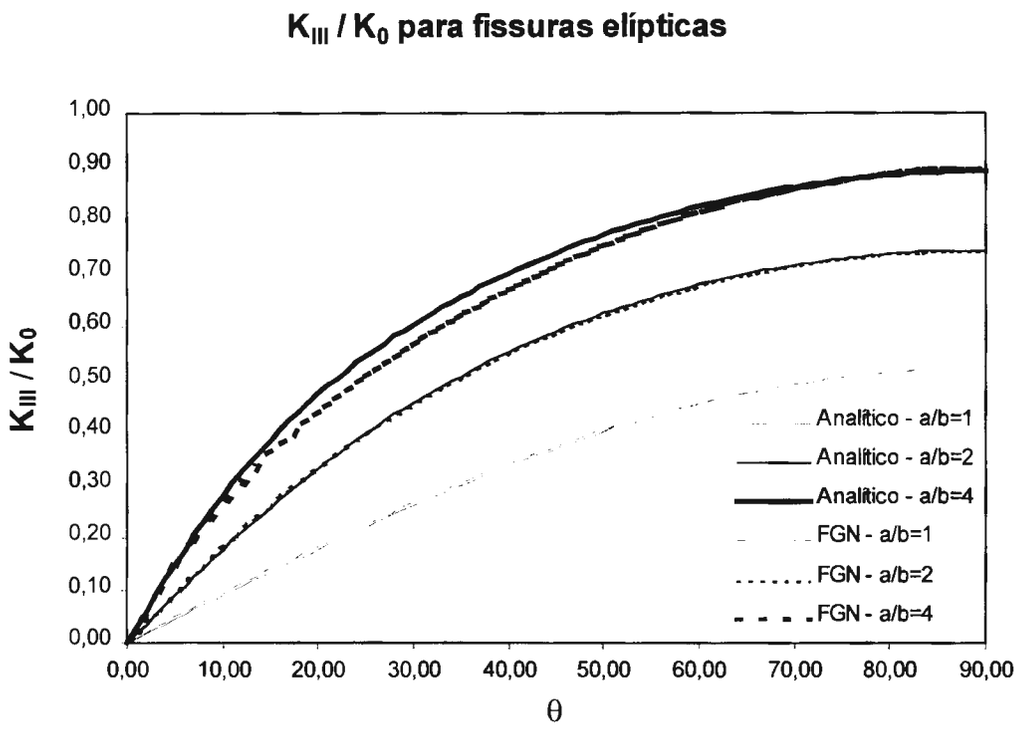

Figura 5.5
K_{III}/K_0 para fissuras elípticas em meio infinito sob cisalhamento uniforme.

5.3 - Fissura circular sob pressão interna uniforme em uma placa infinita

O problema de uma fissura plana circular sob pressão interna uniforme em uma placa infinita foi discretizado por uma malha de 83 elementos quadráticos na sua parte simétrica. A geometria e discretização do problema são mostradas na Figura 5.6.

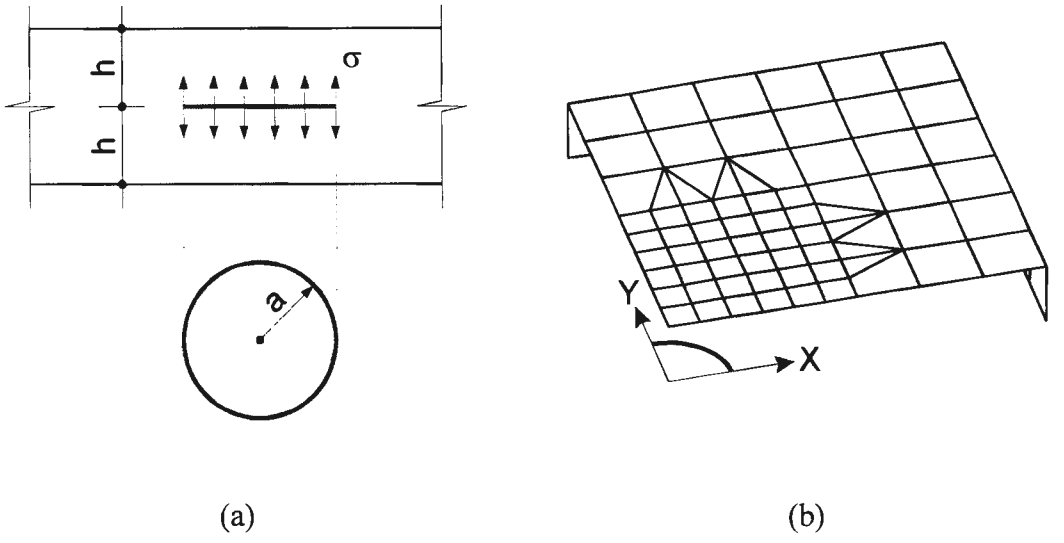

Figura 5.6
(a) Geometria da placa fissurada.
(b) Malha de 83 elementos quadráticos.

Os fatores de intensidade de tensões para o modo I de carregamento são apresentados na Tabela I. Os resultados de referência na coluna CSIF são devidos a Tsai [39] e têm uma precisão cerca de 1%.

Tabela I
K_I/K_0 para fissura circular sob pressão interna em uma placa infinita.

a / h	K_I/K_0 e erros da FGN				
	FGN	AXS	%	CSIF (±1%)	%
0,50	1,079	1,076	0,28	1,075	0,37
0,70	1,183	1,173	0,85	1,164	1,63
0,90	1,317	1,297	1,54	1,277	3,13

Como há uma distância relativa grande entre a fissura e o contorno externo do problema, as aberturas da fissura do problema complementar são relativamente bem comportadas e puderam ser avaliadas e integradas basicamente pela regra de integração de 4 pontos de Gauss. O cálculo dos resultados no contorno foi bastante rápido e o tempo total de processamento, medido num microcomputador Pentium de 233 MHz, foi de apenas 18 minutos, para o caso a / h = 0,50, e 45 minutos, para o caso a / h = 0,90.

5.4 - Fissura circular em uma barra cilíndrica sob tensão uniaxial uniforme

O problema de uma fissura circular plana em uma barra cilíndrica sob tensão uniaxial uniforme foi discretizado por uma malha de 24 elementos quadráticos na sua parte simétrica. O material do cilindro tem coeficiente de Poisson igual a 0,25. A geometria e discretização do problema são mostradas na Figura 5.7.

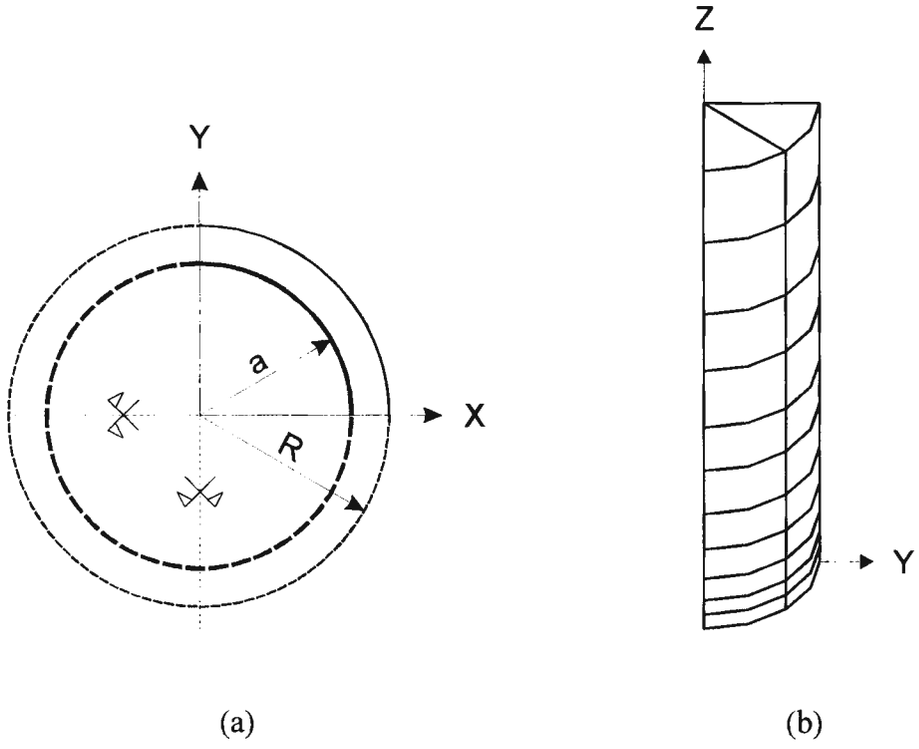

Figura 5.7
(a) Corte XY do cilindro fissurado.
(b) Malha de 24 elementos quadráticos.

Os fatores de intensidade de tensões para o modo I de carregamento são apresentados na Tabela II. Os resultados de referência na coluna CSIF são devidos a Sneddon e Welsh [40] e têm uma precisão de cerca de 1%.

Tabela II

K_I/K_0 para fissura circular em uma barra cilíndrica tracionada.

a / R	K_I/K_0 e erros da FGN				
	FGN	AXS	%	CSIF (±1%)	%
0,40	1,030	1,033	-0,29	1,036	-0,58
0,60	1,137	1,143	-0,52	1,142	-0,44
0,80	1,486	1,498	-0,80	1,474	0,81

Este problema foi também estudado por Sih [41] para $\nu = 1/3$. Os resultados obtidos pela FGN apresentaram erros de até 4,81% em relação aos apresentados nesta referência, embora tenham mantido o mesmo nível de precisão em relação aos resultados da implementação axissimétrica de Elementos de Contorno. O tempo total de processamento, medido num microcomputador Pentium de 233 MHz, foi de aproximadamente 7 minutos, para o caso a / R = 0,40, e 1 hora e 17 minutos, para o caso a / R = 0,80.

5.5 - Fissura circular sob pressão interna uniforme em uma esfera

O problema de uma fissura circular plana sob pressão interna uniforme em uma esfera foi discretizado por uma malha de 27 elementos quadráticos na sua parte simétrica. O material da esfera também tem coeficiente de Poisson igual a 0,25. A geometria e discretização do problema são mostradas na Figura 5.8.

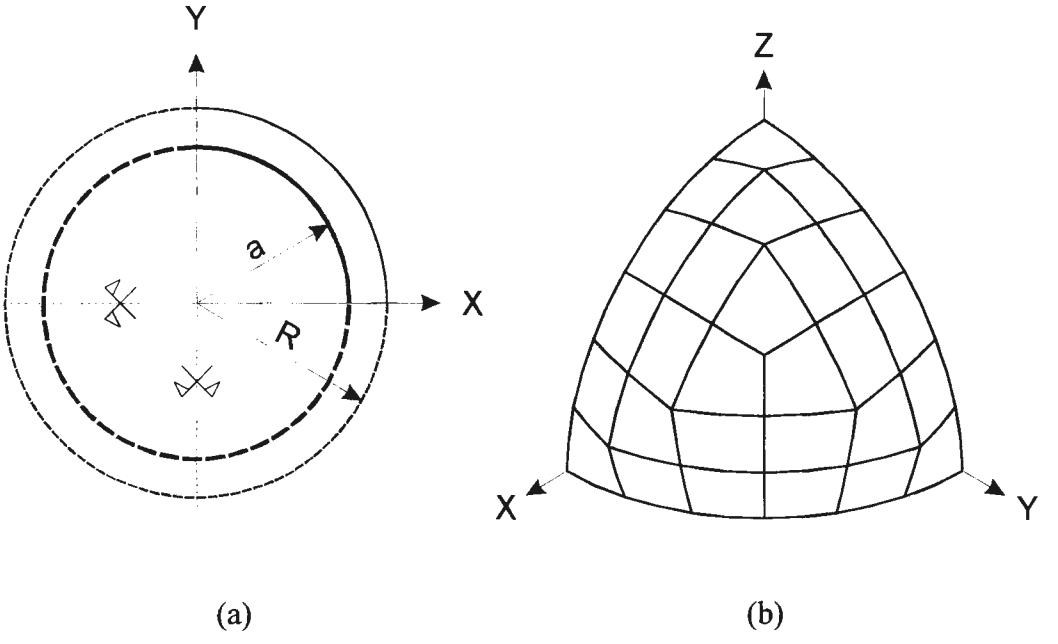

Figura 5.8
(a) Corte XY da esfera fissurada.
(b) Malha de 27 elementos quadráticos.

Os fatores de intensidade de tensões para o modo I de carregamento são apresentados na Tabela III. Os resultados de referência na coluna CSIF são devidos a Srivastava e Dwivedi [42] e teriam uma precisão de cerca de 1%.

Tabela III
K_I/K_0 para fissura circular sob pressão interna em uma esfera.

a / R	K_I/K_0 e erros da FGN				
	FGN	AXS	%	CSIF (±1%)	%
0,40	1,084	1,082	0,18	1,087	-0,28
0,60	1,283	1,272	0,86	1,228	4,48
0,80	1,779	1,736	2,48	1,475	20,61

O tempo total de processamento foi de aproximadamente 7 minutos, para o caso a / R = 0,40, e 1 hora e 25 minutos, para o caso a / R = 0,80.

5.6 - Fissura de bordo em forma de quarto de círculo

O problema de uma fissura de bordo em forma de quarto de círculo em uma barra de seção quadrada sob tração uniforme foi discretizado por uma malha de 103 elementos quadráticos na sua parte simétrica. A geometria e discretização do problema são mostradas na Figura 5.9.

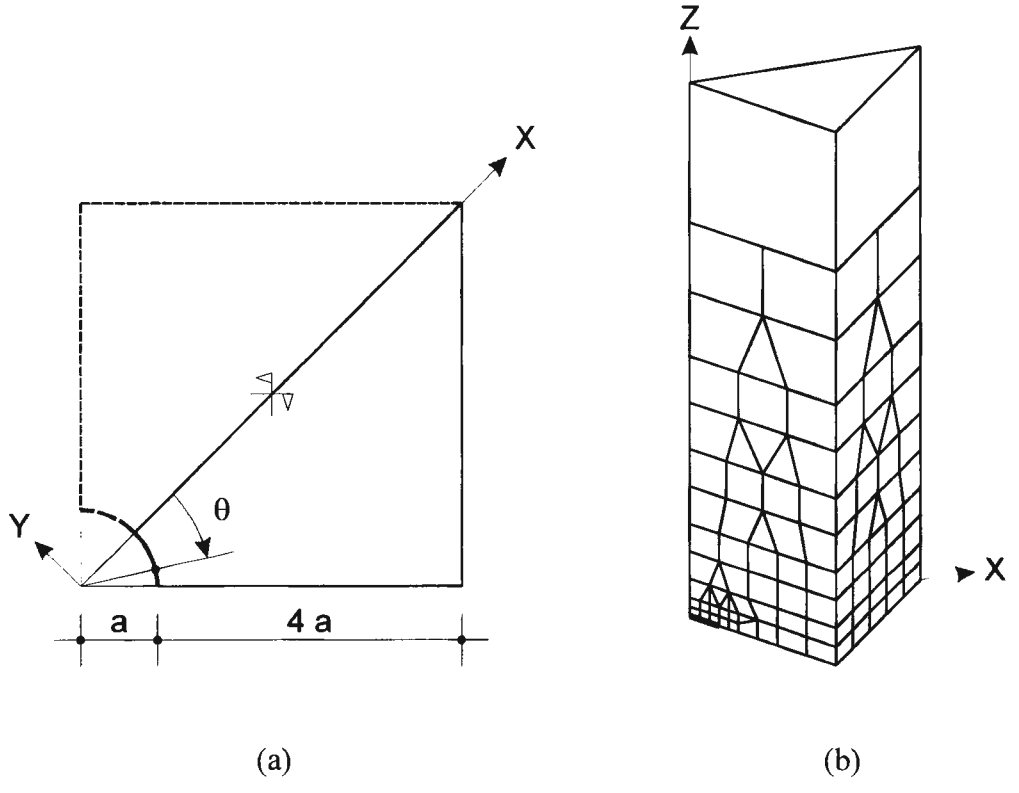

Figura 5.9
(a) Corte XY da barra fissurada.
(b) Malha de 103 elementos quadráticos.

Os fatores de intensidade de tensões para o modo I de carregamento são apresentados na Figura 5.10. O resultado de mínimos quadrados foi obtido da maneira detalhada no início desta seção, usando a equação (5.1). Uma interpolação foi introduzida no gráfico, entre $\theta = 42^{o}$ e o resultado de mínimos quadrados, uma vez que os resultados usuais obtidos pela FGN são localmente degenerados pela aproximação do contorno externo do problema. Os resultados de referência, apresentados no CSIF, são devidos a Tracey [43] e têm uma precisão de cerca de 2%.

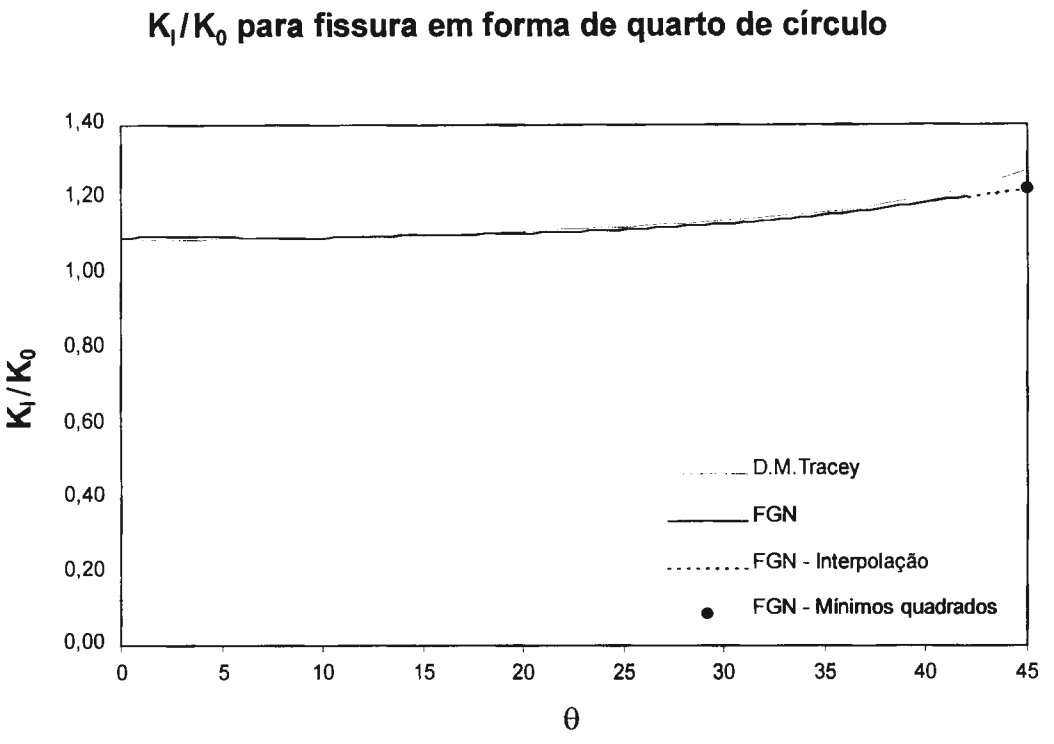

Figura 5.10
K_I/K_0 para fissura de bordo em forma de quarto de círculo em uma barra de seção quadrada.

Entre os exemplos numéricos apresentados, este foi o de maior custo computacional. Seu tempo de execução ficou em torno de 13 horas e 50 minutos.

5.7 - Fissura de bordo semi-elíptica em cilindro de parede espessa

O problema de uma fissura de bordo semi-elíptica em um cilindro de parede espessa foi estudado sob duas condições de carregamento. A primeira é a distribuição de tensão uniforme sobre as superfícies da fissura, que ocorre nos problemas de fissuras pressurizadas. A segunda é a combinação ou superposição da primeira com a distribuição de tensão tangencial de Lamé. Esta superposição representa integralmente o estado de tensão que deve ser aplicado às superfícies da fissura no problema do cilindro fissurado sujeito a pressão interna, que é uma simplificação do problema real de vasos de pressão.

Estas distribuições de tensão sobre as superfícies da fissura são dadas pelas seguintes fórmulas:

$\sigma(x) = \sigma_0$, para a distribuição uniforme.

$$\sigma(x) = \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{R^2}{(2R+t)t} \left[1 + \left(\frac{R+t}{x} \right)^2 \right] \right\}, \text{ para a distribuição combinada.}$$

A geometria e discretização do problema são mostradas nas Figuras 5.11 e 5.12. O material do tubo cilíndrico tem coeficiente de Poisson igual a 0,30. A solução de referência foi obtida apenas no ponto de superfície A e no ponto interno B, para uma relação fixa $R / t = 2$. Com o objetivo de evitar o redimensionamento da malha para o contorno externo do problema, as respostas obtidas pela FGN foram restritas a um valor fixo do semi-eixo a da fissura. O semi-eixo b é variável no intervalo $0 \leq b \leq a = t / 2$.

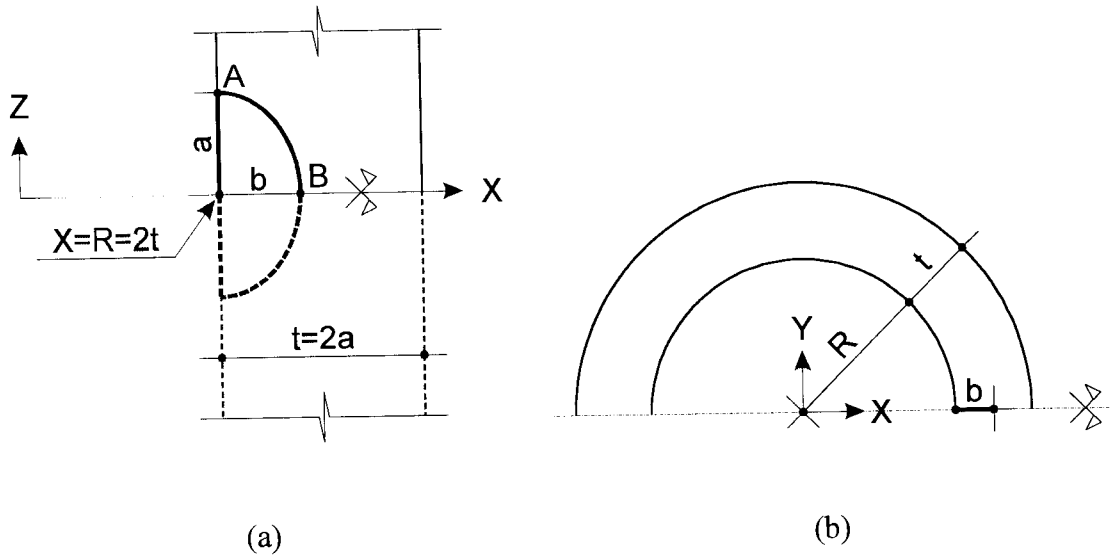

Figura 5.11
(a) Corte XZ do cilindro fissurado.
(b) Corte XY do cilindro fissurado.

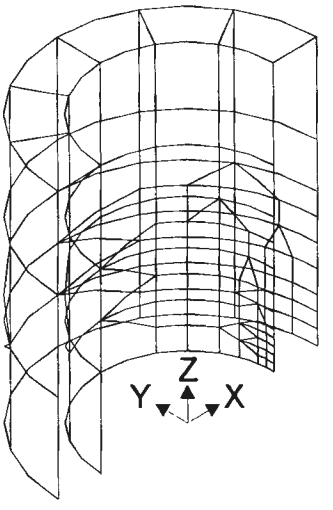

Figura 5.12
Malha de 146 elementos quadráticos.

Os fatores de intensidade de tensões para o modo I de carregamento são apresentados na Figura 5.13, para a distribuição de tensão uniforme, e na Figura 5.14, para a distribuição de tensão combinada. Todos os resultados da FGN foram calculados com o procedimento de mínimos quadrados na equação (5.1). Os resultados de referência são devidos a Zheng, Kiciak e Glinka [44], e apresentam boa concordância com os resultados de elementos finitos usados na elaboração de suas funções de peso. Neste trabalho, estas funções de peso foram implementadas integralmente, para a geração dos gráficos que se seguem.

Neste problema, os resultados são normalizados pelo K_0 dado pela seguinte fórmula:

$$K_0 = \sigma_o \sqrt{\frac{\pi\, b}{Q}}$$

onde

$$Q = 1 + 1{,}464 \left(\frac{b}{a}\right)^{1{,}65}, \quad \left(0 \le \frac{b}{a} \ge 1\right)$$

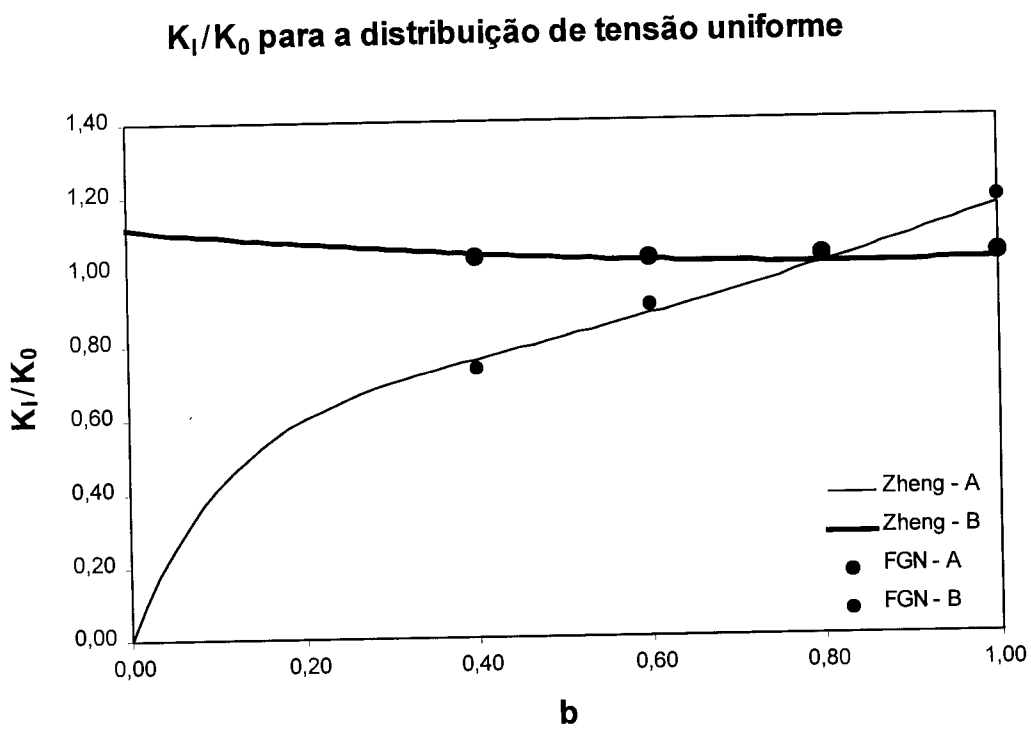

Figura 5.13
KI/K0 para fissura de bordo semi-elíptica sob a distribuição de tensão uniforme em um cilindro de parede espessa.

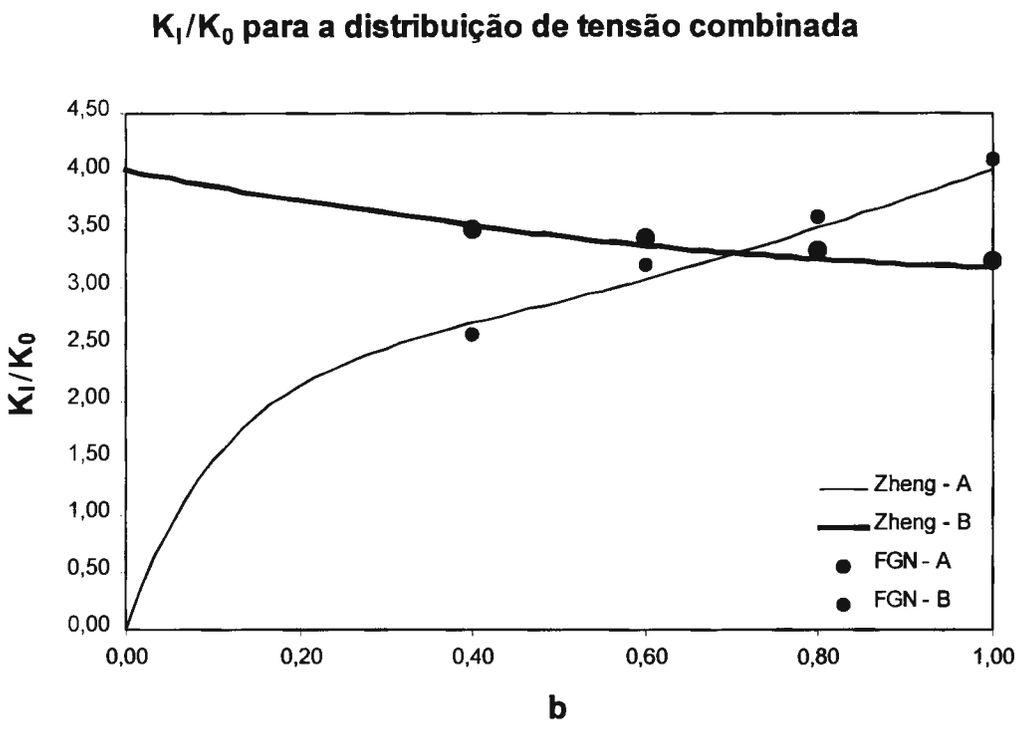

Figura 5.14
KI/K0 para fissura de bordo semi-elíptica sob a distribuição de tensão combinada em um cilindro de parede espessa.

O tempo total de processamento, medido num microcomputador Pentium de 233 MHz, ficou em torno de 4 horas e 56 minutos, para ambos os casos de carregamento.

Capítulo 6

Conclusões

O objetivo principal deste trabalho foi o de estender a aplicabilidade da função de Green numérica (FGN) a problemas tridimensionais da Mecânica da Fratura, e sua maior importância está no fato de serem muito restritos os processos até então disponíveis para o tratamento desses problemas pelo Método dos Elementos de Contorno. Comparado aos outros dois principais processos disponíveis, o uso de subregiões e da formulação mista, o uso de funções de Green se mostra bastante vantajoso pelo fato de não implicar numa formal discretização das faces da fissura por elementos de contorno. O contorno da fissura é desacoplado do contorno externo do problema, que assim pode ser resolvido com malhas bastante reduzidas e sem o emprego de elementos especiais nas frentes de fissura. Estas importantes características são mantidas na função de Green numérica.

De uma maneira geral, o trabalho evidencia, por seus resultados, a potencialidade do Método dos Elementos de Contorno na análise dos problemas da Mecânica da Fratura. Pela análise dos resultados numéricos apresentados, pode-se verificar a precariedade de soluções até então tomadas como referência. Em alguns dos exemplos numéricos selecionados, as soluções obtidas pela FGN se distanciam dos resultados de referência, mas são comprovadas por soluções alternativas, como as axissimétricas. A precisão alcançada, satisfatória do ponto de vista prático, passou a ser afetada por dois novos fatores. O primeiro, é a aproximação geométrica da fissura, que passou a ser mais elaborada que a dos primeiros problemas bidimensionais apresentados. O segundo, é a forma de cálculo dos fatores de intensidade de tensões. Nos problemas bidimensionais esse cálculo era feito a partir de tensões em pontos internos, muito próximos das pontas das fissuras, e passou a ser feito a partir das aberturas da fissura, calculadas para a configuração real do problema tridimensional.

A aplicação da FGN aos problemas tridimensionais seguiu, basicamente, a mesma metodologia desenvolvida para os problemas bidimensionais. Algumas técnicas foram introduzidas para a avaliação das integrais de partes finitas que, agora, apresentam singularidade mais forte, da ordem de $1/r^3$. A implementação que mais avançou utiliza elementos lineares tangentes aos elementos de fissura nos pontos singulares, de modo a provocar uma subtração de singularidades. Além disso, ela faz uso da técnica de integração de Kutt para a avaliação de uma das integrais que surgem no processo de regularização, com ordem de singularidade de $1/r^2$, que passa a $1/r$ quando reescrita em coordenadas polares. Esta implementação admite fissuras curvas, múltiplas, carregadas e subdivididas, além de uma série de aperfeiçoamentos. Uma segunda implementação faz uso exclusivo da técnica de integração de Kutt para a avaliação das integrais de partes finitas. Neste caso, o primeiro par de abscissas e pesos de integração são complexos. A terceira implementação utiliza uma técnica de integração com pesos específicos para uma dada função de singularidade e deve ser aplicada diretamente em coordenadas retangulares. Esta técnica é bastante recente e está sendo desenvolvida na PUC do Rio de Janeiro, em pesquisas orientadas pelo professor Ney Augusto Dumont. O trabalho a que tivemos acesso, uma versão preliminar da tese de doutorado de Marcos Aurélio Marques Noronha, com quem tivemos o privilégio de interagir, data de 1998. Esta técnica apresenta uma convergência muito boa, tanto para integrais singulares quanto para quase singulares. Contrariamente às outras, sua convergência melhora à medida que a quase-singularidade se acentua. Apesar disso, esta implementação foi a que menos progrediu. No seu estágio atual ela só pode ser aplicada a problemas envolvendo fissuras quadradas. Os exemplos numéricos apresentados foram todos obtidos pela primeira das implementações citadas.

Contrariamente ao que se deu na primeira implementação da FGN, para problemas bidimensionais, durante sua implementação tridimensional não tivemos acesso a qualquer meio de comparação de performance computacional da implementação. A implementação bidimensional da FGN vem se mostrando competitiva e, muitas vezes, vantajosa, mesmo quando comparada às poucas funções de Green analíticas disponíveis e, por isso, acreditamos que o mesmo se dê com a implementação tridimensional. Os tempos de processamento foram fortemente dependentes do tipo de problema analisado, sendo em geral bem maiores que os gastos na resolução de problemas similares sem fissuras. Nos problemas de fissuras internas os tempos tendem a ser menores que nos de fissura de bordo, nos quais ocorrem

quase-singularidades decorrentes tanto de pontos fonte quanto de pontos campo no contorno externo do problema. No caso dos problemas de fissura de bordo apresentados, um passo a mais no refinamento de suas malhas externas dificultaria a análise deles em microcomputadores. Por esse motivo, acreditamos que, apesar de todo o desenvolvimento da FGN ter se dado em microcomputadores, a adaptação do código fonte a computadores de grande porte seria um passo importante no seu progresso. Conforme nossas experiências com o supercomputador CRAY J90 da COPPE, as otimizações automáticas feitas pelo seu compilador FORTRAN, visando uma maior vetorização do código fonte, apesar de quadruplicarem a sua performance computacional, acabam redundando em erros de execução. Por isso, estas otimizações teriam que ser estudadas e efetuadas manualmente, o que demandaria tempo.

Além do custo computacional, um outro problema com que nos deparamos foi a forma de aproximação geométrica da fissura. Embora a aproximação geométrica por elementos lagrangeanos seja aceitável do ponto de vista prático, já que as fissuras do mundo real nunca apresentam formas geométricas perfeitas, como círculos e elipses, ela dificulta a comparação com os resultados de referência, principalmente quando analíticos. Além de a frente da fissura geometricamente aproximada nunca coincidir exatamente com a da fissura estudada, ocorre uma excessiva deformação do elemento lagrangeano na vizinhança dos seus vértices, quando são modeladas aquelas formas geométricas perfeitas. Estes vértices acabam induzindo erros maiores que os verificados no restante do perímetro do elemento, embora sejam erros bastante localizados. Desta forma fica sempre a dúvida quanto à origem de erros, quando estes superam os limites esperados. Exerce, também, influência na resposta a locação dos nós geométricos internos dos elementos de ordem elevada. Dependendo da locação destes nós a superfície do elemento pode até avançar além dos limites do elemento real. Nestes casos as respostas obtidas seriam completamente inválidas. Este problema foi resolvido com a locação dos nós centrais dos elementos de ordem mais elevada de acordo com a locação dada pelo elemento quadrático para as coordenadas naturais daqueles nós. O elemento quadrático não apresenta este problema por ter apenas um nó central, cuja locação é sempre óbvia. O uso de elementos da família serendipity foi testado mas, além do quadrático, eles nunca conseguem representar formas muito distorcidas, como círculos e elipses, e foram logo descartados. A locação dos nós centrais de elementos de formas especiais, como setores e calotas circulares, foi feita por softwares matemáticos, para não sobrecarregar a parte principal da implementação computacional.

As sugestões para o desenvolvimento deste trabalho são muitas, estando entre elas, algumas que, a princípio, nós mesmos esperávamos abordar e a escassez de tempo não permitiu ou não permitiu sua conclusão. Para a eliminação dos erros introduzidos pela aproximação geométrica da fissura nossa sugestão é a implementação de um elemento elíptico geometricamente exato, usando para as aberturas da fissura uma interpolação funcional em coordenadas polares. Este elemento chegou a ser esboçado e parece viável desde que seja usada uma técnica de integração para a avaliação das integrais de partes finitas que não implique no mapeamento do elemento para um quadrilátero. Para este fim, o emprego da técnica de Kutt seria bastante conveniente porque sua implementação se encontra em estágio avançado. Além do cálculo analítico de todo o termo de mudança de escala seriam necessários apenas mais alguns ajustes visando a melhoria de performance da implementação.

Uma outra alternativa para a redução drástica dos erros decorrentes da aproximação geométrica das fissuras seria o uso de elementos de superfície justapostos, de forma que uma única fissura pudesse ser representada por um conjunto de elementos não tão deformados. O caso de subdivisão das fissuras é um caso particular desse, em que cada subelemento tem seus lados sobre caminhos η_1 ou η_2 constantes, provenientes de um mesmo elemento de maiores dimensões. Desta maneira os resultados são coerentes. De outra, surgem irregularidades nas interfaces dos elementos, talvez devido a algum erro de implementação que não pudemos encontrar. Entretanto, a maior importância do uso de elementos justapostos para a aproximação geométrica das fissuras esta no fato de que muitas delas não podem ser representadas por um único elemento lagrangeano. Este é o caso das fissuras anulares.

Uma vez esclarecida a origem dos erros obtidos e de posse de uma implementação totalmente confiável, nossa sugestão seria a implementação completa da técnica de integração com pesos específicos, desenvolvida por Dumont e Noronha, usando os elementos lagrangeanos. Esta técnica de integração se mostrou bastante estável, precisa e, a princípio, econômica. Apesar de ser de implementação difícil (não é esta a opinião dos autores), ela facilita muito a apresentação da FGN que, da forma como está implementada, se subdivide em várias integrais, cada uma com características próprias. Esta implementação está na dependência de um termo de mudança de escala que não foi apresentado na tese de Noronha, a não ser para integrais unidimensionais. Talvez, mais alguma interação entre os grupos de pesquisa envolvidos resolva este problema.

Além disso, a implementação deve ser depurada em busca de performance. Este vem sendo um ponto crítico, principalmente durante o seu desenvolvimento, que exige muitos testes repetitivos até a definição de um modo de proceder confiável. Aqui, voltamos a indicar uma otimização do código para computadores de grande porte.

Mesmo trabalhando em microcomputadores seria muito útil a introdução no programa de um *solver* capaz de particionar matrizes para sua triangularizacão por blocos, usando memória virtual para o armazenamento dos blocos que num dado momento não estão sendo operados. A falta de tal *solver* nos impediu de incluir exemplos de torção interessantes na tese. Estes exemplos precisam de malhas externas muito refinadas e as matrizes geradas não couberam na memória das máquinas às quais tivemos acesso.

Além disso, sugerimos a aplicação da FGN a problemas tridimensionais dinâmicos, de propagação de fissuras e problemas elastoplásticos.

Bibliografia

[1] P. C. Paris, "The Fracture Mechanics Approach to Fatigue" In Fatigue, an Interdisciplinary Approach, Syracuse University Press, pp. 107-132, 1964.

[2] T. A. Cruse, "Numerical Evaluation of Stress Intensity Factors by the Boundary-Integral Equation Method", The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions, Ed. Swedlow, J. L., American Society of Mechanical Engineers, pp. 153-170, 1972.

[3] T. A. Cruse, W. Van Buren, "Three Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack", International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 7, No. 1, pp. 1-15, 1971.

[4] T. A. Cruse, "An Improved Boundary-Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stress Analysis", Computers and Structures, Vol. 4, pp. 741-754, 1974.

[5] F. J. Rizzo, D. J. Shippy, "A Formulation and Solution Procedure for the General Non-Homogeneous Elastic Inclusion Problem", Int. J. Solids Structures, Vol. 4, pp. 1161-1179, 1968.

[6] G. E. Blandford, A. R. Ingraffea, J. A. Liggett, "Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computation Using the Boundary Element Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 387-404, 1981.

[7] S. L. Crouch, "Solution of Plane Elasticity Problems by the Displacement-Discontinuity Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, pp. 301-343, 1976.

[8] S. L. Crouch, A. M. Starfield, "Boundary Element Method in Solid Mechanics", George Allen and Unwin Publishers, London, 1983.

[9] S. Guimarães, "Sobre o Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Mecânica da Fratura", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1992.

[10] L. F. Martha, L. J. Gray, A. R. Ingraffea, "Three-Dimensional Fracture Simulation with a Single-Domain, Direct Boundary Element Formulation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 35, pp. 1907-1921, 1992.

[11] W. T. Ang, G. Noone, "A hypersingular-boundary integral equation method for the solution of an elastic multiple interacting crack problem", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 11, pp. 33-37, 1993.

[12] M. D. Snyder, T. A. Cruse, "Boundary integral equation analysis of cracked anisotropic plates", Int. Journ. of Fracture, Vol. 11, No. 2, pp. 315-328, 1975.

[13] D. L. Clements, M. Haselgrove, "A Boundary Integral Equation Method for a Class of Crack Problems in Anisotropic Elasticity", Intern. J. Computer Maths., Vol. 12, pp. 267-278, 1983.

[14] H. Mews, "Calculation of Stress Intensity Factors for Various Crack Problems with the Boundary Element Method", Proceedings of Boundary Elements IX, Vol. 2, Computational Mechanics Publication, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[15] W. T. Ang, D. L. Clements, "A boundary integral equation method for the solution of a class of crack problems", Journal of Elasticity, Vol. 17, pp. 9-21, 1987.

[16] W. T. Ang, "A Boundary Integral Equation for Deformations of an Elastic Body with an Arc Crack", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XLV, No. 1, pp. 131-139, 1987.

[17] G. S. Castor, "Aplicação de funções de Green a problemas da Mecânica da Fratura com o Método dos Elementos de Contorno", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993.

[18] J. C. F. Telles, G. S. Castor, S. Guimarães, "A hypersingular Green's function generation for fracture mechanics problems", Proc. of the XVI Int. BEM Conf., ed. C. A. Brebbia, Southampton, pp. 443-452, 1994.

[19] J. C. F. Telles, G. S. Castor e S. Guimarães, "Fracture Mechanics - A Numerical Green's Function Generation Using the Traction Integral Equation", XV CILAMCE, Belo Horizonte, Brasil, 1994.

[20] J. C. F. Telles, G. S. Castor, S. Guimarães, "A Numerical Green's Function Approach for Boundary Elements Applied to Fracture Mechanics", Int. J. Numer. Methods Eng., 38, pp. 3259-3274, 1995.

[21] L. P. S. Barra, "Aplicação do MEC à Mecânica da Fratura Elastodinâmica com Funções de Green Numéricas", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1996.

[22] N. P. P Silveira, "Implementação da Função de Green Numérica para Fraturas Curvas com o Método dos Elementos de Contorno", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1996.

[23] V. S. Figueiredo, "Obtenção da função de Green numérica para problemas de Mecânica da Fratura em placas de Reissner – Método dos Elementos de Contorno", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.

[24] G. S. Castor, J. C. F. Telles, "Aplicação da função de Green numérica a problemas tridimensionais da Mecânica da Fratura", Anais do XVIII CILAMCE – Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenheria, Vol. 3, pp. 1113-1120, Brasília, DF, Brasil, outubro de 1997.

[25] G. S. Castor, J. C. F. Telles, "Numerical Green's function applied to Fracture Mechanics: 3-D implementation", Proceedings of the BEM XX - Twentieth International Conference on the Boundary Element Method, Vol. 4, pp. 3-12, Orlando, Flórida, Estados Unidos da América, outubro de 1998.

[26] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel, "Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering", Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984.

[27] Telles, J. C. F. "The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems", Lecture Notes in Engineering, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[28] J. J. R. Silva, "MEC3DE – Um programa para análise elástica tridimensional com o Método dos Elementos de Contorno", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1989.

[29] S. Guimarães, J. C. F. Telles, "On the Hyper-singular Boundary Element Formulation for Fracture Mechanics Applications", Eng. Anal. with Boundary Elements, 13, pp. 353-363, 1995.

[30] G. R. Irwin, "Fracturing of Metals", ASM Symposium, Cleveland, pp. 147-166, 1948.

[31] H. R. Kutt, "Quadrature formulae for finite part integrals", Report WISK 178, The National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria, 1975.

[32] N. A. Dumont, R. M. de Souza, "A Simple Unified Technique for the Evaluation of Quasi-Singular, Singular and Strongly Singular Integrals", Boundary Elements XVI, Eds. C. A. Brebbia, J. Dominguez, F. Paris, Computational Mechanics Publications, Vol. 1, pp. 619-632, 1992.

[33] M. A. M. Noronha, "Técnicas Avançadas de Integração Numérica e Programação Orientada a Objetos Aplicadas a Métodos de Elementos de Contorno", Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1998.

[34] N. P. P. Silveira, S. Guimarães, J. C. F. Telles, "Accurate hypersingular integral computations in the development of numerical Green"s functions for Fracture Mechanics", Chapter 6 of Singular Integrals in Boundary Element Methods, V. Sladek & J. Sladek eds., Computational Mechanics Publications, Southampton, 1998.

[35] J. C. F. Telles, "A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 959-973, 1987.

[36] D. P. Rooke, D. J. Cartwright, "Compendium of Stress Intensity Factors", H.M.S.O., London, 1974.

[37] M. K. Kassir, G. C. Sih, "Griffith's Theory of Brittle Fracture in Three Dimensions", Int. J. Engng Sci., Vol. 5, pp. 899-918, 1967.

[38] M. K. Kassir, G. C. Sih, "Three-Dimensional Stress Distribution Around an Elliptical Crack Under Arbitrary Loadings", J. appl. Mech., Vol. 33, pp. 601-611, 1966.

[39] Y. M. Tsai, Engng. Fracture Mech., Vol. 4, p. 155, 1972.

[40] I. N. Sneddon, J. T. Welsh, "A Note on the Distribution of Stress in a Cylinder Containing a Penny-Shaped Crack", Int. J. Engng. Sci., Vol. 1, pp. 411-419, 1963.

[41] G. C. Sih, "Handbook of Stress Intensity Factors", Institute of Fracture and Solids Mechanics Publication, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, 1973.

[42] K. N. Srivastava, J. P. Dwivedi, "The Effect of a Penny-Shaped Crack on the Distribution of Stress in an Elastic Sphere", Int. J. Engng. Sci., Vol. 9, pp. 399-420, 1971.

[43] D. M. Tracey, "Conference on Finite Element Techniques in Fracture Mechanics", Stuttgart, Germany, April 16-17, 1973.

[44] X. J. Zheng, A. Kiciak, G. Glinka, "Weight Functions and Stress Intensity Factors for Internal Surface Semi-Elliptical Crack in Thick-Walled Cylinder", Eng. Fracture Mech., 58, 207-221, 1997.