



**COPPE/UFRJ**

ACOPLAMENTO, SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE  
DESENVOLVIMENTO DE CAMPOS DE PETRÓLEO E GÁS SOB INCERTEZA,  
COM APLICAÇÕES NA CONTRUÇÃO DE POÇOS E CAMPOS INTELIGENTES

Carlos Magno Couto Jacinto

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2009

ACOPLAMENTO, SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE  
DESENVOLVIMENTO DE CAMPOS DE PETRÓLEO E GÁS SOB INCERTEZA,  
COM APLICAÇÕES NA CONTRUÇÃO DE POÇOS E CAMPOS INTELIGENTES

Carlos Magno Couto Jacinto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

---

Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken, D.Sc.

---

Prof<sup>a</sup>. Beatriz de Souza Leite Pires de Lima, D.Sc.

---

Prof. Alexandre Gonçalves Evsukoff, Dr.

---

Prof. Annibal Parracho Sant'Anna, Ph.D.

---

Prof. Enrique Andrés López Droguett, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2009

Jacinto, Carlos Magno Couto

Acoplamento, simulação e otimização de estratégias de desenvolvimento de campos de petróleo e gás sob incerteza, com aplicações na construção de poços e campos inteligentes / Carlos Magno Couto Jacinto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

XI, 136 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2009.

Referências Bibliográficas: p. 76-83.

1. Análise de Risco em Petróleo. 2. Simulação Estocástica. 3. Incerteza. I. Ebecken, Nelson Francisco Favilla. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*À minha filha Camila, e aos meus filhos que ainda vem, esperanças da minha vida.  
À saudade do querido sobrinho Rafael e dos meus irmãos César e Vinícius.*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais Agenor e Maria Rosa por terem me ensinado os valores da vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Nelson Francisco Favilla Ebecken, pela oportunidade de realizar este trabalho sob sua orientação.

Aos meus irmãos, sobrinhos e parentes pela base familiar forte que temos.

Aos meus poucos e grandes amigos, pela paciência pelo afastamento necessário ao empreendimento desta jornada.

Aos amigos da Pastoral Ação Social São Vicente de Paulo e do Ministério da Bênção, ambos da Paróquia de São Judas Tadeu em Icaraí, Niterói: pelo estímulo da caridade e da perseverança nos ensinamentos do Pai.

Aos meus alunos e toda comunidade do Cavalão e Vila Ipiranga, pela oportunidade de conviver e aprender com vocês.

Aos meus pequenos amigos Diogo, Rafael, Eduardo, Lalá, Lelê, Lulu e Daiane; pela felicidade de estar com vocês e revigorar as forças.

À Themis Alexandra, que me apoiou em muito para a realização deste trabalho. E que acredita em mim

Aos gerentes da PETROBRAS/CENPES/PDP/TEP que me proporcionaram a condução do doutorado, mesmo trabalhando.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção de grau em Doutor em Ciências (D.Sc.)

ACOPLAMENTO, SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE DESENVOLVIMENTO DE CAMPOS DE PETRÓLEO E GÁS SOB INCERTEZA, COM APLICAÇÕES NA CONSTRUÇÃO DE POÇOS E CAMPOS INTELIGENTES

Carlos Magno Couto Jacinto

Dezembro/2009

Orientador: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Programa: Engenharia Civil

Apresentamos nessa tese uma nova metodologia para modelagem, simulação e otimização de incertezas em estratégias de desenvolvimento de campos de petróleo e gás; baseada no hibridismo de técnicas estatísticas, simulação estocástica e processo de decisão markoviano.

O estudo tem como objetivo o desenvolvimento de uma metodologia, onde se possa abordar de forma quantitativa as complexidades e incertezas associadas ao processo de desenvolvimento de campos de petróleo e gás; obtendo-se a partir daí; a base necessária para se otimizar o sistema em estudo.

O desenvolvimento de campos de petróleo e gás está imerso em incertezas, sejam de natureza tecnológica (novas tecnologias), ambientes cada vez mais complexos (natureza), escassez e disputa por recursos físicos e econômicos (custos e financiamentos) etc., tornando-se assim um sistema complexo e com elevado grau de aleatoriedade e de difícil abordagem pelas técnicas tradicionais.

A tese apresenta ainda duas aplicações da metodologia desenvolvida: a modelagem, simulação e otimização da estratégia de construção de poços de desenvolvimento de um campo de petróleo; e a modelagem, simulação e otimização de um campo utilizando o conceito de “campo inteligente”.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

COUPLING, SIMULATION AND OPTIMIZATION OF PETROLEUM AND GAS  
FIELDS DEVELOPMENT STRATEGIES UNDER UNCERTAINTY, WITH  
APPLICATIONS ON WELLS CONSTRUCTION AND INTELLIGENT FIELDS

Carlos Magno Couto Jacinto

December/2009

Advisor: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Civil Engineering Program

We present in this thesis a new methodology for modeling, simulation and optimization of uncertainties in strategies of oil and gas fields development; based on statistical techniques, stochastic simulation and Markov decision process.

The study takes the development of a methodology as an objective, where it is possible a quantitative approach for the complexities and uncertainties associated to the process of oil and gas fields development and the necessary base in order to optimize the system.

The development of oil and gas fields is immersed in uncertainties, due to new technologies, high complex environments (nature), restricted economical resources (costs and financing) etc., becoming so a complex system with elevated degree of random to approach by traditional techniques.

The thesis still presents two applications: the modeling, simulation and optimization of the strategy of wells construction; and the modeling, simulation and optimization of a field using the concept of “intelligent field”.

# ÍNDICE

Capa.....	i
Folha de Rosto.....	ii
Ficha Catalográfica.....	iii
Dedicatória.....	iv
Agradecimentos.....	v
Resumo.....	vi
Abstract.....	vii
Índice.....	viii
Lista de Figuras.....	x
Lista de Tabelas.....	xi
1. Introdução.....	1
1.1. Considerações Gerais.....	1
1.2. Objetivos.....	2
1.3. Trabalhos Anteriores.....	2
1.4. Contribuição.....	3
1.5. Organização da Tese.....	3
2. Desenvolvimento de Campos de Petróleo e Gás.....	5
2.1. Projetos de Desenvolvimento de Campos de Petróleo e Gás.....	5
2.2. Incertezas em Projetos de Desenvolvimento de Campos de Petróleo e Gás.....	8
2.3. Análise de Risco e Quantificação de Incertezas em Projetos de Desenvolvimento de Campos de Petróleo e Gás.....	12
2.4. Avaliação Econômica em Projetos de Desenvolvimento de Campos de Petróleo e Gás.....	13
3. Acoplamento, Simulação e Otimização sob Incerteza.....	18
3.1. Metodologia.....	18

3.2. Acoplamento entre variáveis.....	22
3.3. Otimização Sob Incerteza e Processo de Decisão Markoviano.....	28
4. Aplicação 1: Construção de Poços.....	38
4.1. Definição do Problema.....	38
4.2. Modelagem, Simulação e Otimização.....	44
4.3. Análise de Resultados.....	60
5. Aplicação 2: Campos Inteligentes.....	62
5.1. Definição do Problema.....	62
5.2. Modelagem, Simulação e Otimização.....	64
5.3. Análise de Resultados.....	72
6. Conclusões.....	73
Referências Bibliográficas.....	76
Anexo I- Cópulas.....	84
Anexo II- Cadeias de Markov.....	102
Anexo III- Processo de Decisão Markoviano.....	120
Anexo IV- Método de Monte Carlo.....	133

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Etapas do projeto de E&P	6
Figura 2 Incertezas em projetos de E&P	10
Figura 3 Metodologia	20
Figura 4 Localização do campo de Tupi	39
Figura 5 Modelo de acumulação petrolífera do pré-sal	40
Figura 6 Imageamento da acumulação petrolífera do pré-sal	40
Figura 7 Reservatórios característicos da camada pré-sal	41
Figura 8 A província do pré-sal	42
Figura 9 Poço típico do pré-sal	46
Figura 10 Tempo da fase A	47
Figura 11 Tempo da fase B	47
Figura 12 Incerteza do tempo total do poço	49
Figura 13 Curva de aprendizado, variando C1	52
Figura 14 Curva de aprendizado, variando C2	54
Figura 15 Curva de aprendizado, variando C3	55
Figura 16 Curva de aprendizado, parâmetros otimizados	57
Figura 17 Comparação de estratégias	58
Figura 18 Poço com trecho de poço piloto de 81/2"	64
Figura 19 Esquemático do piloto de Tupi (teórico)	67
Figura 20 Configuração da completção inteligente de Tupi (teórico)	67

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Licenças por etapas de projeto de E&P	7
Tabela 2 Metodologias para diferentes níveis de complexidade	13
Tabela 3 Características dos mercados de ações e de E&P	19
Tabela 4 Coeficientes de correlação e percentis	25
Tabela 5 Tempos para diferentes coeficientes de correlação	48
Tabela 6 Curva de aprendizado, variando C1	53
Tabela 7 Curva de aprendizado, variando C2	54
Tabela 8 Curva de aprendizado, variando C3	55
Tabela 9 Tempos dos poços com parâmetros otimizados	56
Tabela 10 Tempos totais da campanha, por estratégia	58
Tabela 11 Cálculo do tempo total da estratégia 4 para o P10	59
Tabela 12 Cálculo do tempo total da estratégia 4 para o P50	59
Tabela 13 Cálculo do tempo total da estratégia 4 para o P90	59
Tabela 14 Cálculo do tempo total da estratégia 5 para o P10	60
Tabela 15 Cálculo do tempo total da estratégia 5 para o P50	60
Tabela 16 Cálculo do tempo total da estratégia 5 para o P90	60
Tabela 17 Classes de efeitos das falhas nos poços	68
Tabela 18 Estados do sistema	68
Tabela 19 Estados do sistema e política de decisão	69
Tabela 20 Matriz de política randomizada	69
Tabela 21 Matriz de política randomizada otimizada	70

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos uma visão geral da tese, os objetivos a serem alcançados, as justificativas para o estudo, as suas contribuições para a ciência e a organização do trabalho com as etapas da pesquisa e estudos de casos.

### Considerações Gerais

O conhecimento limitado acerca das características da formação geológica, facilidades técnicas e comportamento humano, resultam em considerável incerteza acerca dos resultados das estratégias de desenvolvimento de campos de petróleo e gás. Risco e análise de decisão surgiram em meados do século XX, aproximadamente 50 anos depois de algumas ferramentas estatísticas necessárias ao estudo serem formalizadas. Pearson definiu desvio padrão e achatamento no final de 1890 e Galton introduziu os percentis em 1885 Murtha (2000).

O processo de planejamento é dificultado pelos eventos indesejados como perdas de poços, acidentes, atraso na construção de unidades de produção, atraso na logística de entrega de equipamentos estratégicos etc. Tais eventos podem resultar em atrasos dispendiosos, aumento dos custos de material e atraso ou declínio da produção; reduzindo a lucratividade do projeto como um todo.

Dado o paradigma brasileiro (maior parcela das reservas situadas em águas profundas e ultra profundas), os projetos são caracterizados pelo desafio deste tipo de locação, alta pressão e alta temperatura, camadas de sal, além das dificuldades na geometria dos reservatórios e aumento do foco na eficiência dos custos. Estas condições implicam no aumento da demanda pela análise de risco para melhorar as bases de decisão quanto às soluções técnicas e planejamento do desenvolvimento do campo.

A situação atual na indústria é positiva em relação ao aumento do uso da análise de risco mas, incertezas relativas às bases teóricas e a necessidade de modelos, são fatores que impedem a análise de risco ser utilizada amplamente como ferramenta de tomada de

decisão. Outro fator que enfraquece a confiança nas análises de risco é a necessidade e a comunicação entre o pessoal de engenharia e economia: é multidisciplinar por natureza.

O tratamento adequado de um tema complexo remete ao desenvolvimento de uma metodologia que possibilite um balanço entre profundidade de análise e poder de previsão e explicação dos fenômenos envolvidos.

Técnicas modernas de modelagem e simulação de sistemas são empregadas nesta tese com esse propósito.

## **Objetivos**

O objetivo principal desta tese é o estudo das incertezas relacionadas às estratégias de desenvolvimento de campos de petróleo e gás; desenvolvendo metodologias a serem aplicadas na otimização de campanhas de construção de poços e em campos inteligentes, com suas respectivas exposições ao risco.

Alguns modelos aqui apresentados já vêm sendo utilizados na indústria de petróleo, através de trabalhos do autor Jacinto (2005 A,B; 2006 B,C,D,E,F,G,H,I; 2007A,B,C,D).

## **Trabalhos Anteriores**

Nas últimas décadas tem sido crescente o interesse em avaliar as incertezas e o risco em projetos na área de E&P (Exploração e Produção). Evans (2000) fez uma análise recente do número de publicações do tema no SPE (Society of Petroleum Engineers), onde foram encontrados cerca de 10 artigos na década de 80 enquanto que na década de 90 passamos para cerca de 45 artigos, refletindo o interesse e importância do assunto para a indústria do petróleo.

Análise de risco e incerteza estão estreitamente ligados à teoria da decisão. Raiffa e Schlaifer (1961) se destacam neste tema, mas aplicações na área do petróleo podem ser vistas em Meggil (1971) e Newendorp (1975) que aborda diversos conceitos como valor esperado, árvore de decisão, teoria das preferências, técnicas de simulação etc. Murtha (1997/2000).

Recentemente outras questões ligadas aos métodos de análise de incerteza de projetos de desenvolvimento da produção de campos de petróleo e gás:

- Necessidade de hibridismo de modelos para abordar a complexidade do tema
- Alta dependência entre as variáveis a serem modeladas
- Alta complexidade na otimização de projetos de desenvolvimento de campos de petróleo e gás sob incerteza (otimização estocástica)

Em Accioly (2005) e Jacinto (2006-A) vimos uma abordagem consistente para o tratamento da dependência entre variáveis aleatórias de entrada de modelos de simulação.

Uma abordagem utilizando simulação discreta de eventos no desenvolvimento de campo de petróleo e gás sob incerteza é vista em Jacinto (2001, 2002 A,B; 2007 A).

Em Valdivia (2005) encontramos uma abordagem de otimização de campos inteligentes utilizando técnicas de inteligência computacional.

Em Jacinto (2005A,B; 2006 B,C,D,E,F,G,H,I; 2007A,B,C,D) são desenvolvidas e aplicadas técnicas híbridas de confiabilidade de sistemas em aplicações na área de poços de petróleo e gás, além de campos inteligentes.

### **Contribuição**

A análise da exposição ao risco no desenvolvimento de campos de petróleo e gás , face aos altos investimentos (aproximadamente 2,5 bilhões de dólares para 30 poços, águas profundas e uma produção estimada de 200 milhões de barris) e a grande geração de empregos e rendas ao país confere ao tema uma alta relevância.

A contribuição deste trabalho de pesquisa está explícita no desenvolvimento de uma metodologia que possibilite a construção de um “framework” para a otimização de estratégias de desenvolvimento de campos de petróleo e gás sob incerteza.

A aplicação desta metodologia trata da otimização de uma campanha de construção de poços no desenvolvimento de um campo e, a segunda aplicação, da otimização da produção em campos inteligentes.

### **Organização da Tese**

A tese esta organizada em seis capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma introdução acerca do tema da tese, tecendo considerações sobre as incertezas presentes no desenvolvimento de campos de petróleo e gás; definindo claramente os objetivos da pesquisa sua contribuição científica; conjuntamente com uma revisão bibliográfica.

No capítulo 2 apresentamos um breve descritivo do ciclo de vida de um projeto de desenvolvimento de campos de petróleo e gás, analisando suas incertezas e técnicas de quantificação dos riscos e valoração econômica.

O capítulo 3 nos fornece um panorama sobre os conceitos e metodologia utilizados no desenvolvimento da pesquisa, sendo apresentados conceitos de acoplamento entre

variáveis e modelos, simulação e otimização sobre incerteza através de processo de decisão Markoviano. Temos então, o “framework” desenvolvido.

Apresentamos no capítulo 4 a primeira aplicação da metodologia proposta, iniciando o capítulo com a descrição das incertezas presentes numa campanha de poços (definição do problema); evoluindo para a modelagem / simulação / otimização de uma estratégia de desenvolvimento de um campo real.

No capítulo 5 é aplicada a metodologia na otimização da estratégia de desenvolvimento de um campo inteligente; sendo discutidos os conceitos de “smart field” ou “intelligent field” e sua implementação real.

Finalmente no capítulo 6 são tecidos comentários e recomendações para estudos futuros relacionados ao tema.

## **CAPÍTULO 2**

# **DESENVOLVIMENTO DE CAMPOS DE PETRÓLEO E GÁS**

Este capítulo está dividido em quatro seções. A primeira seção discorre sobre as características dos projetos de desenvolvimento de campos de petróleo e gás, avançando para a seção seguinte em que são analisadas as incertezas neste tipo de projeto. Na seção 2.3 são apresentadas as técnicas de quantificação de incertezas e na seção final é desenvolvido um modelo simples de avaliação econômica de projetos de desenvolvimento de campos de petróleo e gás.

### **Projetos de Desenvolvimento de Campos de Petróleo e Gás**

Uma das principais características dos projetos de Exploração e Produção (E&P) de Campos de Petróleo e Gás é o longo ciclo de vida esperado (em torno de 20 a 30 anos).

As incertezas presentes em cada uma de suas etapas podem fazer com que o projeto seja interrompido. Geralmente a interrupção se dá nas etapas iniciais da fase exploratória (pré-licença, poço exploratório, poços de avaliação) e na etapa de planejamento do desenvolvimento (primeira etapa da fase de produção). Os eventos adversos que podem interromper ou adiar o projeto são tipicamente a não liberação de atividades exploratórias em áreas sensíveis (à vida humana ou ecologicamente sensível); não-ocorrência de acumulações de hidrocarbonetos falta de recursos para os investimentos necessários, inviabilidade técnico-econômica etc.

Os projetos de E&P (Exploração e Produção) são compostos por sete etapas, conforme observamos na figura 1:

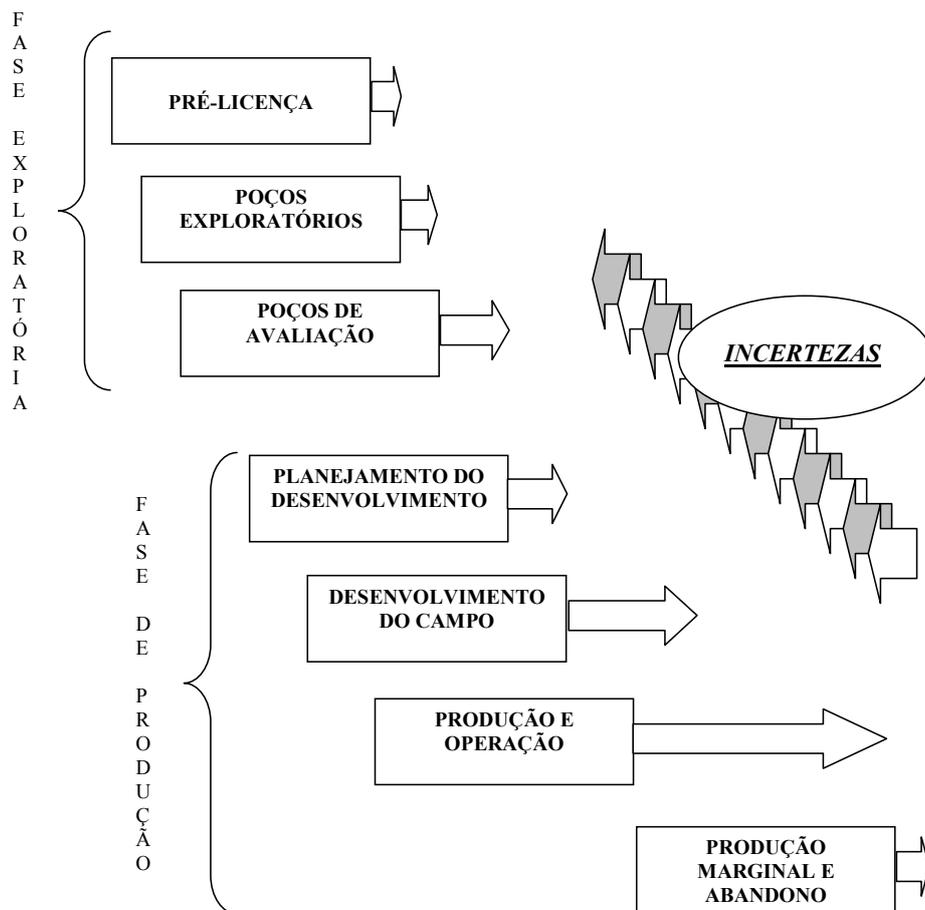


Fig. 1 Etapas do projeto de E&P

O pré-requisito para o início do projeto é a aquisição de um bloco exploratório promissor em leilões da ANP (Agência Nacional de Petróleo).

A fase inicial da etapa exploratória é a de **pré-licença**, onde os órgãos governamentais (ANP e IBAMA no caso brasileiro para atividades marítimas na costa brasileira - offshore) definem as regras para as etapas seguintes do projeto, conforme tabela 1:

LICENÇA	SIGLA	EXIGÊNCIA	EFEITO
Licença Prévia de Perfuração	LPper	Elaboração do Relatório de Controle Ambiental (RCA)	Autorização da Atividade de Perfuração
Licença Prévia de Produção para Pesquisa	LPpro	Elaboração do Estudo de Viabilidade Ambiental (EVA)	Autorização da Atividade de Produção para Pesquisa da Viabilidade Econômica da Jazida
Licença de Instalação	LI	Elaboração do Estudo de Impacto Ambiental (EIA), Relatório de Avaliação Ambiental (RAA), Audiência Pública	Autorização de Instalação de Novos Empreendimentos de Produção e/ou Escoamento
Licença de Operação	LO	Marítima: Elaboração do Projeto de Controle Ambiental (PCA)	Autorização do Início da Operação de Produção
Licença de Operação Sísmica (SÍSMICA)	LO	Marítima: Elaboração de Estudo Ambiental (EA)	Autorização da Atividade de Levantamento de Dados Sísmicos Marítimos

Tab. 1 Licenças por etapas de projeto de E&P

Vale ressaltar que a licença prévia de perfuração é a licença inicial do projeto, para que se possa avançar à etapa seguinte: **poços exploratórios**.

Após a interpretação de dados sísmicos, estudos de bacias sedimentares, geração e interpretação de modelos de acumulação etc., são propostas as perfurações de poços exploratórios para se confirmar as análises. O primeiro poço na área denomina-se pioneiro e os demais poços de extensão. Na ocorrência de acumulação de hidrocarbonetos, é obtida uma primeira avaliação do potencial da jazida.

Os **poços de avaliação** marcam a etapa final da fase exploratória e definem, juntamente com os poços exploratórios, as reservas e o potencial de produção da jazida encontrada. Nesta etapa são realizadas operações de testemunhagem, testes de produção e desenvolvidos os modelos de reservatório e simuladores de fluxo.

O **planejamento do desenvolvimento** pode então ser iniciado, após a aquisição dos dados de potenciais de produção e reservas, na fase anterior. Essa etapa define o início da fase de produção e geralmente é dividido em planejamento do **projeto conceitual** e planejamento do **projeto básico**, que se diferenciam apenas pelo nível de detalhamento.

Nesta etapa é realizado todo o planejamento das etapas subsequentes do ciclo de vida de um projeto de E&P: desenvolvimento do campo, produção e operação até chegar na produção marginal e abandono.

O produto final desta fase seria o estudo de EVTE (Estudo de viabilidade técnica econômica), onde um dos seus indicadores mais utilizados é o VLP (Valor presente líquido).

Uma das tarefas mais difíceis nesta etapa é a quantificação de incertezas no processo de avaliação técnico-econômica.

Após a aprovação do projeto básico, inicia-se a etapa de **desenvolvimento do campo** que consiste basicamente em perfurar e completar os poços do campo, construir e instalar a Unidade de Produção (plataforma) e todo o sistema de escoamento da produção. Concomitantemente com a etapa de desenvolvimento, é iniciada a etapa de produção e operação (deve-se sempre antecipar os lucros futuros) com os poços e sistemas já operantes.

A etapa de **produção e operação** corresponde à maior etapa do ciclo de vida do projeto, onde a maior parte dos custos de investimento (CAPEX) já foi realizada, os custos operacionais (OPEX) tornam-se presentes e as receitas crescem com a produção. A eficiência operacional dos sistemas instalados é o indicador principal e reflete a capacidade de realização de todo o potencial de produção estimado. A eficiência operacional esta intimamente ligada à disponibilidade operacional dos sistemas de produção (poços, unidade de produção, sistema de escoamento). Em Jacinto (2005A,B; 2006 B,C,D,E,F,G,H,I; 2007A,B,C,D) encontramos vários estudos de análise de disponibilidade de poços e sistemas de produção reais.

Ao final do declínio de produção (**produção marginal**), os poços e instalações começam a ser desativados (**abandono**). Esta etapa é caracterizada pelos custos operacionais elevados, custos de capital (investimentos em desmobilização dos sistemas) crescentes e receitas marginais pouco ou nada suplantando os custos de OPEX e CAPEX.

### **Incertezas em Projetos de Desenvolvimento de Campos de Petróleo e Gás**

A profunda revisão da física na primeira metade do século XX alterou completamente a visão que tínhamos do universo: considerado determinístico,

funcionando como uma grande máquina e obedecendo às concepções mecanicistas de Galileu e Newton. Conhecida a posição no espaço e no tempo de determinado corpo, era possível prever com exatidão sua trajetória futura. Nessa concepção, não havia lugar ou necessidade de cálculo de probabilidades, pois “Deus não joga dados com o Universo” Bernstein (1997).

No entanto, com o advento da mecânica quântica e o mergulho em direção ao infinitamente pequeno, o princípio da incerteza de Heisenberg e o princípio da complementaridade de Bohr mudaram a visão que tínhamos do Universo, com o desenvolvimento de aplicações da teoria das probabilidades às ciências ditas exatas.

Partindo da Física, esta visão foi compartilhada por outros campos do conhecimento, vindo a alcançar também, a Engenharia de Petróleo.

O desenvolvimento de um campo requer altos investimentos, especialmente em águas profundas e ultra profundas; apresentando um grande número de incertezas envolvendo fatores políticos, econômicos, tecnológicos, ambientais etc.

Se pensarmos em termos de fase exploratória e fase de produção, podemos destacar as seguintes incertezas:

- Fase exploratória: incertezas geológicas.
- Fase de produção: incertezas nos custos de investimentos (CAPEX), custos operacionais (OPEX), Receitas de produção (Curvas de produção de óleo, gás e água).

De uma maneira mais abrangente, as incertezas em um projeto de desenvolvimento de campo de petróleo e gás podem ser vistas como na figura 2 (adaptado da ANI-Área de Negócio Internacional - Petrobras):

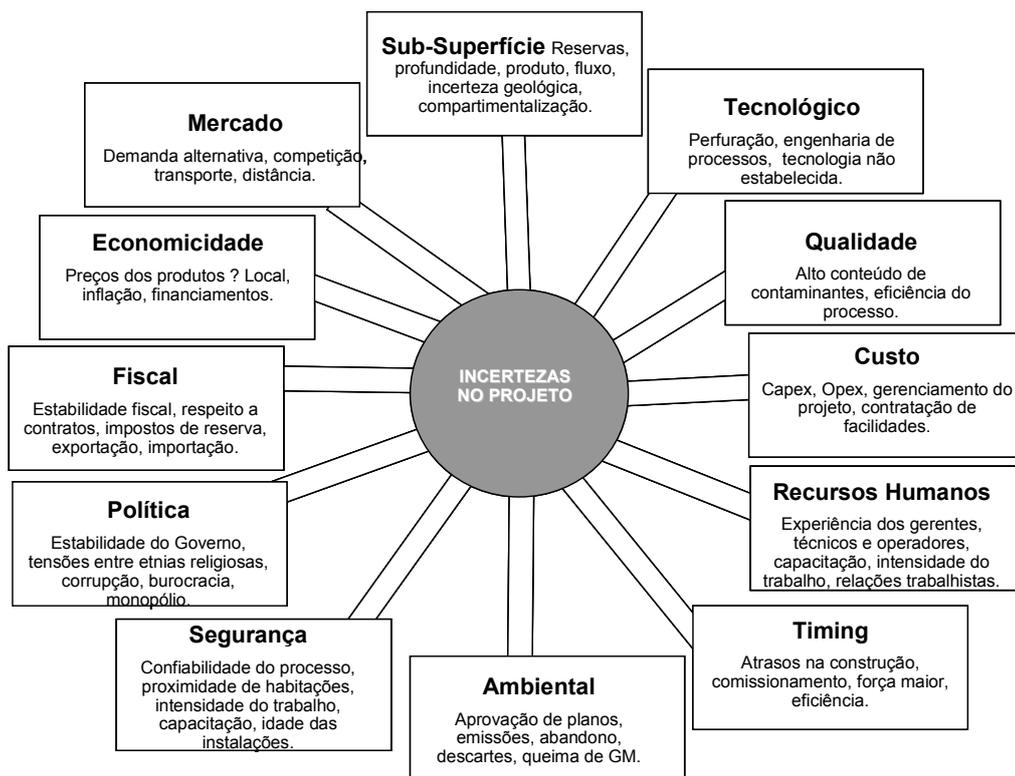


Fig.2 Incertezas em projetos de E&P

**Sub-Superfície:** (Reservas, profundidade, produto, fluxo, incerteza geológica, compartimentalização). Refere-se às incertezas geológicas da fase exploratória e que ainda podem ser notadas na fase de produção, principalmente as incertezas de volume de hidrocarbonetos e água a serem produzidos.

**Tecnológico :** (Perfuração, engenharia de processos, tecnologia não estabelecida). Neste grupo encontram-se as incertezas de base tecnológica e que fazem frente aos desafios da natureza tais como perfuração em camadas de sal, carbonatos, ambientes HPHT (alta pressão e alta temperatura), processamento de óleos pesados etc.

**Qualidade:** (Alto conteúdo de contaminantes, eficiência do processo). Produção de hidrocarbonetos com alto teor de contaminantes (H<sub>2</sub>S, materiais radioativos etc.), incerteza da eficiência do processo de separação de hidrocarbonetos altamente contaminados.

**Custo:** (CAPEX, OPEX, gerenciamento do projeto, contratação de facilidades). Incertezas relativas aos custos de investimento (CAPEX) e custos operacionais (OPEX) e a capacidade de gerenciar essas incertezas do projeto. Os custos CAPEX (capital expenditure) referem-se aos custos dos poços, da unidade de produção, sistema de

escoamento etc. e os custos OPEX (operational expenditure) são os custos para se manter o sistema de produção em funcionamento.

**Recursos Humanos:** (Experiência dos gerentes, técnicos e operadores, capacitação, intensidade do trabalho, relações trabalhistas). Incertezas relacionadas diretamente a confiabilidade humana, ao elemento humano inserido no processo produtivo agressivo. Fatores humanos como capacidade para o trabalho, pressão da corporação, experiência profissional, sobrecarga de trabalho são fatores de incerteza.

**Timing:** (Atrasos na construção, comissionamento, força maior, eficiência). A logística de contratação, entrega de equipamentos e serviços, fatores da natureza impeditivos etc. são algumas fontes de incerteza. Uma ameaça ao início de produção é o descasamento entre o término da construção dos poços e o término da construção da unidade de produção e sistema de escoamento.

**Ambiental:** (Aprovação de planos, emissões, abandono, descartes, queima de gás). Incerteza quanto a mudanças na legislação ambiental ou sua interpretação por parte dos fiscalizadores.

**Segurança:** (Confiabilidade do processo, proximidade de habitações, intensidade do trabalho, capacitação, idade das instalações). Intensivo em fatores humanos e na integridade das instalações, incertezas tipicamente modeladas via confiabilidade de sistemas (confiabilidade de equipamentos, processos, humana e de software).

**Política:** (Estabilidade do Governo, tensões entre etnias religiosas, corrupção, burocracia, monopólio). Incertezas na mudança de cargos-chave na concessão de licenças ou blocos exploratórios, podendo afetar o projeto. Incertezas relativas a conflitos sociais também estão presentes neste aspecto.

**Fiscal:** (Estabilidade fiscal, respeito a contratos, impostos de reserva, exportação, importação). Risco que pode advir de uma incerteza na mudança da legislação fiscal quer municipal, estadual ou federal. Criação de novos impostos sobre a produção também é uma ameaça.

**Economicidade:** (Preços dos produtos, local, inflação, financiamentos). Efeito de variáveis macroeconômicas na economicidade do projeto (tornando o projeto pouco atraente). Possíveis ameaças do aumento do nível de preços e juros de financiamentos de projetos.

**Mercado:** (Demanda alternativa, competição, transporte, distância). Competição acirrada no mercado com a entrada de novos competidores, descoberta e utilização crescente de novas alternativas energéticas, aumento dos custos de transporte etc.

Se imaginarmos um fluxo de projeto, veríamos que as incertezas variam com o tempo e algumas delas ainda persistem até o fim do projeto. Na etapa de seleção de bloco exploratório para se adquirir em um leilão, as incertezas geológicas tendem a ser muito elevadas (salvo se tivermos alguma informação privilegiada a priori) mas, ao mesmo tempo, temos também de levar em conta as condições de mercado, a tecnologia hoje disponível para explorar o bloco (existe desafio tecnológico?), além de outros fatores de risco que podem contribuir para a correta avaliação do investimento: política, segurança, incerteza fiscal, meio ambiente (sanções ambientais), economicidade, recursos humanos etc.

Imaginamos agora que um “framework” adequado deveria abordar todas essas incertezas conjugadas.

### **Análise de Risco e Quantificação de Incertezas em Projetos de Desenvolvimento de Campos de Petróleo e Gás**

Peter Bernstein em seu célebre livro “Contra os Deuses: a extraordinária história do risco” (1996) defende o controle do risco nos mercados financeiros, nas atividades industriais e agrícolas, nas cirurgias médicas, nas construções, campanhas políticas e em todas as atividades em que as decisões envolvam a avaliação de riscos. Se por um lado, como resultado dos avanços tecnológicos e institucionais, ampliou-se vastamente nossa capacidade de controlar o ambiente físico primitivo e torná-lo previsível, por outro lado vivemos numa ordem social de crescente complexidade.

O objetivo da análise de risco, em projetos de desenvolvimento de campos de petróleo e gás é avaliar o efeito das incertezas no resultado econômico, de uma alternativa em planejamento ou execução.

As etapas do processo de análise de risco são:

- Identificar as incertezas
- Quantificar as incertezas
- Construir um modelo de simulação
- Simular a execução do projeto
- Estimar o perfil de risco do projeto (perfil da variável de decisão utilizada na avaliação do projeto)
- Decidir

A quantificação das incertezas pode ser realizada através de diversas técnicas, tais como análise de dados históricos, distribuições de probabilidades, avaliação subjetiva, opinião de especialistas, técnicas de inteligência computacional etc.

A indústria de petróleo historicamente utiliza as técnicas de análise de risco mais intensivamente na fase exploratória do projeto, e na avaliação de reservas, relevando às etapas de produção e operação do campo uma abordagem mais simplista ou nenhuma abordagem. Na tabela 2 apresentamos a classificação das metodologias utilizadas, quanto à complexidade da análise Jonkman (2000):

NÍVEL DE COMPLEXIDADE	METODOLOGIA	
1	Totalmente determinística	Caso base em sensibilidades
2	Determinística com uso de faixas de valores	Nível 1 e gráfico de tornado
3	Simulação de Monte Carlo	Introdução de incertezas via probabilidades e simulação (dependência linear)
4	Abordagem totalmente integrada, multidisciplinar e probabilística	Leva em conta todas as incertezas e o ciclo de vida do projeto

Tab. 2 Metodologias para diferentes níveis de complexidade

### **Avaliação Econômica em Projetos de Desenvolvimento de Campos de Petróleo e Gás**

O desenvolvimento de um campo de petróleo, além de intensivo em capital, possui um perfil de maturação longo, ou seja, a amortização dos investimentos se dá em longo prazo. Além disso, apresenta outros aspectos importantes como a exposição total ao risco, que deve ser quantificada. O risco do projeto é visto como o somatório do risco tecnológico, risco financeiro, político, de mercado, entre outros. A escolha da tecnologia a ser utilizada no projeto é de suma importância, assim como a quantificação de seus impactos no negócio em si.

A engenharia econômica utiliza um conjunto de métodos e técnicas para a quantificação e avaliação dos riscos financeiros envolvidos nos projetos e fornece critérios para uma comparação consistente entre opções de investimento tecnicamente viáveis.

De uma maneira geral, é importante para uma decisão econômica consistente, reconhecer e definir claramente todas as possíveis alternativas de projetos e quantificar as conseqüências esperadas de cada alternativa, através de seu perfil de risco e ao longo do seu ciclo de vida.

Os indicadores econômicos mais utilizados para determinar a rentabilidade de um projeto de desenvolvimento de campo de petróleo e gás são a TIR (taxa interna de retorno), a ROI (“return over investment”, ou retorno sob investimento) e o VPL (valor presente líquido). A TIR é a taxa de juros que iguala os valores de custos e receitas no tempo inicial, tornando o fluxo de caixa nulo. ROI é definido como sendo a razão entre o lucro líquido e a soma de todos os investimentos atualizados; indicando quantas unidades monetárias serão obtidas para cada unidade monetária investida. O VPL representa o resultado da realização de um projeto, transportando para o tempo inicial todos os custos e receitas a uma determinada taxa de desconto.

No caso do desenvolvimento de campos, o VPL é a diferença entre o valor presente do campo e o valor presente da soma dos investimentos a serem feitos e custos operacionais.

Um modelo consistente de modelagem dos resultados financeiros do desenvolvimento de um campo pode ser visto em Jacinto (2002 C), onde temos:

$$\tilde{R}F_k = \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n=h} (V_{prod_i} \times P_{brent_i}) - C_{Tk_i} \right) \times T_{desc_i} \right\} - I$$

onde:

*$\tilde{R}F$  = Resultados Financeiros (em “UM” – unidades monetárias) da tecnologia “k” no horizonte h de análise, em valor presente. É uma variável aleatória devido à combinação de variáveis aleatórias no seu cálculo. As incertezas das variáveis do modelo são propagadas temporalmente até o resultado financeiro no tempo da tomada de decisão (valor presente).*

$I$  = Impostos totais. Podendo ser associada uma incerteza a essa variável (incerteza política).

$V_{\tilde{prod}_i}$  = Volume produzido em  $i$ . É uma variável aleatória devido às incertezas de reservatório.

$P_{\tilde{brent}_i}$  = Preço do barril de petróleo do tipo Brent em  $i$ . É uma variável aleatória, devido às incertezas de mercado no médio e longo prazo, podendo ser modelada por um processo estocástico.

$C_{\tilde{T}k_i}$  = Custo total de implantação da tecnologia “ $k$ ” em  $i$ .

$T_{\tilde{desc}_i}$  = Taxa de desconto em  $i$ . É uma variável aleatória, devido às incertezas de mercado no médio e longo prazo, podendo ser modelada por um processo estocástico.

**Calculando o custo total de implantação da tecnologia “ $k$ ”:**

$C_{\tilde{T}k_i}$  = Custo dos poços a serem construídos + [Custo dos workovers + Lucro cessante (quando ocorrer o workover)]  $\times P(\text{workover})$  + Custo da UP (unidade de produção) + Custo interligação poços + Custo operacional (exceto workover)

**Custo dos poços a serem construídos** = Custo fixo + Custo variável

**Custo fixo** =  $C_{f_j}$  = custos de equipamentos, contratos, serviços, overhead, entre outros.

**Custo variável** =  $\sum_{i,j=1}^{h,n} (top_j \times P_{(sonda / dia)_i})$  = varia com o tempo de sonda gasto nas operações, multiplicado pelo valor da sonda ao dia. É uma variável aleatória, calculada através da simulação de montecarlo.

**Custo dos workovers** =  $\tilde{top}w_j \times P_{(sonda / dia)_i} + Cfw_j = \text{Custo fixo} + \text{Custo variável}$  (análogo ao Custo variável dos poços). O workover é uma intervenção, um conjunto de operações que serão realizadas para a manutenção do poço, do sistema de elevação ou do reservatório. É uma variável aleatória, calculada através da simulação de montecarlo.

**Lucro cessante** =  $(Vprod_j \times P_{brent_i})$  = é o montante (produção multiplicado pelo preço do Brent) que deixou de ser produzido durante o workover. Apesar da riqueza se manter constante (não há destruição de valor), devemos calcular o lucro que deixou de ser gerado pela parada para manutenção do poço, sendo contabilizado como perda. É uma variável aleatória, calculada através da simulação de montecarlo.

**P(workover)** =  $p(w_j)_i$  = é a probabilidade de ocorrência de um tipo de workover específico no tempo i.

**Custo da UP (unidade de produção)** =  $Cup_i$  = custo de construção da UP.

**Custo interligação poços** =  $(Cip_j)_i$  = custo de interligação dos poços até a UP.

**Custo operacional (exceto workover)** =  $Cop_i$  = custos do sistema produtivo (pessoal, insumos ,manutenção da UP, transporte,entre outros.), em operação, sem contabilizar os workovers.

Temos então:

$$\tilde{CT}_{k_i} = \sum_{i,j=1}^{h,n} (\tilde{top}_j \times P_{(sonda / dia)_i} + Cfw_j)_i + (Cip_j)_i + [\tilde{top}w_j \times P_{(sonda / dia)_i} + Cfw_j + (Vprod_j \times P_{brent_i})]_i \times p(w_j)_i + Cup_i + Cop_i$$

onde:

$h =$  Horizonte de análise

$i =$   $i$ -ésimo período de tempo

$j =$   $j$ -ésimo poço

## **CAPÍTULO 3**

# **ACOPLAMENTO, SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA**

Existem três formas básicas de se tentar preencher o vácuo do futuro. A previsão trabalha com a noção de provável e responde a pergunta: o que será? A delimitação do campo do possível opera com a idéia de exequível e responde a pergunta: o que pode ser? E a expressão da vontade trabalha com a noção de desejável e responde a pergunta: o que gostaríamos de obter?

As relações entre esses modos de conceber o futuro não são triviais. Se o desejável não respeitar os limites do possível, ele se torna vazio (quando não trágico). Os fenômenos físicos e os sociais se comportam da mesma maneira. Neste capítulo são apresentados os conceitos fundamentais da tese, onde são tratados importantes problemas encontrados na modelagem de sistemas complexos: o acoplamento entre variáveis de entrada de modelos, a simulação de variáveis com dependência; e a otimização sob incerteza utilizando processos de decisão markoviano com otimização de políticas de decisão.

### **3.1 Metodologia:**

As diferentes metodologias existentes para se avaliar a estratégia de desenvolvimento de campo de petróleo e gás, de uma maneira geral não contemplam os aspectos de incertezas em seus elementos constituintes. A abordagem econômica tradicional possui uma visão macro altamente agregada e de baixa precisão, onde a idéia predominante é a valoração do projeto através do cálculo do fluxo de caixa descontado (VPL - valor presente líquido). O foco da análise econômica tradicional é na captação dos recursos para financiamento do projeto e composição da carteira de investimentos; onde as incertezas estão “contabilizadas” no fluxo de caixa (apesar de não serem quantificadas apropriadamente). Algumas correntes defendem a idéia de valoração econômica através de opções reais (“real options”), mas, como podemos ver na tabela 3,

os fundamentos do mercado de desenvolvimento de campos de petróleo e gás; e o mercado de capitais, são bem diferentes:

FUNDAMENTOS	STOCK MARKET	E&P MARKET
Tipos de incertezas.	Incerteza dos retornos.	Incertezas locais, globais (política, preços etc.), eventos raros e outros.
Medidas de risco.	Volatilidade.	Custos e receitas sob risco.
Natureza dos mercados.	Mercado eficiente, negocia apenas ações e títulos.	Mercado ineficiente, existem barganhas e negociações. Idéia de valor diferente para cada player, negocia prospectos, desenvolvimento de campos etc.
Timing	Não modela o tempo explicitamente, as ações podem ser vendidas e compradas a qualquer tempo.	Deve modelar o tempo explicitamente, projetos de E&P são de longo prazo (cash flow).
Efeito orçamentário.	Ignora o tamanho do orçamento (1 R\$ eficiente é o mesmo que R\$ 1.000.0000 eficientes).	Dependem do orçamento e otimizam o portfólio de acordo com o tamanho do budget.

Tab.3 Características dos mercados de ações e de E&P

A abordagem com a visão da engenharia de reservatórios é focada na redução das incertezas de reservatório, utilizando técnicas de simulação numérica do escoamento multifásico em meio poroso e que tem como resultado final a produção no tempo. Dessa forma, essa abordagem contempla apenas uma parte do problema (incertezas nas receitas e custos via atraso na entrega e comissionamento da Unidade de Produção – UP). A visão da engenharia de superfície (responsável pela construção da UP e facilidades de produção) esta estreitamente ligada à redução das incertezas na construção da UP, que geram incertezas nas receitas e custos via atraso na entrega da UP. Essa abordagem não enxerga a redução temporal da incerteza e estratégia ótima de desenvolvimento do campo.

A engenharia de poços e submarina tem como foco a redução das incertezas na construção, manutenção e descomissionamento dos poços e equipamentos submarinos.

Responde por cerca de 60 a 70 % dos custos de desenvolvimento do campo (poço completado e interligado na UP). Da mesma forma que as demais visões, enxerga apenas uma parte do problema e possui as maiores fontes de incerteza no projeto.

Podemos observar que a conjunção de todas as visões mencionadas, através da construção de um “framework”, possibilitará a unificação e estudo conjunto da estratégia de desenvolvimento do campo; permitindo também o estabelecimento de uma métrica única de comparação de diferentes estratégias e uma resposta rápida aos riscos.

Apresentamos na figura 3 a metodologia proposta:

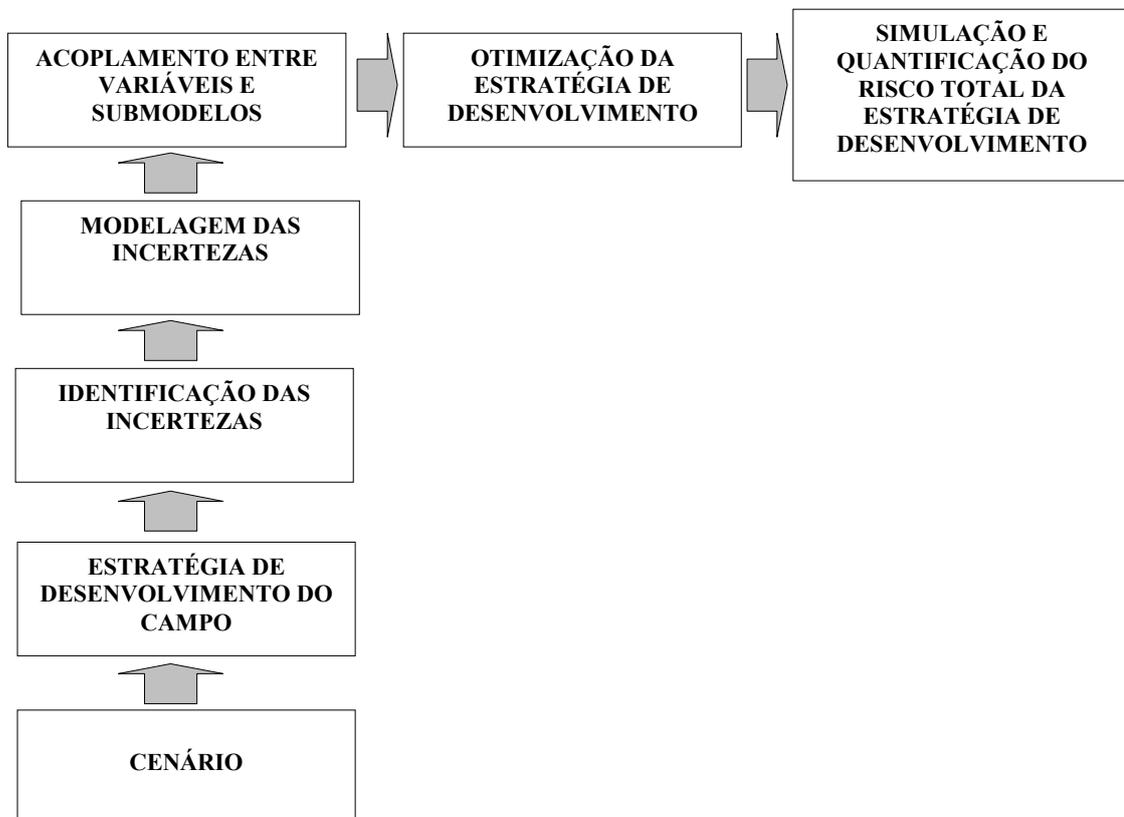


Fig.3 Metodologia

A metodologia consiste das seguintes etapas:

### **Cenário**

Nesta etapa inicial da metodologia, o cenário onde se dará o desenvolvimento do campo é contextualizado, sendo incorporados nessa análise os mercados interno e externo, a oportunidade econômica, e os desafios tecnológicos se houver. A etapa seguinte de definição da estratégia de desenvolvimento se dá, após diversos

“workshops” com especialistas das várias disciplinas necessárias (engenharia de reservatórios, engenharia de poços, engenharia submarina, engenharia de instalações, economistas etc.), para se compor as estratégias possíveis de desenvolvimento.

### **Estratégia de desenvolvimento do campo**

As estratégias elaboradas para o desenvolvimento do campo, no cenário estudado, são descritas em relação aos recursos que serão necessários à construção do campo, com todas suas facilidades e focada numa determinada escolha tecnológica. Essas estratégias descrevem também o número de poços necessários, os tipos de poços (geometria, fluido, função, cronograma de perfuração e completação etc.); produção esperada de óleo, gás, água, capacidade de processamento da UP, tipo construtivo da UP, sistema de coleta e escoamento da produção, dentre outros.

As incertezas precisam ser identificadas para que as estratégias elencadas possam ser devidamente avaliadas.

### **Identificação das incertezas**

Através de métodos de educação do conhecimento de especialistas, entrevistas, “brainstorms” e análise de dados históricos, as incertezas das estratégias são identificadas. As fontes de incerteza em projetos dessa natureza já foram apresentadas no capítulo 2 deste trabalho (seção 2.2).

### **Modelagem das incertezas**

A modelagem das incertezas consiste em realizar uma abordagem específica para cada fonte de incerteza identificada. A estratégia de modelagem deve contemplar não só as características e peculiaridades do sistema mas, também, as dependências entre as variáveis do modelo. Técnicas de simulação de Monte Carlo, processos estocásticos, inteligência artificial, confiabilidade de sistemas etc. são comuns nesses tipos de modelagem.

### **Acoplamento entre variáveis**

As variáveis aleatórias dependentes de entrada dos modelos; tem o seu acoplamento realizado através de funções cópulas, se necessário.

### **Otimização da estratégia de desenvolvimento**

A estratégia adotada baseia-se no processo de decisão Markoviano, onde para cada estado possível da cadeia de Markov, nós fazemos uma decisão sobre quais ações alternativas devem ser tomadas em cada estado. Esta ação afeta as probabilidades de transição entre os estados, os custos ou receitas imediatos e os custos ou receitas subseqüentes do projeto. Nós queremos escolher as ações ótimas para os respectivos estados, quando consideramos tanto os custos imediatos como os subseqüentes.

### **Simulação e quantificação do risco total da estratégia de desenvolvimento**

Nesta etapa final da metodologia, o modelo de simulação que unifica o framework é simulado. Dessa forma, o risco total sob incerteza é quantificado; e a apuração dos resultados monetários providos pelas diferentes estratégias, durante o ciclo de vida produtivo do projeto é calculado.

## **3.2 Acoplamento entre Variáveis**

O acoplamento entre variáveis de entrada de um modelo de quantificação de incertezas, pode ser descrito através de funções que descrevem a dependência entre elas.

Se as variáveis são independentes, implica que podem ser geradas de acordo com uma grande variedade de distribuições univariadas comuns. Mas, se as variáveis são correlacionadas e não possuem uma distribuição conjunta multivariada padrão, torna-se muito difícil sua modelagem.

O uso de cópulas leva à construção de uma distribuição multivariada através da especificação das suas distribuições marginais univariadas, e a escolha de um tipo particular de cópula para prover a estrutura de correlação entre as variáveis. Em outras palavras, podemos construir uma distribuição multivariada pela especificação das distribuições univariadas marginais e então escolher uma cópula particular para

construir a estrutura de correlação entre as variáveis. As cópulas são funções que descrevem dependências entre variáveis, e fornece uma forma de se criar distribuições para modelar dados multivariados correlacionados.

Para realizarmos uma simulação de Monte Carlo, devemos escolher uma distribuição de probabilidade de cada variável de entrada (input) randômica e a dependência entre elas. Se negligenciarmos essas relações de dependência, podemos chegar a conclusões erradas do modelo simulado.

Nesta tese pretendemos prover aplicações simples para o uso prático de cópulas para o gerenciamento do risco.

Um tratamento matemático completo do assunto pode ser visto em Nelsen (1999).

### **Dependência entre variáveis de entrada de modelos de simulação.**

Uma das decisões de modelagem em simulação de Monte Carlo é a escolha de distribuições de probabilidade para as variáveis aleatórias de entrada do modelo. A seleção de uma distribuição de probabilidade para cada variável é geralmente uma tarefa de baixa complexidade porém, decidir quais dependências devem existir entre as variáveis aleatórias de entrada do modelo é tarefa complexa. De forma ideal as variáveis de entrada para simulação devem refletir o que é conhecido acerca das dependências entre as quantidades reais que estão sendo modeladas. De maneira geral existe pouca ou nenhuma informação para nos basearmos para a construção das relações de dependência entre as variáveis e, nesse caso, devemos experimentar entre diferentes possibilidades de modelagem de forma a determinar a sensibilidade do modelo. A geração de variáveis aleatórias de entrada de modelos de simulação com dependência não é trivial, quando essas variáveis possuem distribuições de probabilidade multivariadas diferentes das usuais. Além disso, algumas das distribuições multivariadas padrão podem modelar somente um número limitado de tipos de dependências. É sempre possível admitir a independência entre as variáveis aleatórias de entrada do modelo de simulação mas, podem levar a resultados e conclusões equivocadas na análise dos resultados da simulação do fenômeno.

Para ilustrar o exposto, imaginemos uma simulação de Monte Carlo para modelar o tempo gasto na perfuração de um poço de petróleo, que possui apenas duas operações e que tem os seus tempos de execução modelados por variáveis aleatórias lognormais. Uma questão importante é saber como a dependência entre essas variáveis afeta os

resultados da simulação para cálculo do tempo total. Certamente se soubermos através de dados reais (ou especialistas) que as mesmas condições de aleatoriedade afetam as duas variáveis aleatórias dos tempos das operações, mas se ignorarmos essa dependência na simulação, teremos resultados errôneos ao final da simulação.

### **Implicações em se considerar independentes variáveis que são dependentes**

Consideremos  $T_1, T_2, \dots, T_K$  como variáveis aleatórias que representam os tempos relativos a execução de cada uma das operações de construção do poço. Então, sabemos que a media ou valor esperado e a variância do tempo total de construção do poço :  $T = T_1 + T_2 + \dots + T_K$  são dados por:

$$E(T) = \sum_{k=1}^K E(T_k), \text{ e}$$

$$Var(T) = \sum_{k=1}^K Var(T_k) + 2 \sum_{k=1}^K \sum_{k' < k}^{K-1} Cov(T_k, T_{k'}),$$

onde  $E(T_k)$  e  $Var(T_k)$  são, respectivamente, o valor da media e a variância de cada  $T_k$ , e  $Cov(T_k, T_{k'})$  é a covariância entre  $T_k$  e  $T_{k'}$ .

A covariância é uma medida de dependência entre dois valores randômicos e é igual a zero quando eles são independentes. Dessa forma, ao menos que todas as covariâncias entre as variáveis randômicas sejam zero, a variância de  $T$  não será igual a soma das variâncias individuais. Como a covariância pode ser tanto positiva como negativa, se considerarmos independentes variáveis que são dependentes; uma variável pode terminar com um valor de variância do tempo total bastante diferente, abaixo ou acima do valor verdadeiro.

Como podemos ver, a dependência não afeta a média do tempo total, mas ela pode afetar muito a sua variância, a qual afetará os valores extremos da distribuição de tempo total, como P10 e P90, por exemplo.

Na tabela 4 observamos a estatística de três valores de  $\rho$  (sigma-coeficiente de correlação de Pearson); onde  $X$  e  $Y$  são variáveis randômicas normais com médias 30 e 40, e variâncias 25 e 64, respectivamente. Temos também as estatísticas relativas a  $T = X + Y$  para três diferentes valores de  $\rho$ .

Tipo de dependência	P10	P25	Média P50	P75	P90	Variância
$\rho = 0$ (independência)	57.9	63.6	70	76.4	82.1	89
$\rho = 0,8$ (dependência positiva)	54.1	61.7	70	78.3	85.9	153
$\rho = -0,8$ (dependência negativa)	63.6	66.6	70	73.4	76.4	25

Tab. 4 Coeficientes de correlação e percentis

Dessa maneira, é muito importante considerarmos dependência quando geramos dados bivariados ou de maior dimensão.

### Gerando dados multidimensionais - Cópulas

Para gerar dados multidimensionais, devemos conhecer a distribuição conjunta das variáveis aleatórias. Para dimensão 2,  $H(x, y) = \text{Prob}(X \leq x, Y \leq y)$ . Considerando independência,  $H(x, y) = F1(x) F2(y)$ , onde  $F1(x)$  e  $F2(y)$  são as distribuições marginais (unidimensionais) de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Deste modo, no caso de independência, é suficiente conhecer as duas distribuições marginais para construir a distribuição conjunta. Quando temos dependência entre as variáveis aleatórias, além de conhecer as distribuições marginais (unidimensionais) de  $X$  e  $Y$ , teremos também de conhecer o tipo e a extensão da dependência entre elas.

Cópulas são funções que associam um ponto em uma unidade quadrada  $[0,1] \times [0,1]$ , para duas dimensões, a um ponto no intervalo  $[0,1]$ . Com maior generalidade, cópula é uma função  $C : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  com as seguintes propriedades:

$C(u_1, u_2, \dots, u_n)$  é crescente em cada argumento  $u_i \in [0,1]$ ,  $i=1,2,\dots,n$ ;

$C(1, 1, \dots, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  para todo  $i$ ;

Para todo  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in [0,1]^n$  com  $a_i \leq b_i$ , temos:

$$\sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0,$$

com  $u_{j1} = a_j$  e  $u_{j2} = b_j, j=1, \dots, n$ .

Um exemplo de copula bidimensional, um parâmetro é a seguinte função:

$$C_\theta(u, v) = \left( -\frac{1}{\theta} \right) \cdot \ln \left\{ 1 + \frac{[e^{-\theta u} - 1] \cdot [e^{-\theta v} - 1]}{e^{-\theta} - 1} \right\}$$

com o parâmetro  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Essa cópula é conhecida como cópula de Frank.

Diversos exemplos de copulas podem ser vistos em Nelsen (1999).

Se considerarmos  $u = F_1(x)$  e  $v = F_2(y)$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  são distribuições unidimensionais quaisquer, associadas a duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , então uma distribuição conjunta de  $X$  e  $Y$  com parâmetro de dependência  $\theta$  é:

$$H(x, y) = C_\theta(F_1(x), F_2(y)) = \left( -\frac{1}{\theta} \right) \cdot \ln \left\{ 1 + \frac{[e^{-\theta F_1(x)} - 1] \cdot [e^{-\theta F_2(y)} - 1]}{e^{-\theta} - 1} \right\}$$

Por isso, usando esta abordagem, podemos construir distribuições conjuntas de quaisquer distribuições unidimensionais. Por exemplo, se  $F_1$  é a função de distribuição acumulada de uma distribuição triangular, com parâmetros  $\alpha < \beta < \gamma$ , e  $F_2$  é a função de distribuição acumulada de uma distribuição exponencial, com média  $\mu$ , então:

$$H(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{for } x < \alpha \text{ and } y < 0, \\ -\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 + \frac{e^{-\frac{\theta(x-\alpha)^2}{(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)}} \cdot [e^{-\theta(1-e^{-\frac{y}{\mu}})} - 1]}{e^{-\theta} - 1} \right\}, & \text{for } \alpha \leq x < \beta \text{ and } y \geq 0, \\ -\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 + \frac{[e^{-\theta \left( 1 - \frac{(\gamma-x)^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right)} - 1] \cdot [e^{-\theta \left( 1 - e^{-\frac{y}{\mu}} \right)} - 1]}{e^{-\theta} - 1} \right\}, & \text{for } \beta \leq x < \gamma \text{ and } y \geq 0, \\ 1 - e^{-\frac{y}{\mu}}, & \text{for } x \geq \gamma \text{ and } y \geq 0. \end{cases}$$

Toda a informação sobre a dependência entre duas variáveis aleatórias está no parâmetro  $\theta$ , cujo valor pode ser interpretado quanto à medida de associação  $\tau$  de Kendall.

No nosso contexto, é importante termos a dependência entre as variáveis aleatórias expressas em relação a um coeficiente como  $\tau$  de Kendall, porque ele não é afetado por transformações das variáveis aleatórias. Ele assume valores no intervalo  $[-1, 1]$ , sendo negativo quando as duas variáveis são negativamente correlacionadas, e positivo quando eles são positivamente correlacionados.

Quanto mais perto  $\tau$  é de 1 (ou -1), mais forte é a dependência entre as duas variáveis. O valor nulo de  $\tau$  significa nenhuma correlação. Podemos observar que  $\tau$  e  $\theta$  estão relacionados um a outro pela seguinte expressão:

$$\tau = \tau(X, Y) = 4 \cdot \int_0^1 \int_0^1 C_\theta(u, v) \cdot \left[ \frac{\partial^2 C_\theta(u, v)}{\partial u \partial v} du dv \right] - 1$$

Para a copula de Frank, temos:

$$\tau = 1 - \frac{4 \cdot [1 - D(\theta)]}{\theta}, \text{ onde } D(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt$$

Outra vantagem de copulas é que existem algoritmos que podem ser implementados para gerar dados dependentes. Apresentamos abaixo um algoritmo para a copula de Frank:

Gerar  $u$  e  $w$  a partir de duas distribuições independentes  $U[0, 1]$ ;

Avaliar, para um dado  $\theta$  (ou  $\tau$ ),

$$v = C_{V|U}^{-1}(u, w) = \frac{1}{\theta} \cdot \ln \left\{ \frac{w \cdot e^{-\theta} + e^{-\theta u} - w \cdot e^{-\theta u}}{e^{-\theta u} - w \cdot e^{-\theta u} + w} \right\};$$

Avaliar  $x = F_1^{-1}(u)$  e  $y = F_2^{-1}(v)$ . O par  $(x, y)$  é um par de números aleatórios com dependência definida por  $\theta$  (ou  $\tau$ );

Repetir 1–3 para gerar o número de pares desejados.

No anexo 1 apresentamos um tutorial útil sobre o tema, com mais detalhes sobre a construção de cópulas, utilizando MATLAB.

### 3.3 Otimização sob incerteza e processo de decisão Markoviano

Algumas decisões necessitam levar em conta a incerteza sobre muitos eventos futuros, em um contexto. Os modelos probabilísticos para processos que se desenvolvem no tempo, de uma forma probabilística são os chamados processos estocásticos. Um específico processo estocástico é denominado cadeia de Markov. As cadeias de Markov possuem uma propriedade específica na qual as probabilidades envolvidas em como o processo irá se desenvolver no futuro dependem apenas do estado presente do processo; sendo considerados eventos independentes dos eventos do passado.

Muitos processos se adequam nessa descrição e podem ser abordados através de cadeias de Markov.

#### Processos estocásticos

Um processo estocástico é definido como uma coleção de variáveis randômicas  $\{X_t\}$ , onde o índice  $t$  opera através de um dado conjunto  $T$ . Frequentemente  $T$  é considerado como um conjunto de inteiros não negativos, e  $X_t$  representa a característica mensurável de interesse no tempo  $t$ .

Processos estocásticos são importantes para descrever o comportamento de um sistema operando em um dado período de tempo.

Um processo estocástico geralmente possui a seguinte estrutura:

O status corrente do sistema pode cair em qualquer uma das categorias exclusivas  $(M+1)$  denominados estados. Por conveniência notarial, esses estados são classificados como  $0, 1, \dots, M$ . A variável randômica  $X_t$  representa o estado do sistema no tempo  $t$ , então seus valores possíveis são  $0, 1, \dots, M$ . O sistema é observado em pontos particulares no tempo, denominados  $t=0, 1, 2, \dots$ . Dessa forma, o processo estocástico  $\{X_t\} = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$  provê a representação matemática de como o status do sistema físico evolui no tempo. Esse tipo de processo é dito como processo estocástico discreto com um espaço finito de estados.

## Cadeias de Markov (definição)

Suposições acerca da distribuição conjunta de  $X_0, X_1, X_2, \dots$  são necessárias para se obter resultados analíticos. Uma suposição que permite um tratamento analítico é considerar o processo estocástico como uma cadeia de Markov, a qual possui a seguinte propriedade chave:

Um processo estocástico  $X_t$  possui a propriedade markoviana se  $P\{X_{t+1} = j / X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}$ , para  $t=0, 1, 2, \dots$  e toda seqüência  $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$ .

A propriedade markoviana diz que a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e o presente estado  $X_t = i$ , é independente do evento passado e depende apenas do estado presente (atual).

Um processo estocástico  $\{X_t\} = (t=0, 1, \dots)$  é uma cadeia de Markov se possui a propriedade markoviana descrita acima.

As probabilidades condicionais  $P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}$  para uma cadeia de Markov são denominadas probabilidades de transição.

Se, para  $i$  e  $j$ ,  $P\{X_{t+1} = j / X_t = i\} = P\{X_1 = j / X_0 = i\}$ , para todo  $t=0, 1, 2, \dots$ , então as probabilidades de transição são ditas estacionárias.

Dessa forma, as probabilidades de transição estacionárias indicam que as probabilidades de transição não mudam no tempo. A existência das probabilidades de transição estacionárias também implica que, para cada  $i, j$  e  $n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ),  $P\{X_{t+n} = j / X_t = i\} = P\{X_{n+j} = j / X_0 = i\}$  para todo  $t=0, 1, 2, \dots$ .

Essas probabilidades condicionais são ditas probabilidades de transição n-passos (n-step).

Para simplificar a notação com as probabilidades de transição estacionárias, temos:

$$P_{ij} = P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}$$

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_{t+n} = j / X_t = i\}$$

Então, a n-step probabilidade de transição  $P_{ij}^{(n)}$  é apenas a probabilidade condicional de o sistema estar no estado  $j$  após exatamente n-steps (unidades de tempo), dado que ele inicia no estado  $i$  em qualquer tempo  $t$ . Quando  $n=1$  temos que  $P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$ .

Devido às  $P_{ij}^{(1)}$  serem probabilidades condicionais, elas devem ser não-negativas, e desde que o processo deve fazer uma transição em algum estado, elas devem satisfazer as propriedades:

$$P_{ij}^{(n)} \geq 0 \text{ para todo } i \text{ e } j, n=0,1,2,\dots \text{ e}$$

$$\sum_{j=0}^M P_{ij}^{(n)} = 1 \text{ para todo } i, n=0,1,2,\dots$$

Um jeito conveniente de mostrar todas as n-step probabilidades de transição é uma matriz:

$$P^{(n)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \textit{Estado} & 0 & 1 & \dots & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ M \end{matrix} & \begin{matrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \dots & p_{1M}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \dots & p_{MM}^{(n)} \end{matrix} \end{matrix}$$

As cadeias de Markov consideradas aqui possuem as seguintes propriedades:

- 1) Finito número de estados.
- 2) Probabilidades de transição estacionárias.

Abaixo observamos uma representação de uma cadeia de Markov:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \textit{Estado} & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left| \begin{matrix} 0,08 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{matrix} \right| \end{matrix}$$

A cadeia de Markov pode incorporar arbitrariamente a história do sistema, mas, a um aumento significativo do número de estados.

No anexo 2 são apresentados em maiores detalhes as técnicas descritas nessa secção.

### **Otimização Sob Incerteza e Processo de Decisão Markoviano**

Muitos dos processos que ocorrem na natureza e na sociedade podem ser estudados (pelo menos em primeira aproximação) como se o fenômeno estudado passasse, a partir de um estado inicial, por uma seqüência de estados, onde a transição de um determinado estado para o seguinte ocorreria segundo uma certa probabilidade. No caso em que essa probabilidade de transição depende apenas do estado em que o fenômeno se encontra e do estado a seguir, o processo será chamado de processo de Markov e uma seqüência de estados seguindo este processo será denominada uma cadeia de Markov. Uma consideração simplificadora é a que as probabilidades de transição não se alteram com o tempo mas, mesmo assim são obtidas valiosas informações com o modelo, a fim de se fazer previsões do comportamento de certos fenômenos.

#### **Processo de Decisão Markoviano (Markov Decision Process – MDP)**

A cada momento no tempo observado, a cadeia de Markov pode estar em qualquer um dos estados. Dado o estado atual, a matriz de transição nos dá as probabilidades para qual estado ele estará indo.

Muitos sistemas importantes (como sistemas em fila) podem ser modelados tanto como cadeias de Markov em tempo discreto como contínuo. Ela é útil para descrever o comportamento de um sistema de forma a avaliar a sua performance. Contudo, ela é mais útil para o projeto operacional do sistema do que para otimizar a sua performance.

Iremos focar em como projetar a operação de um sistema via cadeia de Markov discreta e otimizar a sua performance. Melhor que aceitar passivamente o desenho (estrutura) da cadeia de Markov do sistema e a sua correspondente matriz de transição fixa (inalterável), iremos agora trabalhar de forma pró-ativa: para cada possível estado da cadeia de Markov, nós faremos uma decisão sobre qual das múltiplas ações alternativas devem ser tomadas em dado estado. As ações escolhidas afetam as

probabilidades de transição como também os custos (ou receitas) imediatas e subseqüentes) da operação do sistema. Nós queremos escolher as ações ótimas para os respectivos estados quando consideramos os custos (ou receitas) imediatos como os subseqüentes.

Este processo decisório é conhecido como processo de decisão Markoviano.

### **Um modelo para processos de decisão de Markov**

- 1) O estado  $i$  de uma cadeia de Markov é observado após cada transição  $i = (0, 1, \dots, M)$ .
- 2) Após cada observação, uma decisão (ação)  $k$  é escolhida de um conjunto de  $k$  possíveis decisões ( $k=1, 2, \dots, K$ ), onde algumas das  $K$  decisões não são relevantes para alguns estados.
- 3) Se a decisão  $d_i = k$  é feita no estado  $i$ , um custo imediato incorre e que possui um valor esperado de  $C_{ik}$ .
- 4) A decisão  $d_i = k$  no estado  $i$  determina que probabilidades de transição serão para a próxima transição do estado  $i$ . Denotamos essas probabilidades de transição por  $p_{ij}(x)$ , para  $j=0, 1, \dots, m$ .
- 5) Uma especificação das decisões para os respectivos estados ( $d_0, d_1, \dots, d_m$ ) prescrevem uma política para um processo de decisão de Markov.
- 6) O objetivo é encontrar uma política ótima de acordo com algum critério de custo o qual considera tanto os custos imediatos como os subseqüentes, que resultam da futura evolução do processo. Um critério comum é minimizar o custo médio esperado de longo prazo por unidade de tempo.

Uma política é dita estacionária, isto é, para qualquer estado  $i$  do sistema, a regra de decisão é a mesma, indiferentemente do valor do tempo corrente  $t$ . Uma política é determinística, onde para qualquer estado  $i$  do sistema, a regra de decisão escolhe uma decisão particular. Nas políticas de decisão randômicas, uma distribuição de probabilidade é utilizada para se tomar a decisão.

O custo médio esperado de longo prazo (longo prazo indica que a média deve ser interpretada como sendo obtida de um tempo extremamente longo, de tal forma que

o efeito do estado inicial desapareça, onde o custo médio atual por unidade de tempo converge para o custo médio esperado por unidade de tempo) pode ser calculado:

$$E(c) = \sum_{i=0}^M c_{ik} \pi_i,$$

Onde  $k = d_i(R)$  para cada  $i$  e  $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_M)$  representa a distribuição de estado estacionário do estado do sistema sobre a política  $R$  sendo avaliada.

### Programação linear e políticas ótimas

Uma política determinística (estacionária)  $R$  pode ser vista como regras que prescrevem a decisão  $d_i(R)$  sempre que o sistema estiver no estado  $i$ , para cada  $i = (0, 1, \dots, M)$ . Então  $R$  é caracterizado pelos valores  $\{d_0(R), d_1(R), \dots, d_M(R)\}$ .

De forma equivalente,  $R$  pode ser caracterizado pela nomeação desses valores.

		<i>Decisão K</i>			
		1	2	...	K
<i>Estado</i>	0	$D_{01}$	$D_{02}$	...	$D_{0K}$
	1	$D_{11}$	$D_{12}$	...	$D_{1K}$
	.	...	...	...	...
	M	$D_{M1}$	$D_{M2}$	...	$D_{MK}$

Onde cada  $D_{ik}$  ( $i = 0, 1, \dots, M$  e  $k = 1, 2, \dots, K$ ) é definido como:

$D_{ik} = 1$ , se a decisão  $K$  é feita no estado  $i$

$= 0$ , caso contrário.

Então, cada fila da matriz contém apenas o algarismo 1 com o resto dos elementos zero.

## Políticas randômicas

A introdução de  $D_{ik}$  traz a motivação para a formulação de uma programação linear. É esperado que o custo esperado de uma política possa ser expresso como uma função linear de  $D_{ik}$  ou uma variável relacionada sujeito às restrições lineares. Infelizmente, os valores de  $D_{ik}$  são inteiros (0 ou 1) e precisamos de variáveis contínuas para a formulação da programação linear. Esta limitação pode ser contornada pela expansão da interpretação de uma política. Em definição prévia, era tomada sempre a mesma decisão toda vez que o sistema estava no estado  $i$ .

A nova interpretação de uma política irá determinar uma distribuição de probabilidade para uma decisão a ser feita quando o sistema esta no estado  $i$ .

Com essa nova interpretação, a  $D_{ik}$  agora precisa ser redefinida como:

$$D_{ik} = P\{\text{decisão} = k / \text{estado } i\}$$

Em outras palavras, dado que o sistema esta no estado  $i$ , a variável  $D_{ik}$  é a probabilidade de escolha da decisão  $k$  como a decisão a ser tomada.

Por isso,  $(D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{ik})$  é a distribuição de probabilidade para a decisão a ser tomada em  $i$ .

Esse tipo de política utilizando distribuições de probabilidade é denominada “política aleatória”, ao passo que a política “determinística” é definida por  $D_{ik} = 0$  ou  $1$ .

As políticas aleatórias podem ser caracterizadas pela matriz:

		<i>Decisão K</i>			
		1	2	...	K
<i>Estado</i>	0	$D_{01}$	$D_{02}$	...	$D_{0K}$
	1	$D_{11}$	$D_{12}$	...	$D_{1K}$
	.	...	...	...	...
	M	$D_{M1}$	$D_{M2}$	...	$D_{MK}$

Onde cada linha soma 1 e agora temos  $0 \leq D_{ik} \leq 1$ .

Através de políticas aleatórias é possível formular um modelo de programação linear para encontrar uma política ótima ( $D_{ik}$  são variáveis contínuas e não inteiras).

### Formulação de uma programação linear

As variáveis de decisão convenientes (denotadas aqui por  $y_{ik}$ ) para um modelo de programação linear são definidas como segue. Para cada  $i = 0, 1, \dots, M$  e  $k = 0, 1, \dots, K$ , deixemos  $y_{ik}$  ser a probabilidade incondicional do estado estacionário do sistema no estado  $i$  e a decisão  $k$  é feita:

$$y_{ik} = P\{\text{estado} = i, \text{decisão} = k\}$$

Cada  $y_{ik}$  está proximo relacionado ao correspondente  $D_{ik}$  desde então, vindo das regras da probabilidade condicional:

$$y_{ik} = \pi_i D_{ik},$$

Onde  $\pi_i$  é a probabilidade de estado estacionário da cadeia de Markov no estado

$i$ . Além disso,  $\pi_i = \sum_{k=1}^K y_{ik}$ , então  $D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i} = \frac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^K y_{ik}}$ .

Temos diversas restrições em  $y_{ik}$ :

$$1) \sum_{i=1}^M \pi_i = 1 \text{ então } \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1,$$

2) Dos resultados das probabilidades de estado estacionário (o argumento  $k$  é introduzido em  $p_{ij}(k)$  para indicar apropriadamente que a probabilidade de transição de estado depende da decisão  $k$ ).

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}, \text{ então } \sum_{k=1}^K y_{jk} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k), \text{ para } j = 0, 1, \dots, M.$$

$$3) y_{ik} \geq 0 \text{ para } i = 0, 1, \dots, M \text{ e } k = 1, 2, \dots, K.$$

O custo médio esperado de longo prazo por unidade de tempo é dado por:

$$E(c) = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K \pi_i c_{ik} D_{ik} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K c_{ik} y_{ik},$$

Então, o modelo de programação linear escolherá o  $y_{ik}$  que minimize

$$Z = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K c_{ik} y_{ik} \text{ sujeito às restrições:}$$

$$1) \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1$$

$$2) \sum_{k=1}^K y_{ik} - \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k) = 0 \text{ para } j = 0, 1, \dots, M$$

$$3) y_{ik} \geq 0 \text{ para } i = 0, 1, \dots, M \text{ e } k = 1, 2, \dots, K.$$

Observamos que esse modelo possui  $M+2$  restrições funcionais e  $k(M+1)$  variáveis de decisão (a restrição 2 fornece uma restrição redundante, então qualquer uma das  $M$  restrições pode ser eliminada).

Assumindo que o modelo não é tão grande, ele pode ser resolvido pelo método SIMPLEX. Uma vez que  $y_{ik}$  valores são obtidos, cada  $D_{ik}$  é encontrado por:

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^K y_{ik}}.$$

A solução ótima obtida pelo método SIMPLEX possui algumas propriedades interessantes. Ela irá conter  $M+1$  variáveis básicas  $y_{ik} \geq 0$ . Podemos ver que  $y_{ik} \geq 0$  para ao menos um  $k = 1, 2, \dots, K$ ; para cada  $i = 0, 1, \dots, M$ . Consequentemente, cada  $D_{ik} = 0$  ou 1.

A conclusão chave é que a política ótima encontrada pelo método SIMPLEX é determinística em vez de ser aleatória. Então, permitir políticas aleatórias não leva a melhorias na política final. Contudo ela é extremamente útil na formulação pela conversão das variáveis inteiras ( $D_{ik}$ ) em variáveis contínuas, podendo então viabilizar a utilização da programação linear (a analogia na programação inteira é a de utilizar o relaxamento da programação linear para utilizar o método SIMPLEX e então obtermos a propriedade de soluções inteiras; devido à solução ótima para a programação linear tornar a saída inteira de qualquer forma).

O processo de decisão markoviano (MDP) possibilita uma poderosa ferramenta para a otimização da performance de sistemas que podem ser modelados como uma cadeia de Markov de tempo discreto.

As duas medidas primárias de performance utilizadas são custo médio esperado de longo prazo por unidade de tempo e custo total descontado esperado. Essa última necessita da determinação de um valor apropriado do fator de desconto, sendo útil quando é importante considerar o valor do dinheiro no tempo.

Os dois mais importantes métodos para encontrar políticas ótimas de um MDP são algoritmo de melhoria de políticas e programação linear. O critério de custo descontado utilizando o método das aproximações sucessivas possibilita uma maneira rápida de aproximação de uma política ótima.

No anexo 3 são apresentados em maiores detalhes as técnicas descritas nessa secção.

## **CAPÍTULO 4**

### **CAMPANHA DE CONSTRUÇÃO DE POÇOS**

Neste capítulo iremos apresentar a primeira aplicação da metodologia desenvolvida, abordando o problema da estratégia ótima para uma campanha de perfuração e completação de poços de desenvolvimento de campo de petróleo e gás. Iremos estudar a construção de poços no cenário do pré-sal brasileiro, onde se estima a construção de uma quantidade superior a 400 poços nos próximos anos. Começamos com uma breve definição do problema, a estratégia de modelagem adotada, a simulação do cenário e a escolha ótima e, logo após, a análise dos resultados alcançados. O objetivo deste capítulo é desenvolver um método de simulação de desenvolvimento de um campo de petróleo (conjunto de poços), incorporando as incertezas dos tempos de construção dos poços, estudadas nos capítulos anteriores. A visão agora é holística e, para isto, abordaremos questões pertinentes à indústria do petróleo, tais como curva de aprendizado (incorporamos uma aplicação de otimização de curva de aprendizado estocástica).

#### **Definição do Problema**

O contexto das aplicações dessa tese refere-se às descobertas do pré-sal na costa brasileira. Face a notável importância da camada pré-sal no potencial produtivo de petróleo e gás no país, apresentaremos um conjunto de técnicas para a redução de incerteza nos custos de construção dos poços, no desenvolvimento do piloto de Tupi.

#### **Campo de Tupi:**

Tupi não foi o bloco pioneiro em termos de descoberta no pré-sal, mas foi nele onde a Petrobras teve a primeira confirmação a respeito de gigantescas reservas de petróleo e gás.

O Campo de Tupi está localizado na bacia de Santos, a 250 quilômetros da costa, na projeção cartográfica do estado do Rio de Janeiro, conforme figura 4:



Fig.4 Localização do campo de Tupi, Fonte: ANP.

O campo foi oficialmente divulgado em 8 de novembro de 2007. Suas reservas são estimadas entre 5 e 8 bilhões de barris de petróleo do tipo alta qualidade, ou seja petróleo leve, além de gás natural. Pelos critérios de estimativa do SPE (Society of Petroleum Engineers), as reservas de petróleo e gás anunciadas são equivalentes a cerca de 12 bilhões de barris de óleo equivalente ("boe" - medida que inclui óleo e gás), praticamente metade das atuais reservas brasileiras, que beiram os 14 bilhões de petróleo e gás.

As reservas anunciadas representam mais do dobro das reservas de Roncador, que contém aproximadamente 3 bilhões de barris recuperáveis de petróleo pesado, de menor valor comercial e era, até então, a maior descoberta de petróleo. A Petrobras é a operadora do campo, no qual tem 65% de participação, sendo que a britânica BG Group detém 25%, e a portuguesa Petrogal/Galp, 10%.

O óleo encontrado no local possui 28 graus API, e é considerado de melhor qualidade comercial do que a média do petróleo encontrado no Brasil, e o mais fácil de refinar. A descoberta fica em rochas localizadas abaixo da chamada camada de sal, em profundidades muito grandes, cuja perfuração é pioneira no mundo. Os volumes recuperáveis estimados de óleo e gás para os reservatórios do pré-sal, se confirmados, elevarão significativamente a quantidade de óleo existente em bacias brasileiras, colocando o Brasil entre os países com grandes reservas de petróleo e gás do mundo.

A Petrobras realizou, também, uma avaliação regional do potencial petrolífero do pré-sal que se estende nas bacias do sul e sudeste brasileiros.

Em seguida ao anúncio da descoberta do campo petrolífero de Tupi, o governo brasileiro retirou de licitação os direitos de exploração de 41 lotes no entorno de Tupi, que seriam leiloados no final de novembro de 2007.

A província petrolífera anunciada está situada numa nova área exploratória, onde pela primeira vez foi atingida a camada pré-sal. Nas figuras abaixo podemos observar o modelo de formação da camada pré-sal (figura 5), o imageamento da zona do pré-sal (figura 6) e os seus reservatórios característicos (figura 7).

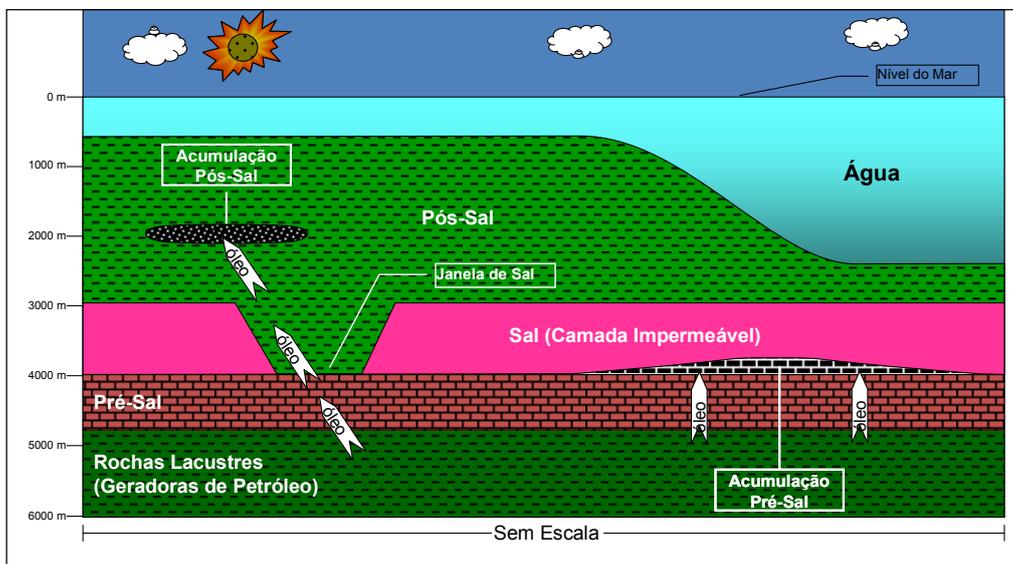


Fig.5 Modelo da acumulação petrolífera do pré-sal, Fonte: ANP.

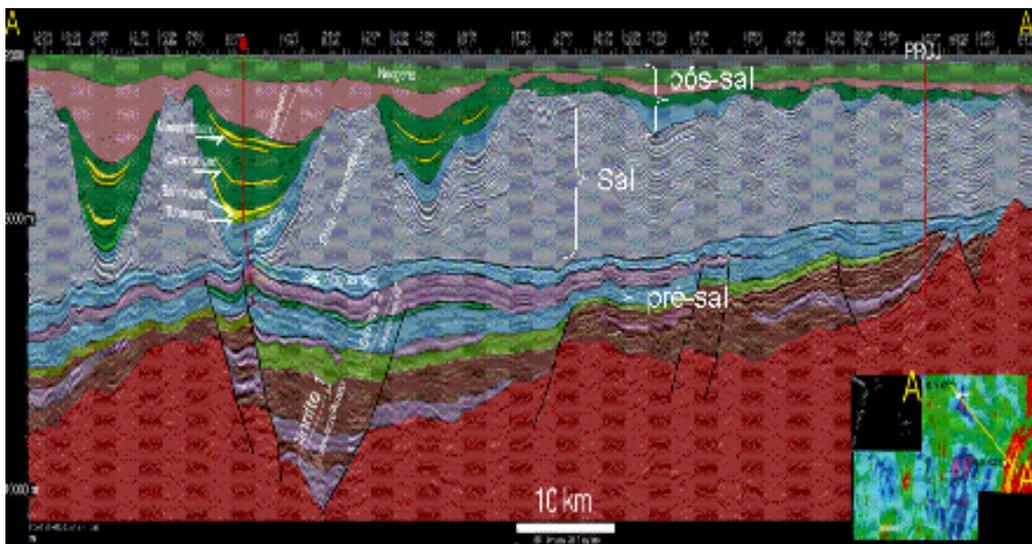


Fig.6 Imageamento da acumulação petrolífera do pré-sal, Fonte: ANP.

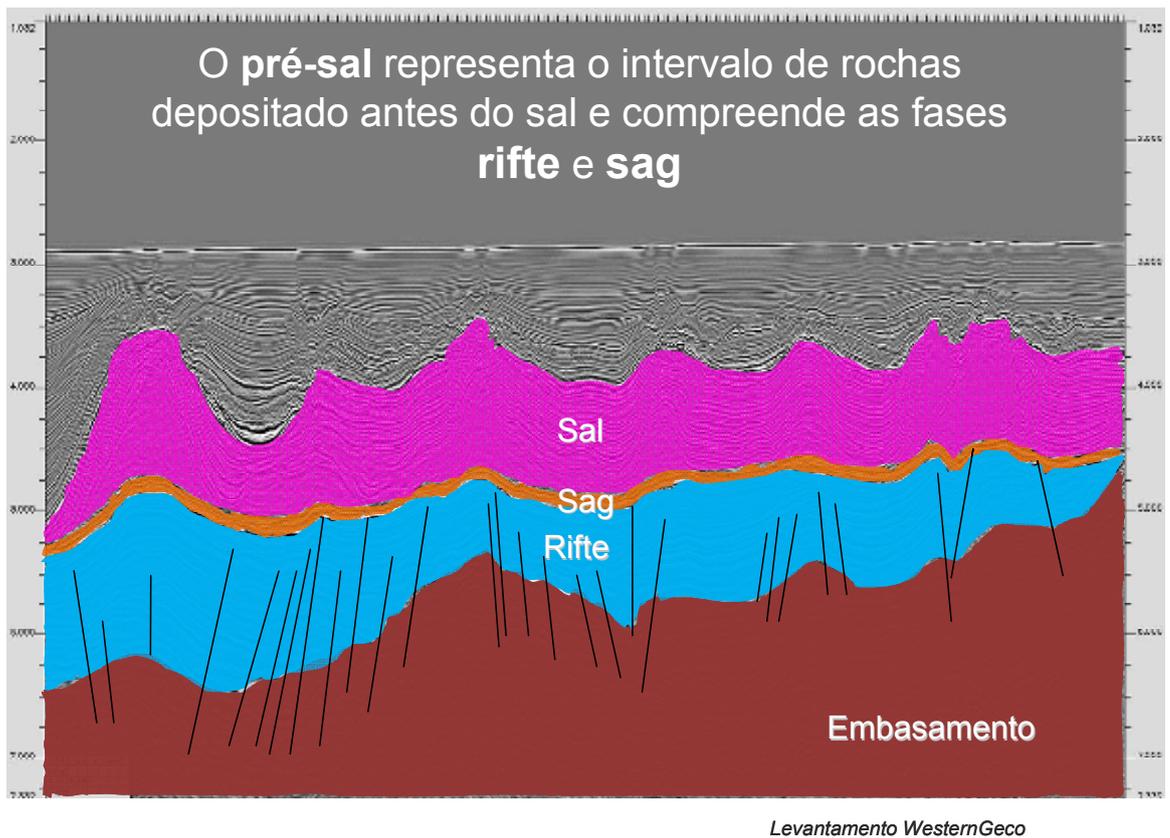


Fig.7 Reservatórios característicos da camada pré-sal, Fonte: ANP.

A Petrobras foi a primeira empresa petrolífera do mundo que perfurou, testou e avaliou as rochas do pré-sal.

A análise dos testes de formação do segundo poço no bloco BM-S-11, localizado na bacia de Santos, permite estimar o volume recuperável de óleo leve de 28° API, em 5 a 8 bilhões de barris de petróleo e gás natural.

Com investimentos de US\$ 1 bilhão, nos últimos dois anos, a Petrobras perfurou 15 poços que atingiram as camadas pré-sal, sendo que oito deles foram devidamente testados e avaliados com as técnicas da indústria petrolífera.

Os dados obtidos por esses poços, integrados a um grande esforço de mapeamento, possibilitaram desta forma delimitar com elevado grau de segurança que as rochas do pré-sal estendem-se por uma área que vai do Estado do Espírito Santo ao Estado de Santa Catarina, com 800 km de extensão e 200 km de largura, em lâmina d'água entre 2 e 3 mil metros de profundidade. Na figura 8 podemos observar a extensão da província do pré-sal.

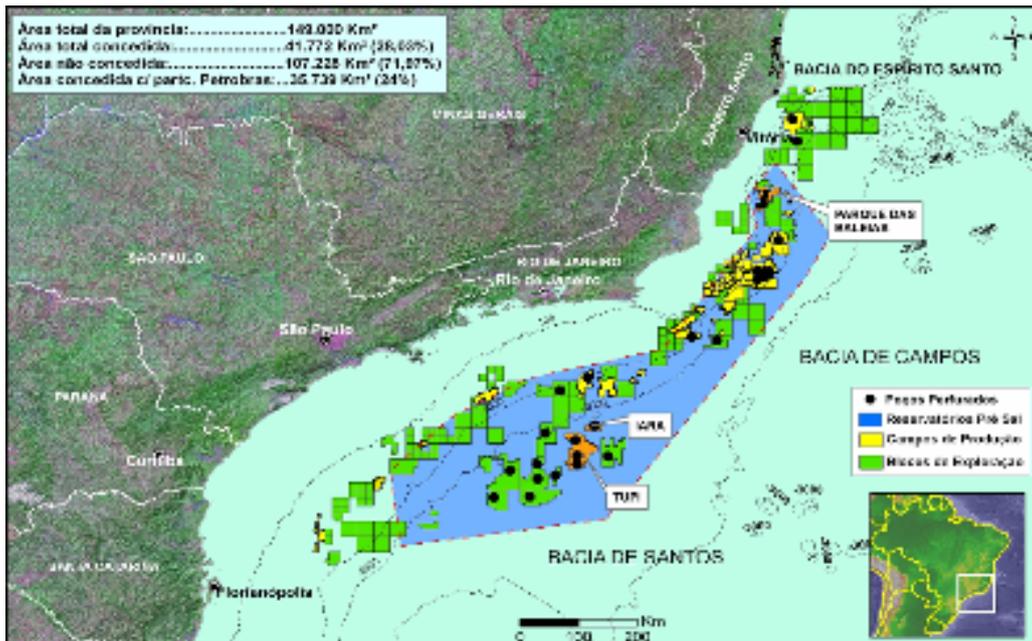


Fig.8 A província do pré-sal, Fonte: ANP.

A Petrobrás já identificou pelo menos dez reservas potenciais para explorar petróleo sob a camada de sal. No bloco BM-S-11, onde estão os poços gigantes Tupi e Tupi Sul, outros dois reservatórios já foram encontrados, e batizados de Iara e Iracema.

Além de Tupi, Tupi Sul, Iara e Iracema, a Petrobras, e seus parceiros, encontraram petróleo no poço Carioca (BM-S-9). As três últimas descobertas ainda não foram alçadas à categoria de campos petrolíferos, são chamados de prospectos, isto é, áreas onde há boas indicações da existência de reservas.

O Brasil está hoje ocupando o 17º lugar no ranking de países com maiores reservas de petróleo. Com a nova descoberta podemos subir para um lugar entre 8º ou 9º, podemos ir para um patamar onde estão Arábia Saudita e Venezuela.

Para atingir as camadas pré-sal, entre 5000 e 7000 metros de profundidade, a Petrobras desenvolveu novos projetos de perfuração: mais de 2000 metros de sal foram atravessados. O primeiro poço demorou mais de um ano e custou US\$ 240 milhões.

Os custos de construção dos poços, em média, variam entre 60 a 70 % dos custos totais de desenvolvimento do campo, e possuem uma alta variabilidade dos seus custos unitários. O item que apresenta o maior custo está relacionado ao tempo das operações de construção do poço: o aluguel das sondas.

Neste cenário, a sonda de perfuração típica a ser utilizada é a do tipo DSDP (posicionamento dinâmico), com um custo diário de aproximadamente US\$ 500.000, capaz de operar em grandes profundidades, (superior a 3000m de lâmina d'água), com

alta mobilidade, BOP submarino, completação molhada, alto nível de complexidade dos equipamentos, etc.

Face a essa dependência dos custos de aluguel das sondas, e a alta variabilidade dos tempos das operações de perfuração e completação de poços de petróleo e gás Jacinto (2002 A), o desenvolvimento de uma metodologia que minimize essa exposição ao risco de altos desvios nos custos dos poços, se faz de extrema importância.

Iremos apresentar de forma sucinta as operações de perfuração e completação de poços para embasar o desenvolvimento da metodologia.

### **Perfuração e completação de poços de petróleo e gás**

A perfuração de um poço de petróleo Thomas (2001), é realizada através de uma sonda, utilizando-se geralmente a perfuração rotativa, onde as rochas são perfuradas pela ação da rotação e peso aplicados a uma broca existente na extremidade de uma coluna de perfuração.

Os fragmentos das rochas são removidos continuamente através de um fluido de perfuração ou lama. O fluido é injetado por bombas para o interior da coluna de perfuração através da cabeça de injeção (swivel) e retorna à superfície através do espaço anular formado pelas paredes do poço e a coluna.

Ao atingir determinada profundidade, a coluna de perfuração é retirada do poço e uma coluna de revestimento de aço, de diâmetro inferior ao da broca, é descida no poço.

O anular entre os tubos do revestimento e as paredes do poço é cimentado com a finalidade de isolar as rochas atravessadas, permitindo então o avanço da perfuração com segurança. Após a operação de cimentação, a coluna de perfuração é novamente descida no poço, tendo na sua extremidade uma nova broca de diâmetro menor do que a do revestimento para o prosseguimento da perfuração.

Dessa forma, o poço é perfurado em diversas fases, caracterizadas pelos diferentes diâmetros de brocas.

As operações típicas de perfuração são: Alargamento e repasse; Conexão, manobra e circulação; Revestimento; Cimentação; Perfilagem; Movimentação da sonda.

A operação de alargamento e repasse consiste em se reperfurar o poço com uma broca de diâmetro maior que a utilizada para sua perfuração. A operação de conexão, manobra e circulação consiste na conexão ou desconexão dos tubos de perfuração à coluna e a circulação refere-se a circular o fluido de perfuração para retirar os cascalhos

do espaço anular. A operação de revestimento do poço constitui-se na instalação das colunas de revestimento: condutor, revestimento de superfície, revestimento intermediário, revestimento de produção, liner, tie back. A cimentação é feita no espaço anular entre a tubulação de revestimento e as paredes do poço. A perfilagem é feita após a perfuração e consiste em descer várias ferramentas com a finalidade de medir propriedades das formações.

Ao terminar a perfuração, começa uma nova etapa de operações, que se destinam a preparar o poço para que produza em condições seguras e econômicas, durante sua vida útil: a completação.

As etapas típicas de uma completação de um poço marítimo compõem-se da instalação dos equipamentos de superfície (cabeça de produção e BOP), condicionamento do poço (condicionamento do revestimento de produção e substituição do fluido que se encontra no interior do poço, pelo fluido de completação); avaliação da qualidade da cimentação (avaliação através de perfis acústicos que medem a aderência do cimento ao revestimento e do cimento à formação); canhoneio (perfuração do revestimento utilizando cargas explosivas, visando comunicar o interior do poço com a formação produtora); instalação da coluna de produção, (descida da coluna de produção pelo interior do revestimento de produção) e colocação do poço em produção (induz-se a surgência no poço ou inicia-se o método de elevação artificial e efetua-se o teste inicial de produção para medir a vazão de produção e avaliar o desempenho do poço).

Estas operações típicas são desdobradas em outras, dependendo das características do poço a ser perfurado e completado.

Por último, a movimentação da sonda consiste na preparação, movimentação e posicionamento para nova locação. Não pretendemos nos aprofundar no estudo da Engenharia de Poço propriamente dito, nos detendo apenas nas descrições que consideramos necessárias ao prosseguimento desta pesquisa.

### **Modelagem, simulação e otimização.**

Na seção anterior vimos que as operações de perfuração e completação de poços de petróleo e gás, acontecem de maneira seqüencial. Observando mais atentamente podemos notar que a qualidade de algumas operações pode afetar diretamente a qualidade da próxima operação, caracterizando-se assim a dependência entre elas.

Bem, se a variabilidade dos tempos das operações é alta, e se modelarmos o tempo de uma determinada operação através de uma função de densidade de probabilidade específica, precisaríamos especificar a dependência entre as variáveis aleatórias que modelam os tempos das operações para quantificarmos essa dependência.

De uma maneira geral a indústria não explicita essa dependência entre as operações, e utiliza a Simulação de Monte Carlo para calcular os tempos totais dos poços a serem construídos. Essa redução da realidade pode ocasionar diversos problemas e levar a decisões errôneas.

Um poço típico para o desenvolvimento do campo de Tupi (teórico) pode ser visto na figura 9:

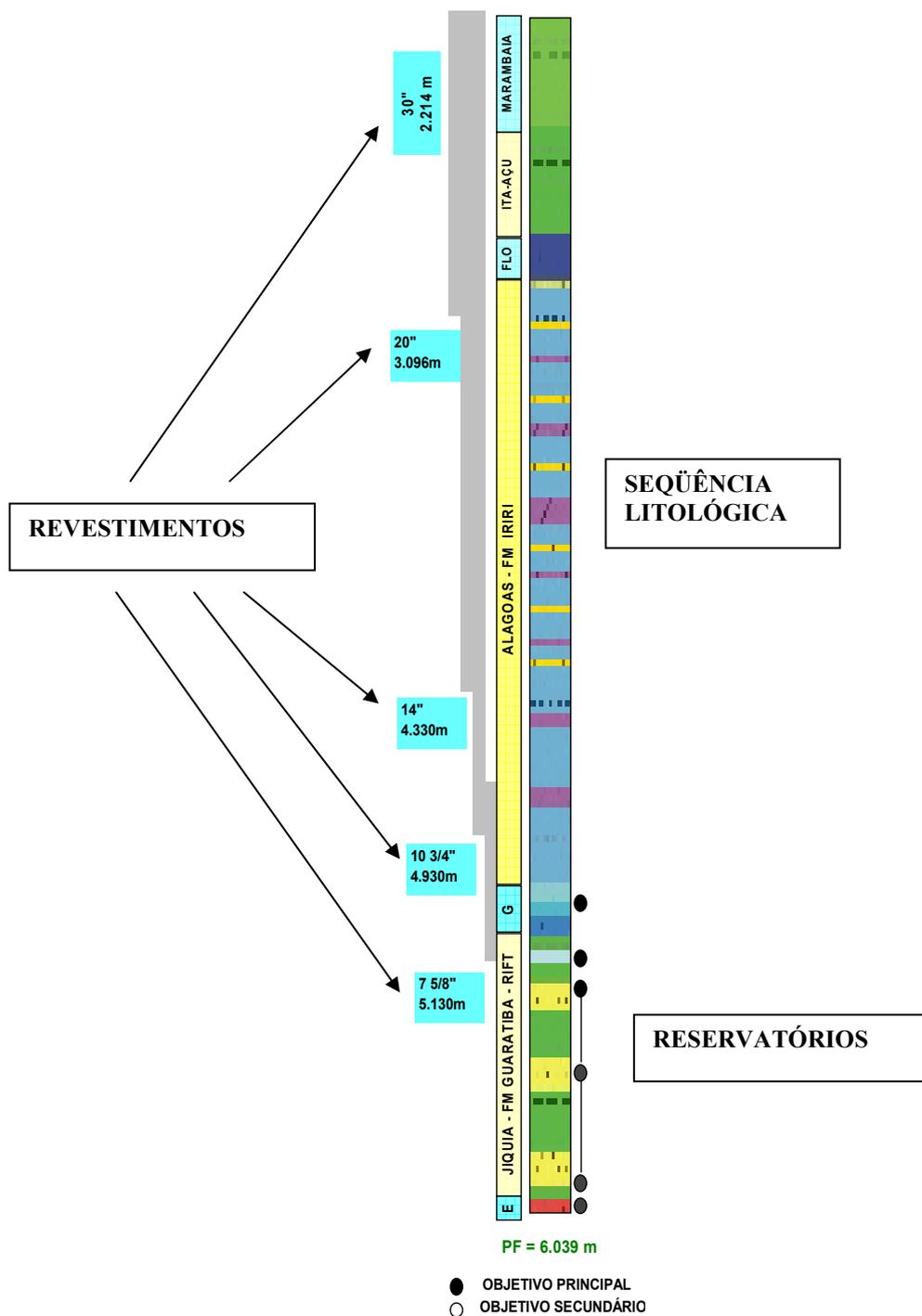


Fig. 9 Poço típico do pré-sal (teórico)

Uma das mais tradicionais técnicas de tomadas de decisão sob incerteza, especialmente quando se objetiva estimar o tempo de construção de poços é a Simulação de Monte Carlo (ver anexo 4).

Associado aos modelos de Simulação de Monte Carlo, as funções copula possibilitam uma forma simples e poderosa de modelagem das dependências entre os

tempos aleatórios das operações de construção de poços; sem impor qualquer tipo de restrição na modelagem dos tempos das operações. O tipo de cópula a ser utilizada para modelar essa dependência, pode ser escolhido a partir dos dados empíricos, através de métodos baseados em máxima verossimilhança.

Estamos interessados em estimar o tempo total de construção de um poço típico, que será construído em Tupi (teórico). Iremos considerar que as operações podem ser agrupadas em duas fases: A (perfuração) e B (completação). O tempo da fase A é dado por uma distribuição de probabilidade triangular (100, 120, 140) e a fase B é dada por uma exponencial (24), conforme observamos nas figuras 10 e 11:

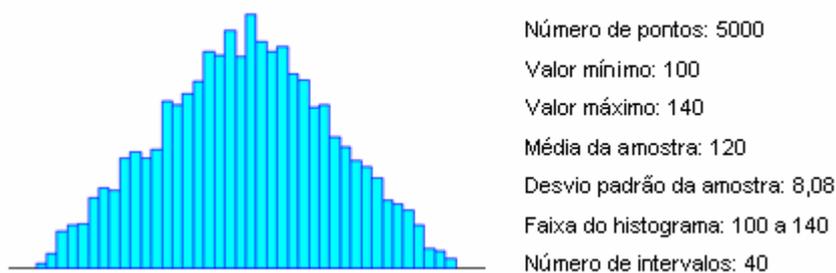


Fig.10 Tempo da fase A.



Fig.11 Tempo da fase B.

A dependência entre as operações (acoplamento) é modelada por uma cópula de Frank (ver capítulo 3 e anexo 1), a qual é utilizada para gerar dados bivariados do tempo total de construção do poço. O parâmetro  $\tau$  (coeficiente de correlação de Kendall) é utilizado para especificar o grau de dependência entre os valores dos pares gerados.

Simulando (Método de Monte Carlo, ver anexo 4) 10.000 replicações de valores de tempo total para diferentes coeficientes de correlação de Kendall, temos como resultado a tabela 5:

Cenário	Coefficiente de correlação ( $\tau$ )	P10	P50	P90	P90 - P10
1	-0,95	118,5	122,99	131,6	13,1
2	-0,8	117,68	123,3	131,74	14,06
3	-0,6	116,21	123,7	132,4	16,19
4	-0,4	114,85	123,93	133,51	18,66
5	-0,2	113,16	123,8	134,65	21,49
6	0	112	123,63	135,87	23,87
7	0,2	111,27	123,36	137,46	26,19
8	0,4	110,34	123,47	138,85	28,51
9	0,6	110,17	123,14	139,37	29,2
10	0,8	109,46	122,64	140,32	30,86
11	0,95	109,38	122,87	140,41	31,03

Tab.5 Tempos para diferentes coeficientes de correlação

Observamos que na simulação do cenário 6, o coeficiente de correlação é zero, ou seja, as variáveis aleatórias que modelam os tempos das fases A e B são independentes, e a diferença entre o P90 e o P10 é de 23,87 dias. A diferença entre P50-P90 é maior que a P10-P50 (11,63 dias), como resultado da assimetria das distribuições que modelam as fases A e B.

Considerando os resultados das simulações dos cenários 7 a 11, observamos que à medida que o coeficiente de correlação aumenta, a distância entre P10 e P90 também aumenta. No cenário 10, para um coeficiente de correlação de 0,8; a distância P10-P90 é de 30,86 dias. Neste nível de correlação entre os tempos das operações da fase A e da fase B, a diferença entre o tempo total (independência entre as variáveis,  $\tau=0$ ) é de 7 dias (para um custo de  $7 * US\$ 500.000 = US\$ 3.500.000$ ).

De maneira inversa, nos resultados das simulações dos cenários de 1 a 5, observamos que à medida que o coeficiente de correlação *negativamente* aumenta, a distância entre P10 e P90 diminui. Dessa forma, se pensarmos em termos de avaliação do risco, se não considerarmos a correlação negativa entre as variáveis, estaríamos superestimando o tempo total de construção do poço. Nesse caso, por exemplo, para um custo diário de sonda estimado para o pré-sal em torno de US\$ 500.000; essas diferenças são muito significativas.

A figura 12 apresenta a evolução dos percentis P10, P50 e P90 do tempo total de construção do poço, como uma função do coeficiente de correlação de Kendall.

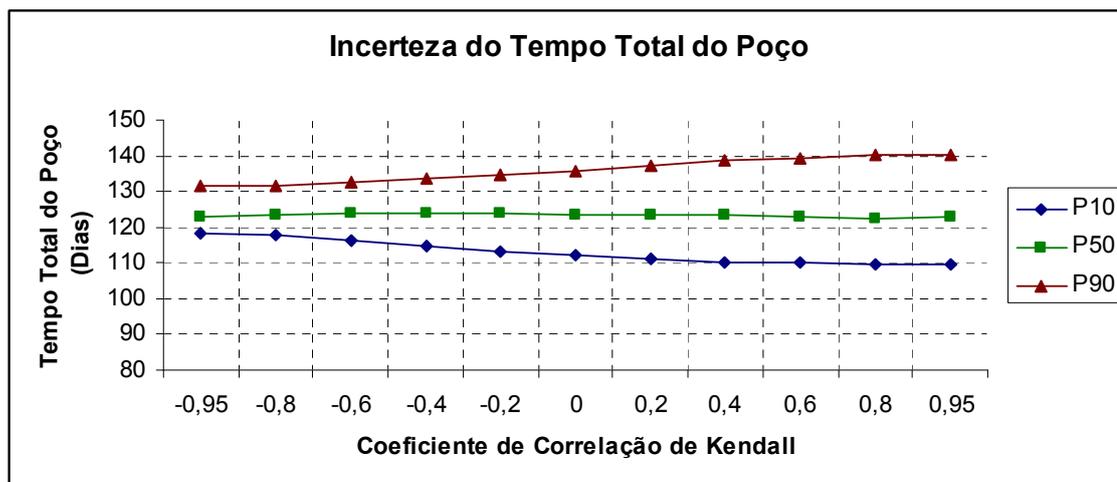


Fig.12 Incerteza do Tempo Total do Poço

Concluimos que a variabilidade dos tempos das operações de construção dos poços, e a dependência entre as mesmas, influi diretamente no tempo total (construção ou reparo do poço). Mas, se realizarmos uma campanha de construção de poços, essa variabilidade dos tempos das operações iria decrescer? A dependência entre as operações iria desaparecer? Bem, com certeza toda atividade possui um aprendizado, quando se repete uma determinada atividade ou operação, e este aprendizado deve ser considerado.

Por outro lado, a dependência entre as operações se mantém a mesma, devido a sua estrutura não se alterar (não se troca a copula ou o coeficiente de correlação por causa da redução dos tempos devido ao aprendizado).

### Curva de aprendizado

A curva de aprendizado (ou de desempenho de perfuração), é uma ferramenta matemática utilizada para avaliar o desempenho de perfuração de poços, em qualquer área geológica, onde uma seqüência de poços esteja sendo perfurada.

Na indústria petrolífera, as análises de desempenho de perfuração eram feitas com base numa plotagem da profundidade em função do tempo. Em muitos casos, havia uma dispersão inaceitável destes valores, de modo que a estimativa de tempo para perfurar uma determinada profundidade não poderia ser considerada confiável.

Ao se observar que os tempos de perfuração diminuía quando os poços eram perfurados em seqüência, ocorreu um reconhecimento generalizado de que algo havia acontecido para que os tempos fossem reduzidos. Imaginou-se que se estivesse aplicando melhores tecnologias, operações mais intensivas tecnologicamente, melhores sondas, melhor equipe ou simplesmente aprendeu-se mais como realizar a atividade.

Na busca por uma ferramenta para avaliar o desempenho de perfuração, pensou-se na possibilidade de aplicação das técnicas de teoria de curva de aprendizado. Como a tarefa de perfurar parecia ser uma prática baseada na experiência, como uma outra qualquer, pareceu lógico utilizar-se a teoria de curva de aprendizado para analisar o desempenho de perfuração.

A teoria de curva de aprendizado pode ser utilizada como um modelo econômico, para avaliar o desempenho de perfuração.

Este modelo pode mostrar se uma operação de perfuração está abaixo ou acima do que se tem como padrão médio para uma indústria de perfuração, mostrando o quanto pode-se economizar com um rápido aprendizado, melhor planejamento e utilização de melhores tecnologias.

O modelo também indica o nível tecnológico em que a companhia encontra-se, sua capacidade operacional para qualquer série de poços perfurados, e quanto pode ser economizado pela melhoria das capacidades operacionais e tecnológicas.

Matematicamente, a teoria da curva de aprendizado descreve as habilidades organizacionais e individuais em melhorar seu desempenho ao longo do tempo. Esta teoria foi primeiramente desenvolvida por T. P. Wright em 1936, e posteriormente foi expandida por H. Asher para o processo de fabricação de aeronaves, durante a segunda guerra mundial Brett e Milhein (1986).

A melhoria no desempenho foi atribuída não somente ao aumento da efetividade dos trabalhos, mas também a melhorias na política de gerenciamento, melhoria no desempenho de parte dos fornecedores, etc. Como tal, o fenômeno de aprendizado é usado como uma medida do sucesso da organização como um todo.

### **Curva de aprendizado na perfuração**

Em outras demonstrações da aplicabilidade da teoria de curva de aprendizado em perfuração, esta foi evidenciada por uma análise do processo de perfuração. As

empresas de perfuração normalmente operam com um ciclo que inclui o planejamento, implementação e avaliação das operações de perfuração.

Este processo contínuo de planejamento-implementação-avaliação é o método básico pelo qual as pessoas e a organização aprendem, e assim melhoram o desempenho. A empresa de perfuração estará apta para melhorar seu desempenho global, quando todos aprenderem mais sobre o comportamento do ambiente geológico.

A equação abaixo representa o modelo matemático da curva de aprendizado:

$$T_n = C_1 e^{(1-n)c_2} + c_3, \text{ onde}$$

$T_n$  é o tempo necessário para perfurar o n-ésimo poço,

$C_1$  é a constante que reflete a distância que nos encontramos do menor tempo idealizado para a perfuração do último poço (potencial de aprendizado),

$C_2$  é a velocidade com que a organização alcançará o menor tempo de perfuração para esta área,

$C_3$  é constante que reflete o menor tempo idealizado para a perfuração.

Os valores de  $C_2$  são avaliados da seguinte forma:

$0,25 \leq C_2 \leq 0,45$  representa uma baixa velocidade de aprendizado,

$0,45 \leq C_2 \leq 0,8$  representa uma boa velocidade de aprendizado,

$C_2 \geq 0,8$  tem-se uma excelente velocidade de aprendizado.

O valor de  $C_1$  indica o grau de preparação da organização para perfurar um determinado poço, e/ou quanto é difícil a realização do trabalho nesta área. A constante  $C_2$  está diretamente relacionada à taxa de aprendizado da organização.

A constante  $C_3$  indica o nível de tecnologia e de conhecimento da área exploratória (ou explotatória), que uma determinada organização possui.

## Curva de aprendizado estocástica

Como vimos, a curva de aprendizado possui três constantes que a determinam porém, se aplicarmos os conceitos de incerteza na constante  $C_1$  (que reflete o potencial de aprendizado na área, ou seja, “distância de  $C_3$ ”), a curva de aprendizado agora terá características estocásticas, incorporando o conceito de incerteza de desempenho.

Fazendo  $C_1$  variar aleatoriamente (o potencial de aprendizado varia com o tempo total para construir um poço, que possui uma função da distribuição de probabilidade associada e, conseqüentemente, o valor de  $C_1$  será variável também).  $C_1$  será igual ao percentil escolhido para representar o tempo de construção do primeiro poço na seqüência, subtraído do tempo final esperado para o último poço na seqüência.

Nos pareceu bem razoável esta incorporação de quesitos de incerteza na curva de desempenho, visto que o processo de construção dos poços é caracteristicamente variável, no quesito dispersão dos tempos.

Na figura 13 e na tabela 6 temos a simulação dos tempos de construção de 7 poços, em seqüência, cumprindo com os requisitos de aprendizado; para diferentes valores de  $C_1$ :

Número de poços = 7

$C_1 = [10,15,20]$

$C_2 = 0,5$

$C_3 = 100$

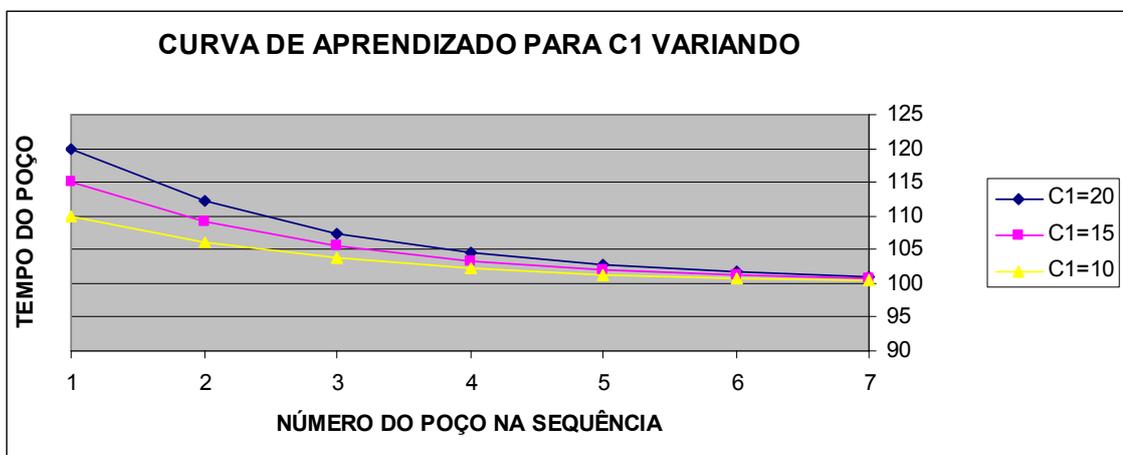


Fig.13 Curva de aprendizado, variando  $C_1$

POÇO	N	C1	C2	C3	TT
P1	1	20	0,5	100	120
P2	2	20	0,5	100	112,1268
P3	3	20	0,5	100	107,3529
P4	4	20	0,5	100	104,4584
P5	5	20	0,5	100	102,7033
P6	6	20	0,5	100	101,6391
P7	7	20	0,5	100	100,9939
					749,2743

POÇO	N	C1	C2	C3	TT
P1	1	15	0,5	100	115
P2	2	15	0,5	100	109,0951
P3	3	15	0,5	100	105,5147
P4	4	15	0,5	100	103,3438
P5	5	15	0,5	100	102,0275
P6	6	15	0,5	100	101,2293
P7	7	15	0,5	100	100,7454
					736,9558

POÇO	N	C1	C2	C3	TT
P1	1	10	0,5	100	110
P2	2	10	0,5	100	106,0634
P3	3	10	0,5	100	103,6765
P4	4	10	0,5	100	102,2292
P5	5	10	0,5	100	101,3516
P6	6	10	0,5	100	100,8196
P7	7	10	0,5	100	100,4969
					724,6372

Tab.6 Curva de aprendizado, variando C1

Na figura 14 e na tabela 7 temos a simulação dos tempos de construção de 7 poços, em seqüência, cumprindo com os requisitos de aprendizado; para diferentes valores de  $C_2$ :

Número de poços = 7

$$C_1 = 20$$

$$C_2 = [0,2; 0,5; 0,8]$$

$$C_3 = 100$$

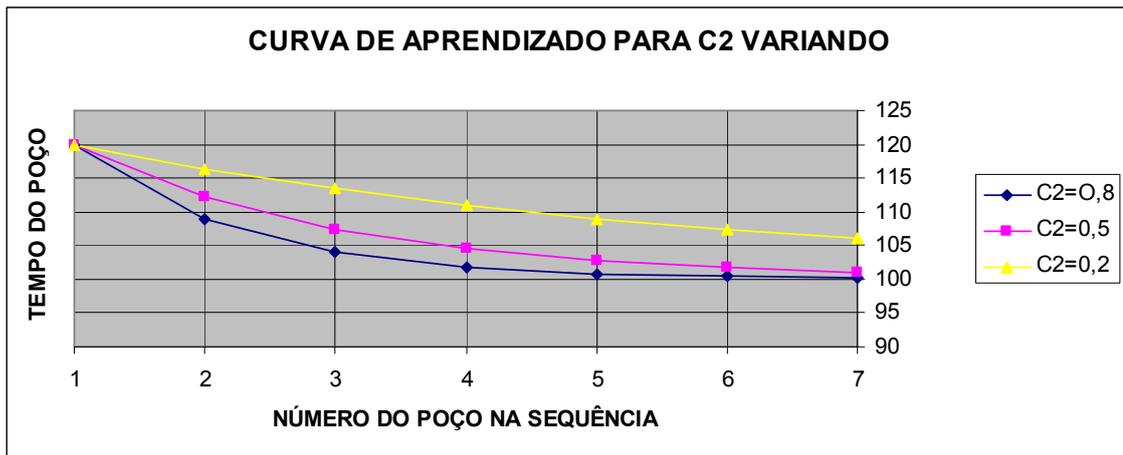


Fig.14 Curva de aprendizado, variando C2

POÇO	N	C1	C2	C3	TT
P1	1	20	0,8	100	120
P2	2	20	0,8	100	108,982
P3	3	20	0,8	100	104,0339
P4	4	20	0,8	100	101,8116
P5	5	20	0,8	100	100,8136
P6	6	20	0,8	100	100,3654
P7	7	20	0,8	100	100,1641
					736,1706
POÇO	N	C1	C2	C3	TT
P1	1	20	0,5	100	120
P2	2	20	0,5	100	112,1268
P3	3	20	0,5	100	107,3529
P4	4	20	0,5	100	104,4584
P5	5	20	0,5	100	102,7033
P6	6	20	0,5	100	101,6391
P7	7	20	0,5	100	100,9939
					749,2743
POÇO	N	C1	C2	C3	TT
P1	1	20	0,2	100	120
P2	2	20	0,2	100	116,3725
P3	3	20	0,2	100	113,403
P4	4	20	0,2	100	110,9721
P5	5	20	0,2	100	108,982
P6	6	20	0,2	100	107,3529
P7	7	20	0,2	100	106,0193
					783,1019

Tab.7 Curva de aprendizado, variando C2

Na figura 15 e na tabela 8 temos a simulação dos tempos de construção de 7 poços, em seqüência, cumprindo com os requisitos de aprendizado; para diferentes valores de  $C_3$ :

Número de poços = 7

$$C_1 = 20$$

$$C_2 = 0,5$$

$$C_3 = [80, 90, 100]$$

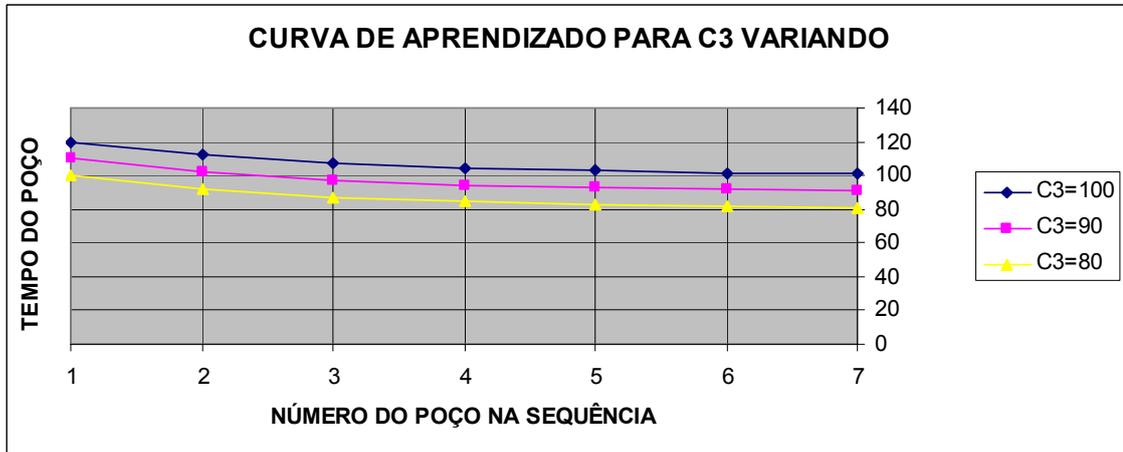


Fig.15 Curva de aprendizado, variando C3

POÇO	N	C1	C2	C3	TT
P1	1	20	0,5	100	120
P2	2	20	0,5	100	112,1268
P3	3	20	0,5	100	107,3529
P4	4	20	0,5	100	104,4584
P5	5	20	0,5	100	102,7033
P6	6	20	0,5	100	101,6391
P7	7	20	0,5	100	100,9939
					749,2743
POÇO	N	C1	C2	C3	TT
P1	1	20	0,5	90	110
P2	2	20	0,5	90	102,1268
P3	3	20	0,5	90	97,35294
P4	4	20	0,5	90	94,45838
P5	5	20	0,5	90	92,70329
P6	6	20	0,5	90	91,63911
P7	7	20	0,5	90	90,99386
					679,2743
POÇO	N	C1	C2	C3	TT
P1	1	20	0,5	80	100
P2	2	20	0,5	80	92,12678
P3	3	20	0,5	80	87,35294
P4	4	20	0,5	80	84,45838
P5	5	20	0,5	80	82,70329
P6	6	20	0,5	80	81,63911
P7	7	20	0,5	80	80,99386
					609,2743

Tab.8 Curva de aprendizado, variando C3

Observamos que existe uma grande gama de combinações possíveis para os parâmetros da curva de aprendizado. Podemos definir um potencial de aprendizado para a área, e ajustar os valores de velocidade de aprendizado, e o tempo mínimo desejado para o último poço na seqüência. Ou escolher um outro conjunto de parâmetros para buscar a otimização do aprendizado no campo, reduzindo os custos dos poços.

Uma estratégia interessante seria a minimização da função da curva de aprendizado, para cada  $n$  ( $n=1,2,\dots,7$ ); admitindo uma faixa razoável de variabilidade de seus parâmetros como restrições:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & C_1 e^{(1-n)c_2} + c_3 \\ \text{sujeito a:} \quad & \end{aligned}$$

$$20 \geq C_1 \geq 10$$

$$0,8 \geq C_2 \geq 0,5$$

$$C_3 \leq 100$$

Utilizando o método SIMPLEX, obtemos a solução na tabela 9 para os 7 poços e notamos que o tempo total gasto na campanha foi de 718 dias.

POÇO	N	C1	C2	C3	TT
P1	1	10	0,8	100	110
P2	2	10	0,8	100	104,491
P3	3	10	0,8	100	102,0169
P4	4	10	0,8	100	100,9058
P5	5	10	0,8	100	100,4068
P6	6	10	0,8	100	100,1827
P7	7	10	0,8	100	100,082
					718,0853

Tab.9 Tempos dos poços com parâmetros otimizados

Na figura 16 temos a curva de desempenho da perfuração dos 7 poços, com seus parâmetros otimizados.

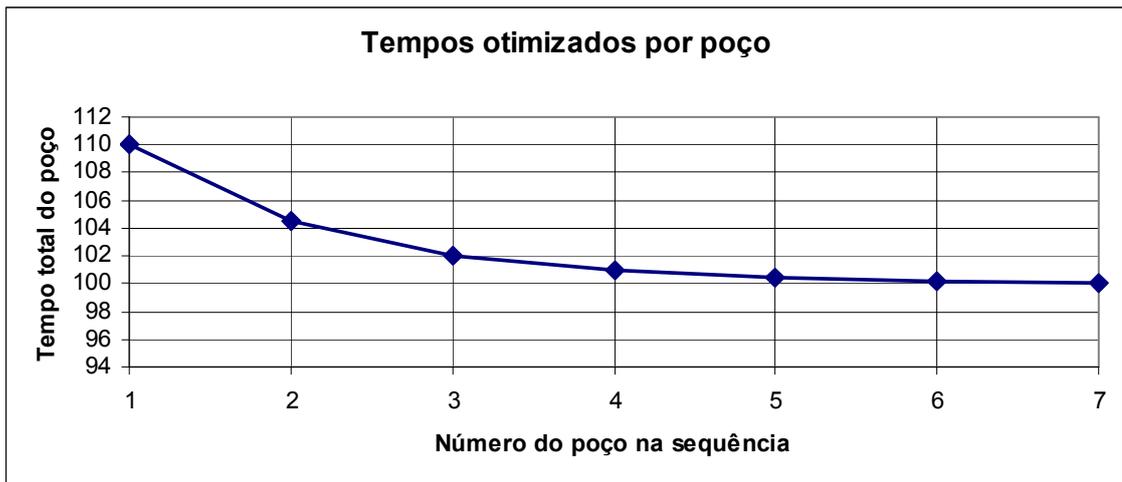


Fig.16 Curva de aprendizado, parâmetros otimizados

Podemos agora reunir as diferentes estratégias de estimativas de tempos de construção dos poços do Piloto de Tupi. Se considerarmos uma estimativa inicial de 7 poços a serem construídos em Tupi, poderíamos compor diversas estratégias para o cálculo dos tempos de construção desses poços:

1. Determinística: somar os tempos médios dos poços,
2. Probabilística i.i.d.(variáveis independentes e identicamente distribuídas): combinar as funções de tempos totais de cada poço sem considerar dependência (Simulação de Monte Carlo),
3. Probabilística com acoplamento (variáveis dependentes utilizando copula): combinar as funções de tempos totais de cada poço considerando dependência (Simulação de Monte Carlo com cópula).
4. Probabilística com acoplamento e curva de aprendizado estocástica (variáveis dependentes utilizando copula e curva de aprendizado): combinar as funções de tempos totais de cada poço considerando dependência (Simulação de Monte Carlo com cópula) e reduzindo os tempos dos poços através da curva de aprendizado estocástica.
5. Probabilística com acoplamento e curva de aprendizado estocástica otimizada (variáveis dependentes utilizando copula e curva de aprendizado otimizada): combinar as funções de tempos totais de cada poço considerando dependência (Simulação de Monte Carlo com cópula) e

reduzindo os tempos dos poços através da curva de aprendizado estocástica com parâmetros otimizados.

O resultado dessas estratégias pode ser visto na tabela 10 e na figura 17:

ESTRATÉGIA	TEMPO TOTAL DA CAMPANHA (DIAS)			
	P10	P50	P90	P90-P10
1		865,41		
2	833,76	865,13	895,64	61,88
3	827,61	867,72	905,73	78,12
4	723,3	755,78	799,34	76,04
5	717,1	740,95	772,92	55,82

Tab.10 Tempos totais da campanha por estratégia

Concluimos que a estratégia que minimiza o tempo de construção dos poços é a estratégia 5, onde a diferença entre os percentis P90 e P10 também é o menor encontrado. O efeito da curva de aprendizado no tempo total da campanha é notável, reduzindo o valor de P50 das estratégias 1 a 3 em mais de 100 dias na estratégia 4 e 124 dias na estratégia 5. Apenas essa redução geraria uma economia de US\$ 50.000.000 e US\$ 62.000.000; para o dado custo de aluguel diário de sonda.

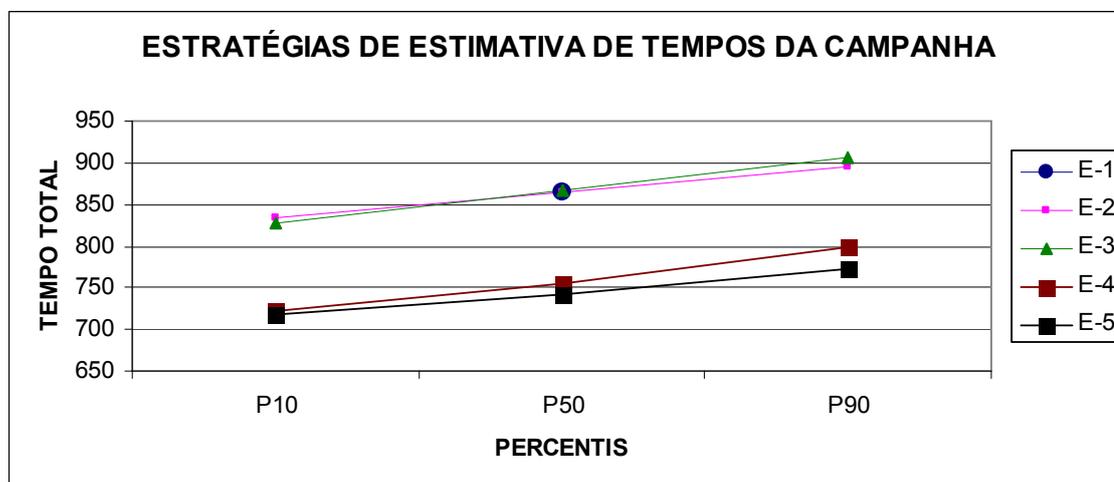


Fig.17 Comparação de estratégias

Observando mais atentamente a estratégia 4, temos os valores calculados para cada percentil do tempo gasto para construir o primeiro poço da seqüência (a diferença entre o valor de percentil escolhido e o  $C_3$  gerará o valor de  $C_1$ , a ser utilizado na curva de aprendizado, que é estocástica). Nas tabelas 11,12 e 13 temos os valores simulados para cada percentil da estratégia 4.

P10	POÇO	N	C1	C2	C3	TT
	P1	1	9,46	0,5	100	109,46
	P2	2	9,46	0,5	100	105,736
	P3	3	9,46	0,5	100	103,4779
	P4	4	9,46	0,5	100	102,1088
	P5	5	9,46	0,5	100	101,2787
	P6	6	9,46	0,5	100	100,7753
	P7	7	9,46	0,5	100	100,4701
						723,3068

Tab.11 Cálculo do tempo total da estratégia 4 para o P10

P50	POÇO	N	C1	C2	C3	TT
	P1	1	22,64	0,5	100	122,64
	P2	2	22,64	0,5	100	113,7275
	P3	3	22,64	0,5	100	108,3235
	P4	4	22,64	0,5	100	105,0469
	P5	5	22,64	0,5	100	103,0601
	P6	6	22,64	0,5	100	101,8555
	P7	7	22,64	0,5	100	101,125
						755,7786

Tab.12 Cálculo do tempo total da estratégia 4 para o P50

P90	POÇO	N	C1	C2	C3	TT
	P1	1	40,32	0,5	100	140,32
	P2	2	40,32	0,5	100	124,4476
	P3	3	40,32	0,5	100	114,8235
	P4	4	40,32	0,5	100	108,9881
	P5	5	40,32	0,5	100	105,4498
	P6	6	40,32	0,5	100	103,3044
	P7	7	40,32	0,5	100	102,0036
						799,3371

Tab.13 Cálculo do tempo total da estratégia 4 para o P90

Na estratégia 5, temos os valores calculados para cada percentil do tempo gasto para construir o primeiro poço da sequência (a diferença entre o valor de percentil escolhido e o  $C_3$  gerará o valor de  $C_1$ , a ser utilizado na curva de aprendizado, que é estocástica). Nas tabelas 14,15 e 16 temos os valores simulados para cada percentil da estratégia 5.

P10	POÇO	N	C1	C2	C3	TT
	P1	1	9,46	0,8	100	109,46
	P2	2	9,46	0,8	100	104,2485
	P3	3	9,46	0,8	100	101,908
	P4	4	9,46	0,8	100	100,8569
	P5	5	9,46	0,8	100	100,3848
	P6	6	9,46	0,8	100	100,1728
	P7	7	9,46	0,8	100	100,0776
						717,1087

Tab.14 Cálculo do tempo total da estratégia 5 para o P10

P50	POÇO	N	C1	C2	C3	TT
	P1	1	22,64	0,8	100	122,64
	P2	2	22,64	0,8	100	110,1677
	P3	3	22,64	0,8	100	104,5663
	P4	4	22,64	0,8	100	102,0507
	P5	5	22,64	0,8	100	100,921
	P6	6	22,64	0,8	100	100,4136
	P7	7	22,64	0,8	100	100,1858
						740,9451

Tab.15 Cálculo do tempo total da estratégia 5 para o P50

P90	POÇO	N	C1	C2	C3	TT
	P1	1	40,32	0,8	100	140,32
	P2	2	40,32	0,8	100	118,1078
	P3	3	40,32	0,8	100	108,1322
	P4	4	40,32	0,8	100	103,6522
	P5	5	40,32	0,8	100	101,6402
	P6	6	40,32	0,8	100	100,7366
	P7	7	40,32	0,8	100	100,3308
						772,9199

Tab.16 Cálculo do tempo total da estratégia 5 para o P90

### Análise de resultados

A utilização de técnicas de simulação em estudos onde a dinâmica dos sistemas produtivos tenham relativa complexidade operacional, e alto grau de dificuldade de modelagem, poderá ser realizada e reproduzirá com razoável fidelidade a realidade do cenário em questão.

As técnicas desenvolvidas para o cenário de aplicação, se utilizada nos estudos de EVTE (Estudo de Viabilidade Técnico Econômica), podem auxiliar em muito a confecção de estratégias de exploração mais eficientes, minimizando custos e até

propiciando a reavaliação de campos anti-econômicos; além de permitir um gerenciamento do risco de desenvolvimento.

A consideração da dependência entre as operações de construção de poços, possibilita uma maior precisão a respeito das incertezas associadas ao processo. Considerar as operações independentes e realizar a simulação de Monte Carlo, pode gerar prejuízos elevados neste contexto de altos custos e volatilidade.

Os prejuízos podem ocorrer desde a captação de recursos desnecessários para financiar a construção dos poços, até ao contrário, subestimando os recursos necessários pode vir a ocorrer uma captação no mercado a preços mais elevados (custo do dinheiro). Outros prejuízos como contratação de sondas a preços elevados e baixa utilização (superestimativa dos tempos) ou necessidade de contratação urgente de sondas para término de poços (custos mais elevados pela urgência). Claro, prejuízos em se calcular de forma indevida os custos dos poços pode levar a aprovação de projetos não eficientes sob o ponto de vista econômico ou, ao contrário, não aprovar bons negócios devido a uma estimativa errada.

A metodologia apresentada neste capítulo pode ser utilizada em todas as fases de vida do ciclo do projeto, desde a concepção até o descomissionamento dos poços.

No caso do pré-sal, devido a grande quantidade de poços que virão a ser construídos, a utilização da metodologia é de suma importância para a execução dos projetos com valor economicamente adequado; maximizando recursos para o país.

## CAPÍTULO 5

### CAMPOS INTELIGENTES

Neste capítulo iremos apresentar a segunda aplicação da metodologia desenvolvida nesta tese, abordando o problema das incertezas de volumes de óleo e gás no campo de Tupi. O objetivo é encontrar a estratégia ótima de desenvolvimento do campo (número e tipos de poços a serem construídos), através da redução de incertezas geológicas e de reservatórios.

A proposta consiste na construção de um conjunto de poços inteligentes, para reduzir essas incertezas, a partir de testes no campo. Apesar dos custos desses tipos de poços serem mais elevados, e possuírem uma taxa de falha ainda desconhecida, principalmente para o cenário de Tupi, a economia propiciada por não termos de construir trechos de poços-piloto é muito grande. Os trechos de poços piloto são construídos para se obter dados do reservatório e, depois, abandonados.

Começamos com uma breve definição do problema a ser solucionado, a estratégia de modelagem adotada, a simulação e, logo após, a análise dos resultados alcançados.

#### **Definição do Problema**

A Petrobras planeja instalar um projeto-piloto para a exploração da área de Tupi entre 2010 e 2011; a exploração comercial está prevista para 2013. Inicialmente, a unidade produzirá 100.000 barris diários de óleo, mas ainda não está definido o verdadeiro potencial comercial da jazida (incerteza entre 5 a 8 bilhões de *boe* - barris de óleo equivalente).

Analistas estimam que os poços poderiam gerar cinco vezes mais. Uma série de questões para que a área de Tupi torne-se comercialmente produtiva terão que ser resolvidas: redução dos custos de construção dos poços e dos custos de produção.

Como sabemos, após uma descoberta exploratória, o próximo passo é a realização de testes de produção, e a perfuração de poços de delimitação do campo. O objetivo é aumentar o conhecimento da área, reduzindo as incertezas geológicas, de reservatório e também coleta de informações de potenciais problemas na execução dos demais poços, no processo de elevação e escoamento da produção.

No pré-sal, em particular na Bacia de Santos, e mais especificamente no campo de Tupi; são esperados elevados teores de  $\text{Co}_2$  e  $\text{CaCO}_3$  (carbonato de cálcio), além de problemas de perda de

circulação e fechamento de poços. O potencial de incrustação é muito grande, e ao mesmo tempo inédito no mundo, levando a se investir fortemente em pesquisas nessa área.

Uma outra incerteza muito grande, em todos os campos petrolíferos recém descobertos, é a incerteza da permeabilidade e compartimentalização dos seus potenciais reservatórios; e em Tupi isso também acontece. Uma forma de se revelar essas incertezas de forma a não se tornarem um problema futuro, é investir em tecnologias de completção inteligente dos poços.

No caso de Tupi, é proposto um conjunto de 7 poços equipados com completção inteligente, para a obtenção desses dados.

Após a interpretação dos dados do teste de produção, somados aos dados dos testes dos poços inteligentes; uma estratégia ótima de exploração do campo pode ser tomada, agora num ambiente de menor incerteza.

Essa estratégia possui um grande valor, pois dado o potencial produtivo como o de Tupi, os investimentos são muito altos, e a efetividade do mesmo é obtida em ambiente de menor incerteza.

Em outras palavras, com um nível muito alto de incerteza de volumes e número de poços; poderiam ser captados e investidos recursos desnecessários para o desenvolvimento do campo; claro; além das perdas possíveis em se encontrar um potencial produtor maior ou menor que o esperado.

Incertezas relativas a novos modos de falhas dos equipamentos que serão instalados nos poços, e a dinâmica do escoamento da produção, também são de suma importância para se reduzir as incertezas no modelo exploratório do campo.

O objetivo principal desta aplicação é a redução das incertezas dos volumes de óleo equivalente do campo, e do potencial de produção do mesmo, através da utilização de um “piloto-inteligente” no campo de Tupi; em detrimento da construção de trechos auxiliares de poços para se obterem dados de reservatório (poços pilotos).

A geometria de um poço típico exploratório, com objetivo secundário de obter dados de reservatório (topo, base, espessura e litologia) pode ser vista na figura 18:

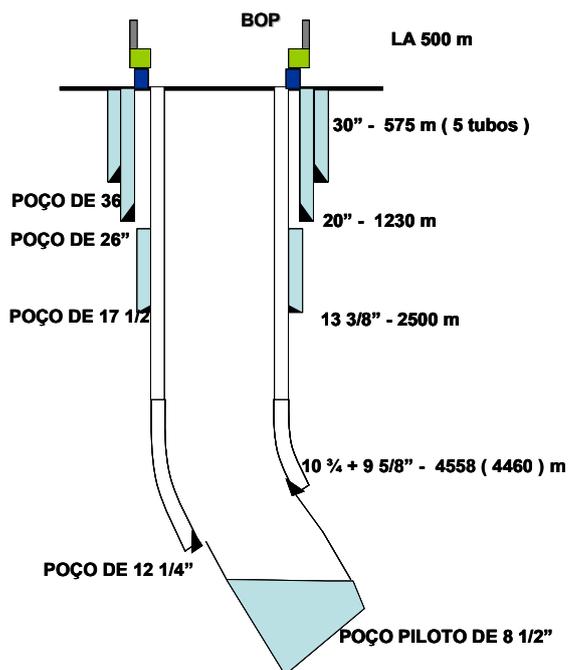


Fig.18 Poço com trecho de poço-piloto de 8 1/2"

O trecho do poço piloto de 8 1/2" tem como objetivo a aquisição de dados mencionada, e apresenta em média um tempo de execução de 15 dias, sem ocorrência de grandes desvios. Esse custo adicional da informação é muito elevado, quando se executam muitos poços.

Uma outra maneira de se obter informações é a realização de testes de interferência, continuidade, permeabilidade, transmissibilidade e outros, utilizando um conjunto de poços com completção inteligente. No campo de Tupi, utilizando toda a informação disponível dos poços já construídos na região, ainda permanece a incerteza do volume de óleo equivalente, em torno de 5 a 8 bilhões de *boe*.

### Modelagem, Simulação e Otimização.

**Campo Inteligente** é um conceito moderno de gerenciamento da produção e de reservatório de forma integrada, que pressupõe monitoração, modelagem e controle em tempo real. Na indústria, essa tecnologia possui diversas denominações: "Smart Field", "Intelligent Field", "Integrated Operations", ou no caso da Petrobras: "GEDIG" (Gerenciamento Digital Integrado de Campos de Petróleo e Gás).

Campo Inteligente é o gerenciamento integrado dos processos produtivos, que faz uso do conhecimento, monitoração e controle em tempo real nos métodos de otimização da produção; como forma de obter aumento no fator de recuperação e redução dos custos operacionais.

O modelo integrado de Campo Inteligente leva em consideração os principais processos produtivos: reservatório, engenharia de poço, elevação artificial, automação, facilidades de produção, operação e mudanças nos processos de trabalho. Como facilitadores dessas mudanças, são necessários o uso de bancos de dados integrados e de ambientes colaborativos; além do entendimento claro dos novos processos de trabalho multidisciplinares.

Uma classificação possível dos “níveis de inteligência” que podem ser implementados no campo seria (Fonte: Petrobras):

- Nível 4: Automação de superfície em instalações de produção.
- Nível 3: Automação de superfície em instalações de superfície e poços.
- Nível 2: Automação de superfície em instalações de produção, poços e monitoração de subsuperfície.
- Nível 1: Automação de superfície em instalações de produção, poços, monitoração e controle de fluxo de subsuperfície.

Essa classificação é interessante, pois possibilita definir, em termos da infraestrutura necessária, qual é o investimento necessário para implantação da tecnologia.

Esta informação é usada para comparar o retorno do investimento, após análise técnica do campo em termos de redução do custo operacional, antecipação de produção e aumento do fator de recuperação.

### **Completação inteligente**

Completação inteligente é o termo utilizado para definir uma tecnologia de completção, que permite a monitoração de grandezas de processo utilizando sensores de fundo, usualmente, pressão, temperatura e vazão, e comando de válvulas de controle de fluxo em tempo real, a partir da superfície. Dessa forma, se obtém o controle seletivo da injeção, ou da produção das diversas zonas de um determinado poço.

De uma maneira resumida, podemos resumir as vantagens e desvantagens em se utilizar o conceito de campo inteligente:

**Vantagens:**

- Aumento do fator de recuperação,
- Redução das incertezas de parâmetros de injeção, produção, redução de falhas de reservatório (workover para ajuste de índice de injetividade – $i_i$ , ou índice de produtividade-  $i_p$ ),
- Postergação da frente de água nos poços produtores,
- Antecipação da produção com produção de zonas simultaneamente,
- Redução dos custos operacionais (cada poço equivale por dois no mínimo),
- Embute flexibilidade ao sistema de produção,
- Maximização do VPL (Valor Presente Líquido),
- Possível efeito redutor de choques econômicos externos.

**Desvantagens:**

- Equipamentos sensíveis a ambiente agressivo e sujeito a falhas,
- Ausência ou limitação de modelos de estudos e simuladores do comportamento do campo inteligente,
- Reparo mais caro dos poços,
- Custo maior dos poços,
- Cultura de trabalho compartimentalizado,
- Dificuldade em operações de frackpacks e acidificações (workover de reservatório),
- Ambiente com alto teor de CO<sub>2</sub> e alto potencial de incrustação podem gerar muitas falhas nos equipamentos de completação inteligente,
- Risco elevado na instalação dos equipamentos aumentando a complexidade do poço.

A partir dessa introdução, acerca do problema e da tecnologia de poços inteligentes, vamos propor uma abordagem a partir da construção de 7 poços inteligentes no piloto de Tupi (5 produtores e 2 injetores), conforme a figura 19:

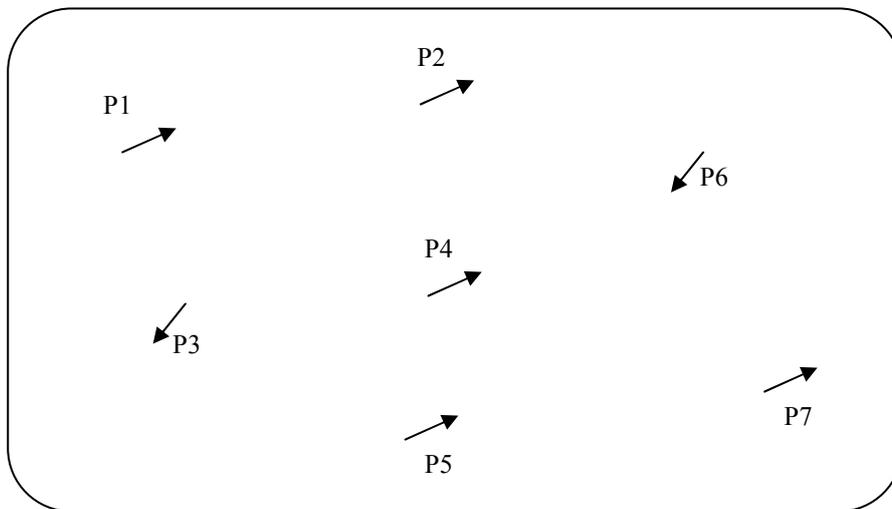


Fig.19 Esquemático do piloto de Tupi (teórico)

Os poços são equipados com sistema de medição de subsuperfície (Pressão, Temperatura e Vazão) e uma válvula de controle do fluxo, para cada conjunto de completação. Dessa forma, temos um duplo conjunto de sistema de medição e controle por poço conforme a figura 20:

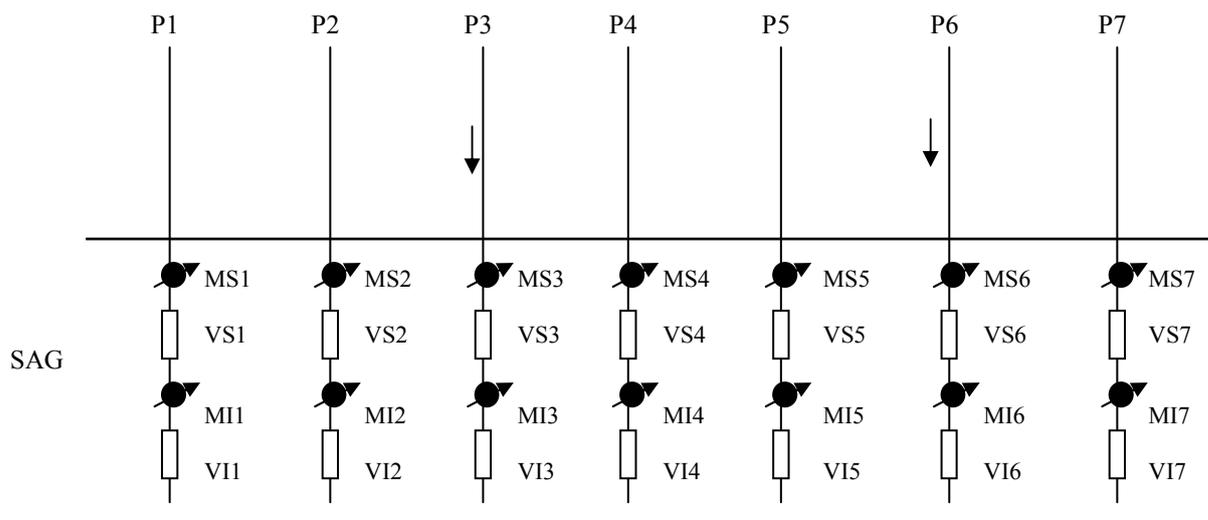


Fig.20 Configuração da completação inteligente do piloto de Tupi (teórico)

A partir da configuração dos poços, definimos então que os testes que serão realizados, para se revelar as características do reservatório desejadas, dependem da disponibilidade dos poços inteligentes de acordo com a tabela 17:

PERDA DE INFORMAÇÃO		
20%	50%	100%
P1 OU P2 OU P4 OU P5 OU P7	P3 OU P6	P1+P2+P3+P4+P5+P6+P7
	P1+P2+P5	
	P1+P2+P4	P3+P6
	P2+P4+P5	
	P4+P5+P7	P1+P2+P4+P5+P7
	P2+P5+P7	

Tab.17 Classes de efeitos das falhas nos poços

Dessa maneira, perdermos o funcionamento dos poços P1 OU P2 OU P4 OU P5 OU P7, só poderemos realizar os testes necessários para se reduzir as incertezas em 80 %. De maneira análoga, se perdermos o funcionamento dos poços {[P3 ou P6] ou [P1+P2+P5] ou [P1+P2+P4] ou [P2+P4+P5] ou [P4+P5+P7] ou [P2+P5+P7]} perderíamos 50 % do potencial de redução de incertezas. O mesmo vale para a perda de 100 %, quando perdemos os poços {[P1+P2+P3+P4+P5+P6+P7] ou [P3+P6] ou [P1+P2+P4+P5+P7]}.

Modelamos o comportamento do sistema como um processo estocástico, mais precisamente uma cadeia de Markov. Os estados possíveis desse processo estocástico podem ser observados na tabela 18. A coluna do efeito reflete o valor esperado da incerteza que deixará de ser revelada, de acordo com a disponibilidade do sistema. Consideramos o valor de 1 boe em US\$ 60,00.

ESTADO	CONDIÇÃO	EFEITO
0	SISTEMA COM 100 % DE DISPONIBILIDADE	0 US\$
1	PERDAS DE 20% DE INFORMAÇÃO/SELETIVIDADE	0,2 * 3 BILHÕES DE BOE * US\$ 60
2	PERDAS DE 50% DE INFORMAÇÃO/SELETIVIDADE	0,5 * 3 BILHÕES DE BOE * US\$ 60
3	PERDAS DE 100% DE INFORMAÇÃO/SELETIVIDADE	1 * 3 BILHÕES DE BOE * US\$ 60

Tab.18 Estados do sistema

O estado 1 caracteriza-se pela perda de 20% da capacidade de mapeamento do campo, redução de 80 % da incerteza e um baixo custo de workover (reparo do poço).

O estado 2 caracteriza-se pela perda de 50% da capacidade de mapeamento do campo, redução de 50 % da incerteza e um custo médio de manutenção dos poços.

O estado 3 corresponde à perda total da capacidade de mapeamento do campo, sem redução das incertezas e alto custo de workover.

O estado zero é o de disponibilidade máxima da capacidade de mapeamento do campo. A tabela 19 indica a política decisória do processo de decisão markoviano.

DECISÃO	ESTADOS	CUSTO ESPERADO WORKOVER	CUSTO DE PERDA DA INFORMAÇÃO	CUSTO TOTAL
1-FAZER NADA	0 E 1	1,00E+06	3,60E+10	3,60010E+10
2-REPARO DE 3 POÇOS	2	3,00E+06	9,00E+10	9,00030E+10
3-REPARO DE 2 POÇOS	3	1,00E+06	1,80E+11	1,80001E+11

Custos em US\$

Tab.19 Estados do sistema e política de decisão

O tempo de missão considerado é de 24 meses, apresentando a seguinte tabela de transição de estados (tabela 20):

MATRIZ DE POLÍTICA RANDOMIZADA				
ESTADO	0	1	2	3
0	0	0,4	0,4	0,2
1	0	0,7	0,2	0,1
2	0	0	0,5	0,5
3	1	0	0	0

Tab.20 Matriz de política randomizada

Utilizando os dados acima, podemos montar o nosso problema de otimização, de forma a minimizar a função de perdas, sujeitas as restrições.

$$\text{Min} \quad 36y_{11} + 90y_{22} + 180y_{33}$$

sujeito a:

$$y_{01} + y_{11} + y_{22} + y_{33}$$

$$y_{01} = 0$$

$$0,3y_{11} - y_{22} - 0,4y_{01} = 0$$

$$y_{22} - 0,4y_{01} - 0,2y_{11} - 0,5y_{21} = 0$$

$$y_{33} - 0,2y_{01} - 0,1y_{11} - 0,5y_{21} = 0$$

Aplicando o método SIMPLEX, temos:

$$y_{11} = 0,67$$

$$y_{22} = 0,17$$

$$y_{33} = 0,0083$$

$$y_{01} = 0,083$$

$$y_{21} = 0$$

Calculando as decisões:

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^K y_{ik}}, \text{ temos:}$$

$$(y_{11}) = 1$$

$$(y_{22}) = 1$$

$$(y_{33}) = 1$$

$$(y_{01}) = 1$$

$$(y_{21}) = 0$$

O valor que minimiza a função objetivo sujeita às restrições, é de US\$ 54 E9; tomando as decisões 1 (fazer nada), nos estados 0 e 1. Ao passo que o valor potencial esperado, de redução total de incerteza é de US\$ 180 E9.

Uma estratégia interessante seria investir na confiabilidade dos equipamentos utilizados na completção inteligente dos poços, de forma a se reduzir as probabilidades de falha dos mesmos e, conseqüentemente, aumentar a disponibilidade do campo para testes de revelação de incertezas. Supondo uma redução das taxas de transição de falhas conforme a tabela 21:

MATRIZ DE POLÍTICA RANDOMIZADA				
ESTADO	0	1	2	3
0	0	0,1	0,6	0,3
1	0	0,4	0,5	0,1
2	0	0	0,4	0,6
3	1	0	0	0

Tab.21 Matriz de política randomizada otimizada

Utilizando os dados acima, podemos montar o nosso problema de otimização com os novos valores, de forma a minimizar a função de perdas, sujeitas as restrições.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 36y_{11} + 90y_{22} + 180y_{33} \\ \text{sujeito a:} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{01} + y_{11} + y_{22} + y_{33} \\ y_{01} &= 0 \\ 0,6y_{11} - y_{22} - 0,1y_{01} &= 0 \\ y_{22} - 0,6y_{01} - 0,5y_{11} - 0,4y_{21} &= 0 \\ y_{33} - 0,3y_{01} - 0,1y_{11} - 0,6y_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando o método SIMPLEX, temos:

$$\begin{aligned} y_{11} &= 0,53 \\ y_{22} &= 0,31 \\ y_{33} &= 0,076 \\ y_{01} &= 0,076 \\ y_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Calculando as decisões:

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^K y_{ik}}, \text{ temos:}$$

$$\begin{aligned} (y_{11}) &= 1 \\ (y_{22}) &= 1 \\ (y_{33}) &= 1 \\ (y_{01}) &= 1 \\ (y_{21}) &= 0 \end{aligned}$$

O valor que minimiza a função objetivo sujeita às restrições, é de US\$ 61,24 E9; tomando as decisões 1 (fazer nada), nos estados 0 e 1. Ao passo que o valor potencial esperado, de redução total de incerteza é de US\$ 180 E9.

## **Análise de Resultados**

Uma conclusão importante é que vale a pena o investimento na disponibilidade do sistema de completção inteligente, reparando os poços, para que sejam realizados os testes redutores de incerteza. O prêmio em se desenvolver o campo é tão mais elevado (ordem de grandeza dos bilhões), comparado com os custos dos reparos nos poços, orbitando em torno de 1 milhão por poço.

O custo da incerteza é muito elevado, levando a ineficiência na captação de recursos para desenvolvimento do campo (custo do capital); gastos com poços desnecessários para a malha de drenagem; gastos elevados para a construção de unidades de produção ineficientes etc..

Os valores obtidos indicam ganhos significativos na utilização da completção inteligente no piloto em estudo, com uma redução das incertezas do campo. Essa redução de incertezas pode propiciar um aumento do fator de recuperação, redução dos volumes de água produzida e o prolongamento da vida útil do campo.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

A metodologia apresentada neste trabalho pode ser utilizada em todas as fases de vida do ciclo do projeto de desenvolvimento de campos de petróleo e gás, desde a concepção, até o descomissionamento dos poços, e da unidade de produção e sistemas auxiliares.

No caso do pré-sal, devido a grande quantidade de poços que virão a ser construídos, a utilização da metodologia é de suma importância para a execução dos projetos com valor economicamente adequado; maximizando recursos para o país.

As técnicas desenvolvidas, se utilizadas nos estudos de EVTE (Estudo de Viabilidade Técnico Econômica), podem auxiliar em muito a confecção de estratégias de exploração mais eficientes, minimizando custos e até propiciando a reavaliação de campos anti-econômicos; além de permitir um gerenciamento do risco de desenvolvimento.

A consideração da dependência entre as operações de construção de poços, possibilita uma maior precisão a respeito das incertezas associadas ao processo.

Considerar as operações independentes e realizar a simulação de Monte Carlo, pode gerar prejuízos elevados neste contexto de altos custos e volatilidade.

Os prejuízos podem ocorrer desde a captação de recursos desnecessários para financiar a construção dos poços ou, até ao contrário, subestimando os recursos necessários, ocorrer uma captação futura no mercado a preços mais elevados (custo do dinheiro) e lucros cessantes. Outros prejuízos como contratação de sondas a preços elevados e baixa utilização (superestimativa dos tempos), ou necessidade de contratação urgente de sondas para término de poços (custos ainda mais elevados devido a urgência). Claro, prejuízos em se calcular de forma indevida os custos dos poços pode levar a aprovação de projetos não eficientes, sob o ponto de vista econômico ou, ao contrário, não aprovar bons negócios devido a uma estimativa errada.

A teoria de curva de aprendizado pode ser utilizada como um modelo econômico, para avaliar o desempenho de perfuração.

Este modelo pode mostrar se uma operação de perfuração está abaixo ou acima do que se tem como padrão médio na indústria, mostrando o quanto podemos economizar com um rápido aprendizado, melhor planejamento e utilização de melhores tecnologias.

O modelo também indica o nível tecnológico em que a companhia se encontra, sua capacidade operacional para qualquer série de poços perfurados, e quanto pode ser economizado pela melhoria das capacidades operacionais e tecnológicas.

Concluimos que a estratégia que minimiza o tempo de construção dos poços é a estratégia probabilística com acoplamento e curva de aprendizado estocástica otimizada (variáveis dependentes utilizando copula e curva de aprendizado otimizada).

Nesta estratégia combinamos as funções de tempos totais de cada poço, considerando dependência (Simulação de Monte Carlo com cópula), e reduzindo os tempos dos poços através da curva de aprendizado estocástica, com parâmetros otimizados. O efeito da curva de aprendizado no tempo total da campanha é notável, reduzindo o valor de P50 das estratégias 1 a 3 em mais de 100 dias na estratégia 4 e 124 dias na estratégia 5. Apenas essa redução geraria uma economia de US\$ 50.000.000 e US\$ 62.000.000; para o dado custo de aluguel diário de sonda.

O processo de decisão markoviano (MDP) possibilita uma poderosa ferramenta para a otimização da performance de processos estocásticos, que podem ser modelados como uma cadeia de Markov de tempo discreto.

Uma conclusão importante é que vale a pena o investimento na disponibilidade do sistema de completação inteligente, reparando os poços, para que sejam realizados os testes redutores de incerteza. O prêmio em se desenvolver o campo é tão mais elevado (ordem de grandeza dos bilhões), comparado com os custos dos reparos nos poços, orbitando em torno de 1 milhão por poço.

O custo da incerteza é muito elevado, levando a ineficiência na captação de recursos para desenvolvimento do campo (custo do capital); gastos com poços desnecessários para a malha de drenagem; gastos elevados para a construção de unidades de produção ineficientes etc..

Os valores obtidos indicam ganhos significativos na utilização da completação inteligente no piloto em estudo, com uma redução das incertezas do campo. Essa redução de incertezas pode propiciar um aumento do fator de recuperação, redução dos volumes de água produzida e o prolongamento da vida útil do campo.

As limitações da metodologia proposta no capítulo 4 (Construção de Poços) referem-se principalmente a dificuldade em se obter dados relevantes para poços de correlação e a partir daí estabelecer as funções de acoplamento entre as operações.

Com relação à metodologia proposta no capítulo 5 (Campos Inteligentes), as limitações são devido à necessidade de se obter maiores informações das estruturas geológicas da região em estudo.

Uma dificuldade comum aos dois modelos propostos está na complexidade e alta especialização dos mesmos.

Em trabalhos futuros, as pesquisas irão focar a utilização de outros tipos de funções cópulas e o aumento das operações de perfuração e completação de poços que serão estudadas, de forma a se obter uma maior precisão na análise. Outra questão importante seria a investigação de outros modelos de acoplamento entre as operações, tais como técnicas de inteligência artificial e outros métodos livres de modelos.

A pesquisa de outros processos estocásticos para se modelar o sistema do capítulo 5 (Campos Inteligentes) ou de outros métodos de otimização será objetivo de trabalhos futuros. Acoplar modelos de reservatório e de escoamento da produção, ao sistema proposto no capítulo 5 seria um ponto a ser investigado no futuro.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACCIOLY, Ricardo M.S. Modelando Estruturas de Dependências Através de Copulas: Contribuições para Análise de Incerteza em Projetos de Exploração e Produção. Tese de Doutorado COPPE-UFRJ, RJ. 2005.

AMMAN, Hans M. et al. Handbook of Computation Economics. Netherlands: Edit. Elsevier. 1996.

ANDRADE, E.L. Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e Modelos para a Análise de Decisão. Rio de Janeiro: LTC. 1990.

ANP-AGÊNCIA NACIONAL DE PETRÓLEO, GÁS NATURAL E BIOCOMBUSTÍVEIS. <http://www.anp.gov.br/>, 2009.

ARAÚJO, L. A. Pereira de. Suporte Inteligente à Decisão em Métodos Especiais de Recuperação de Petróleo. Dissertação de Mestrado PUC – Vol. 1 e 2, RJ. 1991.

ARAÚJO, Moacyr ; SILVA, Marcus Andrés ; DROGUETT, E. A. L. ; JACINTO, Carlos Magno Couto . Simulating the Dispersion of Oil Plumes from Deep-Water Well Blowouts off Brazil: The Role of the Western Boundary Currents and Thermohaline Structure. In: XXVIII CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods for Engineering, 2007, Porto. Proceedings of the XXVIII CILAMCE, 2007. v. 1. p. 1-15.

AYYUB, Bilal M. Elicitation of Expert Opinions for Uncertainty and Risk. 1. ed. USA: CRC Press, 2001.

BAIROS, Luigi Alfonso Saputelli. Self-Learning Reservoir Management: An Application of Model Predictive Control for Continuous Oilfield Optimization. PhD Thesis. University of Houston, Texas, EUA, 2003.

BALL, Ben C; SAVAGE, Sam L. Notes on Exploration and Production Portfolio Optimization. 7/17/99. Stanford Site.

BARROS NETO, Benício de. Planejamento e Otimização de Experimentos. 1. ed. BRASIL: Editora da Unicamp, 1995.

BEDFORD, Tim. Probabilistic Risk Analysis. 1. ed. UNITED KINGDOM: Cambridge University press, 2003.

BERNSTEIN, Peter L. Desafio aos Deuses: a Fascinante História do Risco. 1. ed. BRASIL-RJ: Elsevier, 1997.

BESSADA, Octávio. O Mercado de Derivativos Financeiros. São Paulo: Edit. Record. 2000.

BISHOP, C.M. Neural Networks For Pattern Recognition. USA: Edit. Oxford University. 1995.

BRAGA, M.J.F. Notas de Aula – Modelagem de sistemas – mestrado em engenharia de produção – UFF.

BREALEY, R. et al. Princípios de Finanças Empresariais. 2. ed. Portugal: McGraw-Hill. 1998.

BRETT, J. E, K. K. MILHEIM, "The drilling performance curve: A yardstick for judging drilling performance;" paper SPE 15362, presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, Louisiana, 1986.

CAMPBELL, John M. Analyzing and managing Risk Investments. 1. ed. USA: John M. Campbell, 2001.

COELHO, Dennis Kerr ; FREITAS FILHO, Paulo Jose de ; JACINTO, Carlos Magno C ; ROISENBERG, Mauro . Risk Assessment Of Drilling and Completion Operations in Petroleum Wells Using a Monte Carlo and a Neural Network Approach . In: Winter Simulation Conference 2005, 2005, Orlando, FL. Proceedings of the WSC 2005, 2005.

COSENZA, Carlos Alberto Nunes. Notas de Aula de Fuzzy. Doutorado. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro. 2001.

DAKE, L.P. Fundamentals of Reservoir Engineering. 1. ed. USA: Elsevier, 1978.

DROGUETT, E. A. L. ; SANTOS, Wagner Barbosa dos ; JACINTO, Carlos Magno Couto ; SOTOMAYOR, Gabriel . Reliability Assessment of Offshore Oil Multilateral Wells in Brazil. In: IEEE Reliability and Maintainability Symposium - RAMS, 2006, Newport Beach. IEEE Reliability and Maintainability Symposium - RAMS, 2006.

DROGUETT, E. A. L. ; JACINTO, Carlos Magno Couto ; MENEZES, Regilda ; FIRMINO, Paulo Renato Alves ; PONTUAL, Andrea ; SOTOMAYOR, Gabriel ; GARCIA, Pauli Adriano . Probability Assessment of Offshore Oil Multilateral Wells Construction Process in Brazil. In: International Conference on Probabilistic Safety Assessment and Management, 2006, New Orleans. Probabilistic Safety Assessment and Management, 2006.

DROGUETT, E. A. L. ; JACINTO, Carlos Magno Couto ; GARCIA, Pauli Adriano de Almada ; MOURA, Márcio . Availability Assessment of Onshore Oil Fields. In: European Safety & Reliability Association Conference - ESREL, 2006, Estoril. ESREL 2006 Proceedings, 2006.

DROGUETT, E. A. L. ; MENÊZES, Regilda ; PONTUAL, Andrea ; JACINTO, Carlos Magno Couto ; SOTOMAYOR, Gabriel ; GARCIA, Pauli Adriano de Almada . Reliability Modeling of Multilateral Wells Construction Process. In: European Safety & Reliability Association Conference - ESREL, 2006, Estoril. ESREL Proceedings, 2006.

DROGUETT, E. A. L. ; JACINTO, Carlos M. C. ; MOURA, M. ; Silva Jr, M. F. ; GARCIA, P. A. A. . A Semi-Markov Model with Bayesian Belief Network Based Human Reliability Modeling for Availability Assessment of Downhole Optical Monitoring Systems. In: European Safety and Reliability Conference, 2007, Stavanger. Safety and Reliability for Managing Risk. London : Taylor & Francis Group, 2007.

EVANS, R. Decision Analysis for Integrated Reservoir Management. SPE European Petroleum Conference (SPE 65148). FRANÇA, 2000.

FANCHI, John R. Principles of Applied Reservoir Simulation. 2. ed. USA: Gulf Professional Publishing, 2001.

FORBES, Nancy. Imitation of Life. 1. ed. USA: MIT Press, 2004.

GARCIA, P. A. A. ; JACINTO, Carlos M. C. . Aplicação em duas etapas do modelo de avaliação cruzada para seleção de alternativas tecnológicas para o desenvolvimento de campos de petróleo. In: XXXIX SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 2007, FORTALEZA. A pesquisa operacional e o desenvolvimento sustentável, 2007.

GARCIA, Pauli Adriano ; NEVES, Júlio César Silva ; JACINTO, Carlos Magno Couto ; DROGUETT, E. A. L. . Aplicação de Análise Relacional Grey no Gerenciamento da Cadeia Logística. In: XXXVII SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2005, Gramado. XXXVII SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2005.

GARCIA, Pauli Adriano ; JACINTO, Carlos Magno Couto ; DROGUETT, E. A. L. . A Multiobjective Genetic Algorithm for Blowout Preventer Test Scheduling Optimization. In: 14th IASTED International Conference on Applied Simulation and Modeling, 2005, Benalmádena. Proceedings of the 14th IASTED International Conference on Applied Simulation and Modeling, 2005. p. 344-348.

GARCIA, P. A. A. ; JACINTO, Carlos M. C. . Utilização de modelos DEA de avaliação cruzada na seleção de tecnologias para o desenvolvimento de campos de petróleo. In: X Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha - SPOLM 2007, 2007, Rio de Janeiro. SPOLM 2007 - A pesquisa operacional e a logística na operação portuária, 2007.

GARCIA, P. A. A. ; JACINTO, Carlos M. C. ; B. Pires de Lima ; Droguett, E. A. L. . Optimizing Downhole Safety Valve Test Scheduling Using a Multiobjective Genetic Algorithm. In: International Conference on Probabilistic Safety Assessment and Management, 2006, New Orleans. Probabilistic Safety Assessment and Management.

GARCIA, P. A. A. ; JACINTO, Carlos M. C. ; Droguett, E. A. L. . A Multiobjective Genetic Algorithm for Blowout Preventer Test Scheduling Optimization. In: The IASTED Conference on Applied Simulation and Modelling, 2005, Benalmádena. Applied Simulation and Modelling. Calgary : ACTA Press, 2005.

GARCIA, P. A. A. ; NEVES, J. C. S. ; JACINTO, Carlos M. C. ; Droguett, E. A. L. . Aplicação de Análise Relacional Grey no Gerenciamento da Cadeia Logística. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2005, Gramado. XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2005.

GAREY, Michael R. Computers and Intractability. 1. ed. USA: W.H. Freeman and Company, 1979.

GOLDBARG, M.C. et al. Otimização Combinatória e Programação Linear. 1. ed. Rio de Janeiro: Edit. Campus. 2000.

GUIMARÃES, A. M. et al. Algoritmos e Estrutura de Dados. 27ª. Tiragem. Rio de Janeiro: LTC. 1994.

HILLIER, Frederic. Introduction to Operations Research. 7. ed. USA: McGraw-Hill, 2001.

JACINTO, Carlos Magno Couto. The Use of Uncertainty Concepts for the Development of an Oil Field ;East Albacora, a Case History. SPE 77917. USA: 2001.

JACINTO, Carlos Magno Couto., 2002 A. “Modelagem e Simulação do Risco em Operações de Perfuração e Completação de Poços de Petróleo e Gás em águas Profundas”, Tese de Mestrado, Universidade Federal Fluminense.

JACINTO, Carlos Magno Couto. Discrete Event Simulation for the Risk of Development of an Oil field. Winter Simulation Conference. USA: 2002 B.

JACINTO, Carlos Magno Couto. Wet Christmas Tree Completion: Financial and Engineering Integrated Overview. Workshop on Reliability and Risk Analysis in Well Technology Engineering. PETROBRAS. BRASIL: 2002 C.

JACINTO, Carlos Magno Couto; MARTINS, F. S. B. ; JORGE, N. M. ; MOREIRAS, J. R. F. ; GARCIA, P. A. A. ; NEVES JR, M. M. . Análise Quantitativa de Risco na Construção do Poço 9-MXL-1D-SPS. 2005 A.

JACINTO, Carlos Magno Couto; MARTINS, F. S. B. ; JORGE, N. M. ; GARCIA, P. A. A. ; NEVES JR, M. M. ; Droguett, E. A. L. . Análise Quantitativa de Risco para o Processo de Construção dos Poços do Campo de Piranema. 2005 B.

JACINTO, Carlos Magno C.; ZUNINO, Ney André de Mello ; ANDRADE, Dalton; FREITAS FILHO, Paulo Jose de ; BARBETTA, P. A. ; Using Copulas in Risk Analysis. In: WINTER SIMULATION CONFERENCE 2006, 2006, Monterey. Proceedings of the WSC 2006, 2006 A.

JACINTO, Carlos Magno Couto ; DROGUETT, E. A. L. ; GARCIA, Pauli Adriano de Almada . Aspectos Teóricos e Metodológicos para a Realização de uma Análise Quantitativa de Risco na Construção e Restauração de Poços. Boletim Técnico da Produção de Petróleo, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 157-182, 2006 B.

JACINTO, Carlos Magno Couto; GARCIA, Pauli Adriano ; LIMA, Beatriz Pires de ; DROGUETT, E. A. L. . Optimizing Downhole Safety Valve Test Scheduling Using a Multiobjective Genetic Algorithm. In: International Conference on Probabilistic Safety Assessment and Management, 2006, New Orleans. Probabilistic Safety Assessment and Management, 2006 C.

JACINTO, Carlos Magno Couto; SOTOMAYOR, Gabriel ; GARCIA, Pauli Adriano de Almada ; DROGUETT, E. A. L. . Análise de Risco em Construção de Poços MLT. In: Rio Oil & Gas Expo and Conference, 2006, Rio de Janeiro. Proceeding os the Rio Oil & Gas 2006, 2006 D.

JACINTO, Carlos Magno Couto; GARCIA, Pauli Adriano de Almada ; DROGUETT, E. A. L. . Análise Quantitativa de Risco Integrada. In: Rio Oil & Gas Expo and Conference, 2006, Rio de Janeiro. Proceeding of the Rio Oil & Gas 2006, 2006 E.

JACINTO, Carlos Magno Couto ; GARCIA, P. A. A. ; P. Freitas . Gerenciamento Estocástico de Tempos e Custos em Projetos de Construção de Poços. In: Rio Oil and Gas Expo and conference, 2006, Rio de Janeiro. Rio Oil and Gas 2006 F.

JACINTO, Carlos Magno Couto; GARCIA, P. A. A. . Análise Quantitativa de Risco na Construção dos Poços do Campo de Peroá. 2006 G.

JACINTO, Carlos Magno Couto; GARCIA, P. A. A. . Estimativa de Tempos e Custos para os Poços de Tambaqui. 2006 H.

JACINTO, Carlos Magno Couto ; Silva, Alfonso H. C. ; JORGE, N. M. ; GARCIA, P. A. A. . Análise Quantitativa de Risco para o Projeto de Construção do Poço Exploratório de Guaraná. 2006 I.

JACINTO, Carlos Magno Couto.; GARCIA, P. A. A. ; Petersen, Flávia C. . Probabilistic Risk Assessment to the Mora 1 Well Construction. 2007 A.

JACINTO, Carlos Magno Couto ; GARCIA, P. A. A. ; Terra, F. S. ; MARTINS, F. S. B. . Estudo de Perigos e Operabilidade para o Processo de Construção dos Poços do Campo de Marlin Leste Módulo 1. 2007 B.

JACINTO, Carlos Magno Couto ; GARCIA, P. A. A. ; Silva, Alfonso H. C. . OTIMIZAÇÃO DA POLÍTICA DE TESTE DE ÁRVORES DE NATAL SECA PARA O CAMPO DE MIRANGA. 2007 C.

JACINTO, Carlos Magno Couto; Silva, Alfonso H. C.; Terra, F. S. ; Petersen, Flávia C. ; MOREIRAS, J. R. F. ; JORGE, N. M. ; GARCIA, P. A. A. . PROCEDIMENTOS PARA APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS HAZOP E AQR PARA AVALIAÇÃO DE RISCOS EM PROJETOS DE POÇOS NO ÂMBITO DO E&P. 2007 D.

JONKMAN, R.M.: Best Practices and Methods in Hydrocarbon Resource Estimation, Production, Emission forecasting, Uncertainty Evaluation and Decision Making. SPE 65144. FRANÇA, 2000.

JORION, P.: Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk. McGraw Hill, 1997. 332p.

KAPLAN, Robert S. et al. The Strategy-Focused Organization. Boston – Massachusetts, USA: Harvard Business School Press. 2001.

KUMAMOTO, Hiromitsu. Probabilistic Risk Assessment and Management for Engineers and Scientists. 2. ed. USA: IEEE Press, 1996.

LARSON, Harold. Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. USA: John Willey & Sons. 1982.

LERCHE, Ian. Economic Risk in Hydrocarbon Exploration. 1. ed. USA: Academic Press, 1999.

LEWIS, E.E.. Introduction to Reliability Engineering. 2. ed. USA: John Willey & Sons. 1996.

MANNARINO, R. Introdução à Engenharia Econômica. Rio de Janeiro: Ed. Campus. 1991.

MARKOWITZ, H.M. Portfolio Selection – Efficient Diversification of Investments. 8. ed. Blackwell Publishers, Inc. , Malden, MA (1957, 1997).

MARSHALL, Christopher. Medindo e Gerenciando Riscos Operacionais em Instituições Financeiras. 1. ed. BRASIL: Qualitymark Editora Ltda, 2002.

MARTINS, F. S. B. ; Jacinto, Carlos M. C. ; LAGE, A. C. V. M. ; GARCIA, P. A. A. ; Droguett, E. A. L. ; MOREIRAS, J. R. F. ; JORGE, N. M. ; NEVES JR, M. M. . Análise Quantitativa de Risco na Construção do Poço 9-MXL-1D-SPS. In: Seminário de Engenharia de Poço, 2005, Búzios. VI Seminário de Engenharia de Poço.

MATSUMOTO, Élia Y. MATLAB 6: Fundamentos de Programação. 1. ed. BRASIL: Editora Érica Ltda, 2001.

MEGILL, R.E. An Introduction to Risk Analysis. 1. ed. USA: PennWell Books, 1997.

MELNICK, Julio. Manual de Projetos de Desenvolvimento Econômico. 1. ed. BRASIL: Unilivros Cultural, 1991.

MORGAN, Byron. Applied Stochastic Modelling. 1. ed. ENGLAND: Arnold, 2000.

MORGAN, M. G. Uncertainty. 1. ed. UNITED KINGDOM: Cambridge University Press, 1990.

MOURA, Márcio ; DROGUETT, E. A. L. ; JACINTO, Carlos Magno Couto . Solução Numérica das Equações de Probabilidades de Transição de Processos Semi-Markovianos Utilizando Transformadas de Laplace. In: XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2006, Goiânia. XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2006.

MOURA, Márcio ; DROGUETT, E. A. L. ; FERREIRA, Ricardo ; JACINTO, Carlos Magno Couto . Assessment of the Reliability of Products under Development via Accelerated Life testing. In: Third International Conference on Production Research-Americas'Region, 2006, Curitiba. Third International Conference on Production Research, 2006.

MOURA, Márcio José das Chagas ; DINIZ, Helder Henrique Lima ; DROGUETT, E. A. L. ; JACINTO, Carlos Magno Couto . Análise Comparativa da Disponibilidade de Duas Malhas de Completação Inteligente em Poços de Petróleo. In: XXV Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 2005, Porto Alegre. XXV Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 2005.

MOURA, Márcio José das Chagas ; ROCHA, Sérgio Parente Vieira da ; DROGUETT, E. A. L. ; JACINTO, Carlos Magno Couto . Avaliação Bayesiana da Eficácia da Manutenção via Processo de Renovação Generalizado. Pesquisa Operacional, 2007.

MURTHA, J. Monte Carlo Simulation: Its Status and Future. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, USA: SPE 37932. 1997.

MURTHA, J. Risk Analysis for the Oil Industry. Newfield, NY: Hart's E&P. 2000.

NAKAGAWA, Edson Yoshihito. Modelo para Análise de Risco na Decisão de Exploração ou Desenvolvimento de um Campo. Março de 1986. Ouro Preto. Dissertação de Mestrado.

NELSEN, Roger B. An introduction to Copulas. 1 ed. USA: Springer-Verlag, 1999.

NEWENDORP, Paul D. Decision Analysis for Petroleum Exploration. 2 ed. USA: Planning Press, 2000.

PAULINO, Carlos D. Estatística Bayesiana. 1. ed. PORTUGAL: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

PIQUET, Rosélia. Petróleo, Royalties e Região. 1. ed. BRASIL: Editora Garamond Ltda, 2003.

RAIFFA, H.; Schlaifer. Applied Statistical Decision Theory. ed. USA: Harvard Business School Press, 1961.

ROISENBERG, Mauro ; COELHO, Dennis Kerr ; FREITAS FILHO, Paulo Jose de ; JACINTO, Carlos Magno C . A neural network architecture for process time estimation - an application in petroleum wells operations. In: INCOM'2006 - 12TH IFAC, 2006, Lion. Proceedings of the INCOM'2006 - 12TH IFAC, 2006.

SALIBY, E. Repensando a simulação. Ed. Atlas. 1989.

SANT'ANNA, A. P. Modelagem da Produtividade Interativa com a Avaliação do Desempenho. Artigo, Revista Pesquisa Operacional. 1997. vol. 17, nº 1.

SATTER, Abdus. Integrated Petroleum Reservoir Management: a Team Approach. 1. ed. USA: PennWell Publishing company, 1994.

SAVAGE, Sam L. Understanding Uncertainty Through Simulation With XLSIM.

SILVA, Marcus Andrés ; ARAUJO, Moacyr ; JACINTO, Carlos Magno Couto ; DROGUETT, E. A. L. . Simulating Undersea Gas Plume Blowouts along the Brazilian Shore. In: XXVIII CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods for Engineering, 2007, Porto. Proceedings of the XXVIII CILAMCE, 2007. v. 1. p. 1-15.

TENENBAUM, Aaron M. et al. Estruturas de Dados Usando C. São Paulo: Makron Books. 1995.

TENÓRIO, Marcelo ; FREITAS FILHO, Paulo Jose de ; NASSAR, Silvia ; JACINTO, Carlos Magno C . Recognition of Continuous Probability Models. In: Winter Simulation Conference 2005, 2005, Orlando, FL. Proceedings of WSC2005, 2005.

THOMAS, J. E. (organizador). Fundamentos de Engenharia de Petróleo. PETROBRAS SA. 2000.

TOSCANI, Laira V. Complexidade de Algoritmos: Análise, Projeto e Métodos. 1. ed. BRASIL: Editora Sagra Luzzatto, 2002.

VALDIVIA, Yván J. T. A. Sistema Inteligente de Otimização de Alternativas de Desenvolvimento de Campos Petrolíferos. Tese de Doutorado PUC, RJ. 2005.

VILLAS, M.V. et al. Estrutura de Dados. 4. ed. Rio de Janeiro: Edit. Campus. 1993.

VOSE, David. Risk Analysis: a Quantitative Guide. 2 ed. England: John Wiley & Sons Ltd. 2000.

WONNACOTT/WONNACOTT – Econometria, 2. ed. LTL.

ZIEGLER, Bernard P. Theory of Modeling and Simulation. 2. ed. USA: Academic Press, 2000.

## ANEXO I- CÓPULAS

Uma das decisões de projeto para uma SMC é a escolha das distribuições de probabilidades para os dados de entrada randômicos (variáveis de entrada do modelo).

Selecionar uma distribuição para cada variável individual é muitas vezes correto mas, decidir quais dependências devem existir entre as variáveis de entrada é uma tarefa difícil. Idealmente, os dados de entrada para a simulação devem refletir o conhecimento sobre a dependência entre as quantidades sendo modeladas. Contudo, às vezes não há informações na qual se basear uma relação de dependência na simulação, e em tais casos é uma boa idéia experimentar diferentes possibilidades, de maneira a determinar a sensibilidade do modelo.

Entretanto, pode ser difícil gerar entradas aleatórias com dependências quando elas possuem distribuições que não são provenientes de distribuições multivariadas. Além disso, algumas das distribuições multivariadas padronizadas podem modelar somente tipos muito limitados de dependências. É sempre possível fazer as entradas do modelo independentes embora isso seja uma escolha simples, pode não ser sensata e levar a conclusões equivocadas.

Como exemplo, uma SMC de um risco financeiro possui entradas aleatórias que representam diferentes fontes de perdas. Esses inputs podem ser modelados como variáveis aleatórias lognormais. Uma questão razoável é perguntar como a dependência entre esses dois inputs afeta o resultado da simulação. Realmente poderia ser reconhecido, a partir dos dados reais, que as condições aleatórias afetam ambas as fontes de risco, e ignorá-las na simulação poderia levar a conclusões incorretas.

A simulação de uma lognormal independente é trivial, utilizando o seguinte código Matlab (versão 7.8.0 R2009a):

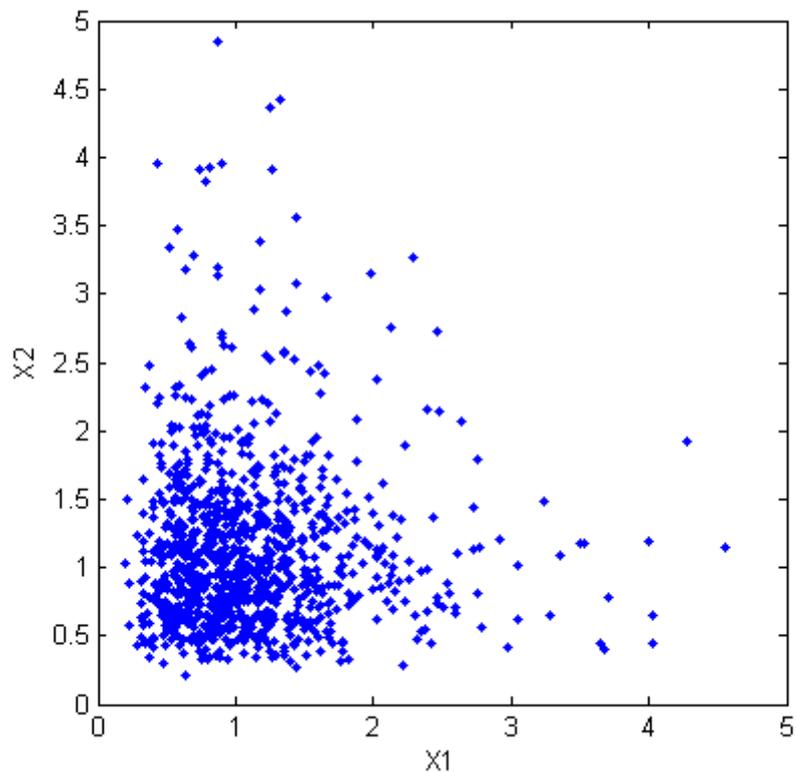
```
n = 1000;
sigma = .5;
SigmaInd = sigma.^2 .* [1 0; 0 1]
SigmaInd =

    0.2500    0
         0    0.2500

ZInd = mvnrnd([0 0], SigmaInd, n);
XInd = exp(ZInd);
plot(XInd(:,1),XInd(:,2),'.'); axis equal; axis([0 5 0 5]);
```

```
xlabel('X1'); ylabel('X2');
```

Utilizamos a função “mvnrnd” para gerar n pares de variáveis aleatórias normais independentes e então as exponenciamos. A matriz de covariância utilizada é diagonal, isto é, independência entre as colunas de Z.



Variáveis lognormais bivariadas dependentes são também fáceis de serem geradas, utilizando uma matriz de covariância com termos da diagonal não-nulos:

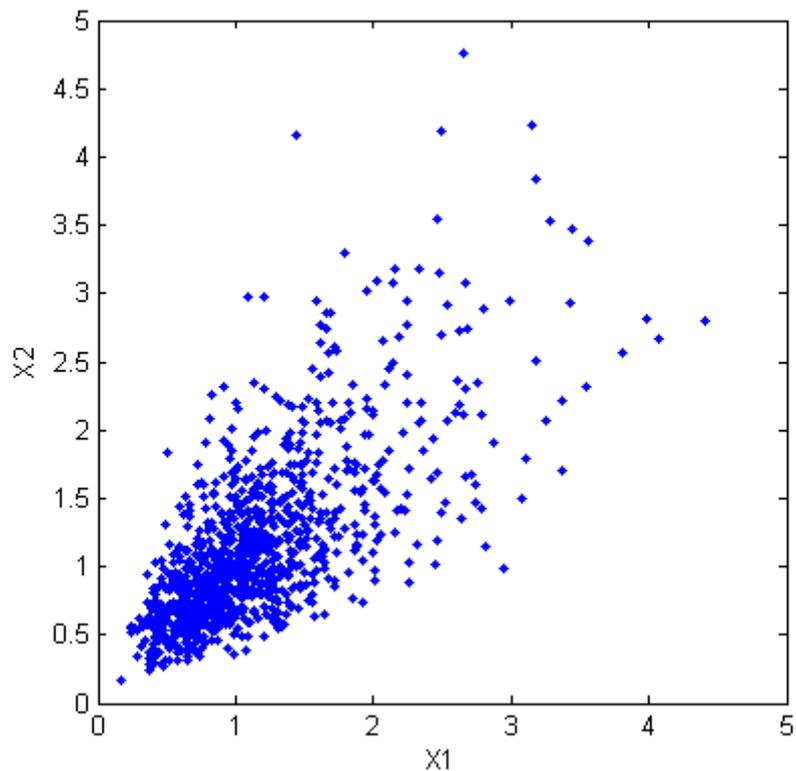
```
rho = .7;  
SigmaDep = sigma.^2 .* [1 rho; rho 1]  
SigmaDep =
```

```
    0.2500    0.1750  
    0.1750    0.2500
```

```
ZDep = mvnrnd([0 0], SigmaDep, n);  
XDep = exp(ZDep);
```

O segundo gráfico demonstra a diferença entre as duas distribuições bivariadas.

```
plot(XDep(:,1),XDep(:,2),'.'); axis equal; axis([0 5 0 5]);  
xlabel('X1'); ylabel('X2');
```



Está claro que existe uma tendência maior no segundo conjunto de dados para valores maiores de  $X_1$  a serem associados a valores maiores de  $X_2$  e similarmemente quanto a baixos valores. Essa dependência é determinada pelo parâmetro de correlação  $RHO$  de uma normal bivariada subjacente. As conclusões tiradas da simulação poderiam depender se  $X_1$  e  $X_2$  foram gerados com dependência ou não.

A distribuição lognormal bivariada é uma solução simples neste caso, e facilmente generalizada para grandes dimensões em casos onde as distribuições marginais são diferentes lognormais. Outras distribuições multivariadas existem, por exemplo, a multivariada “t” e a Dirichlet são utilizadas para simular variáveis aleatórias beta e “t” dependentes. Mas, a lista de distribuições multivariadas simples não é muito longa, e elas somente são aplicadas em casos onde as marginais são todas da mesma família ou as mesmas distribuições e pode levar a limitações em muitas situações reais.

### **Um método mais generalista para construção de distribuições bivariadas dependentes**

Embora a construção descrita anteriormente seja simples, ela serve para ilustrar um método o qual é mais geralmente aplicado. Primeiro, geramos pares de valores da

distribuição normal bivariada. Existe dependência estatística entre as variáveis e cada uma possui uma distribuição marginal normal.

Depois, uma transformação (função exponencial) é aplicada separadamente à cada variável, mudando as distribuições marginais para lognormais. As variáveis transformadas continuam possuindo uma dependência estatística.

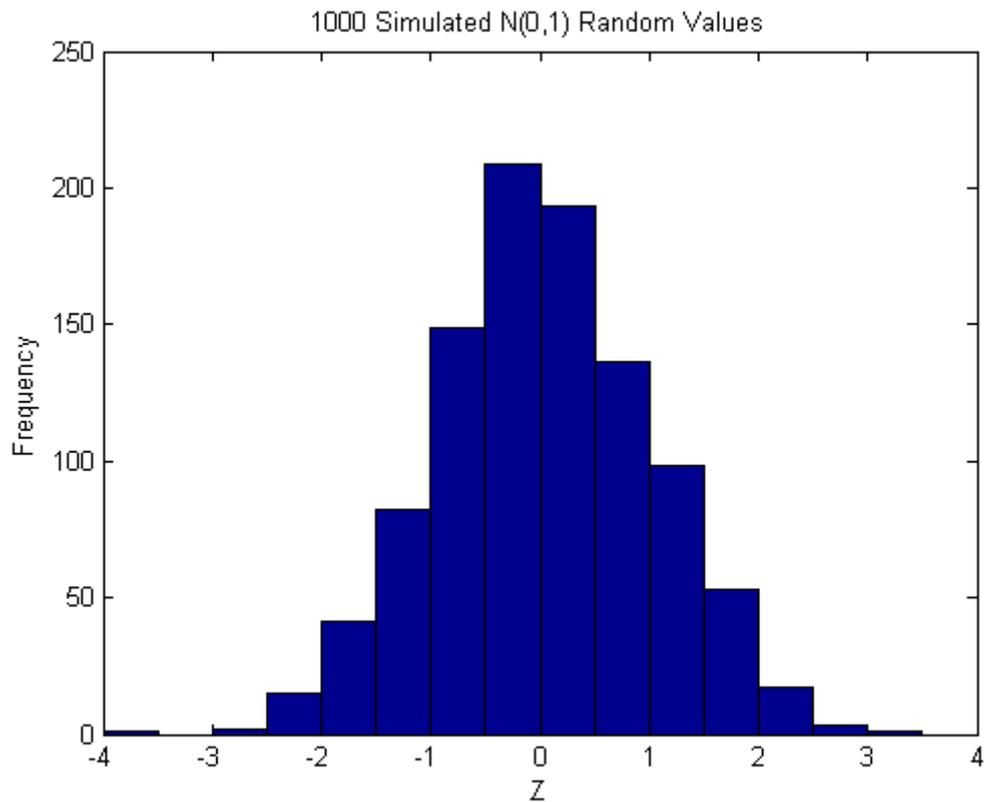
Se uma transformação adequada puder ser encontrada, esse método poderia ser generalizado para criar vetores aleatórios bivariados dependentes com outras distribuições marginais.

Por definição, aplicando uma CDF normal (chamada aqui de PHI) para a variável aleatória normal padronizada, temos como resultado uma variável aleatória que é uniforme no intervalo [0,1]. Para vermos isso, se Z possui uma distribuição normal padronizada, então a CDF de  $U=PHI(Z)$  é:

$$\Pr\{U \leq u_0\} = \Pr\{PHI(Z) \leq u_0\} = \Pr\{Z \leq PHI^{-1}(u_0)\} = u_0$$

E é a CDF de uma variável aleatória  $U(0,1)$ . Histogramas de valores simulados como uma normal e transformados ilustram o fato:

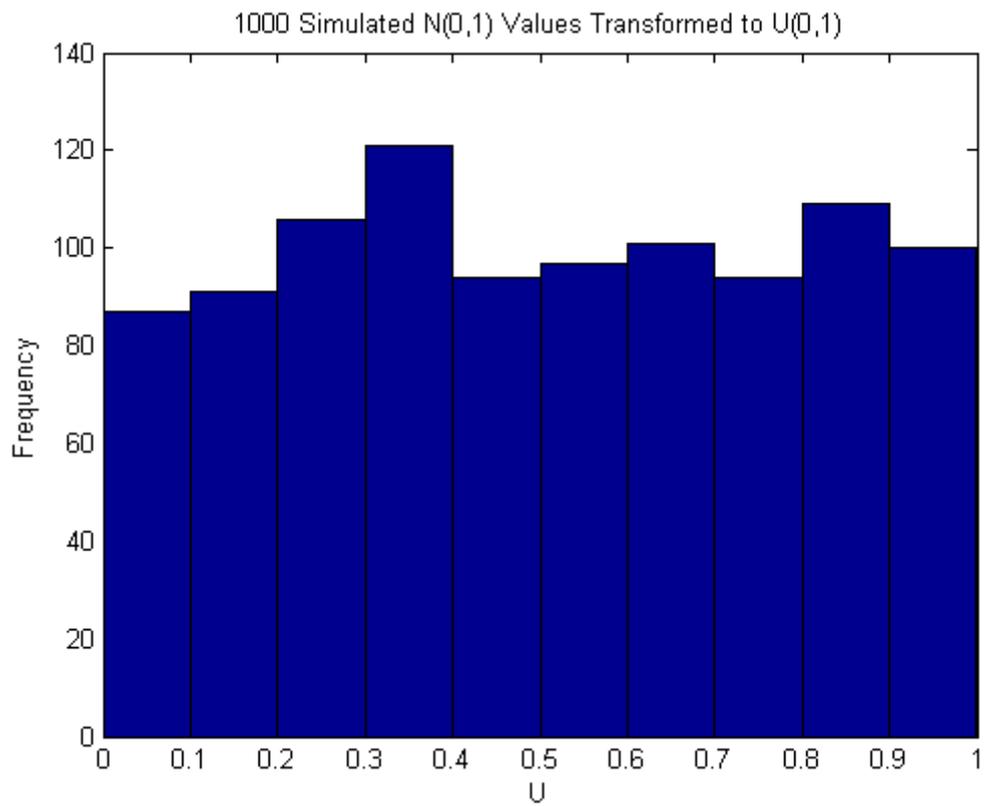
```
n = 1000;
z = normrnd(0,1,n,1);
hist(z,-3.75:.5:3.75); xlim([-4 4]);
title('1000 Valores randômicos simulados N(0,1)');
xlabel('Z'); ylabel('Frequency');
```



```

u = normcdf(z);
hist(u, .05:.1:.95);
title('1000 Valores N(0,1) transformados em U(0,1)');
xlabel('U'); ylabel('Frequency');

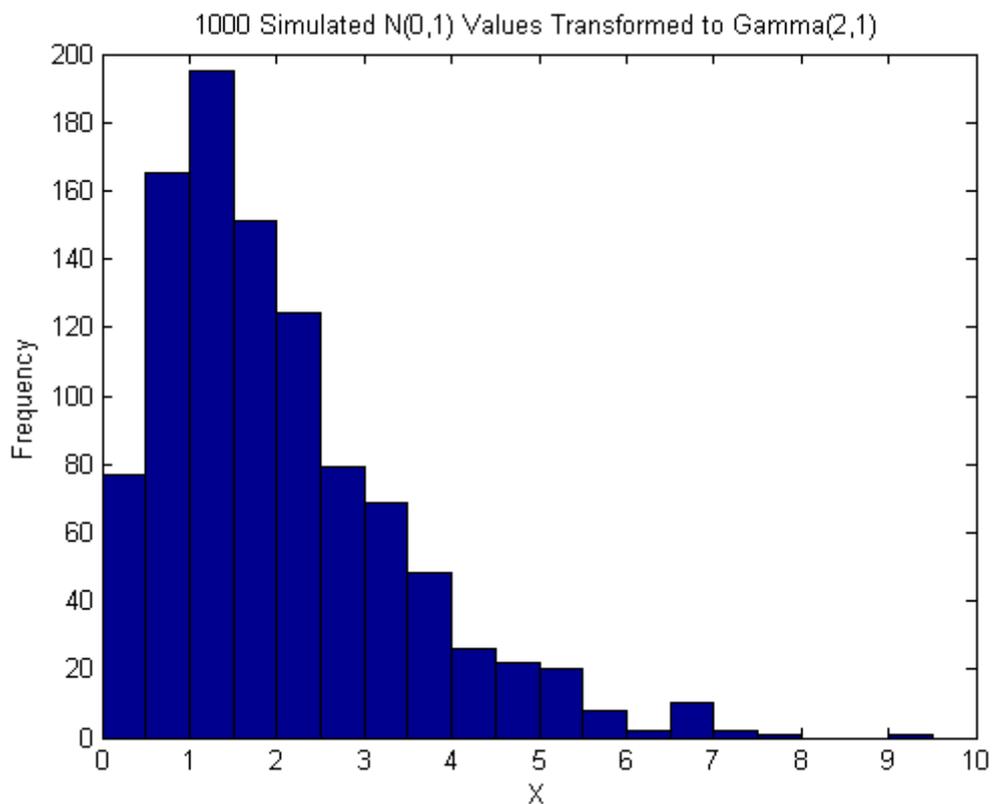
```



Agora, pegando emprestado da teoria de geração de números aleatórios univariados, aplicando a inversa CDF de alguma distribuição F para uma variável aleatória  $U(0,1)$ ; resulta em uma variável aleatória cuja distribuição é exatamente F.

Esse método é conhecido como o método de inversão. A prova é essencialmente o oposto da prova acima para o caso descrito. Outro histograma ilustra a transformação para uma distribuição gama.

```
x = gaminv(u,2,1);
hist(x,.25:.5:9.75);
title('1000 Valores N(0,1) Simulados Transformados em Gamma(2,1)');
xlabel('X'); ylabel('Frequency');
```



A transformação em dois passos pode ser aplicada para cada variável de uma normal bivariada padronizada, criando variáveis aleatórias dependentes com distribuições marginais arbitrárias. Devido à transformação funcionar em cada componente separadamente, as variáveis aleatórias resultantes não precisam ter as mesmas distribuições marginais.

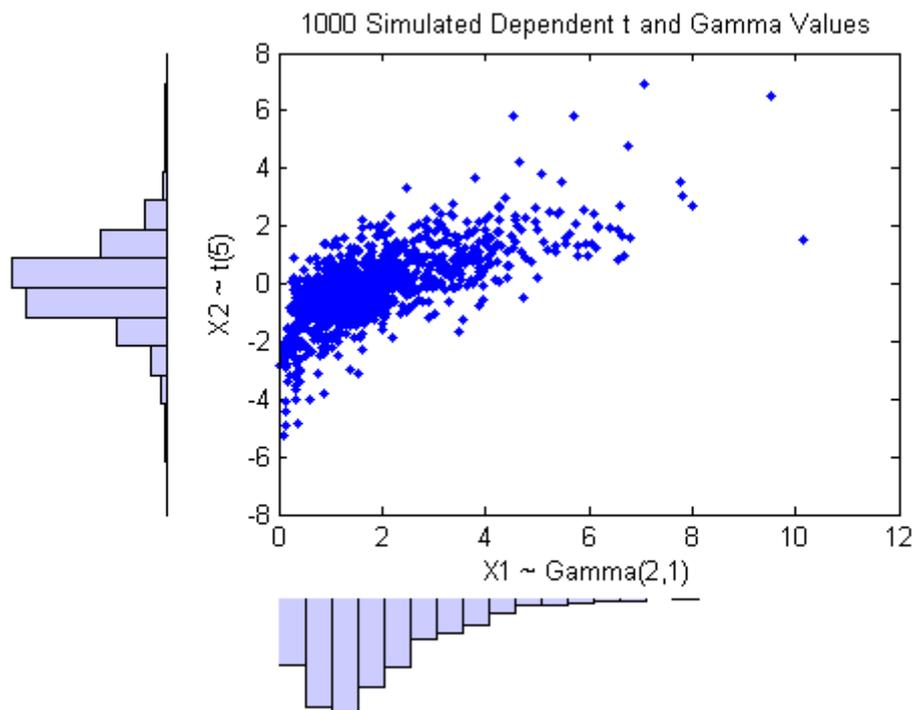
A transformação é definida como:

```
Z = [Z1 Z2] ~ N([0 0],[1 rho; rho 1])
U = [PHI(Z1) PHI(Z2)]
X = [G1(U1) G2(U2)]
```

Onde  $G1$  e  $G2$  são CDFs inversas de duas possíveis diferentes distribuições. Por exemplo, nós podemos gerar vetores aleatórios de uma distribuição bivariada com marginais  $t(5)$  e  $\text{gama}(2,1)$ .

```
n = 1000;
rho = .7;
Z = mvnrnd([0 0], [1 rho; rho 1], n);
U = normcdf(Z);
X = [gamainv(U(:,1),2,1) tinv(U(:,2),5)];

[n1,ctr1] = hist(X(:,1),20);
[n2,ctr2] = hist(X(:,2),20);
subplot(2,2,2); plot(X(:,1),X(:,2),'.'); axis([0 12 -8 8]); h1 = gca;
title('1000 Valores simulados dependentes t e Gamma');
xlabel('X1 ~ Gamma(2,1)'); ylabel('X2 ~ t(5)');
subplot(2,2,4); bar(ctr1,-n1,1); axis([0 12 -max(n1)*1.1 0]);
axis('off'); h2 = gca;
subplot(2,2,1); barh(ctr2,-n2,1); axis([-max(n2)*1.1 0 -8 8]);
axis('off'); h3 = gca;
set(h1,'Position',[0.35 0.35 0.55 0.55]);
set(h2,'Position',[.35 .1 .55 .15]);
set(h3,'Position',[.1 .35 .15 .55]);
colormap([.8 .8 1]);
```



O gráfico acima possui histogramas ao lado de um gráfico de dispersão para mostrar tanto as distribuições marginais como a dependência.

## Coeficientes de correlação de postos

A dependência entre  $X_1$  e  $X_2$  nesse tipo de construção é determinada pelo parâmetro de correlação  $RHO$ , baseado em uma normal bivariada. Contudo, não é verdade que a correlação linear de  $X_1$  e  $X_2$  seja  $RHO$ . Por exemplo, no caso original lognormal, temos uma forma fechada para a correlação:

$$\text{cor}(X_1, X_2) = (\exp(\rho \cdot \sigma^2) - 1) ./ (\exp(\sigma^2) - 1)$$

a qual é estritamente menor que  $RHO$  exceto se  $RHO$  for 1. Em casos mais gerais, a correlação linear entre  $X_1$  e  $X_2$  é difícil ou impossível de expressar em termos de  $RHO$ , mas simulações podem ser utilizadas para mostrar que o mesmo efeito acontece. Isso se deve ao coeficiente de correlação linear expressar a dependência linear entre variáveis aleatórias e, quando transformações não-lineares são aplicadas, a correlação linear não é preservada. Em vez disso, um coeficiente de correlação de postos tal como o  $TAU$  de Kendall ou  $RHO$  de Spearman é mais apropriado.

Grosseiramente falando, esses coeficientes de correlação medem o grau no qual grandes ou pequenos valores de uma variável aleatória estão associados com grandes e pequenos valores de outra variável aleatória. Entretanto, ao contrário do coeficiente de correlação linear, eles medem a associação somente em termos de rank (posto).

O coeficiente de correlação de postos é preservado sob qualquer transformação monotônica. Em particular, o método de transformação descrito preserva a correlação de postos. Por isso, conhecendo a correlação de postos de uma normal  $Z$  bivariada, determina-se a correlação de postos da variável aleatória transformada  $X$ .

Enquanto  $RHO$  ainda é necessário para parametrizar a normal bivariada básica, o coeficiente de  $TAU$  de Kendall ou  $RHO$  de Spearman são mais úteis na descrição da dependência entre variáveis aleatórias, em geral porque eles são invariantes na escolha da distribuição marginal.

Para uma normal bivariada, existe um simples mapeamento 1 para 1 entre  $TAU$  de Kendall ou  $RHO$  de Spearman, e o coeficiente de correlação linear  $RHO$ :

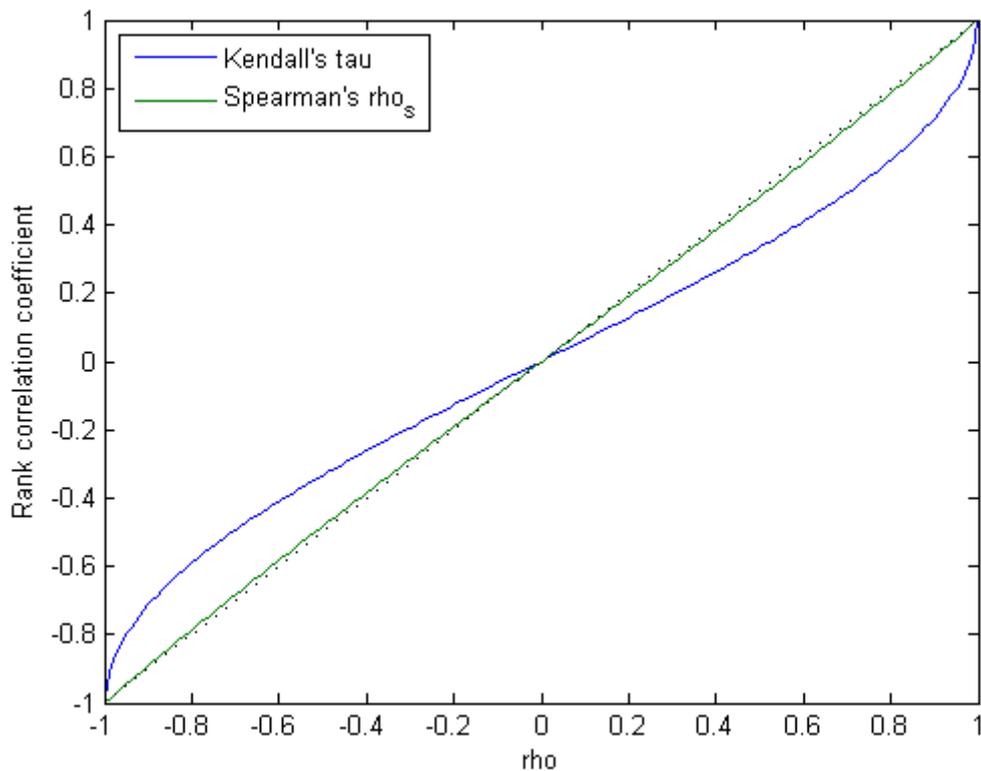
$$\begin{aligned} \tau &= (2/\pi) \cdot \arcsin(\rho) & \text{or} & \quad \rho = \sin(\tau \cdot \pi/2) \\ \rho_s &= (6/\pi) \cdot \arcsin(\rho/2) & \text{or} & \quad \rho = 2 \cdot \sin(\rho_s \cdot \pi/6) \end{aligned}$$

```
subplot(1,1,1);  
rho = -1:.01:1;  
tau = 2.*asin(rho)./pi;  
rho_s = 6.*asin(rho./2)./pi;
```

```

plot(rho,tau,'-', rho,rho_s,'-', [-1 1],[-1 1],'k:'); axis([-1 1 -1
1]);
xlabel('rho'); ylabel('Rank correlation coefficient');
legend('Kendall''s tau', 'Spearman''s rho_s', 'location','northwest');

```



Assim, é fácil criar a correlação de postos desejada entre  $X_1$  e  $X_2$ , sem nos importarmos com suas distribuições marginais, pela escolha correta do parâmetro  $RHO$  para a correlação linear entre  $Z_1$  e  $Z_2$ .

Observamos que para distribuições normais multivariadas, o coeficiente de correlação de Spearman é quase idêntico a correlação linear. Contudo, isso não é verdade toda vez que nós transformamos as variáveis aleatórias finais.

## Cópuas

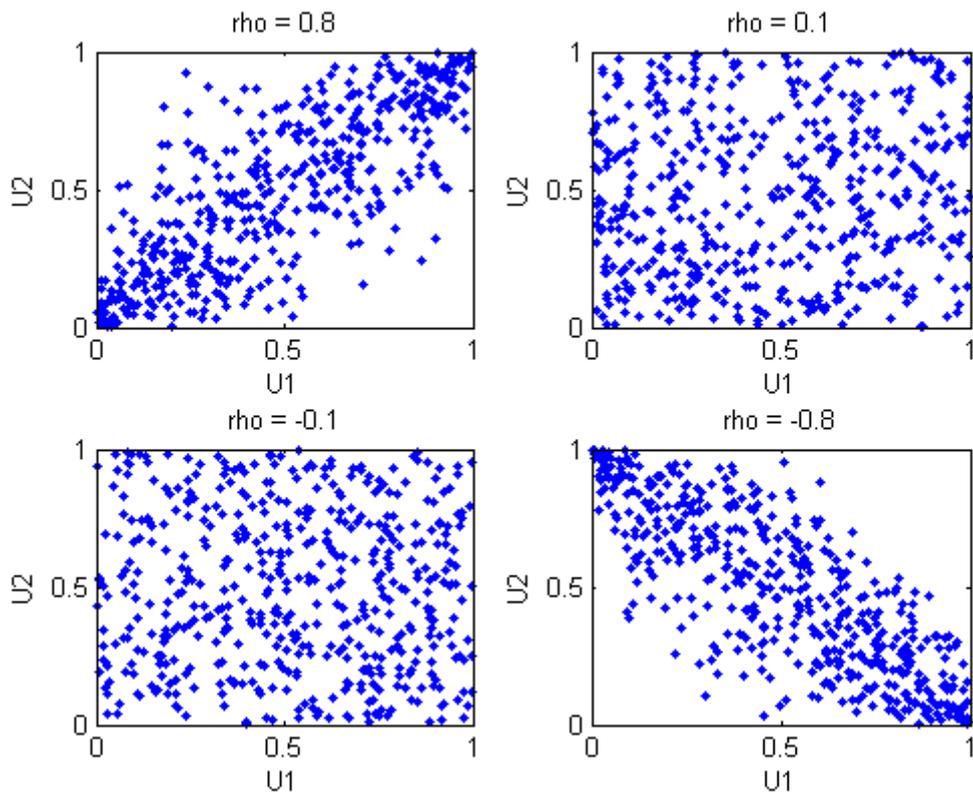
O primeiro passo da construção descrita anteriormente define o que é conhecido como cópula, especificamente uma cópula gaussiana. Um cópula bivariada é simplesmente uma distribuição de probabilidade de duas variáveis aleatórias, das quais suas distribuições marginais são uniformes. Essas duas variáveis aleatórias podem ser completamente independentes, deterministicamente relacionadas (isto é  $U_2=U_1$ ) ou

qualquer coisa entre os dois pontos. A família de cópulas gaussianas é parametrizada por  $RHO = [1 \text{ rho}; \text{rho} \ 1]$ , sua matriz de correlação linear.

$U1$  e  $U2$  se aproximam com dependência linear tanto quanto  $RHO$  se aproxima de  $[-1,+1]$ , e se aproximam independentemente tanto quanto  $RHO$  se aproxima de zero.

Os gráficos abaixo de dispersão de variáveis aleatórias simuladas para vários níveis de  $RHO$ , ilustram o alcance de diferentes possibilidades para cópulas gaussianas:

```
n = 500;
Z = mvnrnd([0 0], [1 .8; .8 1], n);
U = normcdf(Z,0,1);
subplot(2,2,1); plot(U(:,1),U(:,2),'.');
title('rho = 0.8'); xlabel('U1'); ylabel('U2');
Z = mvnrnd([0 0], [1 .1; .1 1], n);
U = normcdf(Z,0,1);
subplot(2,2,2); plot(U(:,1),U(:,2),'.');
title('rho = 0.1'); xlabel('U1'); ylabel('U2');
Z = mvnrnd([0 0], [1 -.1; -.1 1], n);
U = normcdf(Z,0,1);
subplot(2,2,3); plot(U(:,1),U(:,2),'.');
title('rho = -0.1'); xlabel('U1'); ylabel('U2');
Z = mvnrnd([0 0], [1 -.8; -.8 1], n);
U = normcdf(Z,0,1);
subplot(2,2,4); plot(U(:,1),U(:,2),'.');
title('rho = -0.8'); xlabel('U1'); ylabel('U2');
```



A dependência entre  $U_1$  e  $U_2$  é completamente separada de suas distribuições marginais de  $X_1=G(U_1)$  e  $X_2=G(U_2)$ .  $X_1$  e  $X_2$  podem ter quaisquer distribuições marginais e continuam a possuir o mesmo coeficiente de correlação de postos. Isso é um dos principais apelos de cópulas: elas permitem separar a especificação da dependência e a distribuição marginal.

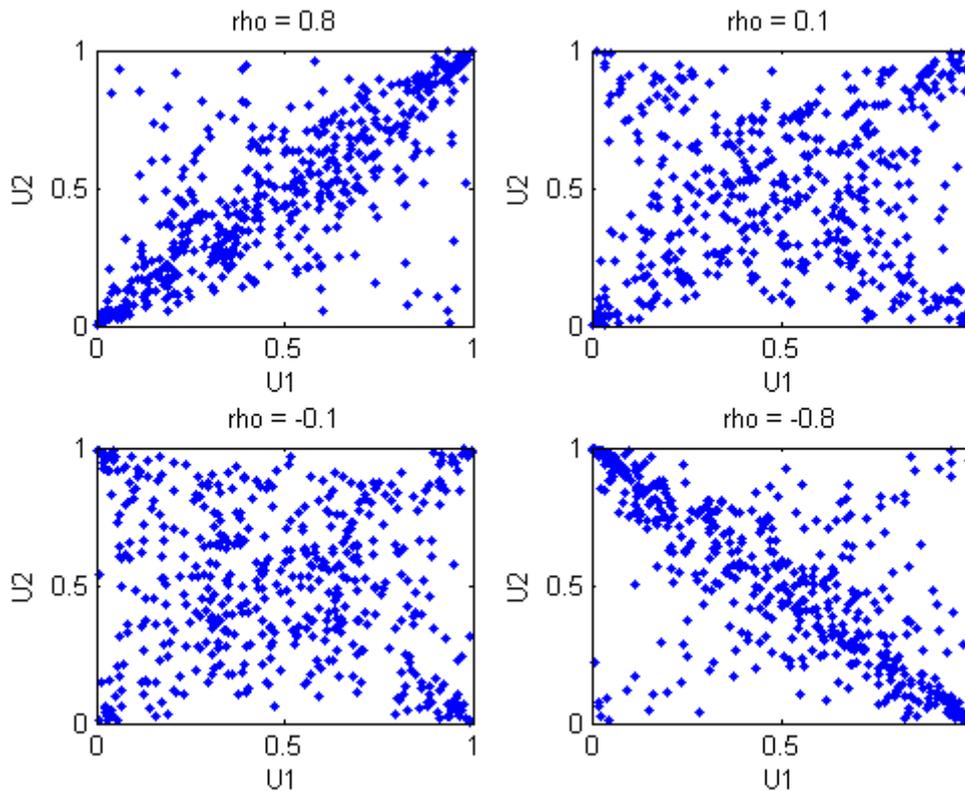
### Cópula t

Uma diferente família de cópulas pode ser construída a partir de uma distribuição t bivariada, e transformando-a na correspondente CDF de t. A distribuição bivariada é parametrizada com  $\rho$ , matriz de correlação linear, e  $\nu$ , os graus de liberdade.

Então, por exemplo, nós podemos falar de uma cópula  $t(1)$  ou uma  $t(5)$ , baseada em uma distribuição multivariada t com 1 ou 5 graus de liberdade.

Gráficos de dispersão de variáveis aleatórias simuladas para vários níveis de  $\rho$  ilustram o alcance de diferentes possibilidades para cópulas  $t(1)$ :

```
n = 500;
nu = 1;
T = mvtrnd([1 .8; .8 1], nu, n);
U = tcdf(T,nu);
subplot(2,2,1); plot(U(:,1),U(:,2),'.');
title('rho = 0.8'); xlabel('U1'); ylabel('U2');
T = mvtrnd([1 .1; .1 1], nu, n);
U = tcdf(T,nu);
subplot(2,2,2); plot(U(:,1),U(:,2),'.');
title('rho = 0.1'); xlabel('U1'); ylabel('U2');
T = mvtrnd([1 -.1; -.1 1], nu, n);
U = tcdf(T,nu);
subplot(2,2,3); plot(U(:,1),U(:,2),'.');
title('rho = -0.1'); xlabel('U1'); ylabel('U2');
T = mvtrnd([1 -.8; -.8 1], nu, n);
U = tcdf(T,nu);
subplot(2,2,4); plot(U(:,1),U(:,2),'.');
title('rho = -0.8'); xlabel('U1'); ylabel('U2');
```



Uma cópula  $t$  possui distribuições marginais uniformes para  $U_1$  e  $U_2$ , como a cópula gaussiana. A correlação de postos TAU ou RHO entre os componentes em uma cópula  $t$ , é também a mesma função de RHO como para uma gaussiana. Entretanto, como os gráficos abaixo apontam, uma cópula  $t(1)$  difere muito de uma cópula gaussiana, mesmo quando seus componentes possuem a mesma correlação de postos. A diferença está em suas estruturas de dependências. Não surpreende que quando o parâmetro  $NU$  dos graus de liberdade é muito grande, a cópula  $t(NU)$  aproxima-se de uma cópula gaussiana.

Como na cópula gaussiana, quaisquer distribuições marginais podem ser impostas sobre uma cópula  $t$ . Por exemplo, usando uma cópula  $t$  com 1 grau de liberdade, nós podemos gerar valores aleatórios de uma distribuição bivariada com marginais gama  $(2,1)$  e  $t(5)$ .

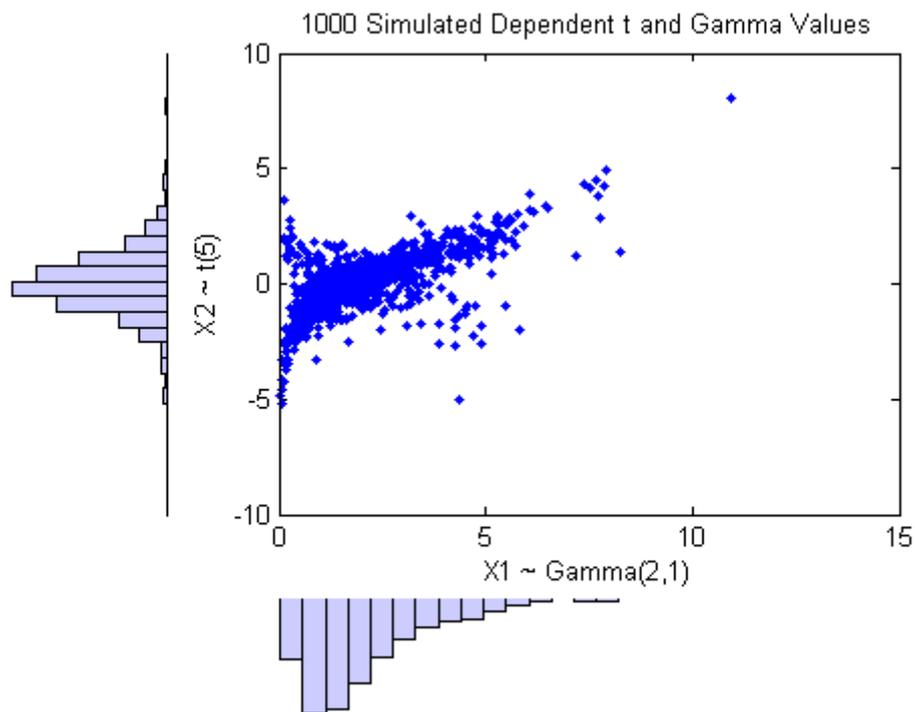
```
subplot(1,1,1);
n = 1000;
rho = .7;
nu = 1;
T = mvtrnd([1 rho; rho 1], nu, n);
U = tcdf(T,nu);
X = [gaminv(U(:,1),2,1) tinv(U(:,2),5)];

[n1,ctr1] = hist(X(:,1),20);
```

```

[n2,ctr2] = hist(X(:,2),20);
subplot(2,2,2); plot(X(:,1),X(:,2),'.'); axis([0 15 -10 10]); h1 =
gca;
title('1000 Simulated Dependent t and Gamma Values');
xlabel('X1 ~ Gamma(2,1)'); ylabel('X2 ~ t(5)');
subplot(2,2,4); bar(ctr1,-n1,1); axis([0 15 -max(n1)*1.1 0]);
axis('off'); h2 = gca;
subplot(2,2,1); barh(ctr2,-n2,1); axis([-max(n2)*1.1 0 -10 10]);
axis('off'); h3 = gca;
set(h1,'Position',[0.35 0.35 0.55 0.55]);
set(h2,'Position',[.35 .1 .55 .15]);
set(h3,'Position',[.1 .35 .15 .55]);
colormap([.8 .8 1]);

```

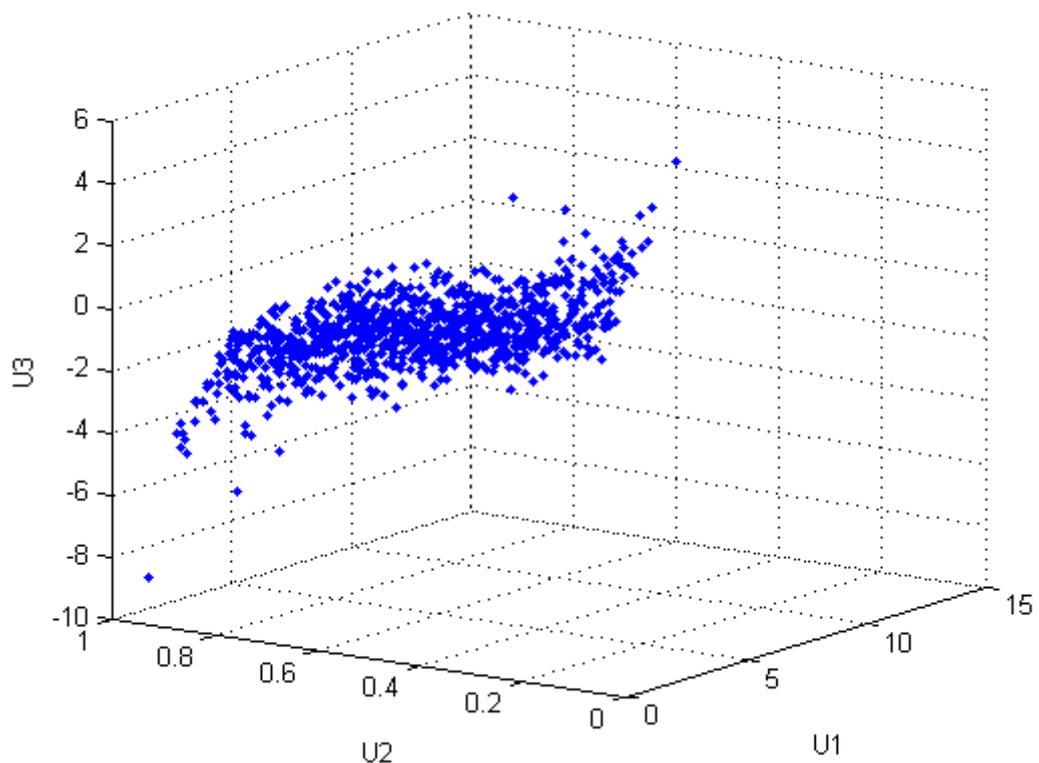


Comparada com a distribuição gama / t bivariada construída anteriormente, a qual foi baseada em uma cópula gaussiana, a distribuição construída aqui baseada em uma cópula  $t(1)$ , possui as mesmas distribuições marginais e o mesmo coeficiente de correlação de postos entre as variáveis, mas com uma estrutura de dependência muito diferente. Isso ilustra o fato de que distribuições multivariadas não são unicamente definidas pelas suas marginais, ou por suas correlações. A escolha por uma cópula particular em uma aplicação, deve ser baseada em dados observados atuais, ou diferentes cópulas devem ser utilizadas como uma forma de determinar a sensibilidade dos resultados da simulação para a distribuição de entrada.

## Cópuas de ordem superiores

As cópuas t e gaussiana são conhecidas como cópuas elípticas. Podemos generalizar facilmente as cópuas elípticas para um número alto de dimensões. Por exemplo, podemos simular dados de uma distribuição trivariada com marginais  $\text{gama}(2,1)$ ,  $\text{beta}(2,2)$  e  $t(5)$  usando uma cópula gaussiana:

```
subplot(1,1,1);
n = 1000;
Rho = [1 .4 .2; .4 1 -.8; .2 -.8 1];
Z = mvnrnd([0 0 0], Rho, n);
U = normcdf(Z,0,1);
X = [gamainv(U(:,1),2,1) betainv(U(:,2),2,2) tinvs(U(:,3),5)];
plot3(X(:,1),X(:,2),X(:,3),'.');
grid on; view([-55, 15]);
xlabel('U1'); ylabel('U2'); zlabel('U3');
```



Observamos que o relacionamento entre o parâmetro de correlação linear RHO e, por exemplo, TAU de Kendall permanece para cada entrada da matriz RHO de correlação utilizada. Podemos verificar que as amostras dos coeficientes de correlações de postos dos dados são aproximadamente iguais aos valores teóricos.

```

tauTheoretical = 2.*asin(Rho)./pi
tauTheoretical =

    1.0000    0.2620    0.1282
    0.2620    1.0000   -0.5903
    0.1282   -0.5903    1.0000

tauSample = corr(X, 'type', 'Kendall')
tauSample =

    1.0000    0.2655    0.1060
    0.2655    1.0000   -0.6076
    0.1060   -0.6076    1.0000

```

### **Cópuas e distribuições marginais empíricas**

Para simular dados multivariados dependentes utilizando cópuas, precisamos especificar:

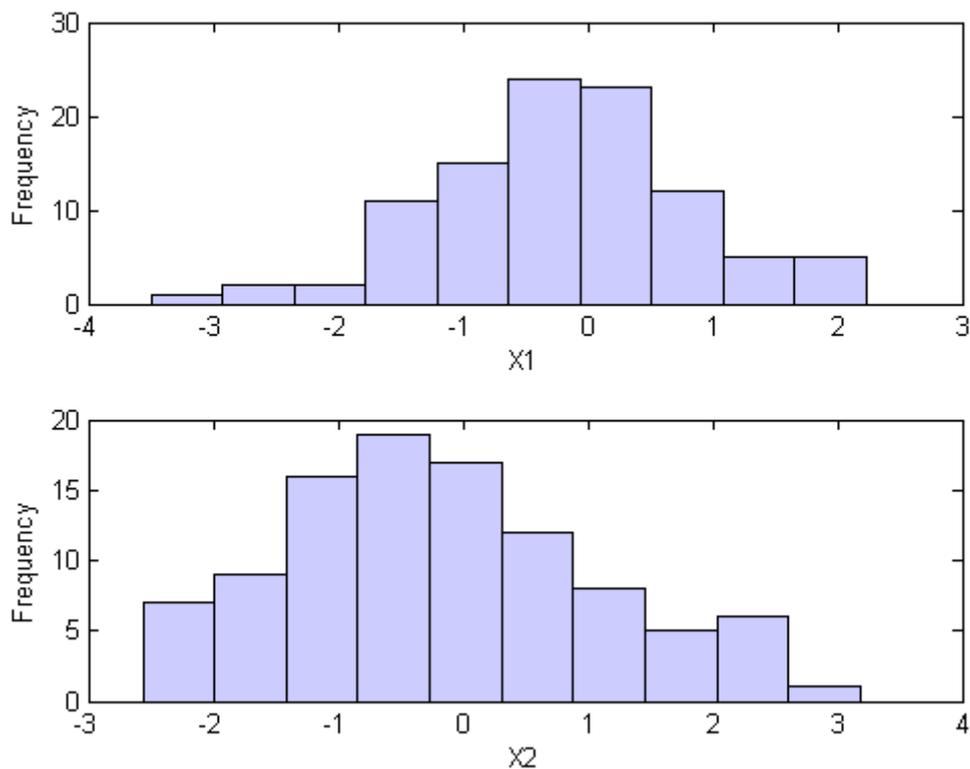
- 1) A família de cópuas e todos os parâmetros de forma,
- 2) O coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias,
- 3) As distribuições marginais para cada variável.

Suponhamos que tenhamos dois conjuntos de retornos de ações e desejamos realizar uma simulação de Monte Carlo com inputs que seguem as mesmas distribuições dos dados:

```

load stockreturns
nobs = size(stocks,1);
subplot(2,1,1); hist(stocks(:,1),10);
xlabel('X1'); ylabel('Frequency');
subplot(2,1,2); hist(stocks(:,2),10);
xlabel('X2'); ylabel('Frequency');

```



Observamos que os dois vetores acima possuem o mesmo tamanho porém isso não é essencial para a análise.

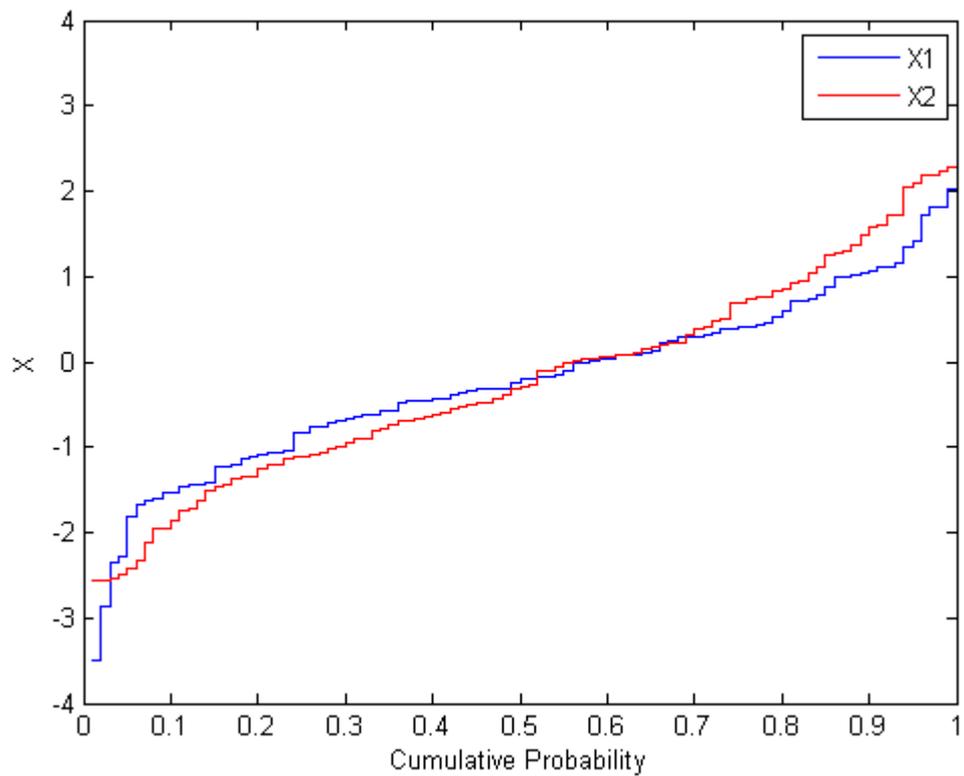
Podemos ajustar um modelo paramétrico separadamente para cada conjunto de dados, e utilizá-los para estimar nossas distribuições marginais. Contudo, um modelo paramétrico pode não ser suficientemente flexível.

Ao invés de ajustar esses modelos paramétricos, iremos utilizar um modelo empírico para as distribuições marginais. Precisamos somente de uma maneira de computar a CDF inversa. A CDF inversa empírica para esses conjuntos de dados é uma função escada, com degraus de valores  $1/N$  observações,  $2/N$  observações,..., 1. As alturas dos degraus são simplesmente os dados classificados.

```

invCDF1 = sort(stocks(:,1)); n1 = length(stocks(:,1));
invCDF2 = sort(stocks(:,2)); n2 = length(stocks(:,2));
subplot(1,1,1);
stairs((1:nobs)/nobs, invCDF1,'b');
hold on; stairs((1:nobs)/nobs, invCDF2,'r'); hold off
legend('X1','X2');
xlabel('Cumulative Probability'); ylabel('X');

```



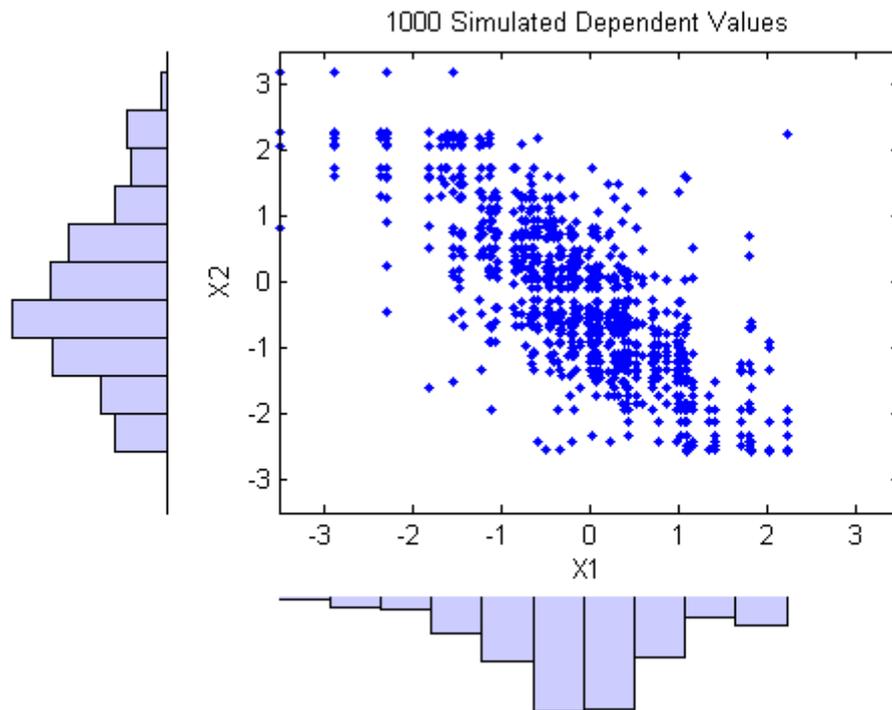
Para a simulação, podemos experimentar diferentes cópulas e correlações. Iremos utilizar uma cópula  $t(2)$  bivariada com um parâmetro de correlação negativo razoavelmente grande.

```

n = 1000;
rho = -.8;
nu = 5;
T = mvtrnd([1 rho; rho 1], nu, n);
U = tcdf(T,nu);
X = [invCDF1(ceil(n1*U(:,1))) invCDF2(ceil(n2*U(:,2)))];

[n1,ctr1] = hist(X(:,1),10);
[n2,ctr2] = hist(X(:,2),10);
subplot(2,2,2); plot(X(:,1),X(:,2),'.'); axis([-3.5 3.5 -3.5 3.5]); h1 = gca;
title('1000 Simulated Dependent Values');
xlabel('X1'); ylabel('X2');
subplot(2,2,4); bar(ctr1,-n1,1); axis([-3.5 3.5 -max(n1)*1.1 0]);
axis('off'); h2 = gca;
subplot(2,2,1); barh(ctr2,-n2,1); axis([-max(n2)*1.1 0 -3.5 3.5]);
axis('off'); h3 = gca;
set(h1,'Position',[0.35 0.35 0.55 0.55]);
set(h2,'Position',[.35 .1 .55 .15]);
set(h3,'Position',[.1 .35 .15 .55]);
colormap([.8 .8 1]);

```



Os histogramas marginais dos dados simulados aproximam-se muito dos dados originais. Observamos que os valores plotados são dos dados originais e, devido a eles serem apenas 100 observações de cada conjunto de dados, os dados simulados são um tanto discretos. Uma forma de superar isso seria adicionar uma pequena quantidade de variação aleatória, possivelmente normalmente distribuída, ao fim dos valores simulados finais. Isso equivale a viabilizar uma versão suavizada de CDF inversa empírica.

## ANEXO II- CADEIAS DE MARKOV

Algumas decisões necessitam levar em conta a incerteza sobre muitos eventos futuros, em um contexto. Os modelos probabilísticos para processos que se desenvolvem no tempo, de uma forma probabilística são os chamados processos estocásticos. Um específico processo estocástico é denominado cadeia de Markov. As cadeias de Markov possuem uma propriedade específica na qual as probabilidades envolvidas em como o processo irá se desenvolver no futuro, depende apenas do estado presente do processo; sendo considerados eventos independentes dos eventos do passado.

Muitos processos se adequam nessa descrição e podem ser abordados através da cadeia de Markov.

### Processos estocásticos

Um processo estocástico é definido como uma coleção de variáveis randômicas  $\{X_t\}$ , onde o índice  $t$  opera através de um dado conjunto  $T$ . Frequentemente  $T$  é considerado como um conjunto de inteiros não negativos, e  $X_t$  representa a característica mensurável de interesse no tempo  $t$ .

Processos estocásticos são importantes para descrever o comportamento de um sistema operando em um dado período de tempo.

Um processo estocástico geralmente possui a seguinte estrutura:

O status corrente do sistema pode cair em qualquer uma das categorias exclusivas  $(M+1)$  denominamos estados. Por conveniência notarial, esses estados são classificados como  $0, 1, \dots, M$ . A variável randômica  $X_t$  representa o estado do sistema no tempo  $t$ , então seus valores possíveis são  $0, 1, \dots, M$ . O sistema é observado em pontos particulares no tempo, denominados  $t=0, 1, 2, \dots$ . Dessa forma, o processo estocástico  $\{X_t\} = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$  provê a representação matemática de como o status do sistema físico evolui no tempo. Esse tipo de processo é dito como processo estocástico discreto com um espaço finito de estados.

### Cadeias de Markov (definição)

Suposições acerca da distribuição conjunta de  $X_0, X_1, X_2, \dots$  são necessárias para se obter resultados analíticos. Uma suposição que permite um tratamento analítico é considerar o processo estocástico como uma cadeia de Markov, a qual possui a seguinte propriedade chave:

Um processo estocástico  $X_t$  possui a propriedade markoviana se  $P\{X_{t+1} = j / X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}$ , para  $t=0, 1, 2, \dots$  e toda seqüência  $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$ .

A propriedade markoviana diz que a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e o presente estado  $X_t = i$ , é independente do evento passado e depende apenas do estado presente (atual).

Um processo estocástico  $\{X_t\} = (t=0, 1, \dots)$  é uma cadeia de Markov se possui a propriedade markoviana descrita acima.

As probabilidades condicionais  $P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}$  para uma cadeia de Markov são denominadas probabilidades de transição. Se, para  $i$  e  $j$ ,  $P\{X_{t+1} = j / X_t = i\} = P\{X_1 = j / X_0 = i\}$ , para todo  $t=0, 1, 2, \dots$ , então as probabilidades de transição são ditas estacionárias.

Dessa forma, as probabilidades de transição estacionárias indicam que as probabilidades de transição não mudam no tempo. A existência das probabilidades de transição estacionárias também implica que, para cada  $i, j$  e  $n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ),  $P\{X_{t+n} = j / X_t = i\} = P\{X_{n-j} = j / X_0 = i\}$  para todo  $t=0, 1, 2, \dots$ .

Essas probabilidades condicionais são ditas probabilidades de transição n-passos (n-step).

Para simplificar a notação com as probabilidades de transição estacionárias, temos:

$$P_{ij} = P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}$$

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_{t+n} = j / X_t = i\}$$

Então, a n-step probabilidade de transição  $P_{ij}^{(n)}$  é apenas a probabilidade condicional de o sistema estar no estado  $j$  após exatamente n-steps (unidades de tempo), dado que ele inicia no estado  $i$  em qualquer tempo  $t$ . Quando  $n=1$  temos que  $P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$ .

Devido às  $P_{ij}^{(1)}$  serem probabilidades condicionais, elas devem ser não-negativas, e desde que o processo deve fazer uma transição em algum estado, elas devem satisfazer as propriedades:

$$P_{ij}^{(n)} \geq 0 \text{ para todo } i \text{ e } j, n=0,1,2,\dots \text{ e}$$

$$\sum_{j=0}^M P_{ij}^{(n)} = 1 \text{ para todo } i, n=0,1,2,\dots$$

Um jeito conveniente de mostrar todas as n-step probabilidades de transição é uma matriz:

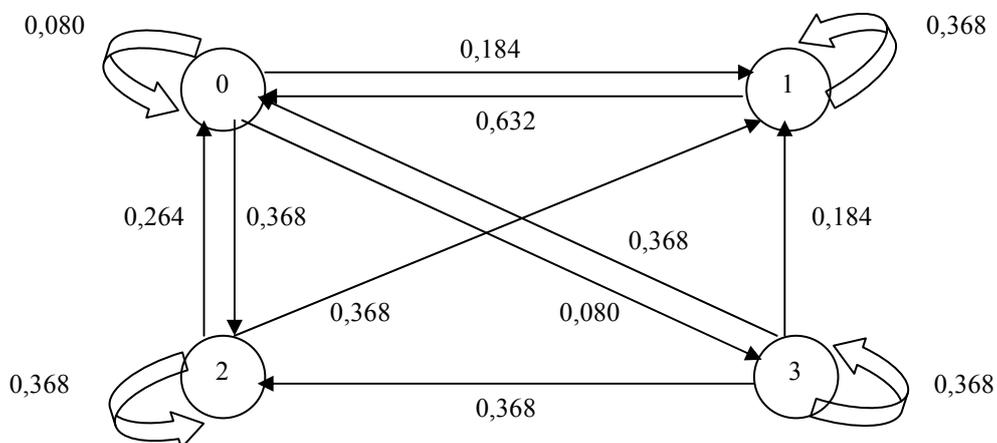
$$P^{(n)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Estado} & 0 & 1 & \dots & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ M \end{matrix} & \begin{matrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & \dots & P_{0M}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} & \dots & P_{1M}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{M0}^{(n)} & P_{M1}^{(n)} & \dots & P_{MM}^{(n)} \end{matrix} \end{matrix}$$

As cadeias de Markov consideradas aqui possuem as seguintes propriedades:

- 3) Finito número de estados.
- 4) Probabilidades de transição estacionárias.

Abaixo observamos uma representação de uma cadeia de Markov:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Estado} & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left| \begin{matrix} 0,08 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{matrix} \right| \end{matrix}$$



A cadeia de Markov pode incorporar arbitrariamente a história do sistema, mas, a um aumento significativo do número de estados.

### Equações de Chapman-Kolmogorov

As equações de Chapman-Kolmogorov fornecem um método para computar as probabilidades de transição  $n$ -step:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)},$$

para todos  $i = 0, 1, \dots, M; j = 0, 1, \dots, M$ , e quaisquer  $m = 0, 1, \dots, n-1; n = m+1, m+2, \dots$

Essas equações nos dizem que indo do estado  $i$  para o estado  $j$  em  $n$  steps, o processo estará em algum estado  $k$  depois de exatamente  $m$  (menos que  $n$ ) estados. Então,  $p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$  é apenas a probabilidade condicional que, dado um ponto de partida do estado  $i$ , o processo vai até o estado  $k$  depois de  $m$  passos e então para o estado  $j$  em  $m-n$  passos. Dessa forma, somando essas probabilidades condicionais de todos os possíveis  $k$ , obtemos  $p_{ij}^{(n)}$ . Os casos especiais de  $m=1$  e  $m=n-1$  levam às expressões:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \text{ e}$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M p_{ik}^{(n-1)} p_{kj},$$

Para todos os estados  $i$  e  $j$ . Essas expressões possibilitam obter as probabilidades de transição de  $n$ -step (de qualquer passo) a partir das probabilidades de transição 1-passo recursivamente. Essa relação de recursividade é mais bem explicada na notação matricial. Para  $n=2$ , essas expressões são:

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^M p_{ik}^{(2-1)} p_{kj} \text{ para todos os estados } i \text{ e } j, \text{ quando as } p_{ij}^{(2)} \text{ são os elementos da}$$

matriz  $P(2)$ . Notamos também que esses elementos são obtidos pela multiplicação da matriz de probabilidades de transição de 1-passo, por ela mesma, isto é:  $P^{(2)} = P.P = P^2$ .

Da mesma maneira, as expressões acima para  $p_{ij}^{(n)}$  quando  $m=1$  e  $m=n-1$ , indicam que a matriz de probabilidades de transição  $n$ -passos:

$$\begin{aligned}
P^{(n)} &= PP^{(n-1)} = P^{(n-1)}P \\
&= PP^{n-1} = P^{n-1}P \\
&= P^n
\end{aligned}$$

Então, a matriz de transição de probabilidades  $n$ -passos  $P^{(n)}$  pode ser obtida computando-se a enésima potência da matriz de transição.

### Probabilidades de estados incondicionais

Relembramos que uma ou  $n$ -passos probabilidades de transição são probabilidades condicionais, por exemplo:  $P\{X_n = j / X_0 = i\} = p_{ij}^{(n)}$ . Se a probabilidade incondicional  $P\{X_n = j\}$  é desejada, é necessário especificar a distribuição de probabilidade do estado inicial, dita  $P\{X_0 = i\}$  para  $i = 0, 1, \dots, M$ , então:

$$P\{X_n = j\} = P\{X_0 = 0\}p_{0j}^{(n)} + P\{X_0 = 1\}p_{1j}^{(n)} + \dots + P\{X_0 = M\}p_{Mj}^{(n)}.$$

### Classificação dos estados de uma cadeia de Markov

È evidente que as probabilidades de transição associadas com os estados é muito importante no estudo das cadeias de Markov. Para melhor descrever as propriedades da cadeia de Markov, é necessário apresentar alguns conceitos e definições relativas aos estados.

O estado  $j$  é dito ser *acessível* do estado  $i$  se  $p_{ij}^{(n)} > 0$  para algum  $n \geq 0$ , lembrando que  $p_{ij}^{(n)}$  é apenas a probabilidade condicional de estar no estado  $j$  depois de  $n$  steps, partindo do estado  $i$ .

Então, o estado  $j$  sendo acessível a partir do estado  $i$  significa que é possível para o sistema entrar no estado  $j$  eventualmente quando ele começa do estado  $i$ .

De uma maneira geral, temos:

- 1) Todo estado se comunica com ele próprio:  $p_{ii}^{(0)} = P\{X_0 = i / X_0 = i\} = 1$
- 2) Se um estado  $i$  comunica-se com um estado  $j$ , então o estado  $j$  comunica-se com o estado  $i$ .
- 3) Se o estado  $i$  comunica-se com o estado  $j$  e o estado  $j$  comunica-se com o estado  $k$ .

As propriedades 1 e 2 seguem da definição de comunicação de estados e a propriedade 3 segue das equações de Chapman-Kolmogorov.

Como resultado dessas 3 propriedades de comunicação, os estados podem ser particionados em uma ou mais *classes* separadas como a dos estados que se comunicam entre eles. Uma classe pode consistir em um estado único. Se há apenas uma classe, isto é, todos os estados se comunicam, a cadeia de Markov é dita *irredutível*.

### **Estados recorrentes e estados transientes**

É muitas vezes útil observar se um processo tendo entrado em um estado, irá retornar a esse estado.

Um estado é dito *transiente* se, uma vez tendo entrado nesse estado, o processo nunca deve retornar a esse estado novamente.

Consequentemente, o estado  $i$  é transiente se e somente se existe um estado  $j, (j \neq i)$  que é acessível do estado  $i$  mas não vice-versa, isto é, o estado  $i$  não é acessível pelo estado  $j$ .

Então, se o estado  $i$  é transiente e o processo visita esse estado, existe então uma probabilidade positiva (até uma probabilidade 1) de que o processo irá mais tarde mover-se para o estado  $j$  e então nunca irá retornar ao estado  $i$ . Dessa forma, um estado transiente será visitado somente um número finito de vezes.

Quando começamos no estado  $i$ , outra possibilidade é que o processo definitivamente irá retornar a esse estado.

Um estado é dito *recorrente* se, uma vez tendo entrado nesse estado, o processo definitivamente irá retornar a esse estado novamente. Todavia, um estado é recorrente se e somente se ele não é transiente.

Uma vez que um estado recorrente será revisitado, ele será visitado infinitamente se o processo continuar para sempre. Se o processo entrar em um certo estado, e então permanecer nele no próximo passo, isso é considerado um *retorno* a esse estado.

Um certo estado é dito *absorvente* se, uma vez tendo entrado nesse estado, o processo nunca irá sair desse estado novamente. Contudo, um estado  $i$  é um estado absorvente se e somente se  $p_{ii} = 1$ .

Recorrência é uma propriedade de classe, onde todos os estados de uma classe são recorrentes ou transientes. Em uma cadeia de Markov de estados finitos, nem todos os

estados podem ser transientes. Entretanto, todos os estados em uma cadeia de Markov de estados finitos irredutíveis são recorrentes. De fato, pode-se identificar uma cadeia de Markov de estados finitos irredutível (e então concluir que todos os estados são recorrentes) mostrando que todos os estados se comunicam.

Como condição suficiente para todos os estados serem acessíveis (e então se comunicarem), deve existir um valor de  $n$  para o qual  $p_{ij}^{(n)} > 0$  para todo  $i$  e  $j$ .

### Propriedades periódicas

Outra propriedade útil das cadeias de Markov é a periodicidade. O *período* de um estado  $i$  é definido pelo inteiro  $t, (t > 1)$  tal que  $p_{ii}^n = 0$  para todos os valores de  $n$  diferentes de  $t, 2t, 3t, \dots$  e  $t$  é o maior inteiro com essa propriedade.

Se existem dois números consecutivos  $s$  e  $s+1$  tais que o processo possa estar no estado  $i$  nas vezes  $s$  e  $s+1$ , o estado é dito como tendo período 1 e é chamado de estado *aperiódico*.

Como recorrência é uma propriedade de classe, a periodicidade também é. Se o estado  $i$  numa classe tem período  $t$ , todos os estados da classe possuem período  $t$ .

Numa cadeia de Markov de estados finitos, os estados recorrentes que são aperiódicos são denominados estados *ergódigos*.

Uma cadeia de Markov é dita ergódiga se todos os seus estados são ergódigos.

### Propriedade de longo prazo das cadeias de Markov

Existe uma probabilidade limite na qual o sistema estará em um estado  $j$  depois de um grande número de transições, e essa probabilidade é independente do estado inicial.

Essas propriedades de comportamento de longo prazo de cadeias de Markov de estados finitos são dadas sob determinadas condições. Para toda cadeia de Markov ergódiga e irredutível, o  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$ , onde  $\pi_j$  satisfaz as seguintes equações de estado estacionário:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}, \text{ para } j=0, 1, \dots, M;$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1.$$

Os  $\pi_j$  são chamados de *probabilidades de estado estacionário da cadeia de Markov*. O termo estado estacionário significa que a probabilidade de encontrar o processo em certo estado  $j$ , após um grande número de transições tende a um valor  $\pi_j$  independente da distribuição de probabilidade do estado inicial.

É importante notar que a probabilidade de estado estacionário não implica que o processo permaneça em um estado. Ao contrário, o processo continuará a fazer transições de estado a estado e em algum passo  $n$ , a probabilidade de transição de um estado  $i$  para o estado  $j$  permanecerá  $p_{ij}$ .

Os  $\pi_j$  podem ser interpretados como *probabilidades estacionárias* (não sendo confundidas com probabilidades de transição estacionárias).

Se a probabilidade inicial de se estar em um estado  $j$  é dada por  $\pi_j$  (isto é,  $P\{X_0 = j\} = \pi_j$ ) para todo  $j$ , então a probabilidade de encontrar o processo no estado  $j$  no tempo  $n=1,2,\dots$  é também dada pelos  $\pi_j$  (isso é  $P\{X_n = j\} = \pi_j$ ).

Note que as equações de estado estacionário consistem em  $M+2$  equações em  $M+1$  desconhecidas.

Devido a existir apenas uma única solução, ao menos uma equação deve ser redundante e pode ser descartada.

Não podemos descartar a equação  $\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$  porque  $\pi_j = 0$  para todo  $j$ , irá satisfazer as outras  $M+1$  equações. Além disso, as soluções para as outras  $M+1$  equações de estado estacionário possuem uma única solução para constante multiplicativa, e essa é a equação final que força a solução ser uma distribuição de probabilidade.

Existem outros importantes resultados relativos às probabilidades de estado estacionário. Em particular, se  $i$  e  $j$  são estados recorrentes pertencentes a diferentes classes, então:  $p_{ij}^{(n)} = 0$  para todo  $n$ .

Esse resultado vem da definição de classe. Da mesma maneira, se  $j$  é um estado transiente, então:  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ , para todo  $i$ .

Dessa forma, a probabilidade de encontrarmos o processo em um estado transiente depois de um grande número de transições tende a zero.

## Custo médio esperado por unidade de tempo

As cadeias de Markov apresentadas possuíam estados ergódigos (recorrentes e aperiódicos).

Se o requerimento dos estados serem aperiódicos for relaxado, então o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ , pode não existir.

Consideremos a matriz de transição:

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ \begin{array}{cc|cc} & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & \end{array} \end{array}$$

Se o processo começa no estado zero, no tempo zero, ele estará no estado zero nos tempos 2,4,6,... e no estado 1 nos tempos 1,3,5,...

Então,  $p_{00}^{(n)} = 1$  se  $n$  é par e  $p_{00}^{(n)} = 0$  se  $n$  é ímpar, e o  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}^{(n)}$  não existe. Porém, o seguinte limite sempre existirá para uma redutível e estado finito cadeia de Markov:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} \right) = \pi_j ; \text{ onde } \pi_j \text{ satisfaz as equações de estado estacionários.}$$

Esse resultado é importante no cálculo do *custo médio de longo prazo por unidade de tempo*, associado à cadeia de Markov. Suponhamos que um custo (ou uma função penalidade)  $C(X_t)$  incorre quando o processo esta no estado  $X_t$  no tempo  $t$ , para  $t=0,1,2,\dots$ . Observamos que  $C(X_t)$  é uma variável *randômica* que assume algum dos valores  $C(0), C(1), \dots, C(M)$  e que a função  $C(\cdot)$  é independente de  $t$ . O custo médio esperado incorrido nos primeiros  $n$  períodos é dado por:  $E \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right]$ .

Utilizando o resultado de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} \right) = \pi_j$ , podemos mostrar que o custo médio esperado de longo prazo por unidade de tempo é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} \right] = \sum_{j=0}^M \pi_j C(j).$$

Uma medida alternativa para o custo médio esperado de longo prazo por unidade de tempo, é o *custo médio atual de longo prazo por unidade de tempo*. Isso pode ser mostrado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right] = \sum_{j=0}^M \pi_j C(j) \quad \text{para essencialmente todos os caminhos do}$$

processo.

Então, as duas medidas levam ao mesmo resultado. Esses resultados podem também ser utilizados para interpretar o sentido de  $\pi_j$ .

$$\text{Temos } C(X_t) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_t = j \\ 0 & \text{se } X_t \neq j \end{cases}$$

A fração esperada de vezes de longo prazo que o sistema esta no estado  $j$  é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} E = \pi_j.$$

De maneira semelhante,  $\pi_j$  pode também ser interpretado como uma fração atual de longo prazo das vezes do sistema no estado  $j$ .

### **Custo médio esperado por unidade de tempo para funções de custo complexas**

Em muitos problemas encontrados na prática, o custo deve também depender de outras variáveis randômicas.

De uma maneira geral, se as seguintes condições forem satisfeitas:

- 1)  $\{X_t\}$  é uma cadeia de Markov irredutível (estado finito).
- 2) Associada a essa cadeia de Markov temos uma seqüência de variáveis randômicas  $\{D_t\}$  que são idênticas e igualmente distribuídas (i.i.d.).
- 3) Para um  $m$  fixo  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , um custo  $C(X_t, D_{t+m})$  incorre no tempo  $t$ , para  $t=0, 1, 2, \dots$
- 4) A seqüência  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_t$  deve ser independente de  $D_{t+m}$ .

Teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t, D_{t+m}) \right] = \sum_{j=0}^M k(j) \pi_j, \quad \text{onde } k(j) = E[C(j, D_{t+m})],$$

onde essa expectativa condicional posterior é dada em respeito a distribuição de probabilidade da variável randômica  $D_t$ , dada pelo estado  $j$ . Além do mais, para essencialmente todos os caminhos do processo, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t, D_{t+m}) \right] = \sum_{j=0}^M k(j) \pi_j$$

### Tempos de primeira passagem

Muitas vezes desejamos obter o número de transições realizadas pelo processo indo do estado  $i$  para o estado  $j$  pela primeira vez. Esse tempo de passagem é chamado de *tempo de primeira passagem* do estado  $i$  para o estado  $j$ . Quando  $j = i$ , o primeiro tempo de passagem é apenas o número de transições até o processo retornar ao estado inicial  $i$ .

Nesse caso, o tempo de primeira passagem é chamado de *tempo de recorrência* para o estado  $i$ .

Em geral, os tempos de primeira passagem são variáveis aleatórias. As distribuições de probabilidade associadas dependem das probabilidades de transição do processo. Em particular temos:

$F_{ij}^{(n)}$  como a probabilidade do tempo da primeira passagem do estado  $i$  para o estado  $j$  é igual a  $n$ .

Para  $n > 1$ , o tempo de primeira passagem é  $n$  se a primeira transição é do estado  $i$  para algum estado  $k (k \neq j)$  e então o tempo de primeira passagem do estado  $k$  para o estado  $j$  é  $n-1$ . Além do mais, essas probabilidades satisfazem as seguintes relações recursivas:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(1)} &= p_{ij}^{(1)} = p_{ij}, \\ f_{ij}^{(2)} &= \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(1)}, \\ f_{ij}^{(n)} &= \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Então, a probabilidade do tempo de primeira passagem do estado  $i$  para o estado  $j$  em  $n$  passos pode ser calculada recursivamente a partir das probabilidades de transição de um passo.

Para um  $i$  e  $j$  fixos, as  $f_{ij}^{(n)}$  são números não negativos tais que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1$ . Isso implica que o processo inicializa no estado  $i$  e nunca alcança o estado  $j$ . Quando a soma é igual a 1,  $f_{ij}^{(n)}$ , para  $(n=1,2,\dots)$  pode ser considerada como uma distribuição de probabilidade da variável aleatória *tempo de primeira passagem*.

Obter  $f_{ij}^{(n)}$  para todo  $n$  seria tedioso mas, podemos calcular o tempo de primeira passagem esperado do estado  $i$  para o estado  $j$ , denominado  $\mu_{ij}$  da seguinte forma:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \infty & \text{se } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} & \text{se } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 \end{cases}$$

Sempre que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$ ,  $\mu_{ij}$  satisfaz unicamente a equação  $\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj}$ .

Essa equação reconhece que a primeira transição do estado  $i$  pode ser para o estado  $j$  ou para outro estado  $k$ . Se é para o estado  $j$ , o tempo de primeira passagem é 1. Dado que a primeira transição é para algum estado  $k (k \neq j)$ , com a probabilidade  $p_{ik}$ , a expectativa condicional do tempo de primeira passagem do estado  $i$  para o estado  $j$  é  $1 + \mu_{kj}$ . Combinando esses fatos e somando todas as possibilidades de primeira transição, conduzem diretamente a equação  $\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj}$ .

Para o caso de  $\mu_{ij}$  onde  $j=i$ ,  $\mu_{ij}$  é o número esperado de transições até que o processo retorne ao estado inicial  $i$ , e é denominado *tempo de recorrência esperado* para o estado  $i$ . Após obtermos as probabilidades de estado estacionário  $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_M)$ , onde os tempos de recorrência esperados podem ser calculados imediatamente como:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\pi_i}, \text{ para } i=0, 1, \dots, M.$$

### Estados absorventes

Um estado  $k$  é dito estado absorvente se  $p_{kk} = 1$ , então uma vez que a cadeia visite o estado  $k$ , o processo permanece nele para sempre. Se o estado  $k$  é absorvente, e o processo começa no estado  $i$ , a probabilidade de sempre ir para o estado  $k$  é chamada de *probabilidade de absorção* no estado  $k$ , dado que o sistema começa em  $i$ . Essa probabilidade é denominada por  $f_{ik}$ .

Quando existem dois ou mais estados absorventes numa cadeia de Markov, e é evidente que o processo será absorvido em um desses estados, é desejável encontrar essas probabilidades de absorção. Essas probabilidades podem ser obtidas solucionando um sistema de equações lineares que considera todas as possibilidades para a primeira transição e então, dada a primeira transição, considera a probabilidade condicional de absorção no estado  $k$ .

Em particular, se o estado  $k$  é um estado absorvente, satisfaz o sistema de equações:

$$f_{ik} = \sum_{j=0}^M p_{ij} f_{ij} \quad \text{para } i=0,1,\dots,M, \text{ sujeito às condições :}$$

$$f_{kk} = 1$$

$$f_{ik} = 0, \text{ se o estado } i \text{ é recorrente e } i \neq k.$$

Probabilidades de absorção são importantes em passeios randômicos (random walks). Um passeio randômico é uma cadeia de Markov com a propriedade de que, se o sistema esta no estado  $i$ , então em uma única transição o sistema ou permanece em  $i$  ou se move para um dos estados imediatamente adjacentes à  $i$ .

### **Cadeias de Markov de tempo contínuo**

Assumimos o parâmetro  $t$  como discreto ( $t=0,1,2,\dots$ ), sendo pertinente para muitos problemas mas, existem certas classes de problemas, como filas onde o parâmetro  $t$  deve assumir a forma contínua. Nesses modelos, a evolução do processo é observada continuamente no tempo. A definição de cadeia de Markov é extensiva para  $t$  contínuo.

### **Formulação**

Classificamos os estados possíveis do sistema em  $0,1,\dots,M$ . Partindo do tempo zero e continuando para  $t' \geq 0$ , temos a variável randômica  $X(t')$  em um estado do sistema, no tempo  $t'$ . Então,  $X(t')$  terá um dos possíveis  $(M+1)$  valores sobre um intervalo  $0 \leq t' \leq t_1$ , então irá pular para outro valor no próximo intervalo  $t_1 \leq t' \leq t_2$ , etc.,

onde esses pontos de transição  $(t_1, t_2, \dots)$  são pontos randômicos no tempo (não necessariamente inteiros).

Agora consideremos 3 pontos no tempo:

$$(1) \quad t' = r \quad \text{onde} \quad r \geq 0$$

$$(2) \quad t' = s \quad \text{onde} \quad s > r$$

$$(3) \quad t' = s + t \quad \text{onde} \quad t > 0$$

$t' = r$ , tempo passado,

$t' = s$ , tempo corrente,

$t' = s + t$ ,  $t$  unidades de tempo no futuro.

O estado do sistema agora é observado em tempos  $t' = s$  e  $t' = r$ . Classificamos esses estados como  $X(s) = i$  e  $X(r) = x(r)$ .

A distribuição de probabilidade do estado do sistema no tempo  $t' = s + t$ :

$$P\{X(s+t) = j / X(s) = i \text{ e } X(r) = x(r)\}, \text{ para todo } j=0, 1, \dots, M.$$

Obter essa probabilidade condicional é muitas vezes difícil e podemos simplificar essa tarefa, se o processo estocástico possuir algumas características markovianas.

Um processo estocástico contínuo no tempo  $\{X(t'); t' \geq 0\}$  possui a propriedade markoviana se:

$$P\{X(t+s) = j / X(s) = i \text{ e } X(r) = x(r)\} = P\{X(t+s) = j / X(s) = i\},$$

para todo  $i, j=0, 1, \dots, M$  e para todo  $r \geq 0$ ,  $s > r$  e  $t > 0$ .

Observamos que  $P\{X(t+s) = j / X(s) = i\}$  é a *probabilidade de transição*, onde  $t$  não precisa ser um inteiro.

Se as probabilidades de transição são independentes de  $s$ , então:

$$P\{X(t+s) = j / X(s) = i\} = P\{X(t) = j / X(0) = i\},$$

para todo  $s > 0$ , são chamadas *probabilidades de transição estacionárias*.

Para simplificar a notação, as probabilidades de transição estacionárias são dadas por:

$p_{ij}(t) = P\{X(t) = j / X(0) = i\}$ , onde  $p_{ij}(t)$  é uma função de probabilidade de transição contínua no tempo. Assumimos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Um processo estocástico de tempo contínuo  $\{X(t'); t' > 0\}$  é uma cadeia de Markov de tempo contínuo se possui a propriedade markoviana e consideraremos os seguintes tipos:

- 1) Número de estados finitos
- 2) Probabilidades de transição estacionária

### **Algumas variáveis randômicas importantes (cadeias de Markov em tempo contínuo)**

Cada vez que o processo entra no estado  $i$ , a quantidade de tempo gasto neste estado antes de se mover para um estado diferente é uma variável randômica  $T_i$ , onde  $i=0, 1, \dots, M$ .

Suponhamos que o processo entre no estado  $i$  no tempo  $t'=s$ , então para cada quantidade de tempo fixa  $t > 0$ , temos que  $T_i > t$  se e somente se  $X(t') = i$  para todo  $t'$  sobre o intervalo  $s \leq t' \leq s + t$ .

A propriedade markoviana (com probabilidades de transição estacionárias) implica que:

$$P\{T_i > t + s / T_i > s\} = P\{T_i > t\}.$$

Essa equação nos diz que a distribuição de probabilidade do tempo remanescente até a saída do processo de um determinado estado é sempre a mesma; indiferente de quanto tempo o processo já gastou no estado.

De fato, a variável aleatória não tem memória, o processo esquece sua história. Existe apenas uma distribuição contínua de probabilidades que possui essa propriedade: a distribuição exponencial. A distribuição exponencial possui um único parâmetro  $q$  e a sua média é  $1/q$  e a sua função de distribuição acumulada é:

$$P\{T_i \leq t\} = 1 - e^{-qt}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Podemos descrever uma cadeia de Markov em tempo contínuo como:

- 1) A variável randômica  $T_i$  possui uma distribuição exponencial com média  $1/q$ .

- 2) Quando deixa o estado  $i$ , o processo se move para o estado  $j$  com probabilidade  $p_{ij}$ , onde  $p_{ij}$  satisfaz as condições:

$$p_{ij} = 0, \text{ para todo } i,$$

$$\sum_{j=0}^M p_{ij} = 1, \text{ para todo } i.$$

- 3) O próximo estado visitado após o estado  $i$  é independente do tempo gasto em  $i$ .

Da mesma maneira que as probabilidades de transição de um passo caracterizam a cadeia de Markov em tempo discreto; as intensidades de transição caracterizam a cadeia de Markov em tempo contínuo.

As intensidades de transição são dadas por:

$$q_i = -\frac{d}{dt} p_{ij}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}, \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, M \text{ e}$$

$$q_{ij} = -\frac{d}{dt} p_{ij}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_i p_{ij}, \quad p / \text{todo } j \neq i,$$

Onde  $p_{ij}(t)$  é a função de probabilidade de transição de tempo contínuo.

O parâmetro da distribuição exponencial para  $T_i$  é  $q_i$ .

A interpretação intuitiva de  $q_i$  e  $q_{ij}$  é que eles são as *taxas de transição*. Em particular,  $q_i$  é a taxa de saída do estado  $i$ , no sentido de que  $q_i$  é o número esperado de vezes que o processo deixa o estado  $i$  por unidade de tempo gasto em  $i$  (então  $q_i$  é o correspondente do tempo esperado que o processo gasta no estado  $i$  por visitas ao

$$\text{estado } i: q_i = \frac{1}{E[T_i]}.$$

De maneira similar,  $q_{ij}$  é a taxa de transição do estado  $i$  para o  $j$  no sentido que  $q_{ij}$  é o número esperado de vezes que o processo transita do estado  $i$  para o estado  $j$  por unidade de tempo gasto em  $i$ , então:  $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ .

Como  $q_i$  é o parâmetro de uma distribuição exponencial para  $T_i$ , cada  $q_{ij}$  é parâmetro de uma distribuição exponencial para uma variável aleatória  $T_{ij}$ .

Em cada tempo que o processo entra no estado  $i$ , a quantidade de tempo que ele irá gastar no estado  $i$  antes que uma transição para o estado  $j$  ocorra (se uma transição para

algum outro estado não ocorrer primeiro) é uma variável aleatória  $T_{ij}$ , onde  $i, j=0, 1, \dots, M$  e  $j \neq i$ . Se  $T_{ij}$  são variáveis randômicas independentes, onde a cada  $T_{ij}$  existe uma distribuição exponencial com parâmetro  $q_{ij}$ , então  $E[T_{ij}] = \frac{1}{q_{ij}}$ . O tempo gasto no estado  $i$  até a transição ocorrer ( $T_i$ ) é o *mínimo* (sobre  $j \neq i$ ) de  $T_{ij}$ . Quando a transição ocorrer, a probabilidade de que o processo estará no estado  $j$  é  $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$ .

### Probabilidades de estado estacionário no tempo contínuo

Da mesma maneira como as probabilidades de transição para uma cadeia de Markov de tempo discreto satisfaz as equações de Chapman-Kolmogorov, a função de probabilidade de transição de tempo contínuo também satisfaz essas equações. Para quaisquer estados  $i$  e  $j$  e números não negativos de  $t$  e  $s$  ( $0 \leq s \leq t$ ), temos:

$$p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^M p_{ij}(s)p_{kj}(t-s). \text{ Um par dos estados } i \text{ e } j \text{ são ditos } \textit{comunicados} \text{ se}$$

existem tempos  $t_1$  e  $t_2$  tais que  $p_{ij}(t_1) > 0$  e  $p_{ji}(t_2) > 0$ . Todos os estados que comunicam formam uma classe. Se todos os estados formam uma classe única, isto é, se a cadeia de Markov é irredutível, então:

$p_{ij}(t) > 0$ , para todo  $t > 0$  e todos os estados  $i$  e  $j$ . Além disso, o  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j$  sempre existe e é independente do estado inicial da cadeia de Markov, para  $j=0, 1, \dots, M$ . Essas probabilidades limitantes são comumente referenciadas como *probabilidades de estado estacionário* (ou *probabilidades estacionárias*) da cadeia de Markov. O  $\pi_j$  satisfaz as equações:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}(t), \text{ para } j=0, 1, \dots, M \text{ e todo } t \geq 0.$$

As seguintes equações de estado estacionário provêm um sistema útil para resolver as probabilidades de estado estacionário:

$$\pi_j q_j = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij}(t), \text{ para } j=0, 1, \dots, M \text{ e } \sum_{j=0}^M \pi_j = 1.$$

A equação de estado estacionário para o estado  $j$  possui uma interpretação intuitiva,

$(\pi_j q_j)$  é a taxa na qual o processo deixa o estado  $j$ , uma vez que  $\pi_j$  é a probabilidade de estado estacionário do processo no estado  $j$  e  $q_j$  é a taxa de transição de saída do estado  $j$  dado que o processo está no estado  $j$ . De forma análoga, cada termo  $(\pi_j q_{ij})$  é a taxa na qual o processo entra no estado  $j$  vindo do estado  $i$ , uma vez que  $q_{ij}$  é a taxa de transição do estado  $i$  para o estado  $j$  dado que o processo está no estado  $i$ . Somando todos os  $i \neq j$ , temos a taxa na qual o processo entra no estado  $j$  vindo de qualquer outro estado. A soma das equações dos estados vizinhos que é a taxa a qual o processo deixa o estado  $j$ , deve ser igual a taxa na qual o processo entra em  $j$ . Então, a equação é análoga às *equações de conservação de fluxo*.

Devido à cada uma das primeiras  $M+1$  equações de estado estacionário requererem que as duas taxas estejam em balanço (iguais), essas equações muitas vezes são chamadas de *equações de balanço*.

## ANEXO III- PROCESSO DE DECISÃO MARKOVIANO

A cada momento no tempo observado, a cadeia de Markov pode estar em qualquer um dos estados. Dado o estado atual, a matriz de transição nos dá as probabilidades para qual estado ele estará indo.

Muitos sistemas importantes (como sistemas em fila) podem ser modelados tanto como cadeias de Markov em tempo discreto como contínuo. Ela é útil para descrever o comportamento de um sistema de forma a avaliar a sua performance. Contudo, ela é mais útil para o projeto operacional do sistema do que para otimizar a sua performance.

Iremos focar em como projetar a operação de um sistema via cadeia de Markov discreta e otimizar a sua performance. Melhor que aceitar passivamente o desenho (estrutura) da cadeia de Markov do sistema e a sua correspondente matriz de transição fixa (inalterável), iremos agora trabalhar de forma pró-ativa: para cada possível estado da cadeia de Markov, nós faremos uma decisão sobre qual das múltiplas ações alternativas devem ser tomadas em dado estado. As ações escolhidas afetam as probabilidades de transição como também os custos (ou receitas) imediatas e subseqüentes) da operação do sistema. Nós queremos escolher as ações ótimas para os respectivos estados quando consideramos os custos (ou receitas) imediatos como os subseqüentes.

Este processo decisório é conhecido como processo de decisão Markoviano.

### Um modelo para processos de decisão de Markov

- 7) O estado  $i$  de uma cadeia de Markov é observado após cada transição  $i = (0, 1, \dots, M)$ .
- 8) Após cada observação, uma decisão (ação)  $k$  é escolhida de um conjunto de  $k$  possíveis decisões ( $k=1, 2, \dots, K$ ), onde algumas das  $K$  decisões não são relevantes para alguns estados.
- 9) Se a decisão  $d_i = k$  é feita no estado  $i$ , um custo imediato incorre e que possui um valor esperado de  $C_{ik}$ .

- 10) A decisão  $d_i = k$  no estado  $i$  determina que probabilidades de transição serão para a próxima transição do estado  $i$ . Denotamos essas probabilidades de transição por  $p_{ij}(x)$ , para  $j=0,1,\dots,m$ .
- 11) Uma especificação das decisões para os respectivos estados  $(d_0, d_1, \dots, d_m)$  prescrevem uma política para um processo de decisão de Markov.
- 12) O objetivo é encontrar uma política ótima de acordo com algum critério de custo o qual considera tanto os custos imediatos como os subsequentes, que resultam da futura evolução do processo. Um critério comum é minimizar o custo médio esperado de longo prazo por unidade de tempo.

Uma política é dita estacionária, isto é, para qualquer estado  $i$  do sistema, a regra de decisão é a mesma, indiferentemente do valor do tempo corrente  $t$ . Uma política é determinística, onde para qualquer estado  $i$  do sistema, a regra de decisão escolhe uma decisão particular. Nas políticas de decisão randômicas, uma distribuição de probabilidade é utilizada para se tomar a decisão.

O custo médio esperado de longo prazo (longo prazo indica que a média deve ser interpretada como sendo obtida de um tempo extremamente longo, de tal forma que o efeito do estado inicial desapareça, onde o custo médio atual por unidade de tempo converge para o custo médio esperado por unidade de tempo) pode ser calculado:

$$E(c) = \sum_{i=0}^M c_{ik} \pi_i,$$

Onde  $k = d_i(R)$  para cada  $i$  e  $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_M)$  representa a distribuição de estado estacionário do estado do sistema sobre a política  $R$  sendo avaliada.

### **Programação linear e políticas ótimas**

Uma política determinística (estacionária)  $R$  pode ser vista como regras que prescrevem a decisão  $d_i(R)$  sempre que o sistema estiver no estado  $i$ , para cada  $i = (0,1,\dots,M)$ . Então  $R$  é caracterizado pelos valores  $\{d_0(R), d_1(R), \dots, d_M(R)\}$ .

De forma equivalente,  $\mathbf{R}$  pode ser caracterizado pela nomeação desses valores.

		<i>Decisão K</i>			
		1	2	...	K
<i>Estado</i>	0	$D_{01}$	$D_{02}$	...	$D_{0K}$
	1	$D_{11}$	$D_{12}$	...	$D_{1K}$
	.	...	...	...	...
	M	$D_{M1}$	$D_{M2}$	...	$D_{MK}$

Onde cada  $D_{ik}$  ( $i = 0, 1, \dots, M$  e  $k = 1, 2, \dots, K$ ) é definido como:

$$D_{ik} = 1, \text{ se a decisão } K \text{ é feita no estado } i$$

$$= 0, \text{ caso contrário.}$$

Então, cada fila da matriz contem apenas o algarismo 1 com o resto dos elementos 0.

### **Políticas randômicas**

A introdução de  $D_{ik}$  traz a motivação para a formulação de uma programação linear. É esperado que o custo esperado de uma política possa ser expresso como uma função linear de  $D_{ik}$  ou uma variável relacionada sujeito à restrições lineares. Infelizmente, os valores de  $D_{ik}$  são inteiros (0 ou 1) e precisamos de variáveis contínuas para a formulação da programação linear. Esse requerimento pode ser contornado pela expansão da interpretação de uma política. Em definição prévia, era tomada sempre a mesma decisão toda vez que o sistema estava no estado  $i$ .

A nova interpretação de uma política irá determinar uma distribuição de probabilidade para uma decisão a ser feita quando o sistema esta no estado  $i$ .

Com essa nova interpretação, a  $D_{ik}$  agora precisa ser redefinida como:

$$D_{ik} = P\{\text{decisão} = k / \text{estado } i\}$$

Em outras palavras, dado que o sistema esta no estado  $i$ , a variável  $D_{ik}$  é a probabilidade de escolha da decisão  $k$  como a decisão a ser tomada.

Por isso,  $(D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{ik})$  é a distribuição de probabilidade para a decisão a ser tomada em  $i$ .

Esse tipo de política utilizando distribuições de probabilidade é denominada “política randomizada”, ao passo que a política “determinística” é definida por  $D_{ik} = 0$  ou 1. As políticas aleatórias podem ser caracterizadas pela matriz:

		<i>Decisão K</i>			
		1	2	...	K
<i>Estado</i>	0	$D_{01}$	$D_{02}$	...	$D_{0K}$
	1	$D_{11}$	$D_{12}$	...	$D_{1K}$
	.	...	...	...	...
	M	$D_{M1}$	$D_{M2}$	...	$D_{MK}$

Onde cada linha soma 1 e agora temos  $0 \leq D_{ik} \leq 1$ .

Através de políticas aleatórias é possível formular um modelo de programação linear para encontrar uma política ótima ( $D_{ik}$  são variáveis contínuas e não inteiras).

### **Formulação de uma programação linear**

As variáveis de decisão convenientes (denotadas aqui por  $y_{ik}$ ) para um modelo de programação linear são definidas como se segue. Para cada  $i = 0, 1, \dots, M$  e  $k = 0, 1, \dots, K$ , deixemos  $y_{ik}$  ser a probabilidade incondicional do estado estacionário do sistema no estado  $i$  e a decisão  $k$  é feita:

$$y_{ik} = P\{\text{estado} = i, \text{decisão} = k\}$$

Cada  $y_{ik}$  esta proximo relacionado ao correspondente  $D_{ik}$  desde então, vindo das regras da probabilidade condicional:

$$y_{ik} = \pi_i D_{ik},$$

Onde  $\pi_i$  é a probabilidade de estado estacionário da cadeia de Markov no estado

*i*. Além disso,  $\pi_i = \sum_{k=1}^K y_{ik}$ , então  $D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i} = \frac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^K y_{ik}}$ .

Temos diversas restrições em  $y_{ik}$ :

1)  $\sum_{i=1}^M \pi_i = 1$  então  $\sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1$ ,

2) Dos resultados das probabilidades de estado estacionário (o argumento  $k$  é introduzido em  $p_{ij}(k)$  para indicar apropriadamente que a probabilidade de transição de estado depende da decisão  $k$ ).

$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}$ , então  $\sum_{k=1}^K y_{jk} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k)$ , para  $j = 0, 1, \dots, M$ .

3)  $y_{ik} \geq 0$  para  $i = 0, 1, \dots, M$  e  $k = 1, 2, \dots, K$ .

O custo médio esperado de longo prazo por unidade de tempo é dado por:

$E(c) = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K \pi_i c_{ik} D_{ik} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K c_{ik} y_{ik}$ ,

Então, o modelo de programação linear escolherá o  $y_{ik}$  que minimize

$Z = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K c_{ik} y_{ik}$  sujeito às restrições:

1)  $\sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1$

2)  $\sum_{k=1}^K y_{ik} - \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k) = 0$  para  $j = 0, 1, \dots, M$

3)  $y_{ik} \geq 0$  para  $i = 0, 1, \dots, M$  e  $k = 1, 2, \dots, K$ .

Observamos que esse modelo possui  $M+2$  restrições funcionais e  $k(M+1)$  variáveis de decisão (a restrição 2 fornece uma restrição redundante, então qualquer uma das  $M+1$  restrições podem ser deletadas).

Assumindo que o modelo não é tão grande, ele pode ser resolvido pelo método SIMPLEX. Uma vez que  $y_{ik}$  valores são obtidos, cada  $D_{ik}$  é encontrado por:

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^K y_{ik}}.$$

A solução ótima obtida pelo método SIMPLEX possui algumas propriedades interessantes. Ela irá conter  $M+1$  variáveis básicas  $y_{ik} \geq 0$ . Podemos ver que  $y_{ik} \geq 0$  para ao menos um  $k = 1, 2, \dots, K$ ; para cada  $i = 0, 1, \dots, M$ . Consequentemente, cada  $D_{ik} = 0$  ou 1.

A conclusão chave é que a política ótima encontrada pelo método SIMPLEX é determinística em vez de ser aleatória. Então, permitindo políticas aleatórias não leva a melhorias na política final. Contudo ela é extremamente útil na formulação pela a conversão das variáveis inteiras ( $D_{ik}$ ) em variáveis contínuas, podendo então viabilizar a utilização da programação linear (a analogia na programação inteira é a de utilizar o relaxamento da programação linear para utilizar o método SIMPLEX e então obtermos a propriedade de soluções inteiras; devido à solução ótima para a programação linear tornar a saída inteira de qualquer forma).

### Algoritmo de melhoria de política para encontrar políticas ótimas

A principal vantagem desse algoritmo de melhoria de política consiste em sua maior eficiência porque ele usualmente encontra a política ótima com um número relativamente pequeno de interações (menos que na programação linear utilizando o método SIMPLEX).

Para qualquer política  $R$ , existem valores  $g(R), v_0(R), v_1(R), \dots, v_M(R)$  que satisfaz:

$$g(R) + v_1(R) = C_{ik} + \sum_{j=0}^M p_{ij}(k)v_j(R), \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Podemos justificar heurísticamente esses relacionamentos e interpretar esses valores. Denominando por  $v_i^n(R) = C_{ik} + \sum_{j=0}^M p_{ij}(k)v_j^{n-1}(R)$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots, M$ , onde  $v_i^1 = C_{ik}$  para todo  $i$ .

Isso é útil para explorar o comportamento de  $v_i^n(R)$  quando  $n$  cresce muito. Relembramos que o custo médio esperado de longo prazo por unidade de tempo seguindo alguma política  $R$  pode ser expresso como:  $g(R) = \sum_{i=0}^M \pi_i C_{ik}$ , o qual é independente do estado inicial  $i$ . O valor de  $v_i^n(R)$  se comporta aproximadamente como  $ng(R)$  para  $n$  grande. De fato, se negligenciarmos flutuações pequenas,  $v_i^n(R)$  pode ser expressa como uma soma de dois componentes:  $v_i^n(R) \approx ng(R) + v_i(R)$ , onde o primeiro componente é independente do estado inicial e o segundo componente é dependente do estado inicial. Assim  $v_i^n(R)$  pode ser interpretado como o efeito no custo total esperado devido a iniciarmos o estado em  $i$ . Conseqüentemente,  $v_i^n(R) - v_j^n(R) \approx v_i(R) - v_j(R)$ , então  $v_i^n(R) - v_j^n(R)$  é uma medida do efeito de começarmos no estado  $i$  em vez do estado  $j$ .

Fazendo  $n$  crescer muito, podemos substituir  $v_i^n(R) = ng(R) + v_i(R)$  e  $v_j^{n-1}(R) = (n-1)g(R) + v_j(R)$  em uma equação recursiva.

Notamos que esse sistema possui  $M+1$  equações com  $M+2$  variáveis desconhecidas, então uma dessas variáveis deve ser escolhida arbitrariamente. Por convenção,  $v_M(R)$  será escolhida igual à zero. Entretanto, resolvendo o sistema de equações lineares, podemos obter  $g(R)$ , o custo médio esperado de longo prazo por unidade de tempo dada a política  $R$  escolhida.

A princípio todas as políticas podem ser enumeradas e a política que minimiza  $g(R)$  pode ser encontrada. Mas, sempre para um moderado número de estados e decisões, essa é técnica apresenta dificuldades. Felizmente existem algoritmos que podem ser utilizados para avaliar políticas e encontrar a política ótima, sem uma completa enumeração.

### **Algoritmo de melhoria de política**

O algoritmo inicia escolhendo uma política qualquer  $R_1$ , então o sistema de equações é resolvido para encontrar valores de  $g(R_1), v_0(R), \dots, v_{m-1}(R)$ , com  $v_M(R) = 0$ . Esse passo é chamado de determinação de valor. Uma política melhor, denominada  $R_2$ , é então construída e chamamos esse passo de melhoria de política. Esses dois passos

constituem uma iteração do algoritmo. Utilizando a nova política  $R_2$ , realizamos uma nova iteração. Essas iterações sucessivas quando levam a políticas idênticas, significa que a política ótima foi obtida.

### **Resumo do algoritmo de melhoria de política**

Inicialização: escolher arbitrariamente uma política inicial  $R_1$  para ser avaliada, set  $n=1$ .

#### Iteração $n$ :

Passo 1: Determinação de valor para a política  $R_n$ , utilizando  $p_{ij(k)}, C_{ik}, V_M(R_n) = 0$  para resolver o sistema de  $M+1$  equações:

$g(R_n) = C_{ik} + \sum_{j=0}^M p_{ij}(k)v_j(R_n) - v_1(R_n)$ , para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, M$ ; para todo  $M+1$  valores desconhecidos de  $g(R_n), v_0(R_n), v_1(R_n), \dots, v_{m-1}(R_n)$ .

Passo 2: Melhoria de política: utilizando os valores correntes de  $v_i(R_n)$  computados para a política  $R_n$ , encontrar a política alternativa  $R_{n+1}$  tal que para cada estado  $i$ ,  $d_i(R_{n+1}) = k$  é a decisão que minimiza  $C_{ik} + \sum_{j=0}^M p_{ij}(k)v_j(R_n) - v_1(R_n)$  isto

é, para cada estado  $i$  minimizar  $[C_{ik} + \sum_{j=0}^M p_{ij}(k)v_j(R_n) - v_1(R_n)], k = 1, 2, \dots, K$  e então

fazer  $d_i(R_{n+1})$  igual ao valor mínimo de  $k$ .

Esse procedimento define uma nova política  $R_{n+1}$ .

Teste de optimalidade: A política corrente  $R_{n+1}$  é ótima se essa política é idêntica à política  $R_n$ . Se sim, parar; senão, fazer  $n=n+1$  e realizar nova iteração.

Esse algoritmo possui duas propriedades chave:

1)  $g(R_{n+1}) \leq g(R_n)$ , para  $n=1, 2, \dots$

2) O algoritmo termina com uma política ótima em um número finito de iterações, assumindo um finito número de estados e de decisões (para modelos especificados de acordo com o descrito na secção “**Um modelo para processos de decisão de Markov**”).

### **Critério de custo descontado**

Uma alternativa da abordagem baseada no custo médio esperado de longo prazo por unidade de tempo, para valorizar políticas; é a utilização do custo total descontado esperado. Essa medida utiliza um fator de desconto  $\alpha$ , onde  $0 < \alpha < 1$ . O fator de desconto  $\alpha$  pode ser interpretado como igual à  $\alpha = \frac{1}{(1+i)}$ , onde  $i$  é a taxa de juros no período. Assim,  $\alpha$  é o valor presente de uma unidade de custo em um período do futuro. De forma igual  $\alpha^m$  é o valor presente de uma unidade de custo  $m$  períodos no futuro.

Esse critério de custo descontado é preferível ao critério de custo médio, quando os períodos de tempo da cadeia de Markov são suficientemente longos, de forma que o valor do dinheiro no tempo deve ser levado em conta. Outra vantagem é que o critério de custo descontado pode ser prontamente adaptado para lidar com MDP com, período finito, onde a cadeia de Markov irá terminar após certo número de períodos.

Tanto a técnica de melhoria de política, quanto à programação linear podem ser aplicadas com pequenos ajustes.

### **Algoritmo de melhoria de política (critério de custo descontado)**

Para derivar as expressões necessárias para a determinação do valor e dos passos do algoritmo de melhoria de política, iremos adotar o ponto de vista da programação dinâmica probabilística. Em particular, para cada estado  $i(i=0,1,\dots,M)$  de um MDP operando sob uma política  $R$ , tomemos  $v_i^n(R)$  como o custo descontado total esperado quando o processo começa no estado  $i$  (começando o primeiro período observado) e evolui para  $n$  períodos de tempo.

Então  $v_i^n(R)$  tem dois componentes:  $C_{ik}$ , o custo incorrido durante o primeiro período observado e  $\alpha \sum_{j=0}^M p_{ij}(k) v_j^{n-1}(R)$ , o custo descontado total esperado do processo envolvido até  $n-1$ . Para cada  $i=0, 1, \dots, M$ ; temos a equação recursiva:

$$V_i^n(R) = C_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^M p_{ij}(k) V_j^{n-1}(R), \text{ com } V_i^1(R) = C_{ik}.$$

Quando  $n$  se aproxima do infinito, essa equação recursiva converge para:

$$V_i^n(R) = C_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^M p_{ij}(k) V_j(R), \text{ para } i=0, 1, \dots, M; \text{ onde o valor } V_i(R) \text{ pode ser}$$

interpretado como o custo descontado total esperado do processo começando no estado  $i$  e continuando indefinidamente. Existem  $M+1$  equações, e  $M+1$  variáveis desconhecidas então a solução simultânea do sistema de equações nos leva a  $V_i(R)$ .

### **Resumo do algoritmo de melhoria de política (critério de custo descontado)**

Inicialização: escolher arbitrariamente uma política inicial  $R_1$  para ser avaliada, set  $n=1$ .

#### Iteração $n$ :

Passo 1: Determinação de valor para a política  $R_n$ , utilizando  $p_{ij}(k), C_{ik}$  para resolver o sistema de  $M+1$  equações:

$$V_i(R_n) = C_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^M p_{ij}(k) V_j(R_n), \text{ para } i=0, 1, \dots, M; \text{ para todo } M+1 \text{ valores}$$

desconhecidos de  $V_0(R_n), V_1(R_n), \dots, V_M(R_n)$ .

Passo 2: Melhoria de política: utilizando os valores correntes de  $v_i(R_n)$  computados para a política  $R_n$ , encontrar a política alternativa  $R_{n+1}$  tal que para cada estado  $i$ ,  $d_i(R_{n+1}) = k$  é a decisão que minimiza  $C_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^M p_{ij}(k) V_j(R_n)$  isto é, para cada estado  $i$  minimizar  $[C_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^M p_{ij}(k) V_j(R_n)], k = 1, 2, \dots, K$  e então fazer  $d_i(R_{n+1})$  igual ao valor mínimo de  $k$ .

Esse procedimento define uma nova política  $R_{n+1}$ .

Teste de optimalidade: A política corrente  $R_{n+1}$  é ótima se essa política é idêntica à política  $R_n$ . Se sim, parar; senão, fazer  $n=n+1$  e realizar nova iteração.

Esse algoritmo possui três propriedades chave:

- 1)  $V_i(R_{n+1}) \leq V_i(R_n)$ , para  $i=0, 1, \dots, M$  e  $n=1, 2, \dots$
- 2) O algoritmo termina com uma política ótima em um número finito de iterações.
- 3) O algoritmo é válido sem a premissa (usada para o custo médio) de que a cadeia de Markov associada com toda matriz de transição é irredutível.

### Formulação de programação linear (custo descontado)

A formulação de programação linear para o caso do custo descontado é similar ao caso do custo médio. Entretanto, não precisamos mais da primeira restrição mas, precisamos de uma restrição funcional que inclua o fator de desconto  $\alpha$ . Outra diferença é que o modelo agora contém constantes  $\beta_j$  para  $j=0, 1, \dots, M$ . Essas constantes devem satisfazer as condições:

$$\sum_{j=0}^M \beta_j = 1, \quad \beta_j > 0 \text{ para } j=0, 1, \dots, M; \text{ mas elas podem ser escolhidas}$$

arbitrariamente sem afetar a política ótima obtida do modelo.

O modelo resultante é para escolher os valores das variáveis de decisão contínuas  $y_{ik}$  que minimize  $Z = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K c_{ik} y_{ik}$  sujeito às restrições:

$$1) \sum_{k=1}^K y_{ik} - \alpha \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k) = \beta_j \text{ para } j = 0, 1, \dots, M$$

$$2) y_{ik} \geq 0 \text{ para } i = 0, 1, \dots, M \text{ e } k = 1, 2, \dots, K.$$

Uma vez que o método SIMPLEX é utilizado para obter a solução ótima para o modelo, a política ótima correspondente então é definida por:

$$D_{ik} = P\{\text{decisão} = k, \text{estado} = i\} = \frac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^K y_{ik}}$$

O  $y_{ik}$  agora pode ser interpretado como o tempo esperado descontado de se estar no estado  $i$  e decidindo  $k$ , quando a distribuição de probabilidade do estado inicial (quando as observações começam) é  $P\{X_0 = j\} = \beta_j$  para  $j=0,1,\dots,M$ . Em outras palavras, se  $Z_{ik}^n = P\{\text{tempo} = n, \text{estado} = i, \text{decisão} = k\}$  então:

$$Z_{ik}^n = Z_{ik}^0 + \alpha Z_{ik}^1 + \alpha^2 Z_{ik}^2 + \alpha^3 Z_{ik}^3 + \dots$$

Com a interpretação de  $\beta_j$  como probabilidades de estado inicial (o qual cada probabilidade é maior que zero),  $Z$  pode ser interpretado como o custo descontado total esperado. Assim, a escolha de  $\beta_j$  afeta o valor ótimo  $Z$  (mas não o resultado da política ótima).

Podemos novamente mostrar que a política ótima obtida pela solução do modelo de programação linear é determinística, isso é,  $D_{ik} = 0$  ou  $1$ . Além disso, essa técnica é válida sem a premissa (utilizada no custo médio) de que a cadeia de Markov associada com toda matriz de transição é irredutível.

### **MDP com período finito e o método das aproximações sucessivas**

Assumimos que o MDP irá operar indefinidamente, e buscamos uma política ótima para tal processo. A idéia básica do método de aproximações sucessivas é, ao invés de encontrar uma política ótima para as decisões a serem feitas no primeiro período quando o processo tem apenas  $n$  períodos de tempo para ir, antes de terminar, começando com  $n=1$ , então  $n=2$ ,  $n=3$ , sucessivamente. Quando  $n$  cresce muito, as políticas ótimas correspondentes irão convergir para uma política ótima de um problema de período infinito.

Assim, as políticas obtidas para  $n=1,2,3,\dots$  levam a aproximações sucessivas que possibilitam a política ótima desejada.

A razão dessa abordagem ser atrativa, é que nós já temos um método rápido para encontrar uma política ótima quando o processo tem apenas  $n$  períodos para evoluir: a programação dinâmica probabilística.

Em particular, para  $i = 0,1,\dots,M$ , temos:

$V_i^n$  é o custo descontado total esperado seguindo uma política ótima, dado que o processo começa no estado  $i$  e tem apenas  $n$  períodos para evoluir (se desejamos fazer  $n$

crescer indefinidamente, devemos ajustar  $n$  para o número de períodos de evolução, ao invés de fazer  $n$  desde o início).

Pelo princípio da optimalidade da programação dinâmica, os  $V_i^n$  são obtidos pela relação recursiva:

$$V_i^n = \min \left\{ C_i^k + \alpha \sum_{j=0}^M p_{ij}(k) V_j^{n-1} \right\}, \text{ para } i = 0, 1, \dots, M .$$

O valor de minimização de  $k$  nos leva a decisão ótima a ser feita no primeiro período quando o processo começa em  $i$ . Para começarmos, com  $n=1$ , todos os  $V_i^0 = 0$  então:  $V_i^1 = \min_k \{ C_{ki} \}$ , para  $i = 0, 1, \dots, M$ .

Embora o método de aproximações sucessivas não leve a uma política ótima para o problema de período infinito, depois de poucas iterações, ele tem uma vantagem sobre as técnicas de melhoria de política e programação linear: ele não necessita resolver um sistema de equações simultâneas. Dessa forma, cada iteração pode ser realizada de forma simples e rápida. Além disso, se o MDP tiver apenas alguns períodos para evoluir,  $n$  iterações desse método definitivamente irá conduzir a uma política ótima (para um problema de  $n$ -período, é permitido ajustar  $\alpha = 1$ , isto é, sem desconto; onde nesse caso o objetivo é minimizar o custo total esperado sobre  $n$  períodos).

## **ANEXO IV- MÉTODO DE MONTE CARLO (MMC)**

O MMC foi proposto por Von Neumann e Ulam (SALIBY, 1989) para a solução de problemas matemáticos cujo tratamento analítico era de difícil abordagem, durante a Segunda Guerra Mundial, ao longo das pesquisas no Laboratório de Los Alamos e que resultaram na construção da primeira bomba atômica. O nome Simulação de Monte Carlo (ou Método de Monte Carlo - MMC) foi dado em referência ao nome de uma cidade no Principado de Mônaco, famosa pelos seus cassinos que possuem diversos jogos como roletas, dados, máquinas de sorteio, etc., os quais apresentam um comportamento randômico.

O comportamento randômico dos jogos do cassino é similar à forma como o MMC seleciona os valores das variáveis randomicamente para simular o modelo proposto. Estas variáveis possuem um intervalo conhecido de valores mas, um valor incerto para um tempo em particular ou evento.

O MMC foi originalmente utilizado na avaliação de integrais múltiplas, sendo depois utilizado em diversos problemas matemáticos complexos.

O Método de Monte Carlo pode ser definido como sendo: “uma maneira de se transformar um conjunto de números aleatórios em outro conjunto de números (variáveis aleatórias), com a mesma distribuição da variável considerada” (PRADO, 1999).

O Método de Monte Carlo (MMC) é uma simulação estocástica que tem como característica principal os valores de saída do processo serem determinados a partir de funções aleatórias.

A distribuição de probabilidades identifica e define o padrão de comportamento do processo estocástico, representando assim o modelo do processo real. Uma vez conhecidas as Funções de densidade de probabilidades (FDP), o MMC pode ser aplicado através de amostragens aleatórias a partir da FDP. Muitas simulações são então realizadas e o resultado final é uma média dos resultados das simulações individuais.

O MMC é um método de geração de dados sintéticos que são indistinguíveis do processo físico real. Esta abstração do processo real é acompanhada de uma amostragem de uma FDP que representa o processo físico atual. Se o modelo do processo (ou sistema) real é uma aproximação razoável deste processo, e se o procedimento de amostragem é aleatório e não-viesado, os dados resultantes da

simulação deveriam ser semelhantes aos dados observados no processo real. Caso o contrário, o modelo deve ser cuidadosamente reavaliado devido às não conformidades entre o modelo e o sistema real. O algoritmo do MMC é caracterizado por:

- FDP que representa o sistema físico ou matemático,
- Gerador de números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo  $[0,1]$ ,
- Regra de amostragem a partir da FDP específica,
- Scoring dos resultados,
- Estimação do erro estatístico (variância) em função do número de simulações,
- Técnicas de redução de variância na solução estimada para redução do tempo computacional,
- Paralelização e vetorização para arquiteturas computacionais avançadas.

O MMC consiste na geração de um número finito de amostras de um processo estocástico, para simular artificialmente um grande número de experimentos, sendo utilizado para realizar simulações envolvendo variáveis com incertezas estatísticas e/ou cujas informações são difíceis de serem obtidas. Em uma abordagem simples, tem-se a amostragem de cada variável, aleatoriamente, para fornecer um valor de amostra. O experimento é repetido um número  $N$  de vezes, cada vez com um vetor, de valores, escolhido aleatoriamente.

Ao final do processo, é feito um resumo estatístico das respostas do modelo considerado. O método requer um grande número de simulações do modelo, para verificar a propagação das incertezas nos dados de entrada sobre os resultados finais. Com respeito a um dado problema, o número de simulações deve ser tal, que produza resultados satisfatórios, segundo uma tolerância preestabelecida.

Para aplicar a técnica de Monte Carlo a problemas práticos é necessário:

- Desenvolver um método sistemático para amostragem numérica das variáveis básicas ;
- Selecionar uma técnica de simulação apropriada, econômica e confiável;
- Definir o número de amostragens necessárias para se obter uma estimativa razoável da resposta do modelo.

Na simulação de Monte Carlo, as variáveis geralmente são assumidas como sendo estatisticamente independentes ou não correlacionadas, ou seja, a amostragem de uma variável não é afetada pela variável previamente amostrada. Nos casos onde há dependência entre as variáveis, deve-se levá-la em conta no modelo.

Para realização da simulação de Monte Carlo, inicialmente são definidos os parâmetros considerados como incertos e atribuída para cada um deles, uma distribuição de probabilidade para representar sua variação. Após a atribuição das distribuições de probabilidades dos parâmetros, mediante a utilização de um gerador de números aleatórios, definem-se os vetores relativos aos dados de entrada do modelo para a realização de cada simulação. Em resumo, o método de Monte Carlo consiste na realização de  $N$  análises determinísticas e, após a realização das simulações, na elaboração de um resumo estatístico dos resultados.

O Método de Monte Carlo pode ser utilizado para avaliar o risco envolvido em uma atividade através dos seguintes passos:

- Identificar as variáveis que podem interferir mais fortemente nos resultados da atividade,
- Associar distribuições de probabilidades às variáveis escolhidas,
- Aplicar o Método de Monte Carlo para gerar, em cada experimento, uma distribuição agregada dos tempos,
- Analisar a distribuição de probabilidades que resulta do total de experimentos realizados de forma a encontrar a probabilidade de que o valor esperado não seja satisfeito.

A simulação de Monte Carlo é um instrumento que permite considerar todas as combinações possíveis, possibilitando examinar a distribuição completa dos resultados do modelo.

Iremos definir agora, alguns pontos importantes relacionados ao Método de Monte Carlo: o **Teorema Central do Limite**

O Teorema Central do Limite estabelece que a soma ou média resultante de um grande número de valores aleatórios e independentes é aproximadamente normal, independentemente da distribuição dos valores individuais. Com base neste teorema,

pode-se, por exemplo, agregar os tempos de inúmeros sub-processos independentes, somando-se e substituindo-os por um único valor (soma ou média) cujo resultado tende a normalidade na medida que cresce o número de sub-processos. A menos que estes sub-processos possuam distribuições extremamente assimétricas, tal aproximação continua válida mesmo para pequenas amostras.

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , uma va (variável aleatória) independente e identicamente distribuída (fato que consideramos neste trabalho como sendo todas as operações de perfuração e completação de poços), com média  $\mu=E(X_i)$  e  $\text{Var } X_i = \sigma^2 \neq 0$ .

$$\text{Seja } Z_n = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \quad n=1,2,\dots \text{ então:}$$

$$\text{Lim } P \left( \frac{\sum x_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) = N(x), \quad \text{área sobre a curva normal.}$$

A medida que  $n$  aumenta, a distribuição de  $Z_n$  converge para uma distribuição de probabilidade normal padronizada (fig 15).

A generalidade deste teorema é extraordinária, onde a va  $X_i$  pode ser contínua, discreta ou mista e vale também quando  $X_i$  só possui os dois primeiros momentos  $E(x_i)$  e  $\text{Var}(x_i)$ . Não é feita qualquer hipótese sobre a distribuição de  $X_i$  e a distribuição de  $Z_n$  independe da distribuição de  $X_i$ .

Acreditamos que uma formalização maior dos métodos estatísticos que dão suporte a este trabalho, por si só merecem uma extensa pesquisa no futuro.