

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

*INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE
PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA*

PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL

Tese de doutorado:

***CONDIÇÕES INICIAIS EM PROPAGAÇÃO DE
ONDAS ELÁSTICAS ATRAVÉS DO METÓDO DOS
ELEMENTOS FINITOS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO
E DA FREQUÊNCIA***

Candidato:

Cláudio José Martins

Orientadores:

Webe João Mansur (PEC/COPPE/UFRJ)

Francisco Célio de Araújo (DECIV/EM/UFOP)

Data: 05 de Fevereiro 2004

Horário: 14:00 horas

Local: CT/COPPE sala B104

Rio de Janeiro, 2 de março de 2004

CONDIÇÕES INICIAIS EM PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELÁSTICAS ATRAVÉS
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA
FREQUÊNCIA

Cláudio José Martins

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Webe João Mansur, Ph.D

Prof. Francisco Célio de Araújo, Dr.–Ing.

Prof. Breno Pinheiro Jacob, D.Sc.

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D.Sc.

Prof. Paulo Batista Gonçalves, D.Sc

Prof. Luis Paulo da Silva Barra, D.Sc.

Prof. Marco Aurélio Chaves Ferro, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 2004

MARTINS, CLÁUDIO JOSÉ

Condições Iniciais em Propagação de
Ondas Elásticas através do Método dos
Elementos Finitos nos Domínios do Tempo e da
Frequência. [Rio de Janeiro] 2004.

VI, 151 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia Civil, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Acústica e Dinâmica
2. Domínio da frequência
3. Domínio do tempo
4. Computação paralela
5. Método dos Elementos Finitos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.)

CONDIÇÕES INICIAIS EM PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELÁSTICAS ATRAVÉS
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA
FREQUÊNCIA

Cláudio José Martins

Fevereiro/2004

Orientadores: Webe João Mansur

Francisco Célio de Araújo

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho tem por objetivo a resolução nos domínios do tempo e da frequência, via Método dos Elementos Finitos, de problemas transientes de propagação de ondas elásticas bi e tridimensionais, considerando-se a contribuição de deslocamentos e velocidades iniciais.

Serão descritos em detalhes os procedimentos necessários ao desenvolvimento da formulação aqui apresentada, bem como serão discutidos conceitos básicos da mecânica clássica, visando à consideração de condições iniciais tanto no domínio do tempo quanto da frequência. Também serão abordados aspectos importantes com relação aos procedimentos necessários à correta obtenção das respostas no domínio do tempo, através de análises efetuadas no domínio da frequência.

Com o objetivo de validar a formulação proposta e os algoritmos desenvolvidos, serão apresentados exemplos numéricos, comparando as respostas obtidas às soluções analíticas dos problemas. Por fim, serão abordadas aplicações de grande porte através da utilização de *cluster* de PC's nos algoritmos tempo-dependentes 2D desenvolvidos neste trabalho.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.)

INITIAL CONDITION IN ELASTIC WAVE PROPAGATION PROBLEMS BY THE
FINITE ELEMENT METHOD IN TIME AND FREQUENCY-DOMAIN

Cláudio José Martins

February /2004

Advisors: Webe João Mansur

Francisco Célio de Araújo

The present work focuses on time and frequency domain approaches to solve, through the Finite Elements Method, bi and three-dimensional elastic transient wave propagation problems, considering initial velocity and displacement contribution.

It will be described in details the procedures necessary to development of the formulation here presented, as well as it will be discussed the theoretical concepts of the classic mechanics, required in the incorporation of initial conditions so much in time as in the frequency domain. Also important aspects will be approached regarding the necessary procedures to the correct obtaining of the response in the time-domain, through analyses made on the frequency-domain.

With the objective of validating the proposed formulations and the developed algorithms, bi- and three-dimensional numeric results of transient wave propagation problems, including initial conditions contributions, are compared to analytical solutions. Finally, the work focuses on the use of PC's cluster in the 2D time-dependent analyses of large scale problems thought the analysis of typical geophysical cases.

Índice

1. Introdução	1
2. Equações Básicas	6
2.1. Equação da Onda Elástica	6
2.2. Equação da Onda Acústica	11
3. Discretização Espacial	14
3.1. Sistema Matricial de Equilíbrio	14
3.1.1. Formulação Tempo-dependente	14
3.1.2. Formulação Frequência-dependente	20
3.1.3. Critérios de Convergência	21
3.1.4. Funções de Forma e Integração Numérica	24
• Elementos Isoparamétricos Quadrangulares	26
• Elementos Isoparamétricos Triangulares	27
• Mapeamento em Coordenadas Naturais	28
• Ordem de Integração Apropriada	32
3.2. Condições de Contorno Essenciais	33
3.3. Condições de Contorno Não-reflexivas	34
3.4. Integração Espacial em meios Heterogêneos	35
3.5. Esquema de Armazenamento de Matrizes	36
3.6. Aspectos de Paralelização	39
4. Resolução do Sistema de Equilíbrio Dinâmico	43
4.1. Problemas Tempo-Dependentes	43
4.1.1. Matriz de Massa	44
4.1.2. Integração Temporal	45
• Diferença Central	46
• Alfa Generalizado	47
• Lagrange de ordem 4	48
• HHT	49
• Runge-Kutta-Nyström	49
4.2. Problemas Frequência-Dependentes	51
4.2.1. Algoritmo de Gradiente Conjugado	52
4.2.2. Precondicionamento	54
4.2.3. Critérios de Convergência	55
5. Condições Iniciais em Problemas Transientes	56
5.1. Análise Completa no Domínio da Frequência	56
5.1.1. Período Estendido	59
5.1.2. O Fenômeno de Aliasing	62
5.1.3. Amortecimento	64
5.2. Condições Iniciais	65
5.2.1. Deslocamento Inicial	66
5.2.2. Velocidade Inicial	67
5.2.3. Caso Geral	70
6. Aplicações	73

6.1.	Modelagem 3D elástica: Análise conjunta tempo-frequência	73
6.1.1.	Importância da análise no domínio da frequência	74
6.1.2.	Importância da análise no domínio do tempo	78
6.2.	Modelagem 3D acústica: Barra sob carregamento axial e condições iniciais em todo o domínio	79
6.3.	Modelagem 3D acústica: Barra sob carregamento axial e condições iniciais em parte do domínio	84
6.4.	Modelagem 3D/2D acústica: Membrana sob condição inicial de velocidade	86
6.5.	Modelagem 3D/2D acústica: Membrana retangular sob condição inicial de deslocamento e velocidade	91
6.6.	Modelagem 2D elástica: Comparação entre esquemas de avanço no tempo	95
6.7.	Modelagem 3D elástica: Viga bi-apoiada sob carregamento uniformemente distribuído	106
6.8.	Modelagem 2D acústica: Modelagem Sísmica bidimensional	112
6.9.	Modelagem 2D elástica em paralelo: Modelagem Sísmica bidimensional	118
6.10.	Modelagem 2D em paralelo: Análise de Performance em cluster de PC's	121
7.	<i>Conclusões e Sugestões</i>	124
8.	<i>Referências</i>	128
9.	<i>Apêndice 1: Ondas Sísmicas</i>	135
10.	<i>Apêndice 2: Esquemas de Avanço no Tempo</i>	140
	• Esquema de Implementação do método da Diferença Central Explícito	140
	• Esquema de Implementação do método Alfa-Generalizado Explícito	141
	• Esquema de Implementação do método de Lagrange Ordem 4 Explícito	142
	• Esquema de Implementação do método HHT Implícito	143
	• Esquema de Implementação do método Runge-Kutta-Nyström clássico ordem 4	144
11.	<i>Apêndice 3: Gradiente Conjugado Precondicionado Simétrico</i>	145
12.	<i>Apêndice 4: Soluções Analíticas de problemas de propagação de ondas utilizadas neste trabalho</i>	146
13.	<i>Apêndice 5: Algoritmos Implementados</i>	151

1. INTRODUÇÃO

A modelagem de problemas dinâmicos tempo-dependentes tratados em Engenharia pode ser adequadamente concebida tanto no domínio do tempo quanto considerando-se domínios transformados, com vantagens e desvantagens para cada uma destas metodologias, dependendo da natureza do problema físico considerado. Embora as aproximações baseadas no domínio do tempo, mais familiares aos analistas, possam ser adotadas de forma eficiente na análise de uma grande variedade de problemas físicos tanto inerciais, onde a resposta dinâmica é dominada por modos de vibração de frequências mais baixas, quanto problemas de propagação de ondas, cujas respostas são dominadas por modos de vibração de frequências intermediárias/altas (JACOB e EBECKEN, 1994, BATHE, 1996, COOK, 2001), a consideração de análise via domínios transformados tem-se desenvolvido bastante, pois em algumas situações esta consiste na única alternativa para a correta modelagem dinâmica de problemas tempo-dependentes (THOMSON, 1973, CLOUGH e PENZIEN, 1993, GRUNDMANN e TROMMER, 2001).

Dentre os métodos focados na consideração de domínios transformados destaca-se o baseado na transformada de Fourier, que devido ao seu forte apelo físico, relacionado a interpretação do espectro de frequências resultantes, constitui o mais difundido e utilizado dos métodos (THOMSON, 1973, CLOUGH e PENZIEN, 1993, PAZ, 1997). Além da transformada de Fourier também são considerados, na análise de problemas dinâmicos, o domínio de Laplace, que possibilita a incorporação de condições iniciais quaisquer (WIDDER, 1941, PAPOULIS, 1947, HILLMER, 1990), e métodos baseados nas transformadas wavelets que fundamentam-se em uma transformação mista espaço-frequência (BUCHER, 2000, MEYER, 1993, FOUFOULA-GEORGIOU e KUMAR, 1994), etc.

A análise no domínio da frequência é bastante útil em situações para as quais parâmetros físicos dependam da frequência do sistema (WOLF, 1985, CLOUGH e PENZIEN, 1993), como ocorre por exemplo na modelagem de amortecimento do sistema ou em problemas de interação solo-estrutura, onde o solo é considerado como tendo comportamento análogo a um sistema massa-mola-amortecedor cujas propriedades são dependentes da frequência. Devido a esses fatores não é raro que a

análise de problemas físicos em engenharia através do domínio da frequência, visto que esta constitui uma importante ferramenta para engenheiros e outros cientistas envolvidos em análises de sistemas dinâmicos. Além disto, quando se deseja avaliar a solução do problema ao longo de um certo tempo de análise de interesse, resultante da consideração de carregamentos periódicos aplicados a sistemas estruturais, como é o caso, por exemplo, de problemas de dimensionamento de fundação de máquinas ou outros problemas de análise de vibração em estruturas, ocorre que os efeitos de transitoriedade da resposta podem ser desprezados, e esta passa a ter, desta forma, um comportamento estacionário. Uma maneira bastante simples de se proceder à resolução de tais problemas baseia-se na representação das suas variáveis em termos de funções complexas harmônicas no tempo (modelagem não-harmônica). Tal procedimento de análise constitui uma forma eficiente para a resolução de problemas estacionários, uma vez que, procedendo-se assim, um problema tempo-dependente de valor inicial e de contorno é substituído por um problema frequência-dependente de valor de contorno apenas, equivalente ao primeiro.

Em problemas dinâmicos transientes, obtém-se a solução do sistema, via análise no domínio da frequência, aplicando-se a transformada de Fourier (OPPENHEIM e SCHAFER, 1989, PROAKIS e MANOLAKIS, 1996, BRIGHAM, 1974) diretamente na excitação tempo-dependente, procedendo-se em seguida à síntese do espectro de respostas frequência-dependentes via transformada inversa de Fourier. Cuidados especiais, que devem ser tomados ao se trabalhar no domínio da frequência são discutidos em VELETSOS e VENTURA (1985). Diversos trabalhos, tais como WOLF (1985) em problemas de iteração solo-estrutura, CLOUGH e PENZIEN (1993) em sistemas estruturais, HALL (1987) e KINSLER et al. (1982) em problemas acústicos modelados via Método dos Elementos Finitos e BESKOS e MANOLIS (1987), DOMINGUEZ (1993), BREBIA et al. (1984) e BANERJEE (1994) em modelagem de problemas de Engenharia via Método dos Elementos de Contorno, apresentam situações práticas em que análises de sistemas dinâmicos, tanto inerciais quanto de propagação de ondas, no domínio da frequência têm sido bem exploradas.

Devido às vantagens na consideração da análise espectral de problemas dinâmicos, um grande esforço vem sendo direcionado no sentido de tornar a análise mais eficiente, e por isto, mais atrativa aos olhos da comunidade científica. Uma vez que a transformada de Fourier se baseia no princípio da superposição dos efeitos, válido apenas em problemas lineares, alternativamente aos algoritmos baseados no domínio do

tempo (JACOB e EBECKEN, 1994, BATHE, 1996, COOK, 2001, CLOUGH e PENZIEN, 1993), e quando se faz necessário a consideração de propriedades físicas dependentes da frequência, tem-se buscado soluções híbridas tempo-frequência (MATTHEES, 1992, KAWAMOTO, 1993, WOLF, 1985) de forma a possibilitar modelagens não-lineares. Uma das grandes limitações da análise no domínio da frequência, como descrito em THOMSON (1973), CLOUGH e PENZIEN (1993), OPPENHEIM e SCHAFER (1989), consiste na natureza periódica da transformada de Fourier, e conseqüentemente, na dificuldade da consideração de condições iniciais na modelagem dos problemas físicos. Poucos trabalhos, visando à incorporação de condições iniciais em problemas dinâmicos no domínio da frequência, foram até então desenvolvidos, apesar da importância associada a este tópico. Em VENÂNCIO-FILHO e CLARET (1992) é apresentado o conceito de transformada implícita de Fourier (ImFT) que em MANSUR et al. (2000) se aplica a problemas não-lineares. VELETOS e VENTURA (1984) utilizam a função de Green e sua derivada temporal na resolução de problemas em coordenadas modais e SOARES e MANSUR (2003) consideram a transformada de Fourier da função de Green no domínio da frequência em coordenadas modais para a obtenção da função de Green do correspondente problema no domínio do tempo. As técnicas descritas acima, apesar de eficientes e de considerarem a presença de um estado inicial de excitações genérico, aplicam-se a problemas descritos em termos de coordenadas modais, tanto inerciais quanto de propagação de ondas.

Recentemente, em MANSUR et al. (2003a) é desenvolvida uma técnica para consideração de condições iniciais em coordenadas nodais baseada no conceito de pseudo-forças (FERREIRA et al., 2000) e coordenadas generalizadas (BUTKOV, 1988), aplicada a problemas bidimensionais escalares de propagação de ondas com o Método dos Elementos Finitos. A mesma técnica é abordada em MANSUR et al. (2003b) considerando-se a aplicação em problemas unidimensionais e bidimensionais acústicos via Método dos Elementos de Contorno.

O presente trabalho tem por objetivo estender estas idéias à aplicação a problemas transientes de propagação de ondas elásticas bidimensionais e tridimensionais, além de abordar uma nova metodologia para a consideração de condições iniciais em problemas tempo-dependentes, considerando-se algoritmo baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), formulado segundo a técnica de Galerkin dos resíduos ponderados. No capítulo 2 serão apresentadas, de forma resumida, as equações diferenciais parciais que regem o problema de valor inicial e de

contorno, relacionadas ao fenômeno da propagação de ondas em meios elásticos e acústicos. A redução destas equações para o caso de problemas de propagação de ondas em regimes estacionários, ou seja, a eliminação da influência dos tempos iniciais na formulação do problema, também será apresentada. Em seguida apresenta-se a formulação do MEF, baseada no princípio dos resíduos ponderados, particularmente a formulação segundo a técnica de Galerkin.

O capítulo 3 trata da discretização numérica, via Método dos Elementos Finitos, das equações estabelecidas, através da formulação de Galerkin, de problemas dinâmicos acústicos e elásticos em duas e três dimensões, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Serão apresentados procedimentos visando à implementação de elementos triangulares, quadrangulares e prismáticos isoparamétricos lagrangeanos lineares e quadráticos, utilizados na discretização espacial do domínio de definição do problema. A incorporação de condições de contorno essenciais e absorvedoras será brevemente discutida, bem como procedimentos visando a modelagem de domínios que possuam elevado grau de heterogeneidade. O armazenamento das matrizes resultantes da discretização espacial segundo a denominada técnica de armazenamento por elementos será brevemente apresentado, elucidando as vantagens desta técnica na formulação de algoritmos baseados no processamento em paralelo.

As técnicas de resolução dos sistemas matriciais de equilíbrio dinâmico, resultantes da discretização numérica de problemas físicos via MEF, serão discutidas no capítulo 4. Primeiramente apresentam-se os esquemas de avanço no tempo, tanto implícitos quanto explícitos, que consideram amortecimento controlado em sua formulação (HHT e alfa-generalizado), os esquemas básicos de segunda ordem (Diferença Central) e quarta ordem (Runge-Kutta) no tempo, além de um novo esquema de marcha no tempo, desenvolvido recentemente, baseado nos polinômios de Lagrange, de quarta ordem, que se mostra competitivo em relação aos tradicionais: Diferença Central e Runge-Kutta. Em seguida, considerando-se problemas dinâmicos estacionários analisados segundo abordagem no domínio da frequência, será considerado o algoritmo iterativo dos gradientes conjugados, baseado no espaço vetorial de Krylov, a ser utilizado na resolução dos sistemas de equações algébricas, complexos e hermitianos, resultantes da discretização via formulação de Galerkin do MEF.

O capítulo 5 trata da implementação da transformada discreta de Fourier, baseada na decomposição da excitação tempo-dependente em uma série de termos de carregamentos harmônicos complexos. Em seguida apresenta-se o processo de síntese

das respostas complexas relacionadas aos carregamentos harmônicos, via transformada inversa de Fourier. Serão discutidos dois aspectos importantes e essenciais para a correta obtenção da resposta física do sistema via transformada de Fourier, quais sejam, a necessidade de um período estendido de análise e o tratamento do fenômeno de *aliasing*. A incorporação de amortecimento físico no sistema será apresentada neste capítulo. Em seguida, baseado em postulados básicos da mecânica clássica, serão apresentados os procedimentos a serem adotados na consideração de condições iniciais de campos de deslocamentos e/ou velocidades prescritos em problemas dinâmicos analisados via domínios do tempo e da frequência. Será mostrado que esta eficiente e precisa técnica pode ser aplicada para casos gerais, sem restrições quanto ao método numérico, ao número de graus de liberdade e às características geométricas do modelo.

Com o objetivo de validar os diversos algoritmos desenvolvidos neste trabalho, no capítulo 6 serão apresentados exemplos de análise de sistemas dinâmicos nos domínios tanto do tempo quanto da frequência. Em primeiro lugar, será apresentado um problema de fundação de máquina, sobre o qual são discutidos aspectos relacionados à importância das análises de problemas dinâmicos serem efetuadas por meio de algoritmos baseados em formulações tanto frequência quanto tempo-dependentes. Em seguida serão formulados problemas bi e tridimensionais elásticos, com presença de campos de velocidades e/ou deslocamentos iniciais prescritos. As respostas obtidas via análise no domínio da frequência, bem como as obtidas via esquemas de marcha no tempo, serão comparadas às respostas analíticas destes exemplos. Será também considerada a resolução de problemas de propagação de ondas 2D, em modelos geofísicos com alto grau de complexidade e elevado número de graus de liberdade, considerando-se o desenvolvimento de algoritmos em *cluster* de microcomputadores, comparando-se tais respostas às obtidas via Método das Diferenças Finitas(MDF), largamente utilizado na modelagem de problemas geofísicos. Serão abordados modelos geológicos tanto acústicos quanto elásticos, além da análise de performance em *cluster* de PC's via interface PVM (*Parallel Virtual Machine*).

Finalmente, conclusões a respeito da validade e qualidade das respostas obtidas neste trabalho serão apresentadas no capítulo 7, bem como sugestões para futuros desenvolvimentos.

2. EQUAÇÕES BÁSICAS

Neste capítulo são apresentadas as equações básicas do problema elastodinâmico tempo-dependente, em termos de deslocamentos, a partir das quais será obtida a equação diferencial parcial, de valor de contorno e inicial, que governa o campo de deslocamentos de um sólido elástico, homogêneo e isotrópico, denominada equação de Navier. Em seguida será apresentada a correspondente equação diferencial frequência-dependente de valor de contorno apenas, resultante da consideração de problemas físicos cujas excitações sejam harmônicas no tempo. A partir da particularização das equações básicas da elastodinâmica para campos escalares, será obtida a equação diferencial parcial tempo-dependente, denominada equação da onda acústica, que governa o problema de propagação de ondas acústicas em meios não viscosos, heterogêneos, isotrópicos lineares. Em seguida apresenta-se a correspondente equação diferencial acústica no domínio da frequência, denominada equação de Helmholtz.

2.1. Equação da Onda Elástica

Considere um infinitesimal de volume em equilíbrio, pertencente a um corpo tridimensional, definido pela região Ω e pelo contorno Γ e com força de corpo \mathbf{f} , submetido a um estado de carregamento dinâmico, conforme Figura 2.1.

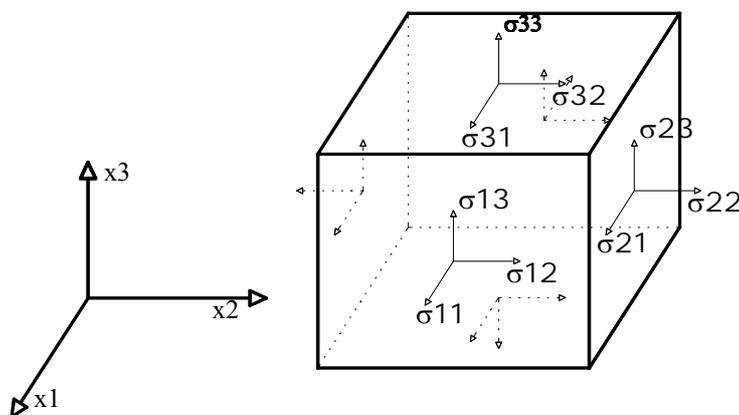


Figura 2.1 - Infinitesimal de volume.

As equações básicas que governam a elastodinâmica linear (ERINGEN e SUHUBI, 1975, TIMOSHENKO e GOODIER, 1980) são as **equações de movimento**

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.1)$$

as relações cinemáticas

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

e a lei constitutiva

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ representa o vetor deslocamento no ponto \mathbf{x} e no tempo t , $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ e $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$ correspondem às componentes dos tensores de tensão e deformação específica, respectivamente em um ponto qualquer do corpo, b_j representa a força de massa unitária e ρ a massa específica. A vírgula após um índice significa derivada espacial e o ponto derivada temporal. λ e μ representam as constantes de Lamé, dadas por

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.4)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.5)$$

onde E representa o módulo de elasticidade do material, G é o módulo de elasticidade transversal e ν o coeficiente de Poisson do meio elástico.

A partir de combinação dos três sistemas de equações dados por (2.1), (2.2) e (2.3) obtém-se a equação diferencial que governa o campo de deslocamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ em um sólido isotrópico, heterogêneo e elástico, para pequenos deslocamentos, denominada equação de Navier, dada por:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla((\lambda + 2G)\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \nabla \times (G\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Omega \quad (2.6)$$

com condições de contorno dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) && \text{em } \Gamma_1 \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) && \text{em } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

e condições iniciais representadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) && \text{em } \Omega \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) &= \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) && \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $n_j(\mathbf{x})$ corresponde à j -ésima componente do vetor unitário normal ao contorno, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, \mathbf{p} o vetor força de superfície e ∇ ao operador vetorial, expresso por

$$\nabla = \frac{\partial(\)}{\partial x_1} \hat{i} + \frac{\partial(\)}{\partial x_2} \hat{j} + \frac{\partial(\)}{\partial x_3} \hat{k} \quad (2.9)$$

Segundo a equação de Navier, dois tipos de ondas propagam em um meio elástico, cujas velocidades de propagação c_1 e c_2 , dadas por

$$c_1 = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} \quad \text{e} \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (2.10)$$

que, a partir de (2.4) e (2.5), também podem ser dadas por

$$c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad \text{e} \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}, \quad (2.11)$$

A Figura 2.2 mostra o comportamento de um corpo sólido sob um estado dinâmico de carregamento. A primeira onda (Figura 2.2a) se propaga com velocidade c_1

e provoca uma compressão das partículas do meio, sendo denominada onda de compressão. Com velocidade $c_2 < c_1$, atua a onda de distorção, ou cisalhante, provocando um movimento de deslizamento entre as partículas do meio, conforme visto na Figura 2.2b. Estas ondas propagam no interior do corpo sólido infinito, e desta forma podem ser classificadas como ondas de corpo ou internas. Quando tais perturbações mecânicas encontram algum obstáculo, como por exemplo, superfícies livres ou heterogeneidades nas propriedades físicas do meio, estas se modificam e passam a ser denominadas ondas convertidas (GRAFF, 1975). Outros tipos de ondas podem surgir em um meio material, e podem ser classificadas conforme apresentado em ROSA FILHO (2002) e transcrito ao APÊNDICE 1.

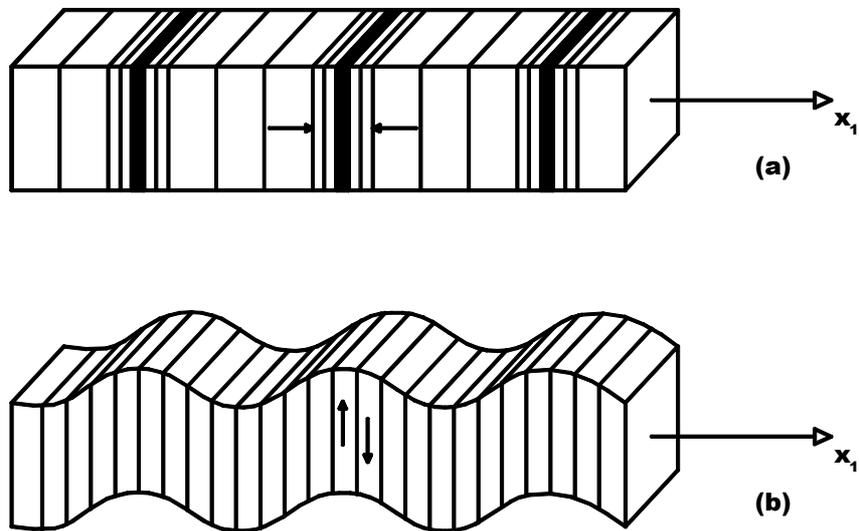


Figura 2.2 - Efeito das ondas de pressão(a) e cisalhante(b).

Considerando um instante de observação satisfatoriamente grande, após os distúrbios iniciais, para se analisar o comportamento da solução da equação (2.6) sob excitações harmônicas, pode-se admitir que o comportamento desta solução e das variáveis de campo do problema em questão sejam harmônicos no tempo (BESKOS e MANOLIS, 1987, DOMINGUEZ, 1993), com uma determinada frequência angular ω_n . Neste caso, diz-se que o problema é do tipo estacionário (*steady-state*).

Deste modo, a análise se torna bastante simplificada, uma vez que a variável tempo pode ser eliminada, ou seja, o problema de valor inicial e de contorno é reduzido a um problema de valor de contorno apenas. O grande problema, neste caso, se deve ao fato de ser impossível dizer, sem o conhecimento prévio da magnitude dos

amortecimentos envolvidos, qual seria o intervalo de tempo satisfatório para se desprezar os efeitos de transitoriedade envolvidos no problema (BANERJEE, 1994).

A análise de um determinado problema físico através do domínio da frequência leva a resultados mais satisfatórios, se comparada a análise no domínio do tempo, nos casos em que parâmetros contidos na equação do movimento sejam dependentes da frequência. Além disto, determinando-se a frequência natural de uma estrutura, a análise no domínio da frequência possibilita um acompanhamento do comportamento da solução do problema físico, de modo a evitar que a frequência do carregamento periódico se aproxime demasiado da frequência natural da estrutura (BESKOS e MANOLIS, 1987).

Sejam então as grandezas físicas envolvidas no problema elastodinâmico representadas de forma harmônica no tempo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t} \quad (2.14)$$

onde $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega)$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega)$ e $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \omega)$ são amplitudes complexas.

Substituindo as equações (2.12), (2.13) e (2.14) em (2.6) e eliminando os termos exponenciais obtém-se a chamada equação reduzida da elastodinâmica, também conhecida como equação de Helmholtz vetorial, dada por:

$$\omega^2 \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) - \nabla((\lambda + 2G)\nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega)) + \nabla \times (G\nabla \times \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{em } \Omega \quad (2.15)$$

com as seguintes condições de contorno frequência-dependentes

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) &= \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \omega) && \text{em } \Gamma_1 \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}, \omega) &= \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{x}, \omega) && \text{em } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

e neste caso, as condições iniciais não têm influência na solução do problema.

2.2. Equação da Onda Acústica

Segundo o teorema de Helmholtz (ERINGEN e SUHUBI, 1975), qualquer campo vetorial suficientemente suave, ou seja, contínuo e duas vezes diferenciável, pode ser decomposto em uma soma do gradiente de um campo escalar Φ e o rotacional de um campo vetorial Ψ , ou seja,

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \nabla\Phi(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.17)$$

onde usualmente adota-se a condição de divergente nulo para o campo rotacional, ou seja, $\nabla \cdot \Psi(\mathbf{x}, t) = 0$. Os campos vetoriais $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$ são, respectivamente, denominados campos irrotacional e equivolumétrico.

Assim, escrevendo o campo de deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e de forças $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ em termos de seus gradientes e rotacionais, tem-se

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla d(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \nabla r(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \quad (2.19)$$

Substituindo estas expressões em (2.6) vem

$$\rho \frac{\partial^2 (\nabla d(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{x}, t))}{\partial t^2} - \nabla((\lambda + 2G)\nabla \cdot (\nabla d(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{x}, t))) + \nabla \times (G\nabla \times (\nabla d(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{x}, t))) = \nabla r(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \quad (2.20)$$

De onde:

$$\rho \left[\nabla \left(\frac{\partial^2 d(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \right) + \nabla \times \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \right) \right] - \nabla((\lambda + 2G)\nabla \cdot \nabla d(\mathbf{x}, t)) - \nabla((\lambda + 2G)\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) + \nabla \times (G\nabla \times \nabla d(\mathbf{x}, t)) + \nabla \times (G\nabla \times \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) = \nabla r(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \quad (2.21)$$

Como, para p escalar e \mathbf{q} vetorial, valem as igualdades:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{q}) = 0 \text{ e } \nabla \times (\nabla p) = 0 \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 \mathbf{q} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{q}) \text{ (Identidade para Laplaciano de um campo vetorial)} \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \text{ (Condição de divergente nulo adotada para o potencial de Lamé)} \quad (2.24)$$

De (2.21) obtém-se

$$\begin{aligned} \rho \left[\nabla \left(\frac{\partial^2 d(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \right) + \nabla \times \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \right) \right] - \nabla ((\lambda + 2G) \nabla \cdot \nabla d(\mathbf{x}, t)) \\ + \nabla \times (G \nabla \times \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) = \nabla r(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Reagrupando vem

$$\begin{aligned} \rho \nabla \left(\frac{\partial^2 d(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \right) + \rho \nabla \times \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \right) = \\ - \nabla \times (G \nabla \times \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)) + \nabla ((\lambda + 2G) \nabla \cdot \nabla d(\mathbf{x}, t) + r(\mathbf{x}, t)) \end{aligned} \quad (2.26)$$

A equação acima será satisfeita identicamente se

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -G \nabla \times \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \quad (2.27)$$

que é denominada equação da onda vetorial, e

$$\rho \frac{\partial^2 d(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 d(\mathbf{x}, t) + r(\mathbf{x}, t) \quad (2.28)$$

conhecida como equação da onda escalar.

A equação da onda escalar descreve uma série de fenômenos físicos relacionados a problemas de engenharia, tais como: vibração de cordas, propagação de onda acústica em fluidos, dentre outros. De forma geral tem-se que a equação escalar para a propagação de ondas acústicas em uma região Ω com contorno $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, representada de forma análoga ao caso elástico, pode ser expressa por

$$\rho \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla \cdot (G \nabla u(\mathbf{x}, t)) = f(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Omega \quad (2.29)$$

com condições de contorno dadas por

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \bar{u}(\mathbf{x}, t) && \text{em } \Gamma_1 \\ p(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \bar{p}(\mathbf{x}, t) && \text{em } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

e condições iniciais representadas por

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \quad (2.31)$$

$$\dot{u}(\mathbf{x}, 0) = \dot{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \quad (2.32)$$

onde $u(\mathbf{x}, t)$ representa a solução do campo escalar e $f(\mathbf{x}, t)$ corresponde a uma função fonte escalar pertencente ao domínio Ω .

Analogamente ao caso elástico, representando $u(\mathbf{x}, t)$ e $f(\mathbf{x}, t)$ de forma harmônica no tempo, obtém-se a chamada equação da onda acústica reduzida, ou equação de Helmholtz, dada por:

$$\rho \omega^2 U(\mathbf{x}, \omega) - \nabla \cdot (G \nabla U(\mathbf{x}, \omega)) = F(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{em } \Omega \quad (2.33)$$

com as seguintes condições de contorno frequência-dependentes

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}, \omega) &= \bar{U}(\mathbf{x}, \omega) && \text{em } \Gamma_1 \\ P(\mathbf{x}, \omega) &= \bar{P}(\mathbf{x}, \omega) && \text{em } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

3. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

Neste capítulo apresenta-se a formulação matricial do MEF baseado na técnica de Galerkin dos resíduos ponderados. Serão descritos os elementos isoparamétricos triangulares, quadrangulares e prismáticos lagrangeanos lineares e quadráticos considerados na discretização do problema físico. Serão observados aspectos importantes na derivação do sistema matricial, tais como, a correta introdução de condições de contorno essenciais e não-reflexivas, o tratamento adequado na modelagem de problemas físicos contendo elevado grau de heterogeneidade e, por fim, apresenta-se o esquema de armazenamento por elementos das matrizes resultantes da discretização via MEF, destacando-se as vantagens desta técnica em algoritmos tanto seriais quanto considerando-se processamento em *cluster* de microcomputadores.

3.1. Sistema Matricial de Equilíbrio

3.1.1. Formulação Tempo-dependente

No Método dos Elementos Finitos, o domínio de definição do problema físico é discretizado por uma série de elementos finitos interconectados entre si por seus nós e faces, conforme Figura 3.1.

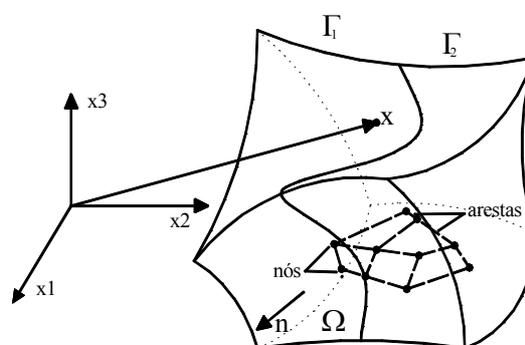


Figura 3.1 - Discretização do domínio físico.

Considerando um elemento genérico m , a variável de campo \mathbf{u} pode ser aproximada a partir de seus valores nodais por

$$\mathbf{u}^m = \sum_{i=1}^k h_i^m u_i^m = \mathbf{H}^m \mathbf{U}^m \quad (3.1)$$

onde u_i^m representa o valor da variável \mathbf{u} no i -ésimo nó do elemento m , h_i^m são as funções polinomiais de aproximação para o elemento m , e k o número de valores nodais deste elemento. No caso de problemas escalares k é igual ao número de nós do elemento e para meios elásticos

$$k = \text{número de nós} \times ndf \quad (3.2)$$

com ndf representando o número de graus de liberdade por nó. $ndf=1, 2$ ou 3 para problemas elásticos unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais, respectivamente.

Uma vez que os deslocamentos nodais sejam conhecidos dentro de um elemento, as deformações podem ser expressas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \mathbf{B}^m \mathbf{U}^m \quad (3.3)$$

o que significa dizer que os valores nodais de deslocamento são suficientes para a obtenção das respectivas deformações no elemento. A matriz \mathbf{B} pode ser obtida a partir da matriz \mathbf{H} , derivando suas linhas e efetuando combinações lineares das mesmas. Para maiores detalhes do processo analítico de obtenção de \mathbf{B} , ver BATHE (1996).

Considerando um comportamento linear elástico do material, com $\boldsymbol{\varepsilon}_0^m$ e $\boldsymbol{\sigma}_0^m$ representando as deformações específicas e tensões iniciais, as relações entre tensões e deformações são dadas por

$$\boldsymbol{\sigma}^m = \mathbf{D}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m - \boldsymbol{\varepsilon}_0^m) + \boldsymbol{\sigma}_0^m \quad (3.4)$$

sendo \mathbf{D} denominada matriz constitutiva do material. Considerando material com comportamento ortotrópico, \mathbf{D} é definida, no caso de problemas bidimensionais, por

$$\mathbf{D} = \frac{E_2}{1 - n\nu_{12}^2} \begin{bmatrix} n & n\nu_{12} & 0 \\ n\nu_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1 - n\nu_{12}^2) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

para estado plano de tensão ou

$$\mathbf{D} = \frac{E_2}{(1 + \nu_{12})(1 - \nu_{12} - 2n\nu_{21}^2)} \begin{bmatrix} n(1 - n\nu_{21}^2) & n\nu_{21}(1 + \nu_{12}) & 0 \\ n\nu_{21}(1 + \nu_{12}) & (1 - \nu_{12}^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1 + \nu_{12})(1 - \nu_{12} - 2n\nu_{21}^2) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

para estado plano de deformação, com

$$n = \frac{E_1}{E_2} \text{ e } m = \frac{G_{12}}{E_2} \quad (3.7)$$

$$G_{12} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{12})} \quad (3.8)$$

e restrições dadas por

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \text{ e } \frac{1}{G_{12}} = \frac{1 + \nu_{21}}{E_1} + \frac{1 + \nu_{12}}{E_2} \quad (3.9)$$

Para problemas acústicos \mathbf{D} é representada por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Para problemas tridimensionais elásticos \mathbf{D} pode ser expressa por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde

$$E_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 A} \quad (3.12)$$

$$E_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 A} \quad (3.13)$$

$$E_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 A} \quad (3.14)$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 A} \quad (3.15)$$

$$E_{13} = E_{31} = \frac{\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 A} \quad (3.16)$$

$$E_{23} = E_{32} = \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 A} \quad (3.17)$$

$$E_{44} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{23})}; \quad E_{55} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{31})}; \quad E_{66} = \frac{E_3}{2(1 + \nu_{12})}; \quad (3.18)$$

$$A = \frac{1}{E_1 E_2 E_3} (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}) \quad (3.19)$$

Obedecendo as seguintes condições e restrições

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{12}}{E_1} &= \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}, \\ (\nu_{21})^2 &< \frac{E_2}{E_1}; \quad (\nu_{12})^2 < \frac{E_1}{E_2}; \\ (\nu_{32})^2 &< \frac{E_3}{E_2}; \quad (\nu_{23})^2 < \frac{E_2}{E_3}; \\ (\nu_{13})^2 &< \frac{E_1}{E_3}; \quad (\nu_{31})^2 < \frac{E_3}{E_1}; \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para problemas tridimensionais acústicos, tem-se

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{E_3}{\rho_3}} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Nas expressões apresentadas E_1 , E_2 , E_3 , ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , ν_{12} , ν_{32} , ν_{13} , ν_{21} , ν_{23} e ν_{31} representam os módulos de elasticidade longitudinal, coeficientes de Poisson e massas específicas das direções ortogonais, respectivamente.

Admitindo-se que as funções de peso \mathbf{w} , que minimizam o resíduo segundo a técnica de Galerkin dos resíduos ponderados, são idênticas às funções de interpolação dos valores nodais dos elementos (\mathbf{H}), obtém-se o sistema matricial de equilíbrio dinâmico, dado por

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega^m} \rho (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{H}^m) d\Omega^m \right) \ddot{\mathbf{U}}^m + \left(\int_{\Omega^m} (\mathbf{B}^{m,T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m) d\Omega^m \right) \mathbf{U}^m \\ & = \int_{\Omega^m} (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{F}_b^m) d\Omega^m + \int_{\Gamma^m} (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{F}_s^m) d\Gamma^m + \int_{\Omega^m} (\mathbf{B}^{m,T} \mathbf{D}^m \boldsymbol{\varepsilon}_0^m) d\Omega^m - \int_{\Omega^m} (\mathbf{B}^{m,T} \boldsymbol{\sigma}_0^m) d\Omega^m \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde \mathbf{F}_b^m e \mathbf{F}_s^m são os valores nodais das forças de corpo e de superfície no elemento m . De uma maneira geral, considerando-se cargas concentradas e admitindo-se forças de amortecimento atuando em Ω , o sistema linear de equações diferenciais, para todo o domínio, pode ser generalizado por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (3.23)$$

com

$$\mathbf{M} = \sum_{m=1}^N \mathbf{M}^m = \sum_{m=1}^N \int_{\Omega^m} \rho (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{H}^m) d\Omega^m \quad (3.24)$$

$$\mathbf{C} = \sum_{m=1}^N \mathbf{C}^m = \sum_{m=1}^N \int_{\Omega^m} \phi (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{H}^m) d\Omega^m \quad (3.25)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^N \mathbf{K}^m = \sum_{m=1}^N \int_{\Omega^m} (\mathbf{B}^{m,T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m) d\Omega^m \quad (3.26)$$

$$\mathbf{R} = \sum_{m=1}^N \mathbf{R}^m = \sum_{m=1}^N \int_{\Omega^m} (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{F}_b^m) d\Omega^m + \sum_{m=1}^{N_s} \int_{\Gamma^m} (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{F}_s^m) d\Gamma^m + \sum_{m=1}^N \int_{\Omega^m} (\mathbf{B}^{m,T} \mathbf{D}^m \boldsymbol{\varepsilon}_0^m) d\Omega^m - \sum_{m=1}^N \int_{\Omega^m} (\mathbf{B}^{m,T} \boldsymbol{\sigma}_0^m) d\Omega^m + \sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{F}_k^m \quad (3.27)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} representam as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez elástica, montadas sobre o número total de elementos N . ϕ corresponde à lei de amortecimento do material, N_s ao número de elementos superficiais e N_k ao número de forças nodais \mathbf{F}_k^m aplicadas.

Muitas vezes torna-se complicado a identificação de uma lei de amortecimento que represente corretamente o fenômeno físico analisado. Existem, no entanto, diretrizes para a determinação desta lei quando a análise é feita no domínio da frequência. No domínio do tempo, conforme visto em CLOUGH e PENZIEN (1993) (quando a magnitude do amortecimento considerado é relativamente baixa), tais leis são representadas pelo denominado amortecimento proporcional, proposto por Rayleigh, que considera

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K} \quad (3.28)$$

onde a e b são denominados coeficientes de amortecimento proporcional.

3.1.2. *Formulação Frequência-dependente*

Em problemas estacionários, o sistema matricial de equilíbrio dinâmico, pode ser simplificado conforme apresentado no capítulo anterior, resultando em

$$(\omega^2 \mathbf{M} - i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{U}^\omega = \mathbf{R}^\omega \quad (3.29)$$

onde ω corresponde à frequência de excitação do correspondente carregamento harmônico e \mathbf{U}^ω e \mathbf{R}^ω correspondem às amplitudes complexas de deslocamento e força, respectivamente.

De uma maneira geral, o sistema de equações (3.29) é constituído por coeficientes complexos. Desta forma, tanto as operações efetuadas nestes sistemas quanto o espaço requerido para o seu armazenamento são elevados, se comparados aos sistemas dinâmicos tempo-dependentes. Observe-se no entanto, que em análises efetuadas sem amortecimento viscoso ou estrutural ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$), a matriz dos coeficientes do sistema de equilíbrio $\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}$ é constituída somente por componentes reais, e neste caso, menor espaço de armazenamento e custo computacional relacionado a operações sobre os coeficientes matriciais serão necessários.

3.1.3. Critérios de Convergência

Na consideração da solução aproximada do problema físico real pelo Método dos Elementos Finitos, diferentes possibilidades de erros afetam a precisão e a confiabilidade do método, conforme listado na Figura 3.2 (BATHE, 1996).

Como as funções polinomiais que aproximam o problema físico contínuo não conseguem, de uma maneira geral, chegar à solução exata, independentemente do grau de refinamento de tais funções, alguns critérios devem ser observados para garantir que o conjunto das soluções de um problema particular, obtidas considerando-se um aumento no grau de refinamento do modelo discretizado e desconsiderando os erros descritos na Figura 3.2, aproximem-se cada vez mais da solução exata deste problema, o que equivale a admitir que tais soluções converjam para a solução exata quando o número de elementos que representam o contínuo tende para o infinito. Tais critérios são descritos a seguir (veja ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1989, para maiores detalhes):

CRITÉRIO 1: As funções de forma devem ser tais que não ocorram deformações em um determinado elemento quando os deslocamentos nodais são causados por movimento de corpo rígido;

CRITÉRIO 2: As funções de forma devem promover deslocamentos nodais compatíveis com um campo de deformação constante;

CRITÉRIO 3: As funções de forma devem ser escolhidas de forma que as deformações entre elementos adjacentes sejam finitas;

Estes critérios de convergência asseguram que quando o tamanho característico do elemento tende a zero, a solução obtida tende à solução exata do problema, ou seja,

$$\mathbf{u}^l \rightarrow \mathbf{u} \text{ quando } l \rightarrow 0$$

com \mathbf{u} e \mathbf{u}^l correspondendo, respectivamente, à solução real e à solução numérica proveniente da discretização com elementos de comprimento característico l . Em alguns casos particulares, em que a solução exata do problema seja representada por funções polinomiais, esta pode ser obtida para um valor relativamente grande de l , desde que as funções polinomiais de aproximação possam representar a solução exata. A razão de convergência das soluções aproximadas pode ser obtida considerando-se expansão de \mathbf{u} em série de Taylor (HUGHES, 2000). Assim, pode-se escrever

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_k + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x} \right)_k (x - x_k) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial y} \right)_k (y - y_k) + \dots \quad (3.30)$$

Discretização ⇒	Uso de pontos nodais na representação do sistema contínuo; Aproximação da geometria;
Integração Espacial ⇒	Interpolação de variáveis de campo e geometria; Uso de integração numérica na construção do sistema matricial;
Relações Constitutivas ⇒	Consideração de comportamentos simplificados dos meios físicos complexos;
Integração Temporal ⇒	Aproximação das equações temporais; Representação inadequada de altos modos de excitação da estrutura;
Solução dos Sistemas Lineares ⇒	Avaliação do critério de parada em <i>solvers</i> iterativos; Obtenção de respostas imprecisas de sistemas mal condicionados, via <i>solvers</i> diretos;
Erros Numéricos ⇒	Erros de arredondamento e de precisão nas operações e erros acumulativos;

Figura 3.2 - Erros originados na solução via MEF.

Como x e y são da ordem de magnitude de l , se uma expansão de grau p é considerada em determinado elemento, o erro na obtenção dos deslocamentos será da ordem de $O(l^{p+1})$, enquanto que para as tensões, que envolvem obtenção das deformações, e conseqüentemente, derivadas dos deslocamentos, a razão de convergência será $O(l^p)$. Da mesma forma, na obtenção da energia de deformação, que corresponde ao quadrado das tensões, o erro será da ordem de $O(l^{2p})$, e assim por diante.

3.1.4. Funções de Forma e Integração Numérica

A escolha adequada de funções de aproximação das variáveis de campo consiste numa das mais importantes etapas do Método dos Elementos Finitos. Tais funções devem obedecer aos critérios de convergência descritos anteriormente para que a convergência nas aproximações da solução exata do problema seja possível. Para que isso ocorra tais funções deverão

ser suaves no interior do elemento e contínuas em seu contorno;

ser completas.

A primeira condição garante que as primeiras derivadas das funções de forma possuam, na pior das hipóteses, um salto finito entre as interfaces dos elementos (Figura 3.3). Uma vez que as expressões integrais do problema de propagação de ondas, obtidas segundo a técnica dos resíduos ponderados, envolvem apenas derivadas primeiras das funções de forma (daí o nome formulação fraca do MEF), fica garantida a obtenção de valores bem definidos quando da integração de tais expressões. Esta condição equivale a dizer que as funções de forma possuem continuidade C^0 .

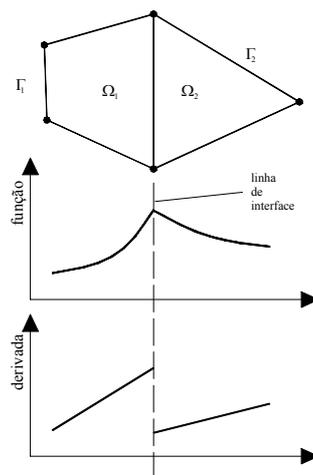


Figura 3.3 - Condição de continuidade C^0 .

A segunda condição estabelece que as funções de forma deverão ser capazes de representar, de forma correta, uma função polinomial qualquer, compatível com o número de graus de liberdade do elemento. Assim, ao se analisar um problema via MEF, aumentando-se o grau de refinamento da malha, no interior do elemento a solução passa a ser representada por valores constantes. Para que esta representação seja satisfeita, as funções de forma deverão conter todos os termos constantes e monomiais. Desta forma a razão de convergência de uma análise via MEF cresce exponencialmente com a ordem dos polinômios adotados na construção dos elementos.

Assim, deseja-se obter funções polinomiais com a maior ordem possível, dentro do número de graus de liberdade do elemento. Um aumento no número de graus de liberdade, ou seja, na complexidade ou ordem do elemento, aumenta o grau do polinômio, por outro lado, aumenta a complexidade das funções de forma. Deste modo, a escolha de elementos de ordem baixa (lineares) ou alta (quadráticos, quárticos) depende do tipo de análise a ser efetuada.

Alternativamente aos elementos finitos lagrangeanos, podem também ser gerados, de forma sistemática, elementos da família serendipity (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1989). Apesar de tais elementos englobarem polinômios de ordem elevadas considerando-se poucos pontos nodais de interpolação nos elementos, tais polinomiais são incompletas se comparadas às polinomiais de Lagrange, conforme visto na Figura 3.4, extraída de ZIENKIEWICZ e TAYLOR (1989). Neste trabalho as funções de forma utilizadas são constituídas de expansões polinomiais de Lagrange e sempre atendem a todos os critérios de convergência aqui apresentados. Foram adotados elementos ditos isoparamétricos, ou seja, nos quais as funções de forma adotadas na aproximação das variáveis de campo e geometria são as mesmas.

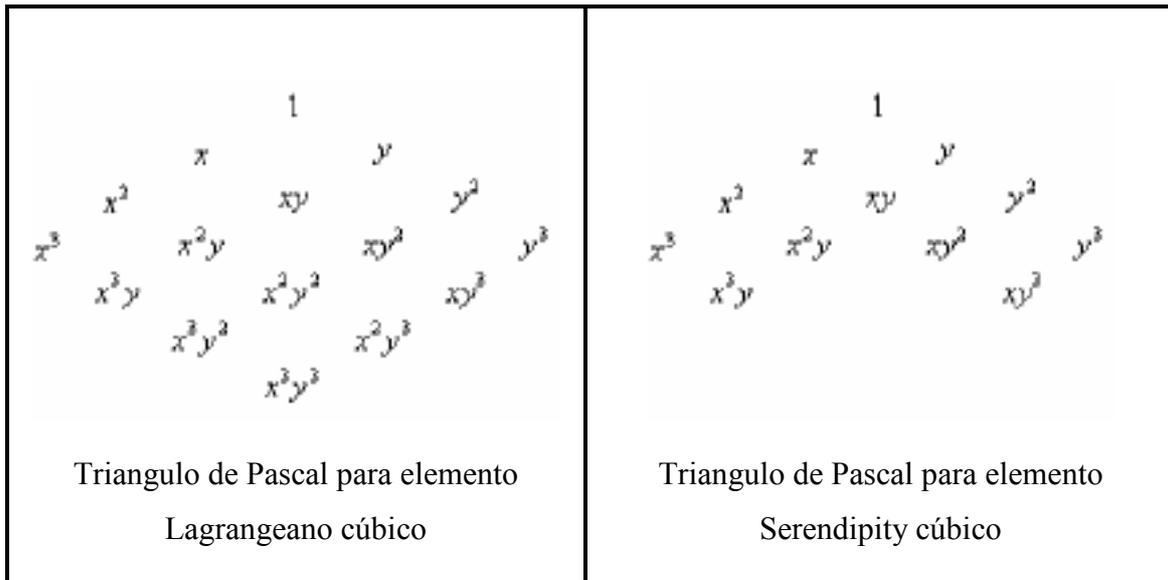


Figura 3.4 - Termos polinomiais presentes nas funções de forma: Triângulo de Pascal.

• *Elementos Isoparamétricos Quadrangulares*

Elementos finitos isoparamétricos podem ser gerados a partir da consideração de funções de forma polinomiais de Lagrange, de ordem n , definidas por

$$L_k^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \cdots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \cdots (\xi_k - \xi_n)} \quad (3.31)$$

com $L_k^n(\xi_k) = 1$ em ξ_k e $L_k^n(\xi_j) = 0, \{j = 0, n \forall j \neq k\}$.

Assim, na construção de elementos finitos unidimensionais, suas funções de forma $\mathbf{H}(\xi)^n$, de ordem n , correspondem aos polinômios de Lagrange dados por (3.31), ou seja,

$$\mathbf{H}(\xi)^n = \begin{bmatrix} H(\xi)_0^n \\ H(\xi)_1^n \\ \vdots \\ H(\xi)_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0^n(\xi) \\ L_1^n(\xi) \\ \vdots \\ L_n^n(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Para elementos bidimensionais as funções de forma $\mathbf{H}(\xi, \mu)^{nm}$, de ordem $n \times m$, serão dadas pelo produto de dois polinômios unidimensionais de ordem n e m respectivamente, ou seja,

$$\mathbf{H}(\xi, \mu)^{nm} = \begin{bmatrix} H(\xi, \mu)_{00}^{nm} \\ H(\xi, \mu)_{01}^{nm} \\ \vdots \\ H(\xi, \mu)_{nm}^{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0^n(\xi)L_0^m(\mu) \\ L_0^n(\xi)L_1^m(\mu) \\ \vdots \\ L_n^n(\xi)L_m^m(\mu) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

No caso de elementos tridimensionais de ordem $n \times m \times k$, as funções de formas serão dadas por

$$\mathbf{H}(\xi, \mu, \varphi)^{nmk} = \begin{bmatrix} H(\xi, \mu, \varphi)_{000}^{nmk} \\ H(\xi, \mu, \varphi)_{001}^{nmk} \\ \vdots \\ H(\xi, \mu, \varphi)_{nmk}^{nmk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0^n(\xi)L_0^m(\mu)L_0^k(\varphi) \\ L_0^n(\xi)L_0^m(\mu)L_1^k(\varphi) \\ \vdots \\ L_n^n(\xi)L_m^m(\mu)L_k^k(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

• *Elementos Isoparamétricos Triangulares*

As funções de forma para elementos tetraédricos podem ser obtidas considerando-se as coordenadas de volume V_i , dadas por

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

com

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

logo

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (\xi + \eta + \varphi) \\ \xi \\ \eta \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Assim, para um elemento tridimensional de ordem $n \times m \times k$, as funções de forma ficam definidas por (HUGHES, 2000)

$$\mathbf{H}(\xi, \mu, \varphi)^{nmk} = \begin{bmatrix} H(\xi, \mu, \varphi)_{l11}^{nmk} \\ H(\xi, \mu, \varphi)_{l12}^{nmk} \\ \vdots \\ H(\xi, \mu, \varphi)_{nmk}^{nmk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(V_1)T_1(V_2)T_1(V_3)T_1(V_4) \\ \vdots \\ T_i(V_1)T_j(V_2)T_k(V_3)T_l(V_4) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

com i, j, k e l correspondendo aos índices nodais e

$$T_i(z) = \begin{cases} L_i^{i-1} \left(\frac{2z}{z_i - 1} \right) & , i \neq 1 \\ 1 & , i = 1 \end{cases} \quad (3.39)$$

• Mapeamento em Coordenadas Naturais

A obtenção do sistema matricial de equilíbrio dinâmico envolve o cálculo de integrais sobre o domínio dos elementos finitos que discretizam o modelo numérico. Visando a obtenção numérica de tais integrais, estes elementos são mapeados em um sistema de coordenadas espaciais, denominado sistema de coordenadas naturais. Neste novo sistema de coordenadas, o elemento, de forma distorcida no espaço real, passa a ter forma regular e domínio fixo, conforme Figura 3.5. Se o operador de mapeamento pode ser obtido, então as funções de forma podem ser expressas em coordenadas naturais e as integrais podem ser obtidas utilizando-se técnicas numéricas adequadas.

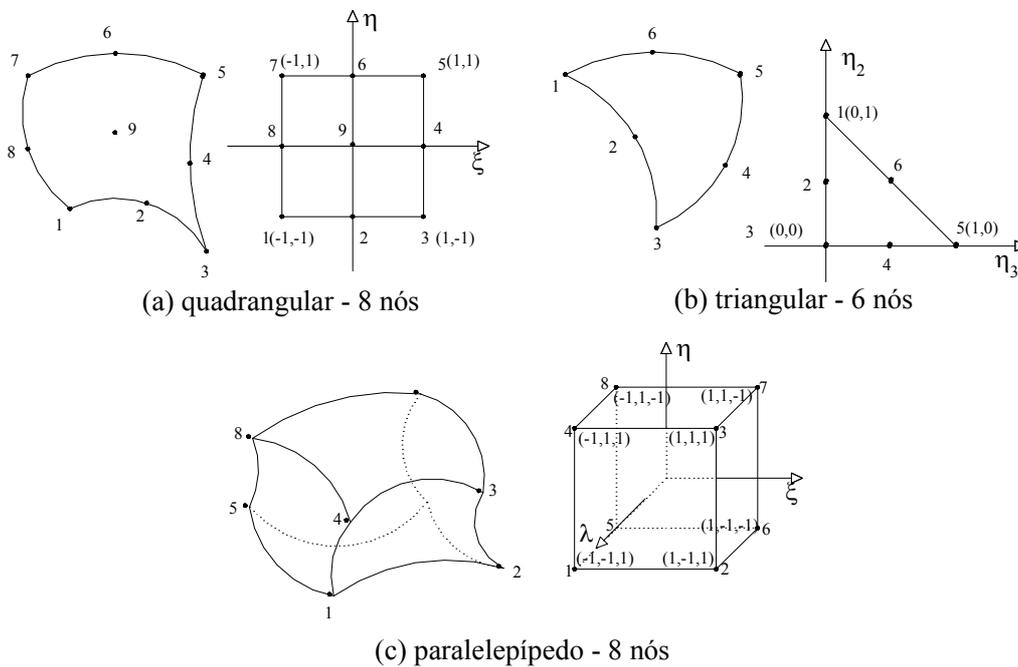


Figura 3.5 - Mapeamento em coordenadas naturais.

A maneira mais adequada de se considerarem as transformações de coordenadas consiste na utilização das funções de forma estabelecidas anteriormente. Assim, escrevendo-se as variáveis geométricas em função de seus $n \times m \times k$ valores nodais (generalizando para o caso tridimensional) e considerando-se funções de forma dadas em termos das variáveis naturais, vem

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}(\xi, \mu, \varphi)^{nmk} \widehat{\mathbf{x}}^{nmk} = \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^k H(\xi, \mu, \varphi)_{ijl}^{nmk} \widehat{x}_{ijl}^{nmk} \right] \quad (3.40)$$

Para a obtenção dos coeficientes matriciais de equilíbrio através da avaliação das integrações resultantes, faz-se necessário representar as derivadas das funções de forma expressas em termos das variáveis globais por correspondentes derivadas em relação às variáveis locais. Além disto, os elementos de volume ou superfície sobre os quais tais integrais serão efetuadas, precisam, da mesma forma, ser expressos em coordenadas naturais, com mudanças apropriadas nos limites de integração. Considere-se, então, um sistema global de coordenadas $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ e o correspondente natural $\xi = \{\xi, \mu, \varphi\}$. Considerando-se a regra da cadeia, tem-se

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \xi} = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (3.41)$$

Generalizando-se para as outras duas direções vem

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \eta} \\ \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde \mathbf{J} é conhecido como matriz jacobiana da transformação. Substituindo (3.40) na expressão da matriz jacobiana vem

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial H_i(\xi)}{\partial \xi} \hat{x}_i & \sum \frac{\partial H_i(\xi)}{\partial \xi} \hat{y}_i & \sum \frac{\partial H_i(\xi)}{\partial \xi} \hat{z}_i \\ \sum \frac{\partial H_i(\xi)}{\partial \eta} \hat{x}_i & \sum \frac{\partial H_i(\xi)}{\partial \eta} \hat{y}_i & \sum \frac{\partial H_i(\xi)}{\partial \eta} \hat{z}_i \\ \sum \frac{\partial H_i(\xi)}{\partial \varphi} \hat{x}_i & \sum \frac{\partial H_i(\xi)}{\partial \varphi} \hat{y}_i & \sum \frac{\partial H_i(\xi)}{\partial \varphi} \hat{z}_i \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

A transformação dos elementos de volume e de superfície, de coordenadas globais para locais (veja ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1989, para maiores detalhes), é dada por

$$dV = dx dy dz = |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\varphi \quad (3.44)$$

para infinitesimal de volume e

$$dS = dx dy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.45)$$

para infinitesimal de superfície.

Desta forma, as equações (3.23) a (3.29), expressas genericamente por

$$\int \int \int_{x y z} \mathbf{h}(x,y,z) dx dy dz + \int_S \mathbf{d}(x,y,z) dS \quad (3.46)$$

podem ser escritas em função das coordenadas naturais da seguinte forma

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{f}(\xi, \eta, \varphi) |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\varphi + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{g}(\xi, \eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.47)$$

Assim, utilizando-se integração com pontos de Gauss padrão, vem

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{f}(\xi, \eta, \varphi) |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\varphi + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{g}(\xi, \eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{npg_i} \sum_{j=1}^{npg_j} \sum_{k=1}^{npg_k} w_i w_j w_k \mathbf{z}(\psi_i, \psi_j, \psi_k) + \sum_{i=1}^{npg_i} \sum_{j=1}^{npg_j} w_i w_j \mathbf{y}(\psi_i, \psi_j) \quad (3.48)$$

onde npg_l corresponde ao número de pontos de Gauss na direção de integração l e w_l e ψ_l representam os pesos e pontos de Gauss respectivamente.

A integração numérica dos coeficientes do sistema matricial de equilíbrio, considerando domínios tetraédricos, pode ser representada de forma genérica por

$$\int_0^1 \int_0^{1-V_1-V_2} \int_0^{1-V_1-V_2-V_3} \mathbf{f}(V_1, V_2, V_3, V_4) dV_4 dV_3 dV_2 dV_1 + \int_0^1 \int_0^{1-V_1} \mathbf{g}(V_1, V_2, V_3) dV_3 dV_2 dV_1 \quad (3.49)$$

Adotam-se, na integração numérica de domínios tetraédricos, transformações de coordenadas, mapeando-se o domínio tetraédrico em retangular, e desta forma, possibilitando a utilização da integração segundo o esquema padrão de Gauss. Para maiores detalhes de tal procedimento, veja TELLES (1986).

• *Ordem de Integração Apropriada*

A escolha da ordem de integração adequada a ser adotada na avaliação de expressões integrais constitui um fator importante na formulação via MEF. Caso o número de pontos de integração seja pequeno a integração será pouco precisa, por outro lado, se uma ordem além da necessária à integração for adotada, implica em um alto custo computacional na avaliação dos coeficientes das matrizes. Em geral, a escolha da ordem apropriada de integração depende das expressões envolvidas na avaliação. A Figura 3.6, extraída de BATHE (1996), apresenta a ordem de integração adequada para elementos quadrangulares em problemas envolvendo propagação de ondas elásticas. Tais ordens de integração foram adotadas neste trabalho.

3.2. Condições de Contorno Essenciais

O sistema de equações (3.23), pode ser resolvido quando são adicionadas condições de contorno, tais como deslocamentos prescritos, condições de contorno naturais e não-reflexivas. Quando deslocamentos prescritos são considerados no sistema, este pode ser resolvido adicionando-se as contribuições prescritas no vetor de termos independentes (técnica de “zero e um”). Seja, por exemplo, o sistema dado por (3.50), com o deslocamento u_2 prescrito por \hat{u}_2 . Assim, considerando-se o sistema

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

ao se eliminar as linhas e colunas correspondentes ao grau de liberdade prescrito e computar-se no vetor de termos independentes as contribuições das colunas eliminadas, (3.50) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ k_{n1} & 0 & k_{n3} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - \hat{u}_2 k_{12} \\ \hat{u}_2 \\ b_3 - \hat{u}_2 k_{32} \\ \vdots \\ b_n - \hat{u}_2 k_{n2} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

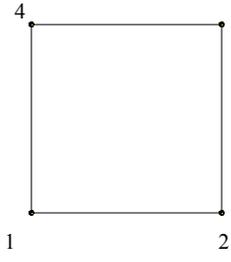
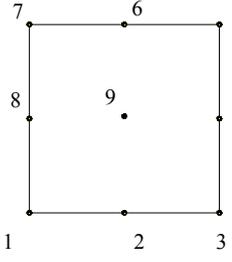
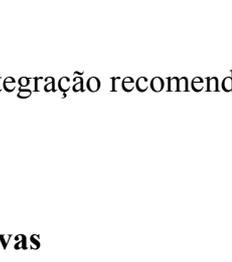
	<p>linear não distorcido</p> <p>ordem 2x2</p>		<p>quadrático não distorcido</p> <p>ordem 3x3</p>
	<p>linear distorcido</p> <p>ordem 2x2</p>		<p>quadrático distorcido</p> <p>ordem 3x3</p>

Figura 3.6 - Ordem de integração recomendada

3.3. Condições de Contorno Não-reflexivas

A simulação de domínios infinitos (ver GIVOLI, 2002) é de fundamental importância na análise de problemas de propagação de ondas, uma vez que, na modelagem destes problemas, reflexões oriundas dos contornos computacionais do modelo finito afetam consideravelmente a solução obtida. Desta forma, caso não sejam implementadas condições de contorno não reflexiva (NRBC), a análise torna-se possível desde que o modelo adotado seja grande o suficiente para evitar que ondas refletidas no contorno atinjam a região onde se deseja observar a solução do problema, em um determinado intervalo de tempo. Esta modelagem torna-se inviável em problemas geofísicos reais, pois despense um alto custo computacional. A introdução de NRBC através da decomposição da equação da onda escalar (BAYSAL et al., 1984 para ondas acústicas e HIGDON, 1991 para propagação de ondas elásticas) pode ser incluída na formulação via MEF considerando o termo

$$\int_{\Gamma(\mathbf{x})_{\beta}} \frac{\cos(\alpha)}{c} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\Gamma(\mathbf{x})_{\beta} \quad (3.52)$$

com Γ_β correspondendo à parte do contorno sob condição de contorno não-reflexiva, c à velocidade de propagação da onda acústica e α ao ângulo de incidência. Após a discretização com elementos finitos, e considerando-se,

$$\frac{\partial \mathbf{u}^t}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t}^{m,T} - \mathbf{u}_t^{m,T}}{\Delta t} \quad (3.53)$$

(3.52) pode ser adicionado ao sistema matricial como condição de contorno natural acrescentando-se o termo

$$\sum_{m=1}^N \int_{\Gamma^m} \frac{\cos(\alpha)}{c\Delta t} \mathbf{H}^{m,T} (\mathbf{u}_{t+\Delta t}^{m,T} - \mathbf{u}_t^{m,T}) d\Gamma^m \quad (3.54)$$

ao vetor global de termos independentes. No caso de ondas elásticas, observa-se que para ondas planas incidindo na direção normal ao contorno em $x=0$, o deslocamento na direção x é afetado pelas ondas de compressão e o deslocamento normal a x pelas ondas cisalhantes. Pode ser considerado, neste caso, na utilização simplificada de contornos não-reflexivos o operador

$$\left(\cos(\alpha_p) \frac{\partial}{\partial t} - c_p \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\cos(\alpha_c) \frac{\partial}{\partial t} - c_c \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (3.55)$$

onde os índices p e s se referem às ondas de pressão e cisalhante.

3.4. Integração Espacial em meios Heterogêneos

Em problemas físicos envolvendo materiais cujas propriedades físicas variam ponto a ponto dentro do elemento, como no caso de modelos geológicos em levantamentos geofísicos, a aproximação por elementos com propriedades constantes (Figura 3.7a) pode dar origem a contornos artificiais, que em alguns casos, podem interferir de forma significativa nas respostas obtidas. Assim, a interpolação das propriedades físicas dentro dos elementos (Figura 3.7b) torna-se importante, apesar do

aumento no custo computacional para sua obtenção (este custo computacional é pequeno, se comparado ao tempo total de análise).

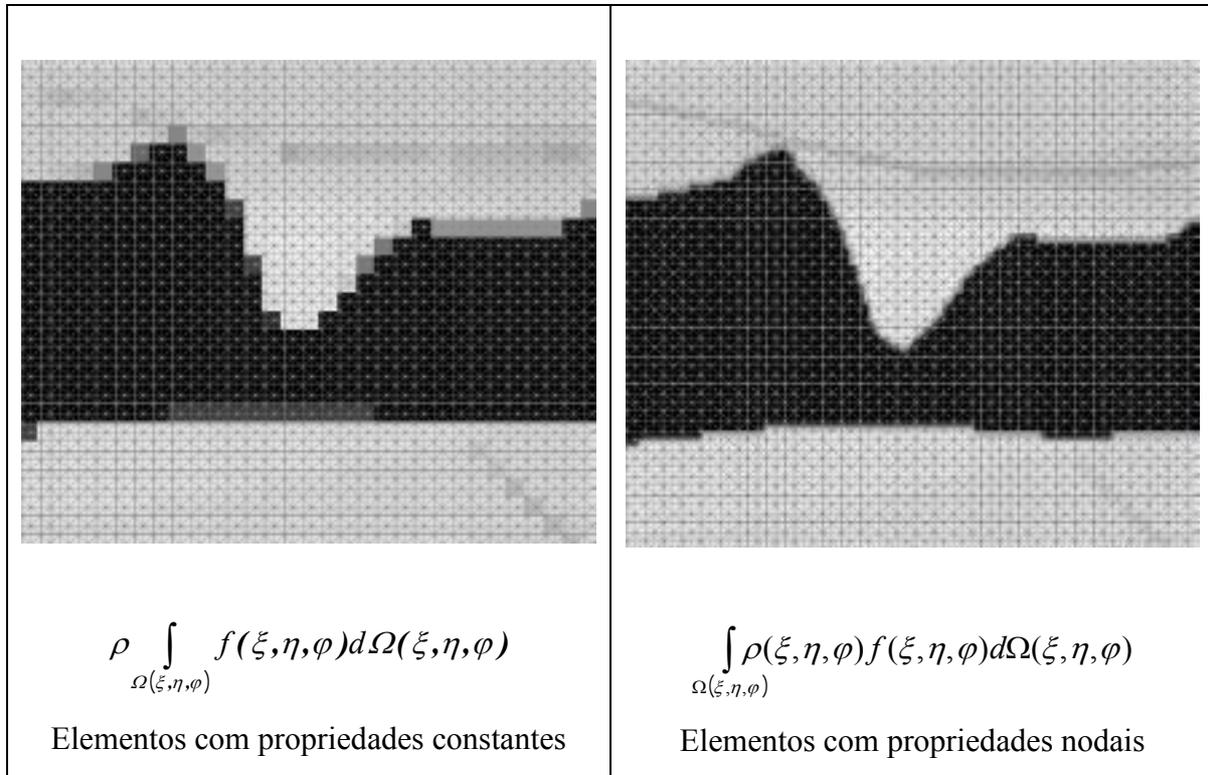


Figura 3.7 - Interpolação das propriedades físicas

3.5. Esquema de Armazenamento de Matrizes

Para os problemas aqui analisados as matrizes geradas no MEF são simétricas e possuem grande esparsidade, logo, na implementação numérica do método, a montagem das matrizes globais deve ser efetuada de forma a explorar tanto a simetria quanto sua esparsidade. A importância da otimização no armazenamento das matrizes ganha mais destaque em problemas geofísicos, onde os sistemas resultantes, e, conseqüentemente, as matrizes possuem elevado número de graus de liberdade. Assim, sem a adoção de técnicas de armazenamento eficientes, as análises, mesmo em máquinas de grande porte ou *cluster* de microcomputadores, se tornariam proibitivas, e não raro, impossíveis de serem efetuadas, devido à elevada demanda por recursos computacionais proveniente principalmente do armazenamento das matrizes globais.

A técnica mais conhecida de armazenamento das matrizes originadas no MEF, denominada *skyline*, consiste no armazenamento de blocos não nulos concentrados próximos à diagonal da matriz, logo, a eficiência desta técnica depende de uma ordenação adequada dos nós. O armazenamento denominado “formato de coordenadas” não possui tal inconveniente, mas necessita de dois vetores auxiliares no armazenamento dos índices das linhas e colunas da matriz. Técnicas mais eficientes, como a técnica da linha esparsa comprimida (*Compressed sparse row-CSR*) ou coluna esparsa comprimida (*CSC*) apresentam maior eficiência computacional. Uma variação de tais técnicas, que explora o fato das diagonais das matrizes serem não nulas e acessadas com maior frequência que os demais coeficientes, consiste na técnica do armazenamento da linha esparsa modificada (*Modified Sparse Row-MSR*). Neste caso a diagonal é armazenada independentemente dos demais termos. Nesta técnica o número de coeficientes armazenados só é conhecido posteriormente à montagem da matriz, o que pode acarretar problemas de gerenciamento de memória em microcomputadores. Além disto, a complexidade no endereçamento indireto para acesso aos coeficientes armazenados segundo esta técnica faz com que sua performance fique abaixo da técnica de armazenamento por elementos. Detalhes da implementação destas técnicas podem ser vistos em SAAD (1995).

Para se evitar, principalmente a renumeração de malha e armazenamento de coeficientes nulos e, portanto, desnecessários, bem como para facilitar os esquemas de paralelização, será explorado, neste trabalho, a técnica de armazenamento por elementos, que envolve uma teoria simples e apresenta resultados satisfatórios dentro dos requisitos acima citados. A técnica de armazenamento por elementos independe da largura de banda da matriz global e armazena somente valores não nulos. Baseia-se, como o próprio nome sugere, no armazenamento das matrizes locais dos elementos, tornando-se atrativa para códigos que façam uso de *solvers* iterativos na resolução dos sistemas e em esquemas explícitos de integração temporal, uma vez que em tais situações apenas operações de multiplicação matriz vetor ocorrem.

Assim o produto da matriz global \mathbf{K} pelo vetor \mathbf{u} pode ser expresso por

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^{nel} \mathbf{L}(\mathbf{k}^j \mathbf{u}^j) \quad (3.56)$$

onde nel corresponde ao número total de elementos, \mathbf{k}^j e \mathbf{u}^j são as contribuições do elemento j e \mathbf{L} um operador de montagem do vetor global \mathbf{p} . A performance do produto matriz vetor pode ser então melhorada considerando-se a separação deste em

$$\mathbf{p} = \mathit{diag}(\mathbf{K})\mathbf{u} + \sum_{j=1}^{nel} \mathbf{L}((\mathbf{k}^j - \mathit{diag}(\mathbf{k}^j))\mathbf{u}^j) \quad (3.57)$$

com $\mathit{diag}(\mathbf{K})$ e $\mathit{diag}(\mathbf{k}^j)$ representando as diagonais das matrizes global e local, respectivamente. Este procedimento melhora consideravelmente a performance do algoritmo, uma vez que o número de coeficientes armazenados diminui (GIJZEN, 1995).

Com esta técnica, a esparsidade do sistema é totalmente explorada e o armazenamento das matrizes globais fica restrito aos coeficientes não nulos apenas. Desta forma, observa-se que o uso de *solvers* iterativos viabiliza a aplicação deste esquema a procedimentos paralelos, uma vez que não apresenta nenhum tipo de inibidor de paralelização.

Ressalta-se que, considerando dois elementos adjacentes, a contribuição de cada elemento aos graus de liberdade globais será armazenada individualmente, o que corresponde a um armazenamento extra do ponto de vista global. Com o objetivo de eliminar tais armazenamentos extras, recentes pesquisas estão sendo efetuadas considerando-se o esquema de armazenamento por aresta, que vem se mostrando consideravelmente mais eficiente, além de englobar as características de paralelização análogas às do armazenamento por elementos. A implementação deste esquema foge ao objetivo deste trabalho, e será considerada em trabalhos futuros.

3.6. Aspectos de Paralelização

O princípio de funcionamento do processamento em paralelo é teoricamente bastante simples. Uma determinada tarefa é dividida em tarefas menores, independentes ou não, que por sua vez são distribuídas através dos vários processadores onde as informações serão então processadas. Embora a tarefa de paralelização torne um determinado código computacional consideravelmente mais complexo, tal estratégia é extremamente útil para uma grande variedade de problemas científicos e tecnológicos, uma vez que esta técnica possibilita a redução no tempo total de análise e permite a análise de problemas de grande porte a custo reduzido.

A computação paralela, envolvendo os diversos paradigmas de paralelismo e as diferentes arquiteturas de hardware, compreende um assunto extenso e complexo. Não se trata do objetivo aqui pretendido a abordagem a fundo de tais questões, para tal existe uma extensa bibliografia à qual o leitor poderá consultar caso deseje se aprofundar sobre o tema (BERTSEKAS e TSITSIKLIS, 1989, CABELLO, 1996, DONGARRA e SORENSEN, 1986, FOX et al., 1994, dentre outros). A seguir serão apresentados alguns conceitos básicos a respeito das arquiteturas de máquinas em paralelo bem como dos paradigmas de paralelização.

Dentro do contexto do presente trabalho podem-se citar os seguintes modelos de paralelização:

Decomposição de Domínio: O paradigma da Decomposição de Domínio consiste de uma técnica de particionamento do modelo, que pode ser aplicada a uma grande variedade de casos onde, principalmente, se esteja lidando com problemas envolvendo uma grande quantidade de dados. A idéia central desta técnica é a divisão do domínio do problema em diversas partições de tal forma que cada uma delas possa ser processada de forma independente.

Divisão de Tarefas: No caso de divisão de Tarefas tem-se um determinado problema que deverá ser analisado diversas vezes, sendo que a idéia central desta técnica consiste em dividir as diversas análises através de diferentes máquinas ou processadores.

As arquiteturas de *hardware* utilizadas em processamento em paralelo podem ser divididas em:

Máquinas de Memória Compartilhada: São máquinas em que a memória RAM do sistema está armazenada de forma que todos os processadores tenham acesso simultâneo aos dados contidos neste espaço. Possuem elevado custo de aquisição e manutenção de seus componentes. Como exemplo, podemos citar os supercomputadores.

Máquinas de Memória Distribuída: Neste caso, os processadores possuem sua própria memória. Desta forma faz-se necessário transferência de dados pela rede ao se requerer uma informação pertencente a um determinado processador. Apresentam reduzido custo de aquisição e manutenção, e por isto estão sendo cada vez utilizados pela indústria. Nesta categoria se encaixam os chamados *clusters* de PC's.

Os significativos avanços alcançados na última década com os equipamentos de rede, possibilitando uma elevada taxa de transferência de dados, aliados ao crescente aumento da capacidade computacional dos microcomputadores, tornaram-se possível com o surgimento de uma nova arquitetura de *hardware* genericamente denominada de *cluster* ou *Beowulf cluster*.

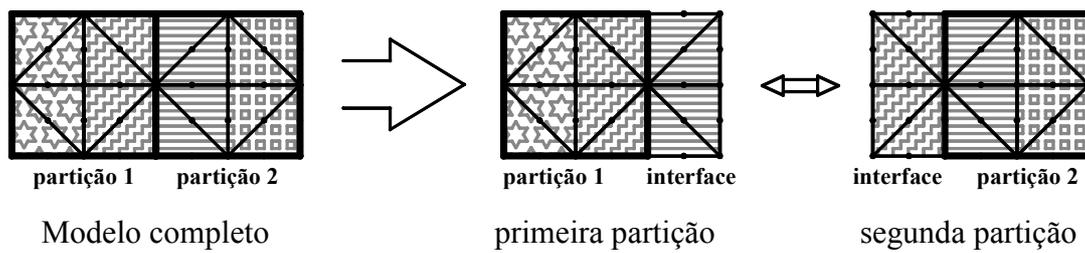
Nos últimos 20 anos os chips dos microcomputadores vêm dobrando a capacidade de armazenamento de dados em memória em média a cada 2 anos e a velocidade da realização das operações matemáticas (*clock rate*) vem crescendo quase que exponencialmente, em contrapartida para os denominados supercomputadores onde este aumento é praticamente linear. Tal fato proporcionou, além da excelente performance obtida, uma elevada razão custo/benefício no emprego de *clusters* de microcomputadores para a solução de problemas de grande porte.

Existem diferentes classificações e definições para esta nova arquitetura de *hardware* denominada *cluster*. De forma geral, pode-se definir um *cluster* como sendo uma arquitetura de *hardware* composta por diferentes processadores interligados através de um equipamento de rede, o qual pode ser empregado para a execução de programas utilizando os recursos da computação paralela.

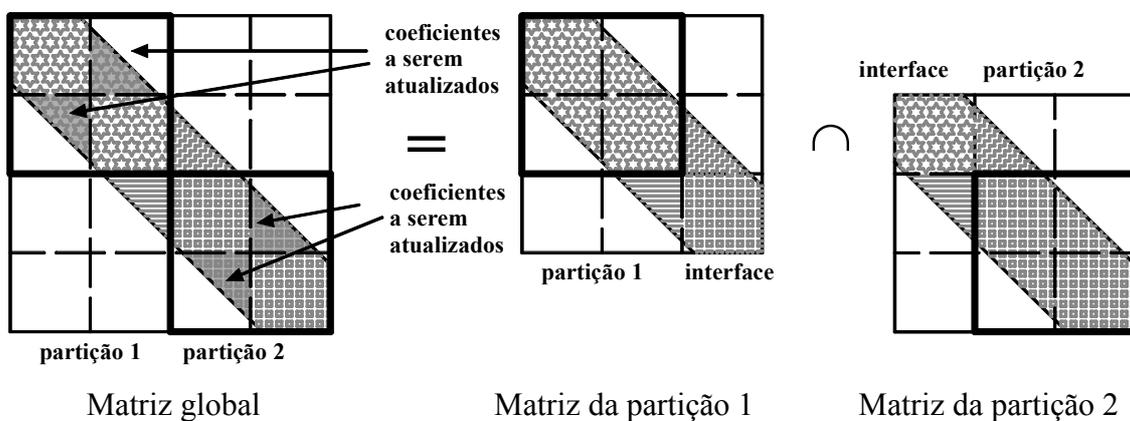
Neste trabalho utilizou-se, como ferramenta auxiliar na modelagem de problemas geofísicos de grande porte via MEF, recursos de processamento em paralelo através de *cluster* de PC's, segundo paradigma da Decomposição em Domínios. Nos

algoritmos baseados no MEF, considerou-se esquema de armazenamento por elementos, uma vez que tal esquema conduz a uma solução de simples implementação numérica. Tal simplicidade se deve ao fato de que, para códigos em paralelo, onde cada partição recebe apenas uma camada de elementos das partições vizinhas (Figura 3.8a), este esquema de armazenamento é naturalmente efetuado para cada partição, e desta forma não há necessidade de transferência de dados entre partições na etapa de montagem das matrizes $\mathbf{k}^j - \text{diag}(\mathbf{k}^j)$.

Além disto, nas operações de multiplicação matriz/vetor baseadas neste esquema de armazenamento, apenas uma pequena parcela devido à contribuição dos coeficientes das matrizes locais relacionada aos elementos pertencentes somente à própria partição (indicadas pelas setas na Figura 3.8), deve ser transferida via rede às demais partições do modelo. Depois de somada a contribuição de cada uma das partições, ou seja, depois de efetuado o *update* da resposta, obtém-se o vetor resultante, correspondente à multiplicação global matriz/vetor.



a-) Camadas de interface entre duas partições



b-) Matriz global e matrizes individuais das partições com camada de interface

	Elementos pertencentes apenas à primeira partição;
	Elementos pertencentes apenas à segunda partição;
	Elementos pertencentes à primeira partição e pertencentes à camada de interface da segunda partição;
	Elementos pertencentes à segunda partição e pertencentes à camada de interface da primeira partição;

c-) Legenda

Figura 3.8 - Interface entre partições

4. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUILÍBRIO DINÂMICO

Neste capítulo serão descritos os procedimentos numéricos necessários à resolução dos sistemas matriciais de equilíbrio dinâmico oriundos das formulações tempo e frequência-dependente em problemas de propagação de ondas elásticas. Em primeiro lugar serão abordadas as técnicas de resolução dos sistemas resultantes do tratamento numérico via MEF das equações diferenciais parciais de valor inicial e de contorno. Serão considerados os esquemas explícitos de marcha no tempo Diferença Central, Runge-Kutta-Nyström, Alfa-generalizado com dissipação numérica, bem como um novo esquema de aproximação temporal de quarta-ordem, baseado nos polinômios de Lagrange, que tem se mostrado atrativo, se comparado aos anteriores. Apresenta-se também o esquema HHT implícito de marcha no tempo, com dissipação numérica de altas frequências.

A resolução dos sistemas algébricos de equações originados da discretização do problema frequência-dependente via MEF, cujas matrizes de coeficientes são simétricas e constituídas de valores complexos, será também abordada. A utilização do algoritmo do Gradiente Conjugado em conjunto com o condicionador de Jacobi será considerado na resolução dos sistemas algébricos complexos que possuem elevado número de coeficientes, principalmente no tratamento de problemas tridimensionais.

4.1. Problemas Tempo-Dependentes

Em análises de problemas tempo-dependentes, onde as frequências de excitação do modelo forem baixas em relação as frequências naturais da estrutura, o sistema matricial de equilíbrio pode ser resolvido de forma simplificada, desconsiderando os termos inerciais e de amortecimento, ou seja, a análise pode ser efetuada considerando comportamento estático ou quase estático do modelo. Caso as frequências de excitação envolvidas na análise sejam elevadas, os efeitos inerciais associados à matriz de massa e amortecimento devem ser considerados na equação de equilíbrio. Neste caso diz-se que o modelo apresenta um comportamento dinâmico.

4.1.1. Matriz de Massa

A matriz de massa consiste na representação discreta da massa em um meio contínuo, e quando definida por

$$\mathbf{M} = \sum_{m=1}^N \mathbf{M}^m = \sum_{m=1}^N \int_{\Omega^m} \rho (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{H}^m) d\Omega^m \quad (4.1)$$

apresenta-se simétrica e positiva-definida, sendo denominada matriz de massa consistente. Alternativamente, matrizes de massa modificadas ou diagonais podem ser geradas, como em BELYTSCHKO e MULLEN (1978), CHAN et al. (1992), KIM (1978), CHRISTON (1999), ZIENKIEWICZ e TAYLOR (1989) e COOK (2001).

A consideração de matrizes de massa diagonais pode ser atrativa em problemas dinâmicos devido principalmente ao baixo custo computacional envolvido no tratamento destas, notadamente na obtenção de sua inversa. A matriz de massa diagonal proporcional consiste na utilização dos termos diagonais da matriz consistente, escalonando estes valores visando manter a massa total dentro do elemento. Assim para um elemento genérico m , os termos diagonais da matriz de massa proporcional são dados por

$$m_{ii}^m = \alpha \int_{\Omega^m} \rho H_i^m H_i^m d\Omega^m \quad (4.2)$$

com $\sum_i m_{ii}^m = \int_{\Omega^m} \rho d\Omega^m$ e $m_{ij}^m = 0$, se $i \neq j$.

Alternativamente, a matriz de massa diagonal pode ser obtida por

$$m_{ii}^m = \int_{\Omega^m} \rho H_i^m H_j^m d\Omega^m = \sum_q w_q (H_i^m H_j^m)_q J_q \quad (4.3)$$

com $m_{ij}^m = 0$, se $i \neq j$, J representando o jacobiano do elemento m no ponto de integração e w os pesos envolvidos na integração de ordem q . Deve-se observar que,

neste caso, para a obtenção da matriz de massa na forma diagonal, os pontos de integração devem coincidir com os pontos nodais do elemento (COOK, 2001).

A escolha do tipo de matriz de massa a ser considerada na discretização depende do tipo de análise a ser efetuada (estrutural, propagação de ondas) e da discretização utilizada. Em geral, quando elementos de ordem elevada são utilizados na discretização, aconselha-se a utilização de matrizes de massa consistentes. Caso sejam utilizados elementos finitos de baixa ordem, esquemas de armazenamento diagonais podem ser mais adequados. Neste trabalho adotou-se a utilização de matrizes de massa diagonais em se tratando de esquemas explícitos de marcha no tempo. Em esquemas implícitos, considerou-se a discretização via matriz de massa consistente. Para uma análise mais detalhada destes aspectos ver BATHE (1996) e COOK (2001).

4.1.2. Integração Temporal

Na integração temporal, o tempo de análise é subdividido em intervalos de tempo Δt , normalmente constantes em análises lineares. Assim, a equação dinâmica de equilíbrio no tempo t , dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\mathbf{U}^t = \mathbf{R}^t \quad (4.6)$$

é discretizada no tempo segundo algum procedimento numérico, sem que ocorra nenhuma espécie de transformação do sistema. Esta técnica se baseia na consideração de leis adequadas de variação dos deslocamentos, velocidades e acelerações dentro do intervalo de tempo Δt . O modo como estas leis de variação são consideradas influencia na convergência e qualidade das respostas determinando os diversos esquemas de integração temporal direta existentes.

Os esquemas de integração direta no tempo que se baseiam na obtenção da solução do problema no tempo t , a partir da equação de equilíbrio do sistema nos tempos $t - n\Delta t$ são denominados de esquemas explícitos de integração temporal. Caso a obtenção da solução considere a equação de equilíbrio em t , têm-se os chamados esquemas implícitos.

Os esquemas explícitos, apesar de serem condicionalmente estáveis, ou seja, exigirem um intervalo de tempo menor que um determinado valor limite, denominado

intervalo de tempo crítico, geralmente são computacionalmente mais eficientes se comparados aos implícitos, em problemas de propagação de ondas, uma vez que para tais problemas o intervalo de tempo requerido para a constituição da resposta é bem maior que o intervalo de tempo necessário a estabilidade. Por outro lado, devido ao excelente nível de precisão das respostas obtidas com esquemas implícitos, a sua utilização deve ser sempre considerada, mesmo em problemas que resultam em sistemas lineares com ordem elevada, uma vez que estes sistemas podem ser resolvidos de maneira eficiente por meio de esquemas iterativos, como o método dos gradientes conjugados, GMRES ou Lanczos simétrico, tanto em códigos seriais quanto em paralelos. A seguir estão apresentados os esquemas explícitos e implícitos desenvolvidos neste trabalho. Para maiores detalhes sobre os algoritmos ver APÊNDICE 2.

- ***Diferença Central***

No esquema explícito da diferença central, as derivadas das variáveis de campo são aproximadas por meio das formulas da diferença finita central, ou seja:

$$\ddot{\mathbf{U}}^t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{U}^{t+\Delta t} - 2\mathbf{U}^t + \mathbf{U}^{t-\Delta t}) \quad (4.7)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^t = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^{t-\Delta t}) \quad (4.8)$$

Substituindo-se estes valores na equação de equilíbrio no tempo t , vem a forma explícita de avanço no tempo dada por

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{R}^t + \left(\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \mathbf{K} \right) \mathbf{U}^t + \left(\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{U}^{t-\Delta t} \quad (4.9)$$

O método da diferença central torna-se atrativo somente quando as matrizes de massa \mathbf{M} e amortecimento \mathbf{C} forem diagonais. Se isto ocorre, a inversa da matriz de massa efetiva, dada por

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \quad (4.10)$$

pode ser obtida de forma bem simples, possibilitando a análise de sistemas com ordens elevadas sem a necessidade de resolução de sistemas lineares de equações algébricas. Cabe ressaltar que neste trabalho considerou-se a matriz de amortecimento proporcional à matriz de massa em todos os esquemas explícitos.

O processo de clássico de inicialização do método pode ser obtido calculando o termo $\mathbf{U}^{-\Delta t}$ através de (4.11) e das condições iniciais \mathbf{U}^0 e $\dot{\mathbf{U}}^0$, ou seja,

$$\mathbf{U}^{-\Delta t} = \mathbf{U}^0 - \Delta t \dot{\mathbf{U}}^0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}^0 \quad (4.11)$$

com

$$\ddot{\mathbf{U}}^0 = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{R}^0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}^0 - \mathbf{K} \mathbf{U}^0) \quad (4.12)$$

- ***Alfa Generalizado***

Este método usa a equação de balanço entre as forças inerciais no tempo $t + \Delta t$ e as forças externas e internas no tempo t , ou seja,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K} \mathbf{U}^t = \mathbf{R}^t \quad (4.13)$$

com

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t^2 (\hat{\beta} \ddot{\mathbf{U}}^t + \beta \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}) \quad (4.14)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t (\hat{\gamma} \ddot{\mathbf{U}}^t + \gamma \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}) \quad (4.15)$$

onde os parâmetros $\hat{\beta}, \beta, \hat{\gamma}, \gamma$ são parâmetros que influenciam na convergência e estabilidade. Este método, proposto por CHUNG e LEE (1996) e CHUNG e HULBERT

(1996), apresenta controle de dissipação de altas frequências e é de segunda ordem de precisão no tempo.

- **Lagrange de ordem 4**

A idéia deste método consiste em escrever os vetores de derivadas das variáveis de campo na forma de polinômios de Lagrange de grau quatro (SOUSA et al., 2002), ou seja,

$$\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^{t-\Delta t}) - \frac{1}{12\Delta t} (\mathbf{U}^{t-3\Delta t} - 6\mathbf{U}^{t-2\Delta t} + 12\mathbf{U}^{t-\Delta t} - 10\mathbf{U}^t + 3\mathbf{U}^{t+\Delta t}) \quad (4.16)$$

e

$$\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{U}^{t+\Delta t} - 2\mathbf{U}^t + \mathbf{U}^{t-\Delta t}) - \frac{1}{12\Delta t^2} (\mathbf{U}^{t-3\Delta t} - 4\mathbf{U}^{t-2\Delta t} + 6\mathbf{U}^{t-\Delta t} - 4\mathbf{U}^t + \mathbf{U}^{t+\Delta t}) \quad (4.17)$$

Substituindo as expressões acima no sistema matricial de equilíbrio resulta no esquema explícito de quarta ordem, que é especialmente indicado para utilização em sistemas discretizados com elementos de ordem elevada, dado por

$$(11\mathbf{M} + 3\Delta t\mathbf{C})\mathbf{U}^{t+\Delta t} = 12\Delta t^2\mathbf{R}^t - 12\Delta t^2\mathbf{K}\mathbf{U}^t + \mathbf{M}(20\mathbf{U}^t + \mathbf{U}^{t-3\Delta t} - 4\mathbf{U}^{t-2\Delta t} - 6\mathbf{U}^{t-\Delta t}) + \Delta t\mathbf{C}(-10\mathbf{U}^t + \mathbf{U}^{t-3\Delta t} - 6\mathbf{U}^{t-2\Delta t} + 18\mathbf{U}^{t-\Delta t}) \quad (4.18)$$

Conforme apresentado na expressão acima, a obtenção da solução $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ requer o conhecimento prévio das soluções $\mathbf{U}^{t-3\Delta t}$, $\mathbf{U}^{t-2\Delta t}$, $\mathbf{U}^{t-\Delta t}$ e \mathbf{U}^t . Logo, a inicialização deste esquema pode ser obtida utilizando-se o esquema de diferença central na obtenção das soluções nos dois primeiros intervalos de tempo. O esquema proposto pode ser escrito na forma implícita, resultando em

$$(2\mathbf{M} + \Delta t\mathbf{C} + 2\Delta t^2\mathbf{K})\mathbf{U}^{t+\Delta t} = 2\Delta t^2\mathbf{R}^{t+\Delta t} + \mathbf{M}(4\mathbf{U}^t - 2\mathbf{U}^{t-\Delta t}) + \Delta t\mathbf{C}\mathbf{U}^{t-\Delta t} \quad (4.19)$$

- **HHT**

Este método, proposto originalmente por HILBER et al. (1977), baseia-se na equação de equilíbrio

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + (1+\alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + (1+\alpha)\mathbf{K}\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{U}^t = (1+\alpha)\mathbf{R}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{R}^t \quad (4.20)$$

onde

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta t\dot{\mathbf{U}}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \left((1-2\beta)\ddot{\mathbf{U}}^t + 2\beta\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \right) \quad (4.21)$$

e

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t \left((1-\gamma)\ddot{\mathbf{U}}^t + \gamma\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \right) \quad (4.22)$$

com α , γ e β correspondendo aos parâmetros do método. Quando as condições

$$-\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 0, \quad \gamma = \frac{(1-2\alpha)}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{(1-\alpha)^2}{4} \quad (4.23)$$

são satisfeitas, o método é implícito, incondicionalmente estável e de segunda ordem no tempo. Observe que o método trapezoidal pode ser considerado um caso particular do esquema HHT, tomando α igual a zero na expressão (4.20). Neste procedimento de marcha no tempo adotou-se, na resolução dos diversos sistemas matriciais com coeficientes reais resultantes, o *solver* iterativo dos Gradientes conjugados e condicionamento diagonal de Jacobi.

- **Runge-Kutta-Nyström**

O sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\mathbf{U}^t = \mathbf{R}^t \quad (4.24)$$

pode ser representado pelo sistema de equações diferenciais de primeira ordem equivalente, dado por

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{P} - \mathbf{B}\mathbf{Y} \quad (4.25)$$

com

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{U} \quad \dot{\mathbf{U}}]^T \quad (4.26)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}]^T \quad (4.27)$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

O esquema clássico de Runge-Kutta-Nyström de quarta ordem e quatro estágios (ABRAMOWITZ e STEGUN, 1974), pode ser obtido a partir da expressão geral do método de Runge-Kutta com passo p , dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= f(t, \mathbf{U}^t) \\ \mathbf{W}_i &= f\left(t + c_i \Delta t, \mathbf{U}^t + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{W}_j\right), \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta t \sum_{j=1}^p b_j \mathbf{W}_j$$

Desta forma, tem-se

$$\mathbf{Y}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{t+\Delta t} \\ \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t + \frac{\Delta t^2}{6} (\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3) \\ \dot{\mathbf{U}}^t + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{W}_1 + 2(\mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3) + \mathbf{W}_4) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{R}^t - \mathbf{K} \mathbf{U}^t - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}^t) \\ \mathbf{W}_2 &= \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{R}^t - \mathbf{K} \left(\mathbf{U}^t + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{U}}^t + \frac{\Delta t^2}{8} \mathbf{W}_1 \right) - \mathbf{C} \left(\dot{\mathbf{U}}^t + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_1 \right) \right) \\ \mathbf{W}_3 &= \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{R}^t - \mathbf{K} \left(\mathbf{U}^t + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{U}}^t + \frac{\Delta t^2}{8} \mathbf{W}_1 \right) - \mathbf{C} \left(\dot{\mathbf{U}}^t + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_2 \right) \right) \\ \mathbf{W}_4 &= \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{R}^t - \mathbf{K} \left(\mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{W}_3 \right) - \mathbf{C} \left(\dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t \mathbf{W}_3 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.2. Problemas Frequência-Dependentes

Na análise de problemas estacionários frequência-dependentes via MEF faz-se necessário a resolução de sistemas algébricos de equações cujos coeficientes são complexos e cujas matrizes são simétricas. A resolução destes sistemas via métodos diretos torna-se proibitiva, principalmente em problemas tridimensionais, pois estes apresentam um elevado número de graus de liberdade. Segundo alguns pesquisadores, grande parte do tempo de análise de problemas contendo elevados números de graus de liberdade tratados na Engenharia, relaciona-se com a resolução do sistema de equações lineares cujo tempo de processamento cresce não-linearmente com a ordem do sistema. Sendo assim, em se tratando de sistemas de equações associados a problemas práticos de grande porte (contendo alguns milhares de equações) é naturalmente conveniente estabelecer algoritmos que forneçam, não apenas resultados precisos, mas também a solução do sistema em tempo de processamento consideravelmente menor, em relação a outros processos de resolução. Assim, faz-se necessário a adoção de técnicas iterativas de resolução destes sistemas, que tem-se mostrado mais eficientes em relação aos algoritmos diretos.

Os métodos iterativos são aqueles em que a solução é verificada em cada iteração, tomando-se por base a avaliação do erro segundo alguma expressão, visando avaliar se a solução já convergiu. Dentre estes, os básicos (Richardson, Gauss-Seidel, Jacobi, dentre outros) têm sido pouco utilizados na solução de equações lineares resultantes da algebrização de equações diferenciais que ocorrem em problemas de engenharia, pois, de um modo geral, os sistemas lineares resultantes podem não ser adequados para o tratamento através destes, já que as matrizes resultantes podem ser mal condicionadas, o que faz com que, ou não se atinja a convergência na obtenção iterativa da solução, ou se obtenha a solução para tempos maiores de processamento em relação aos métodos diretos. Atualmente, no entanto, tem-se desenvolvido *solvers* iterativos bastante eficientes na resolução de sistemas gerais de equações lineares (veja MARTINS, 2000, VAN DER VORST e SAAD, 2000, SAAD, 1995, GOLUB e VAN LOAN, 1996, para mais detalhes), sejam estes simétricos ou não. Tais *solvers* se baseiam, genericamente, na ortogonalização do vetor resíduo para a n-ésima iteração em relação a n-1 vetores linearmente independentes do subespaço de Krylov de ordem n-1 que é definido por:

$$K_{n-1}(\mathbf{r}^1, \mathbf{A}) = \{\mathbf{r}^1, \mathbf{A}\mathbf{r}^1, \mathbf{A}^2\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{r}^1\} \quad (4.32)$$

Apresenta-se, nesta sessão, a formulação do *solver* iterativo Gradiente Conjugado, largamente utilizado na resolução dos sistemas complexos oriundos do Método dos Elementos Finitos.

4.2.1. Algoritmo de Gradiente Conjugado

O método do Gradiente conjugado foi proposto por HESTENES e STIEFEL (1952) e consiste num processo de aceleração polinomial, que tem sido eficientemente aplicado na resolução de sistemas de equações lineares oriundas do MEF, cuja fórmula iterativa pode ser expressa por

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \lambda_n \cdot \mathbf{p}^n \quad (4.33)$$

onde os vetores \mathbf{p}^n , que definem as direções de busca, são construídos de forma a obedecer as condições de ortogonalidade dadas por

$$\mathbf{p}^{iT} \mathbf{A} \mathbf{p}^j = 0, \quad i \neq j \quad (4.34)$$

com λ_n definido por

$$\lambda_n = -\frac{\mathbf{p}^{nT} \mathbf{r}^n}{\mathbf{p}^{nT} \mathbf{A} \mathbf{p}^n} \quad (4.35)$$

onde \mathbf{r}^n denota o resíduo $\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{u}^n$, logo

$$\mathbf{p}^{nT} \mathbf{r}^{n+1} = 0 \quad (4.36)$$

Desta forma, as direções de busca podem ser representadas por

$$\mathbf{p}^n = \begin{cases} \mathbf{r}^0 & , n = 0 \\ \mathbf{r}^n + \alpha_n \mathbf{p}^{n-1} & , n \geq 1 \end{cases} \quad (4.37)$$

com

$$\alpha_n = \frac{\mathbf{r}^{n+1T} \mathbf{r}^{n+1}}{\mathbf{r}^{nT} \mathbf{r}^n} \quad (4.38)$$

e o resíduo para a n-ésima iteração expresso por:

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{u}^n = \mathbf{r}^{n-1} - \lambda_{n-1} \mathbf{A} \mathbf{p}^{n-1} \quad (4.39)$$

4.2.2. Precondicionamento

O grande problema relacionado à resolução de sistemas lineares via métodos iterativos consiste na dificuldade de convergência em situações onde um mal condicionamento do sistema esteja presente (SAAD, 1995, GOLUB e VAN LOAN, 1996). Em tais situações faz-se necessário a consideração de técnicas de precondicionamento visando melhorar a distribuição dos autovalores associados às matrizes de tais sistemas lineares. Assim, o sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (4.40)$$

pode ser pré-multiplicado pela inversa da matriz \mathbf{Q} , denominada matriz de precondicionamento. Este novo sistema (eq. (4.41)) deverá ser melhor condicionado que o anterior, conduzindo a um aumento considerável no desempenho do *solver* iterativo.

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} \quad (4.41)$$

A matriz de condicionamento ideal consiste em $\mathbf{Q} = \mathbf{A}$, e neste caso, os autovalores relacionados ao sistema $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$ são todos iguais e o processo iterativo converge na primeira iteração. A obtenção da inversa de \mathbf{A} está fora de questão, assim, diversas técnicas (AXELSSON, 1986, WASHIO e HAYAMI, 1994, GROTE e HUCKLE, 1997) existem no sentido de construir matrizes de precondicionamento cujos autovalores relacionados estejam agrupados (o que significa um melhor condicionamento do sistema). Dentre tais técnicas, destaca-se o precondicionamento de Jacobi, que devido a sua simplicidade, tem sido largamente utilizado em algoritmos precondicionados. Este algoritmo tem apresentado resultados satisfatórios (ver ARAÚJO et al., 2001, ADEMOYERO et al., 2001, PINI e GAMBOLATI, 1990) se comparados a outros esquemas mais elaborados de precondicionamento e será implementado neste trabalho considerando um esquema em que o sistema precondicionado se mantenha simétrico, conforme apresentado em

SHEWCHUK (1994). Detalhes da implementação do algoritmo são apresentados no APÊNDICE 3.

4.2.3. Critérios de Convergência

O processo iterativo gerado pelas equações(4.33)-(4.39) pode ser finalizado quando a norma do resíduo seja menor que uma determinada tolerância, ou seja,

$$\varepsilon \leq \frac{|\mathbf{r}^n|}{|\mathbf{b}|} \quad (4.42)$$

onde \mathbf{r}^n é o vetor resíduo na n-ésima iteração, \mathbf{b} o vetor de termos independentes e ε corresponde à tolerância admitida. Outros critérios podem ser vistos em FRAYSS e GIRAUD (2000).

5. CONDIÇÕES INICIAIS EM PROBLEMAS TRANSIENTES

Apresenta-se, neste capítulo, a formulação completa do problema de propagação de ondas tempo-dependente, considerando-se abordagem no domínio da frequência segundo as transformadas de Fourier. Serão discutidas as possíveis causas de falhas no tratamento do problema, bem como os procedimentos e cuidados a serem tomados neste tipo de abordagem. Em primeiro lugar será brevemente apresentada a análise completa de problemas cujos carregamentos sejam periódicos. Em seguida expande-se esta idéia para excitações transientes, apresentando-se o conceito de período estendido e sua importância na análise de sistemas sob carregamento não periódicos. O correto tratamento numérico do fenômeno de *aliasing* será também abordado, bem como procedimentos para a incorporação de amortecimento histerético e viscoso no sistema físico.

Em seguida, apresenta-se uma técnica de incorporação de condições iniciais, em termos de velocidades e/ou deslocamentos prescritos, baseada em postulados básicos da mecânica clássica. Será visto que esta técnica é genérica e pode ser incorporada com bastante simplicidade em códigos computacionais baseados no MEF. Além disto, observa-se que tal procedimento pode ser igualmente aplicado em outros métodos numéricos, tais como Diferenças Finitas e Elementos de Contorno.

5.1. Análise Completa no Domínio da Frequência

Seja o caso em que o carregamento atuante em um determinado problema físico seja um carregamento periódico genérico de período T_p , do tipo mostrado na Figura 5.1. É possível expressar este carregamento na forma de uma série de termos harmônicos em valores discretos de frequência (CLOUGH e PENZIEN, 1993). A esta série dá-se o nome de série de Fourier. Estudos relativos à sua convergência podem ser obtidos em OPPENHEIM e SCHAFER (1989), PROAKIS e MANOLAKIS (1996) ou BRIGHAM (1974), e sua forma exponencial é do tipo

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot e^{-i\bar{\omega}_n t} \quad (5.1)$$

onde

$$\bar{\omega}_n = n \cdot \Delta\bar{\omega} = n \frac{2\pi}{T_p} \quad (5.2)$$

na qual os coeficientes complexos de amplitude são dados por:

$$P_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cdot e^{i\bar{\omega}_n t} dt, \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.3)$$

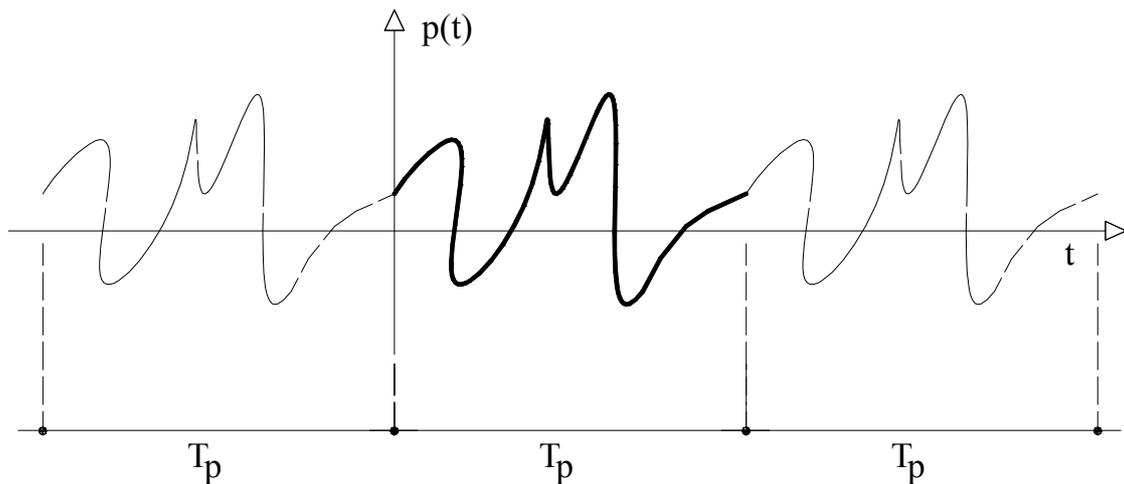


Figura 5.1 - Carregamento periódico.

Assim, para se obter a solução de um determinado problema físico sob a ação de um carregamento periódico genérico basta escrever este carregamento em um número satisfatório de termos harmônicos da série de Fourier. Para cada termo $\omega = \bar{\omega}_n$, determina-se a correspondente resposta harmônica. A solução final, segundo o **Princípio da Superposição dos Efeitos**, será a soma da solução e corresponde a cada termo harmônico da série infinita.

Em situações reais, a transformada de Fourier é efetuada em uma quantidade finita de pontos. Considerando-se N intervalos de tempo Δt igualmente espaçados, tal que $T_p = N \cdot \Delta t$ e $t_n = n \cdot \Delta t$, considerando-se $p_n = p(t_n) = p(n \cdot \Delta t)$ e $u_n = u(t_n) = u(n \cdot \Delta t)$ como sendo os valores discretos do carregamento temporal e da resposta real de deslocamento do sistema físico, respectivamente, a transformada de Fourier deste carregamento pode ser expressa por

$$p_n = \sum_{k=0}^{N-1} P_k \cdot e^{-i\omega_k t_n} \quad (5.4)$$

ou

$$p_n = \sum_{k=0}^{N-1} P_k \cdot e^{-i \frac{2\pi k n}{N}} \quad (5.5)$$

com $P_k = P(\omega_k) = P(k \cdot \Delta\omega)$ correspondendo à amplitude complexa do carregamento harmônico correspondente à frequência angular discreta ω_k , dado por

$$P_k = \frac{1}{T_p} \sum_{n=0}^{N-1} p_n \cdot e^{i\omega_k t_n} \quad (5.6)$$

ou

$$P_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_n \cdot e^{i \frac{2\pi k n}{N}} \quad (5.7)$$

Como pode ser visto nas expressões (5.4)-(5.7), apenas frequências positivas são consideradas na obtenção de P_k e p_n , correspondendo à parte positiva do somatório apresentado em (5.1). A contribuição da parte negativa pode ser computada considerando-se os complexos conjugados dos $N/2$ termos da parte real, ou seja,

$$P_k = \bar{P}_{N-k}, \text{ para } \frac{N}{2} < k \leq N-1 \quad (5.8)$$

As frequências correspondentes à parte negativa do espectro não possuem significado físico (VELETSOS e VENTURA, 1985) e correspondem aos termos negativos da expansão de Fourier onde ω varia de $\omega_{-N/2}$ a $\omega_{N/2}$. Assim, a frequência de Nyquist, que corresponde à mais alta frequência de excitação dos termos da série de Fourier, corresponde a $\omega_{N/2}$, ou seja

$$\omega_{\text{Nyq}} = \omega_{N/2} = \frac{N}{2} \Delta\omega = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (5.9)$$

O procedimento numérico descrito pelas equações (5.5) e (5.7) podem ser rapidamente computados segundo o algoritmo denominado FFT (Fast Fourier Transform) desenvolvido por COOLEY e TUKEY (1965). A versão clássica deste algoritmo trabalha com parâmetros múltiplos de 2^j , ou seja, $N = 2^j$ (j inteiro positivo). Assim, quando o número de frequências não for múltiplo de 2^j , basta acrescentar valores nulos no espectro até o valor múltiplo mais próximo. Esta técnica denomina-se *zero-padding* e será largamente utilizada neste trabalho, mesmo em situações onde o parâmetro N seja realmente múltiplo de 2^j , visto que a técnica de *zero-padding*, apesar de não melhorar a precisão da integração de Fourier (Eq. (5.5) e (5.7)), promove um aumento no número de pontos da transformada, e, portanto, melhora a interpolação da resposta reconstituída no tempo. Maiores detalhes desta técnica podem ser encontrados em OPPENHEIM e SCHAFER (1989). Detalhes da implementação da FFT podem ser obtidos em BRIGHAM (1974).

5.1.1. Período Estendido

Considere-se agora um carregamento temporário generalizado, ou seja, não periódico, conforme mostrado na Figura 5.2 pelas linhas contínuas. A representação desta função através da forma exponencial da série de Fourier pode ser obtida tomando-se um intervalo de tempo $0 < t < T_e$ como sendo o seu período. Assim, esta função pode ser considerada periódica, conforme as linhas contínuas e tracejadas mostradas na Figura 5.2.

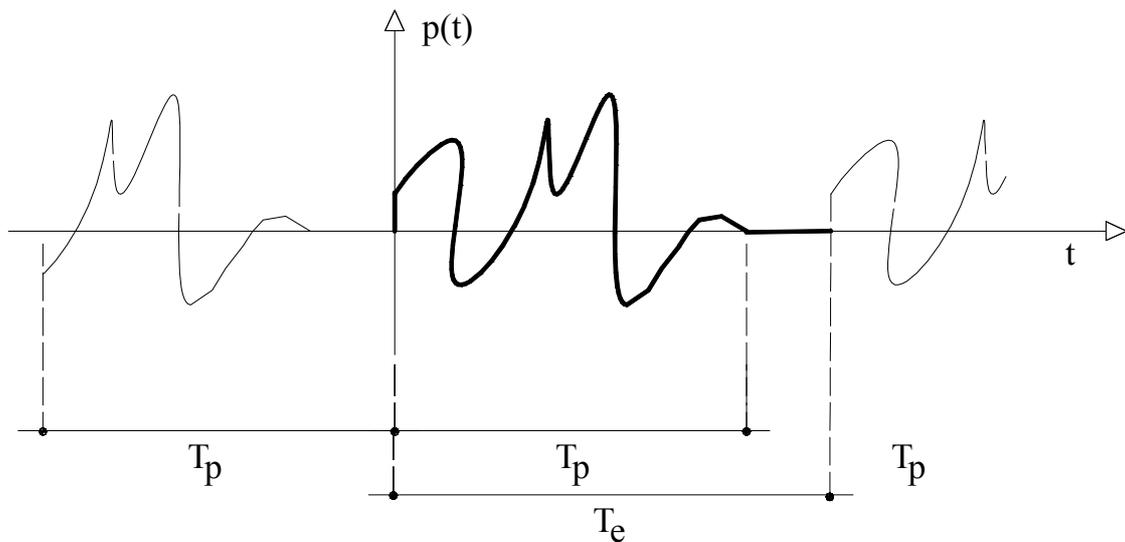
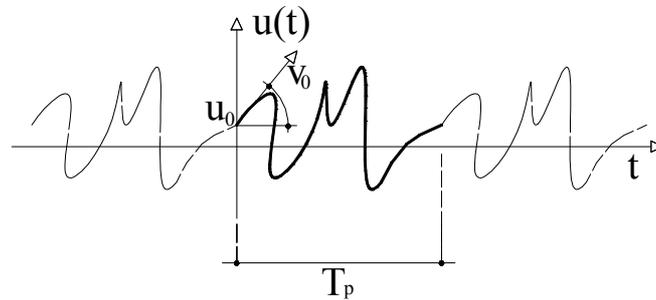


Figura 5.2 - Carregamento transiente.

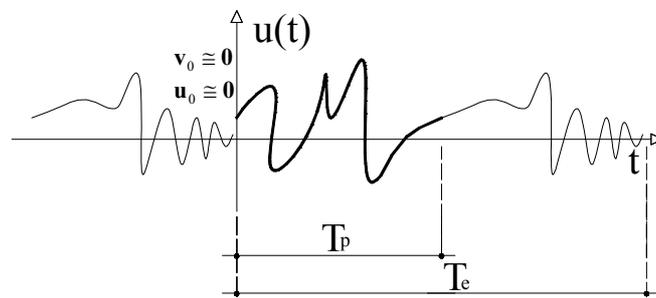
O período estendido T_e deve ser tal que a condição de causalidade da resposta periódica do sistema seja adequadamente atendida, ou seja, o carregamento transiente deve ser estendido a um intervalo de tempo maior que seu período real, e este intervalo estendido deve ser preenchido com valores nulos (Figura 5.2). Assim, a resposta correspondente à vibração livre da estrutura, cessada a ação do carregamento temporal, deve ter influência insignificante **no tempo de análise de interesse** do problema. A Figura 5.3a mostra a resposta do sistema devido a um carregamento periódico cujo período estendido não tenha sido adequadamente considerado, ocasionando a presença de condições iniciais relacionadas à periodicidade da transformada de Fourier. A condição de causalidade pode ser satisfatoriamente obedecida estendendo-se o período do carregamento, conforme Figura 5.3b.

A consideração de causalidade na obtenção da resposta física de problemas dinâmicos via transformada de Fourier constitui a principal causa de erros e dificuldade de interpretação das análises efetuadas no domínio da frequência. Cabe ressaltar que, para que a causalidade seja atendida na análise no domínio da frequência, faz-se necessário a consideração de algum mecanismo de amortecimento no sistema que provoque um decaimento na amplitude da resposta de vibração livre da estrutura. Logicamente, para um mesmo período considerado, quanto maior este amortecimento menor será a influência das condições iniciais no sistema. Além disto, as propriedades

do sistema considerado e as propriedades da excitação também influenciam na determinação de T_e .



(a) - Causalidade não atendida.



(b) - Causalidade satisfatoriamente atendida.

Figura 5.3 - Resposta física devido a carregamento transiente.

Tomando-se as precauções necessárias à correta consideração do período de excitação de um carregamento transiente genérico do tipo apresentado na Figura 5.2, adota-se os mesmos procedimentos apresentados pelas equações (5.1)-(5.9) na obtenção dos coeficientes harmônicos da expansão de Fourier. Normalmente, o cálculo exato do período estendido de uma determinada estrutura não pode ser efetuado sem o conhecimento prévio de sua resposta sob condição de vibração livre. Desta forma, alguns trabalhos (MANSUR et al., 2003a e MANSUR et al., 2000) adotam, como critério para estimativa deste período, o intervalo de tempo necessário para se reduzir em f por cento a contribuição do primeiro modo de vibração, ou seja:

$$T_p = \frac{\ln(100/f)}{\xi\omega_1} \quad (5.10)$$

onde ξ corresponde ao coeficiente de amortecimento e ω_1 a frequência fundamental do sistema mecânico. Usualmente adota-se 1% para ξ .

5.1.2. O Fenômeno de Aliasing

Seja a função $p(t)$ contínua ao longo de seu período de excitação T_e . Discretizando-se este intervalo de tempo em intervalos de tempo igualmente espaçados obtemos o chamado sinal discretizado de $p(t)$. Em processamento de sinais, o sinal discretizado, normalmente é expresso por

$$p_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k\Delta t)\delta(n-k), \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.11)$$

onde $\delta(t)$ corresponde à função delta de Dirac.

Desta forma, o espectro amostrado da função $p(t)$ é formado por uma série infinita de pulsos equidistantes, cujas amplitudes são dadas pelo valor de $p(t)$ correspondente ao instante de tempo de ocorrência deste impulso, e cujo espaçamento corresponde a $\omega = 2\pi f = 2\pi / \Delta t$. A Figura 5.4 apresenta o sinal discretizado $p_n = p(t)\delta(t)$, obtido a partir da amostragem de $p(t)$, ou seja, da convolução de $p(t)$ com $\delta(t)$.

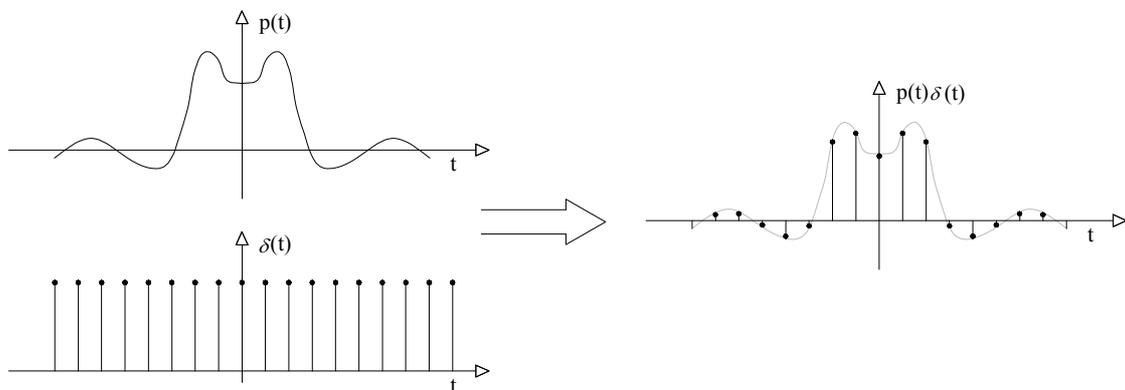


Figura 5.4 - Sinal discretizado no tempo.

Pelo teorema da convolução, a transformada de $p_n = p(t)\delta(t)$ no domínio da frequência pode ser obtida a partir da convolução das funções $P(\omega)$ e $D(\omega)$, que por sua vez correspondem às funções $p(t)$ e $\delta(t)$ no domínio da frequência, conforme Figura 5.5.

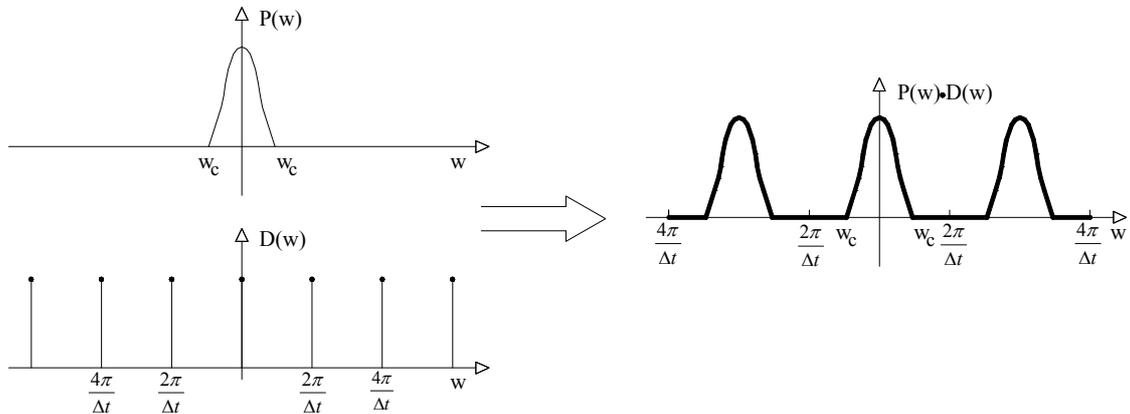


Figura 5.5 - Sinal reconstituído na frequência.

Caso o intervalo de tempo considerado na amostragem seja aumentado, observa-se (Figura 5.6) que o sinal constituído na frequência é sobreposto aos sinais adjacentes. Com isto, o sinal original perde suas características próprias, e a este fenômeno, denomina-se *aliasing*.

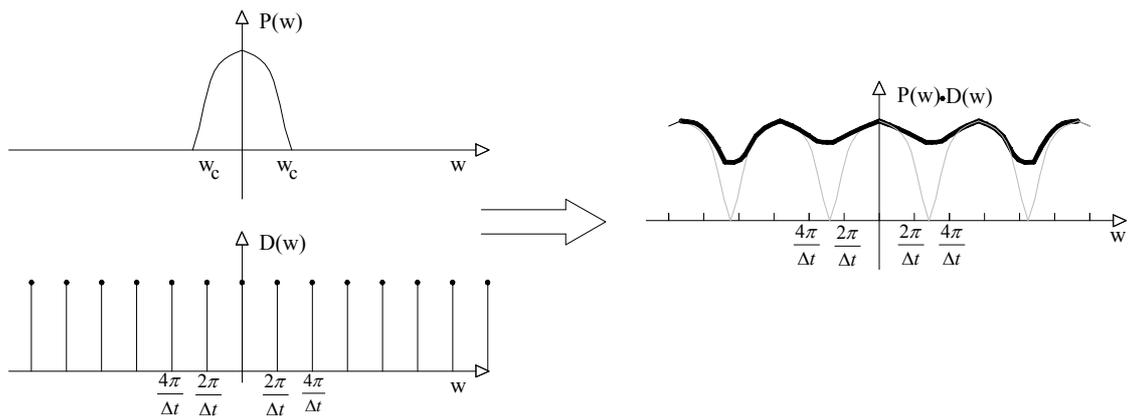


Figura 5.6 - *Aliasing* na reconstituição do sinal na frequência.

Para se garantir que a transformada de Fourier de uma função amostrada não apresente o fenômeno de *aliasing* deve-se adotar intervalos de tempo menores ou iguais

a $\omega = 2\pi f = 2\pi / \Delta t$, onde ω representa a mais alta frequência do espectro da função na frequência.

5.1.3. Amortecimento

Uma maneira de se representar o comportamento visco-elástico de um meio, considerando-se análises efetuadas no domínio da frequência, pode ser obtida, simplesmente substituindo-se o módulo de elasticidade real (E) por um módulo de elasticidade complexo, expresso por

$$E^d = E(1 + i\omega f) \quad (5.12)$$

com

$$f = \frac{c}{E} \quad (5.13)$$

onde c representa o coeficiente de viscosidade do meio.

Este tipo de representação do amortecimento, denominado amortecimento viscoso, no entanto, considera que a energia de dissipação é dependente da frequência. Este resultado, segundo THOMSON (1973) e CLOUGH e PENZIEN (1993), contradiz observações experimentais, nas quais, tomando-se um grande intervalo de frequência ω , E^d permanece constante, para a grande maioria dos materiais utilizados na engenharia, notadamente em problemas de propagação de ondas.

Devido a isto, E^d é substituído por esquema de dissipação dado por

$$E^d = E(1 + ig) \quad (5.14)$$

onde g é o coeficiente de amortecimento constante.

Assim, uma maneira de estabelecer uma aproximação para o mecanismo de amortecimento em um meio elástico, pode ser conseguida redefinindo as constantes de Lamé da seguinte forma

$$\mu^d = \mu(1 + ig_2) \quad (5.15)$$

$$\lambda^d = \lambda(1 + ig_1) \quad (5.16)$$

onde usualmente toma-se $g_2 = g_1$.

Esta segunda maneira de representação do amortecimento é denominada amortecimento histerético, encontrando um largo campo de aplicação em problemas dinâmicos envolvendo solo e também estruturas. Uma vantagem da formulação no domínio da frequência é a fácil introdução de tais tipos de amortecimento.

5.2. Condições Iniciais

Ao resolver um problema dinâmico de propagação de ondas deve-se sempre estabelecer as condições iniciais que especificam a situação a partir do qual começa o acompanhamento da resposta da estrutura sob ação de excitações tempo-dependentes. As condições iniciais, apesar de geralmente não descreverem o comportamento físico da estrutura em tempos anteriores ao tempo de interesse da análise dinâmica, fornecem as informações necessárias sobre o comportamento de um determinado sistema, para a obtenção da correta resposta proveniente da resolução do sistema de equações diferenciais de valor inicial e contorno que descreve o fenômeno de propagação de ondas elásticas.

Em problemas de propagação de ondas, faz-se necessário então, a consideração tanto de deslocamentos quanto de velocidades, no instante inicial da análise. Alternativamente, grandezas relacionadas a estas variáveis, tais como acelerações ou momentos lineares iniciais também podem ser inicialmente fornecidos. Com estas condições estabelecidas, tais problemas de valor inicial e contorno serão (caso os sistemas de equações sejam compatíveis com sistemas físicos reais) perfeitamente determinados e suas respostas serão únicas.

Em problemas analisados no domínio do tempo tem-se trabalhado com a consideração de condições iniciais de forma natural, seja na adoção de técnicas de inicialização de processos de marcha no tempo (COOK, 2001, BATHE 1996, DE LACERDA et al., 1997) ou através da convolução de funções algébricas que englobam

os termos relacionados à presença de condições iniciais, como por exemplo, em MANSUR (1983) ou MANSUR e CARRER (1996).

Na análise de problemas dinâmicos no domínio da frequência, as condições iniciais de deslocamento e velocidades são sempre desconsideradas, conforme apresentado em publicações clássicas tais como THOMSON (1973) e CLOUGH e PENZIEN (1993). Até então, pesquisadores têm trabalhado com esta poderosa ferramenta em problemas dinâmicos de duas maneiras: ou desconsiderando a influência destas condições iniciais na resposta física do sistema (problemas estacionários), ou considerando o sistema em repouso (velocidade e deslocamento nulos) no instante inicial da análise.

Um procedimento bastante eficiente, e que pode ser utilizado tanto na formulação tempo-dependente quanto em problemas analisados via domínios transformados de forma bastante simples, visando incorporar a influências de condições iniciais quaisquer no sistema físico pode ser desenvolvido a partir de equações clássicas da mecânica newtoniana. Tal procedimento será apresentado a seguir.

5.2.1. Deslocamento Inicial

Considere-se um sistema dinâmico com um campo de deslocamentos $\mathbf{U}(\mathbf{x},0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x})$ prescrito, com campo de velocidades iniciais nulo. Considerando o sistema de equilíbrio dinâmico tempo-dependente dado por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\mathbf{U}^t = \mathbf{R}^t \quad (5.17)$$

Como $\ddot{\mathbf{U}}^0 = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{U}}^0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}^0 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{U}^0 \neq \mathbf{0}$ para $t=0$, (5.17) pode ser simplificada, ou seja,

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_0 = \mathbf{F}_U \quad (5.18)$$

com \mathbf{F}_U correspondendo à força (pseudo-força) elástica devido à imposição de um campo de deslocamentos iniciais no sistema. Esta componente pode ser interpretada (Figura 5.7) como a força imposta à estrutura, em instantes de tempo anteriores ao

tempo inicial ($t < 0$) considerado na análise, para que tal estrutura seja mantida na sua configuração inicial \mathbf{U}_0 . Quando $t \geq 0$, esta força deve ser anulada para que o equilíbrio seja mantido. Matematicamente, esta força pode ser incorporada ao sistema considerando-se uma função $H(t - 0)$ do tipo Heaviside, ou seja,

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}}' + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}}' + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}' = \mathbf{R}' - \mathbf{F}_v H(t - 0) = \mathbf{R}' - \mathbf{K}\mathbf{U}_0 H(t - 0) \quad (5.19)$$

e neste caso, o campo de deslocamentos total do sistema estrutural pode ser expresso por

$$\mathbf{U}' = \Delta\mathbf{U}' + \mathbf{U}_0 \quad (5.20)$$

Em problemas analisados via domínio da frequência, a força elástica equivalente pode ser incorporada de maneira análoga ao caso tempo-dependente, ou seja,

$$(\omega^2 \mathbf{M} - i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\Delta\mathbf{U}^\omega = \mathbf{R}^\omega - \mathbf{F}_v H^\omega = \mathbf{R}^\omega - \mathbf{K}\mathbf{U}_0 H^\omega \quad (5.21)$$

onde o índice ω se refere a grandezas complexas e H^ω corresponde à transformada de Fourier da função Heaviside, dada por

$$H^\omega = 2\omega T \frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega T} \quad (5.22)$$

O campo de deslocamentos complexos total será então

$$\mathbf{U}^\omega = \Delta\mathbf{U}^\omega + \delta(\omega)\mathbf{U}_0 \quad (5.23)$$

5.2.2. Velocidade Inicial

A contribuição das condições iniciais, devido a um campo de velocidades prescrito, pode ser obtida a partir de conceitos básicos de mecânica clássica ou

newtoniana. Para mais detalhes destes fundamentos vide FRENCH (1974) e MALVERN (1969).

Quantidade de Movimento (Q): A quantidade de movimento, que consiste numa grandeza conservativa, ou seja, em um determinado sistema físico seu valor permanece constante com o tempo, pode ser definida como o produto entre as massas das partículas constituintes do meio por suas respectivas velocidades, ou seja,

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v} \quad (5.24)$$

Impulso (I): O impulso de uma determinada força \mathbf{F} , que atua em uma partícula de massa igual a m inicialmente em movimento retilíneo uniforme com velocidade igual a \mathbf{v}_0 , em um intervalo de tempo dt , consiste no produto desta força pelo intervalo de tempo. Como, pelas Leis de Newton tem-se

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (5.25)$$

Após multiplicação por dt e integrando vem

$$\mathbf{I} = \int_{0-\varepsilon}^0 \mathbf{F} dt = \int_{\mathbf{v}_{0-\varepsilon}}^{\mathbf{v}_0} m d\mathbf{v} = m(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0-\varepsilon}) = m\mathbf{v}_0 \quad (5.26)$$

E conclui-se que o impulso corresponde a uma variação na quantidade de movimento de determinada partícula.

Assim, a contribuição das condições iniciais (Figura 5.8), devido a um campo de velocidades prescrito $\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{x},0) = \dot{\mathbf{U}}_0(\mathbf{x})$, pode ser obtida pelo postulado básico da mecânica do contínuo, o qual estabelece que a variação da quantidade de movimento de um sistema dinâmico qualquer corresponde ao impulso devido à aplicação da força externa resultante \mathbf{F}_V , ou seja,

$$\int_0^{t+} \mathbf{F}_V dt = \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}_0 \quad (5.27)$$

Que segue (MORSE e FESHBACH, 1953, BUTKOV, 1988)

$$\mathbf{F}_V = \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}_0\delta(t-0) \quad (5.28)$$

com $\delta(t-0)$ correspondendo à função delta de Dirac, cuja unidade corresponde ao inverso da unidade de tempo. A partir do conceito de funções generalizadas (BUTKOV, 1988) a função delta de Dirac pode ser aproximada por uma função constante atuando apenas no primeiro intervalo de tempo, de forma que as resultantes das forças impulsivas correspondentes a estas funções sejam iguais. Assim \mathbf{F}_V pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_V &= \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}_0\delta(t-0) \cong \frac{\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}_0}{\Delta t} & t \leq \Delta t \\ \mathbf{F}_V &= 0 & t > \Delta t \end{aligned} \quad (5.29)$$

Desta forma o campo de deslocamentos \mathbf{U}^t , devido à introdução de condições iniciais de velocidades, pode ser calculado por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\mathbf{U}^t = \mathbf{R}^t + \mathbf{F}_V\delta(t-0) = \mathbf{R}^t + \mathbf{M}\mathbf{V}_0\delta(t-0) \quad (5.30)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\mathbf{U}^t &= \mathbf{R}^t + \frac{\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}_0}{\Delta t} & t \leq \Delta t \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\mathbf{U}^t &= \mathbf{R}^t & t > \Delta t \end{aligned} \quad (5.31)$$

No domínio da frequência, uma vez que a transformada de Fourier da função delta de Dirac é igual a 1 ($\delta^\omega = 1$), o campo de deslocamentos complexos \mathbf{U}^ω devido a presença de condições iniciais de velocidade pode ser obtido da expressão

$$(\omega^2\mathbf{M} - i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{U}^\omega = \mathbf{R}^\omega + \mathbf{F}_V\delta^\omega = \mathbf{R}^\omega + \mathbf{M}\mathbf{V}_0\delta^\omega = \mathbf{R}^\omega + \mathbf{M}\mathbf{V}_0 \quad (5.32)$$

5.2.3. Caso Geral

Considerando um problema de propagação de ondas, analisado no domínio do tempo, tem-se que a resposta final da estrutura \mathbf{U}^t , devido à ação de uma força externa \mathbf{R}^t , um campo inicial de velocidades \mathbf{V}_0 e de deslocamentos \mathbf{U}_0 , pode ser obtida a partir da seguinte expressão (ver Figura 5.9)

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^t = \mathbf{R}^t - \mathbf{K}\mathbf{U}_0H(t-0) + \mathbf{M}\mathbf{V}_0\delta(t-0) \quad (5.33)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^t &= \mathbf{R}^t - \mathbf{K}\mathbf{U}_0H(t-0) + \frac{\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}_0}{\Delta t} & t \leq \Delta t \\ \mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^t &= \mathbf{R}^t - \mathbf{K}\mathbf{U}_0H(t-0) & t > \Delta t \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde $\mathbf{U}^t = \Delta\mathbf{U}^t + \mathbf{U}_0$.

Desta forma, a extrapolação do campo de deslocamentos para o tempo anterior ao tempo inicial da análise ($\mathbf{U}^{-\Delta t}$), utilizado no procedimento de inicialização dos algoritmos tempo-dependentes (BATHE, 1996), dado pela expressão

$$\mathbf{U}^{-\Delta t} = \mathbf{U}^0 - \Delta t\dot{\mathbf{U}}^0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{U}}^0 \quad (5.35)$$

onde

$$\ddot{\mathbf{U}}^0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{R}^0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^0 - \mathbf{K}\mathbf{U}^0) \quad (5.36)$$

pode ser eliminada, ou seja, considera-se $\mathbf{U}^{-\Delta t} = \mathbf{U}^0 = \dot{\mathbf{U}}^0 = 0$ e o vetor de carregamentos passa a ser expresso por

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^t - \mathbf{K}\mathbf{U}_0 + \frac{\mathbf{M}\mathbf{V}_0}{\Delta t} & & t \leq \Delta t \\ \mathbf{R}^t - \mathbf{K}\mathbf{U}_0 & & t > \Delta t \end{aligned} \quad (5.37)$$

Em problemas frequência-dependentes, a resposta complexa final da estrutura \mathbf{U}^ω pode ser obtida de

$$(\omega^2 \mathbf{M} - i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\Delta \mathbf{U}^\omega = \mathbf{R}^\omega - \mathbf{K} \mathbf{U}_0 H^\omega + \mathbf{M} \mathbf{V}_0 \delta^\omega = \mathbf{R}^\omega - \mathbf{K} \mathbf{U}_0 H^\omega + \mathbf{M} \mathbf{V}_0 \quad (5.38)$$

com $\mathbf{U}^\omega = \Delta \mathbf{U}^\omega + \delta(\omega) \mathbf{U}_0$.

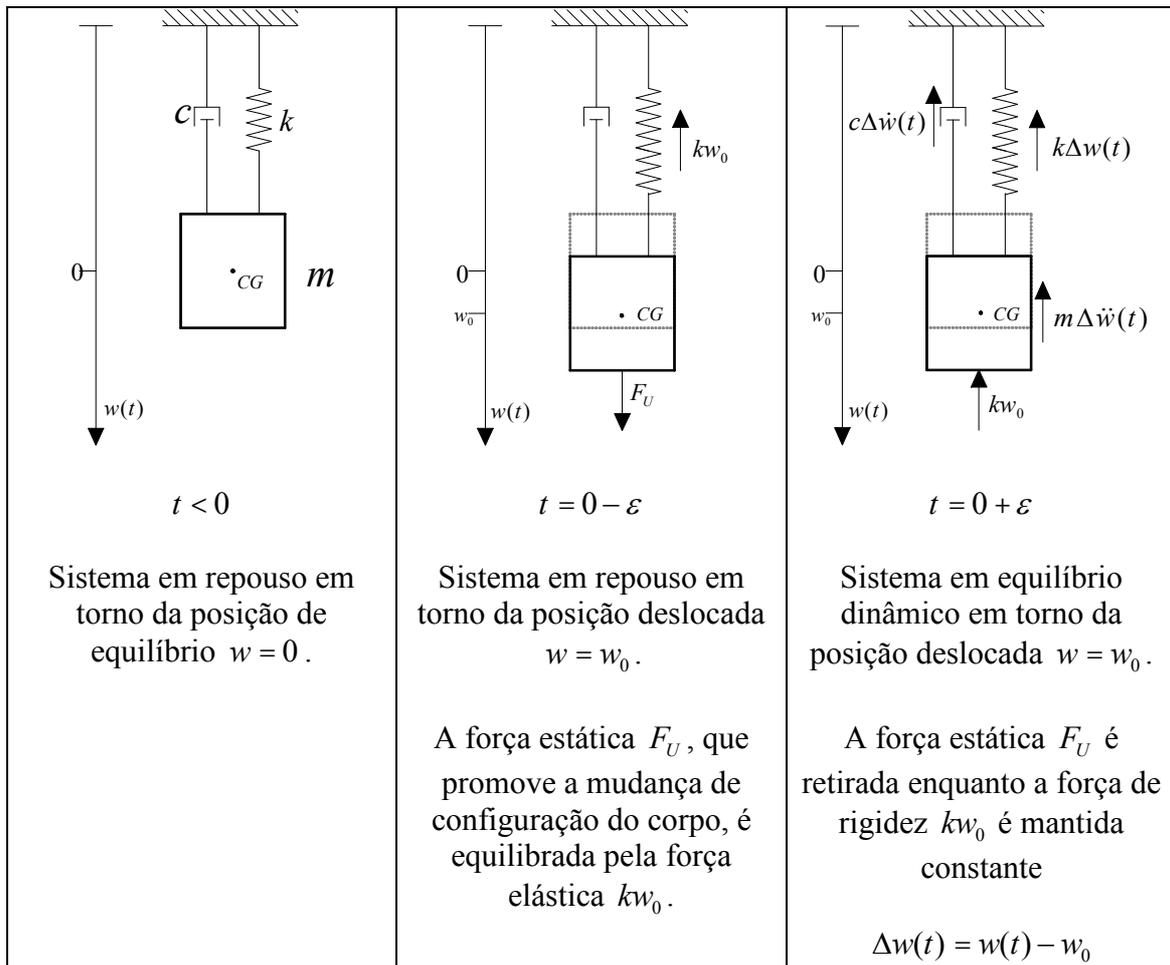


Figura 5.7 – Pseudoforça devido a um deslocamento inicial aplicada a um sistema unidimensional massa-mola-amortecedor.

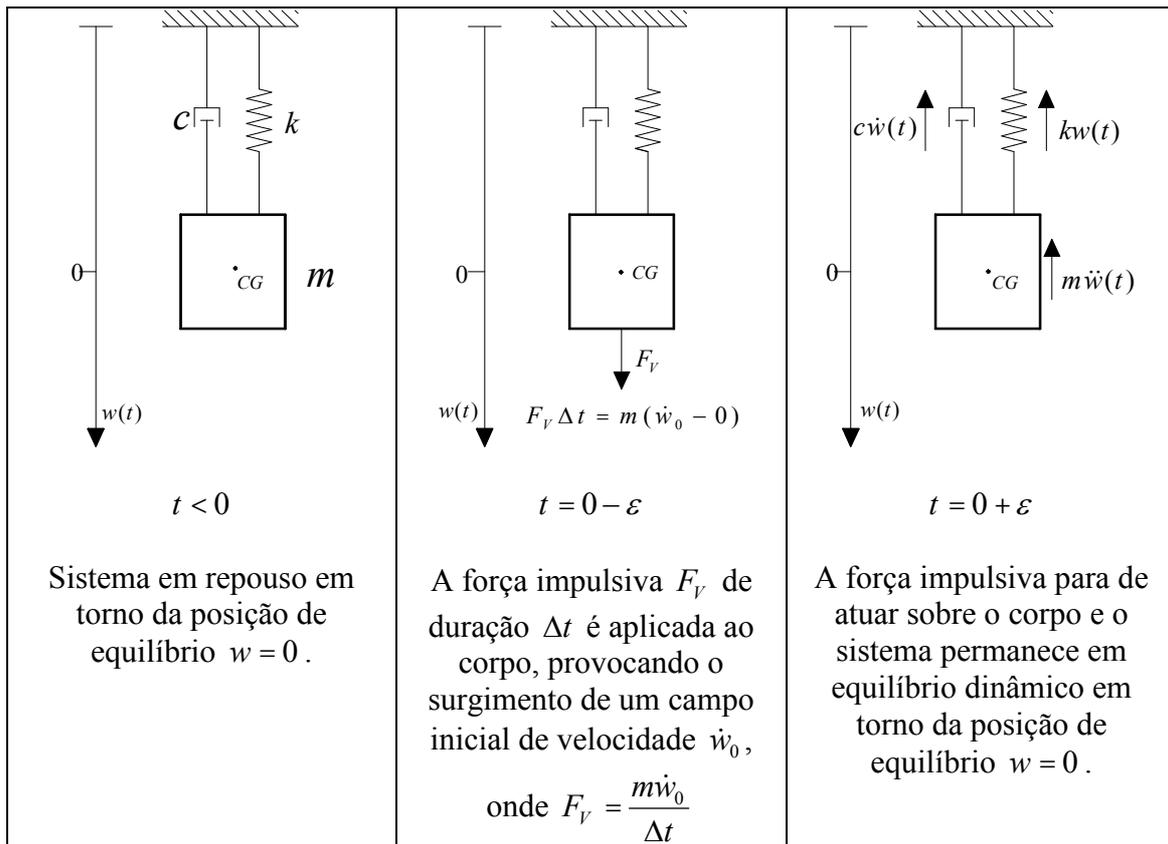


Figura 5.8 – Pseudoforça devido a um campo de velocidade inicial aplicada a um sistema unidimensional massa-mola-amortecedor.

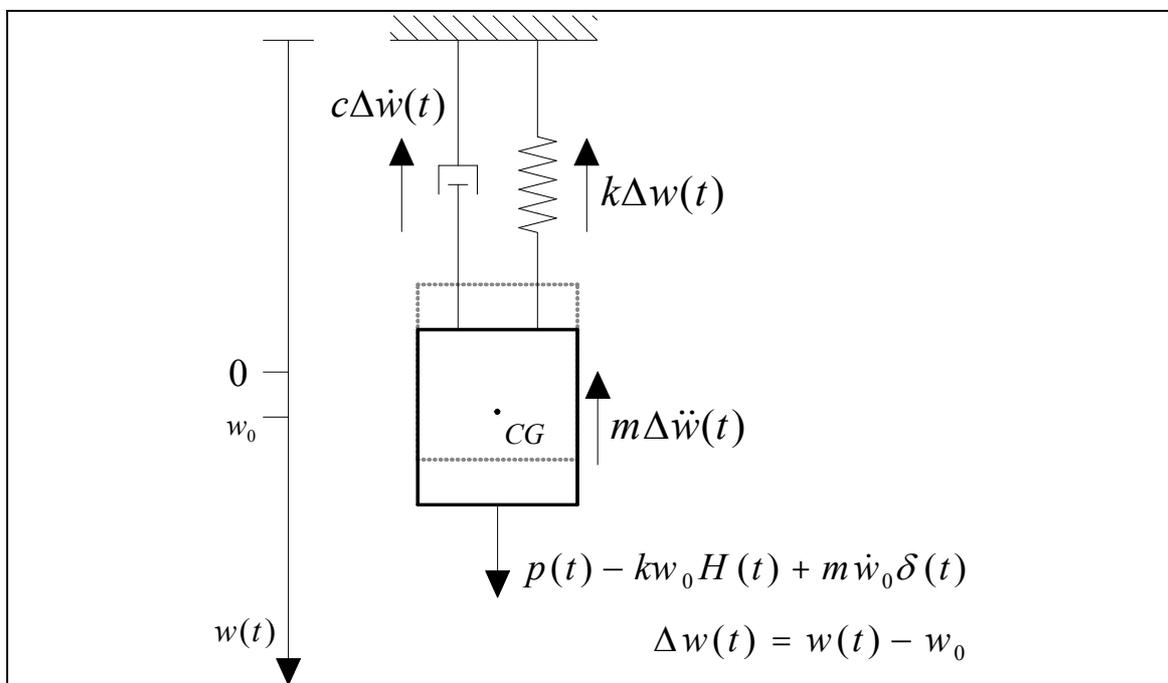


Figura 5.9 – Pseudoforça devido aos campos de deslocamento e velocidade iniciais.

6. APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos com os diversos algoritmos desenvolvidos neste trabalho e listados no APÊNDICE 5. O primeiro exemplo tem por objetivo ressaltar a importância da utilização das abordagens no tempo e frequência, ao se tratar de problemas dinâmicos. Em seguida apresentam-se exemplos onde são incorporadas as presenças de estados iniciais de deslocamento e/ou velocidades. As respostas 2D/3D, tanto no domínio da frequência quanto no tempo, são comparadas à solução exata dos problemas. Assim, demonstra-se que a qualidade das respostas obtidas é satisfatória.

Por fim, será considerada a resolução de problemas de propagação de ondas 2D, em modelos geofísicos com alto grau de complexidade e elevado número de graus de liberdade, considerando-se o desenvolvimento de algoritmos em *cluster* de microcomputadores, comparando-se tais respostas às obtidas via Método das Diferenças Finitas (MDF), largamente utilizado na modelagem de problemas geofísicos. Serão considerados modelos geológicos acústicos e elásticos e análise de performance em *cluster* de PC's via PVM.

6.1. Modelagem 3D elástica: Análise conjunta tempo-frequência

Neste exemplo, objetiva-se ilustrar a importância da utilização das duas ferramentas discutidas neste trabalho, quais sejam, as abordagens no domínio do tempo e frequência, em problemas dinâmicos de propagação de ondas. Primeiramente, será apresentada uma situação em que a análise efetuada somente no domínio do tempo pode conduzir o projetista a uma situação de falha na concepção estrutural de um projeto. Em seguida, será apresentada uma situação inversa, ou seja, discute-se uma modelagem em que a análise frequência-dependente pode subestimar as deformações que ocorrem na estrutura e provocar erros no dimensionamento estrutural.

Considere-se o projeto de uma fundação de máquina de rigidez elevada. Esta fundação, constituída por um bloco quadrado com um metro de lado, estará sujeita a uma força periódica senoidal distribuída sobre sua superfície superior. Será considerado

que a fundação apóia-se em uma estrutura perfeitamente rígida, conforme apresentado na Figura 6.1.

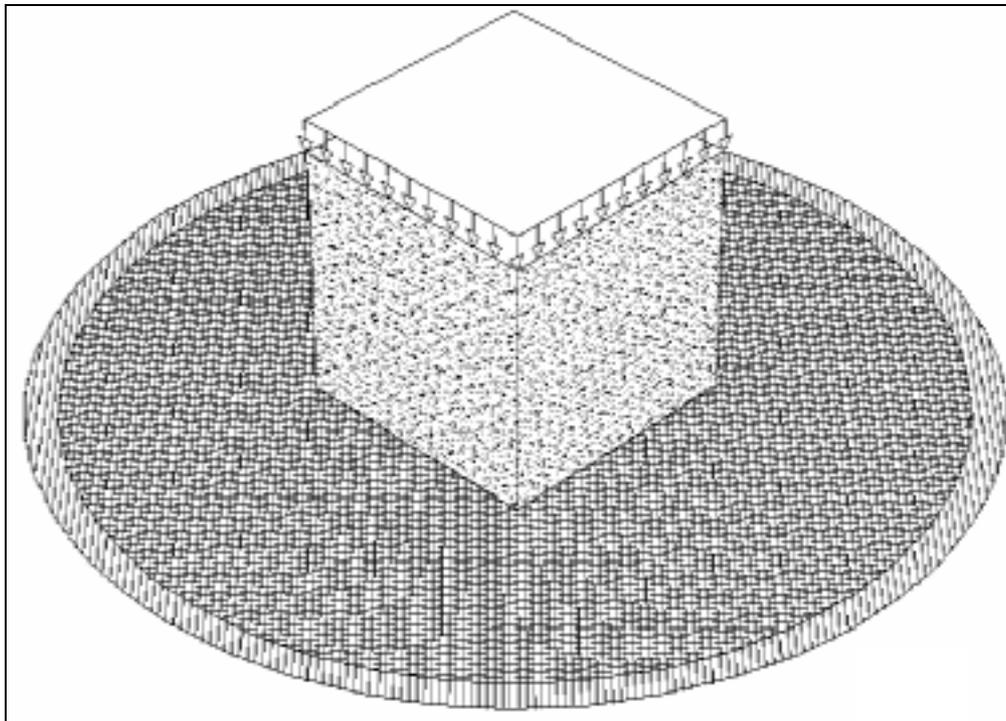


Figura 6.1 - Fundação de máquina sob base rígida.

6.1.1. Importância da análise no domínio da frequência

O projetista terá à disposição, no dimensionamento desta fundação, a possibilidade de utilização de dois tipos de materiais diferentes, cujos módulos de elasticidades são 200MPa e 20000 MPa, respectivamente. Adotou-se para a massa específica o valor de 2500 kg/m^3 e coeficiente de Poisson nulo em todos os modelos deste exemplo. A pressão exercida pela máquina sobre a fundação vale 100 MPa. Considerando um comportamento unidimensional do bloco, o deslocamento vertical pode ser calculado, para o caso de carregamento senoidal aplicado, segundo analogia com um sistema massa-mola (Figura 6.2), cuja resposta analítica (PRODONOFF, 1990) pode ser expressa por

$$u(\omega, x, t) = \left[\frac{P}{G A} \frac{c}{\omega} \frac{\sin(\frac{\omega x}{c})}{\cos(\frac{\omega L}{c})} \right] \sin(\omega t) \quad (6.1)$$

com G , A , P , L e c correspondendo ao módulo de elasticidade, área da seção transversal, carga distribuída, comprimento longitudinal e velocidade de propagação da onda compressional, respectivamente.

O problema foi modelado no domínio da frequência e tempo considerando-se a discretização espacial de uma malha regular composta por $21 \times 21 \times 21$ nós e 1000 elementos prismáticos quadráticos lagrangeanos de 27 nós. Detalhes da malha podem ser vistos na Figura 6.3.

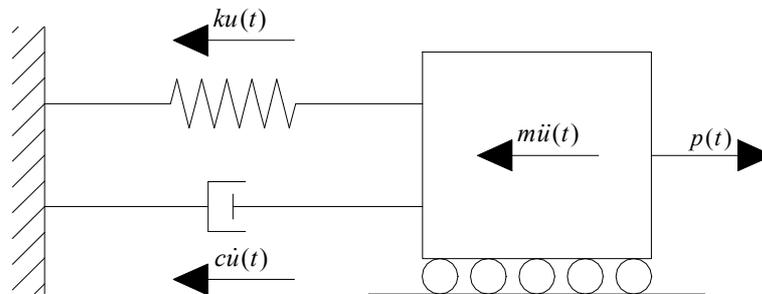


Figura 6.2 – Sistema massa-mola-amortecedor.

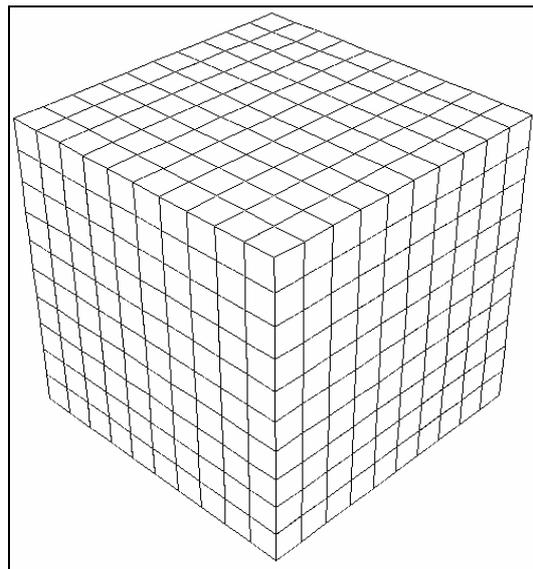


Figura 6.3 - Discretização do bloco exemplo 1.
($21 \times 21 \times 21$ nós, 1000 elementos prismáticos de 27 nós).

Supondo que o projetista efetue a análise, utilizando como ferramenta um algoritmo de marcha no tempo, para a situação mais desfavorável em termos de amplitude de vibração do bloco, ou seja, módulo de elasticidade igual a 200Mpa, e considerando frequência de carregamento de 1500Hz, por exemplo, o valor máximo de amplitude harmônica pode ser obtido quando a resposta no tempo passa a ter um comportamento estacionário (para isto deve-se introduzir amortecimento no sistema, visando dissipar a influência da condição inicial). Como esta condição de regime permanente ocorre em períodos de tempo prolongados, a análise torna-se dispendiosa para vários valores de frequência de excitação ou diversos materiais à disposição, e o projetista poderá optar por realizar a análise para o caso mais favorável (módulo de elasticidade igual a 20000 MPa), verificando novamente o deslocamento obtido no regime estacionário, e desta forma supor que, para materiais com rigidez intermediária, o deslocamento máximo do bloco ficará compreendido entre os valores extremos, ou ainda, que variações na amplitude dos deslocamentos máximos do bloco serão desprezíveis quando a frequência de excitação da máquina variar em torno de 1500Hz.

Ambas as suposições estão completamente erradas, e podem ser facilmente verificadas efetuando-se análise no domínio da frequência. As Figura 6.4, Figura 6.5 e Figura 6.6 apresentam os resultados de amplitude máxima, para módulos de elasticidades iguais 200MPa, 2000MPa e 20000MPa respectivamente, em função da frequência de excitação do carregamento senoidal aplicado, obtido com o algoritmo desenvolvido neste trabalho. Com base nestas figuras, pode-se observar que as amplitudes máximas são influenciadas significativamente pelas frequências de excitação do carregamento, e que no caso do material menos rígido (Figura 6.4), uma frequência de excitação um pouco menor que 1500Hz corresponde a um elevado valor de deslocamento, que se não for previsto em projeto, pode provocar o colapso do bloco. Por outro lado, caso o projetista tenha segurança que a frequência real de excitação da estrutura será 1500Hz, mas queira utilizar um material de rigidez intermediária ($E=2000\text{MPa}$) na confecção do bloco, partindo da suposição que o deslocamento máximo, para esta frequência, será menor que o obtido considerando-se a rigidez igual a 200MPa, estará sendo conduzido a outro equívoco, pois pode-se observar que a resposta à excitação será bem maior (Figura 6.5) para o material de rigidez 2000MPa.

Estes fenômenos de ressonância não constituem nenhuma novidade na área de dinâmica estrutural e foram apresentados neste trabalho apenas com o objetivo de

ressaltar a importância da consideração de algoritmos frequência-dependentes em análises dinâmicas.

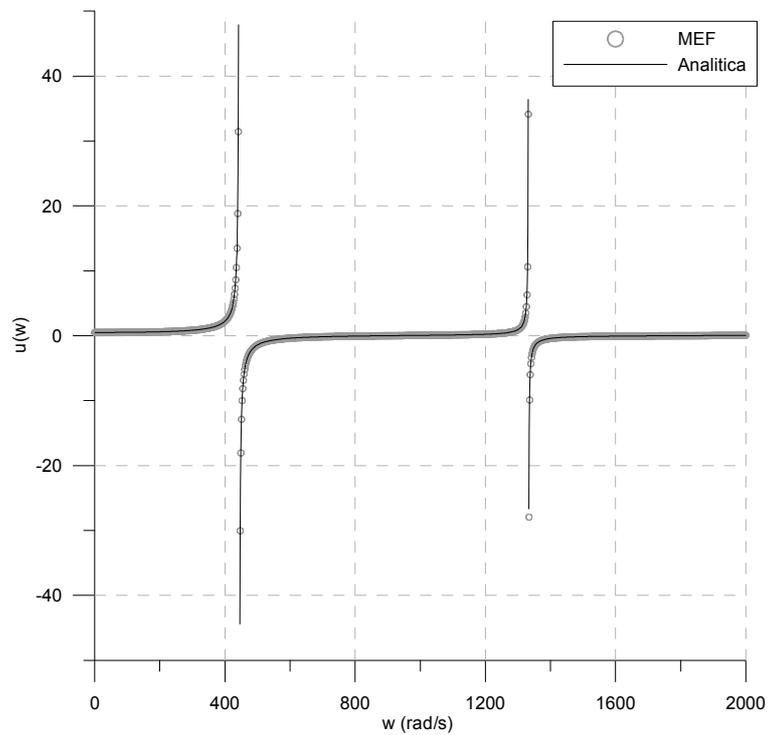


Figura 6.4 – Amplitude de deslocamento no bloco (E=200MPa).

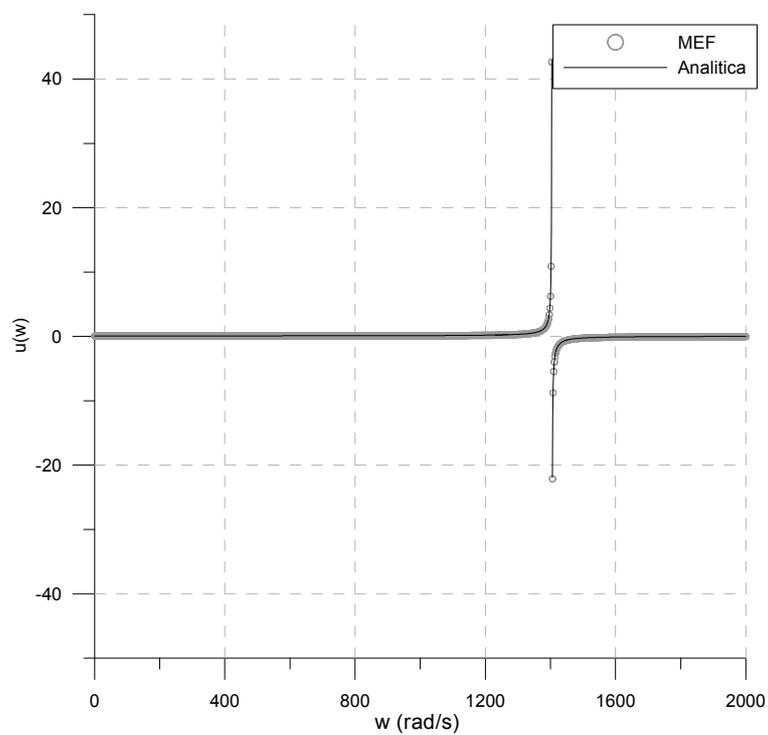


Figura 6.5 - Amplitude de deslocamento no bloco (E=2000MPa)

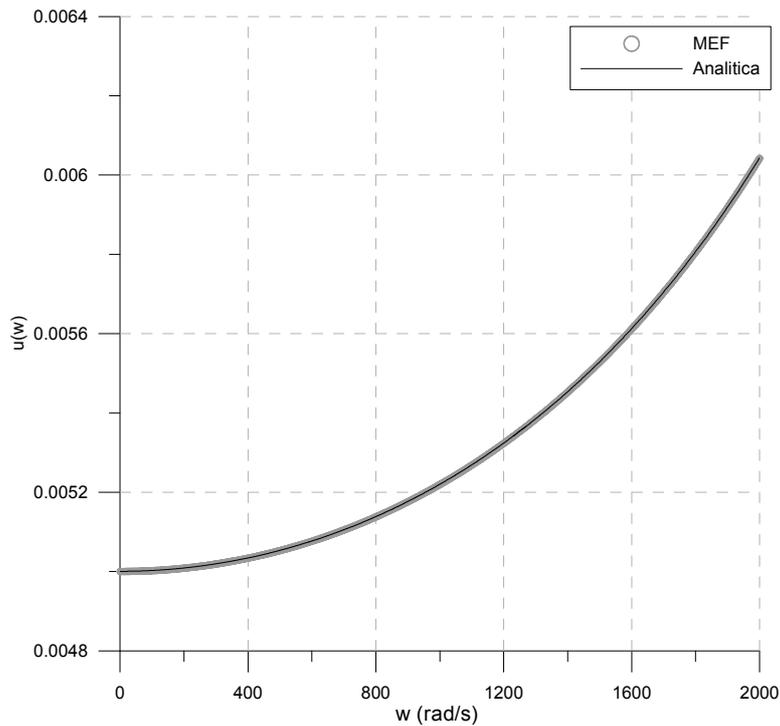


Figura 6.6 - Amplitude de deslocamento no bloco ($E=20000\text{MPa}$).

6.1.2. Importância da análise no domínio do tempo

Suponha-se agora que o projetista efetue a análise do bloco sob excitação senoidal de 450Hz por meio do algoritmo de análise no domínio da frequência. O valor obtido corresponde à amplitude da parte estacionária da resposta. Ao se efetuar a mesma análise no domínio do tempo (Figura 6.7), observa-se que, devido às condições iniciais nulas de velocidade e deslocamento do bloco, ocorre uma amplificação transitória na resposta, que em situações de dimensionamento com baixo fator de segurança, podem acarretar em colapso da estrutura. Desta forma, a análise no domínio do tempo não pode ser descartada, mesmo em problemas estacionários.

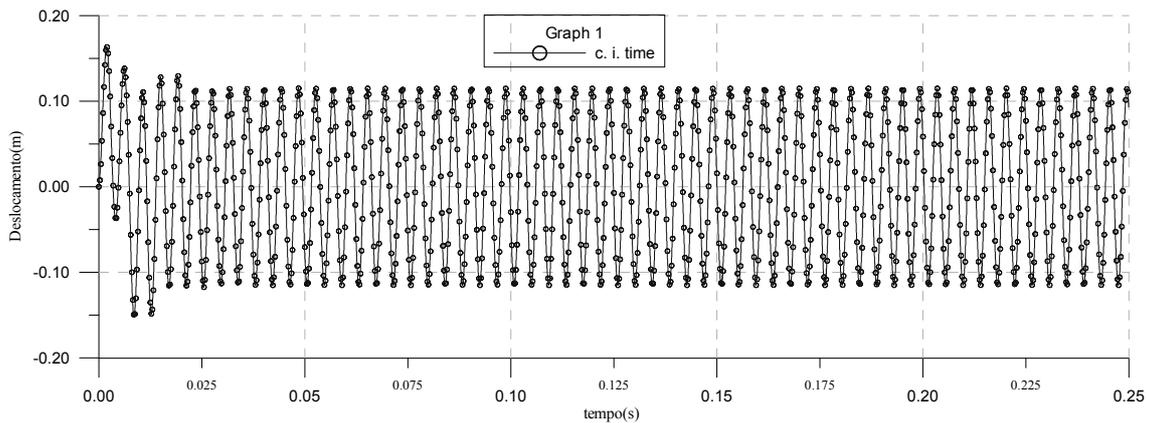


Figura 6.7 – Resposta de amplitude máxima no tempo.

6.2. Modelagem 3D acústica: Barra sob carregamento axial e condições iniciais em todo o domínio

Seja uma barra prismática, de comprimento igual a 1,20 metros, engastada em uma extremidade e carregada axial e uniformemente em sua extremidade livre. A velocidade de propagação do material constituinte da barra e sua massa específica foram definidas em 1000m/s e $0,01 \text{ kg/m}^3$, respectivamente. A barra foi discretizada em 4000 elementos prismáticos lineares de 8 nós, totalizando 4961 graus de liberdade (Figura 6.8).

Deseja-se conhecer o comportamento desta barra, quando o carregamento axial é aplicado bruscamente e mantido constante ao longo do tempo (carregamento tipo Heaviside). Considerando um tempo de análise de 9,6 milisegundos, adotou-se, na abordagem frequência-dependente, período total de análise igual a 192 milisegundos (período de carregamento somado ao estendido) e 4096 pontos na transformada. A Figura 6.9 apresenta o gráfico do carregamento tempo-dependente periódico considerado. O correspondente espectro de frequência após aplicação de um algoritmo FFT pode ser visto na Figura 6.10, onde P e θ correspondem, respectivamente, ao módulo e fase do espectro.

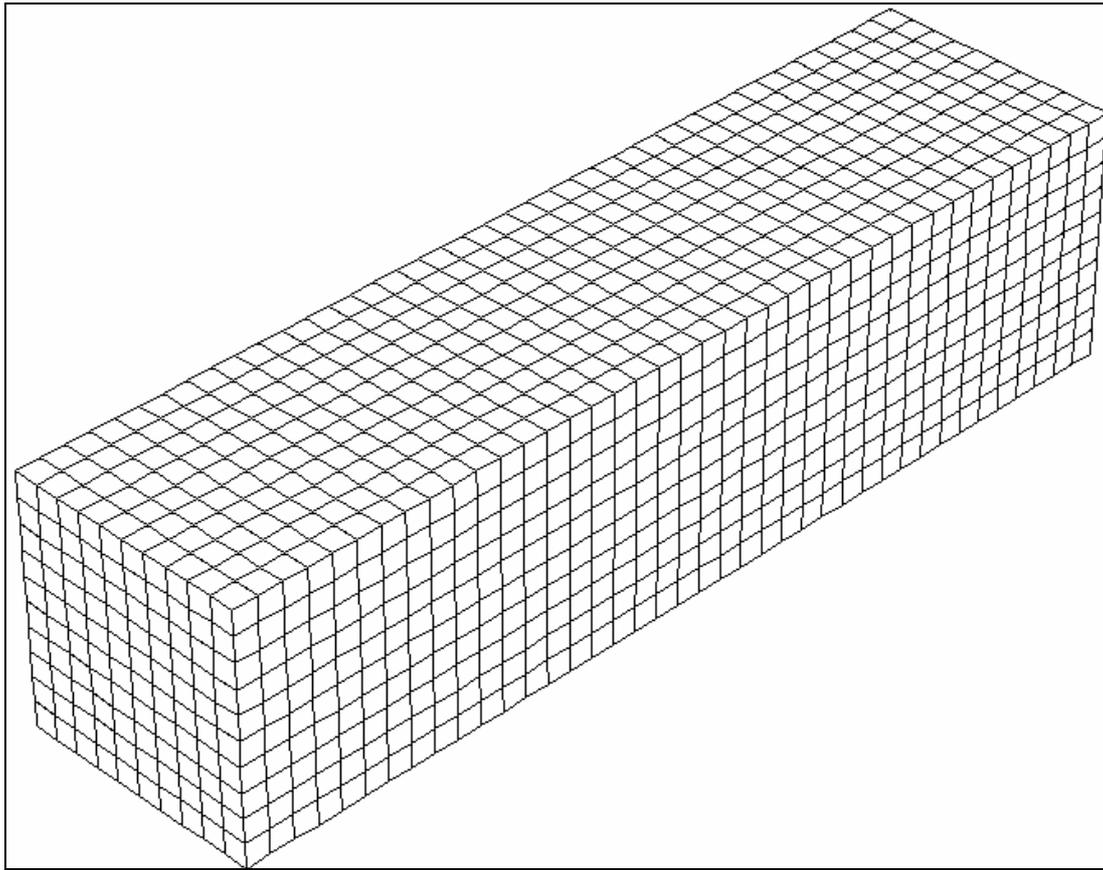


Figura 6.8 - Discretização da barra do exemplo 2.
(4961 nós, 4000 elementos lineares de 8 nós).

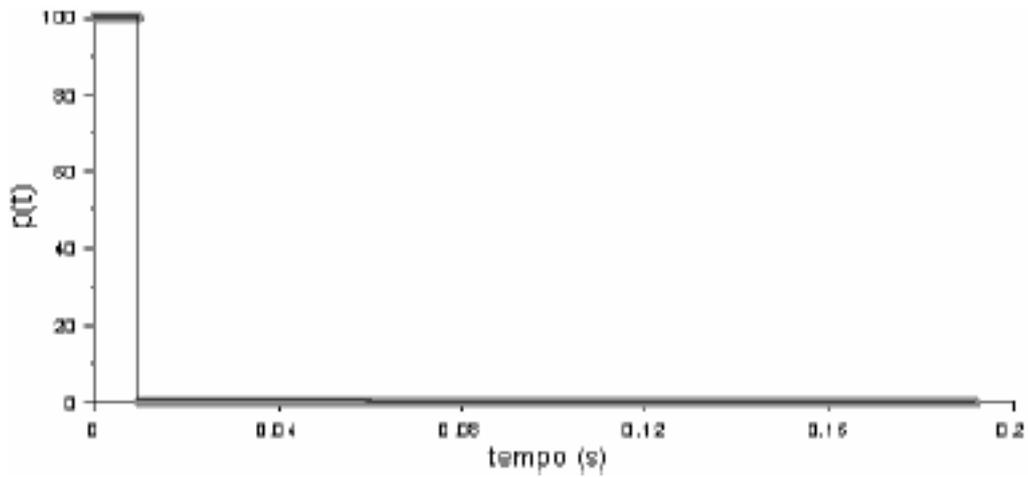


Figura 6.9 – Carregamento periódico considerado no exemplo 2.

Considerou-se a presença de um estado inicial de campos de deslocamentos (U_0) e velocidades (V_0) nesta análise, dados pelas expressões

$$\begin{cases} U_0 = \frac{P_0 L}{EA} \cdot \frac{x}{L}, & 0 \leq x \leq L \\ V_0 = \frac{P_0 c}{EA}, & c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{cases} \quad (6.2)$$

onde P_0 , L , E , A , ρ , e c correspondem à magnitude do carregamento de Heaviside aplicado no modelo, comprimento, rigidez, área da seção transversal, peso específico e velocidade de compressão da barra, respectivamente.

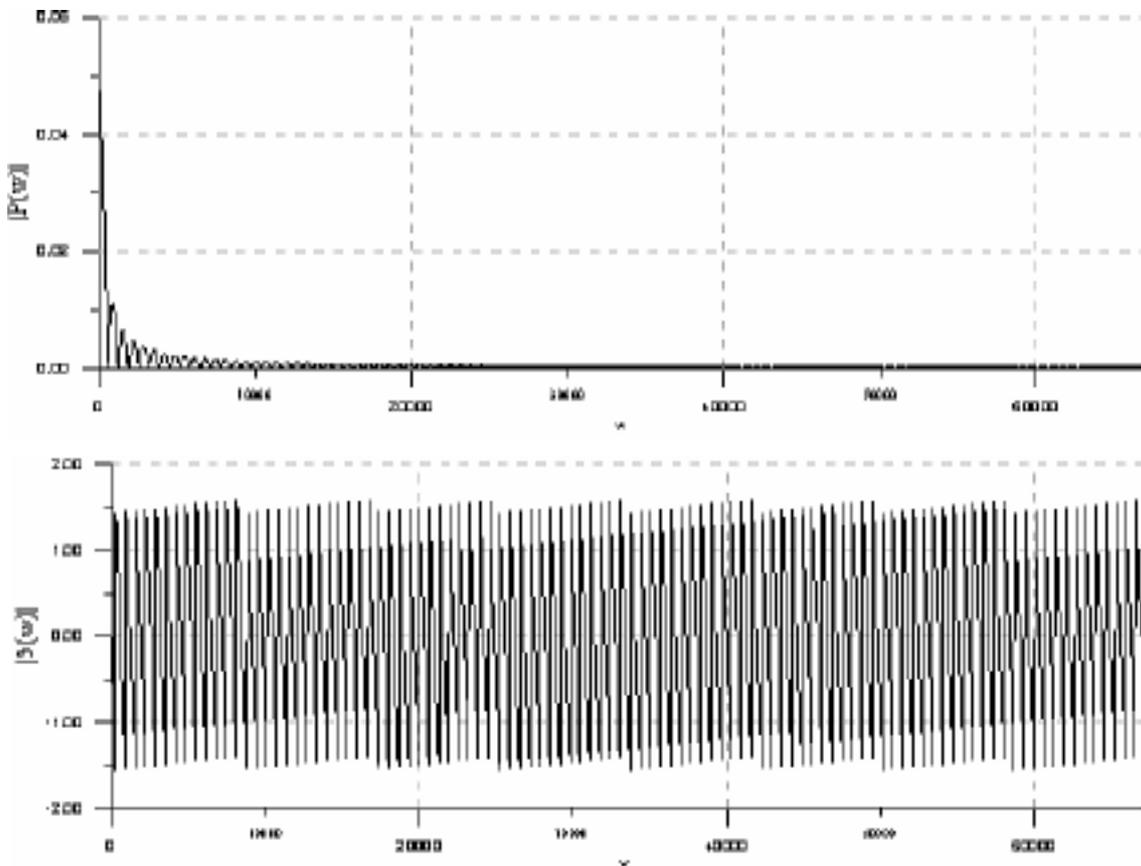


Figura 6.10 – Espectro (amplitude e fase) do carregamento considerado no exemplo 2.

A Figura 6.11 apresenta os resultados de amplitude de deslocamento da extremidade livre da barra em função do tempo, obtidos via esquema implícito HHT de integração temporal (TD-HHT), esquema de análise no domínio da frequência considerando amortecimento histerético com fator 0,025 (FD-histeretico) e viscoso com fator 0,10 (FD-viscoso). A Figura 6.12 apresenta os resultados de velocidade na

extremidade livre e centro da barra em função do tempo, para as mesmas situações de análise.

Na Figura 6.13 apresenta-se o número de iterações gastos pelo *solver* iterativo gradiente conjugado com condicionamento diagonal (Jacobi) na resolução dos sistemas lineares resultantes, normalizados em relação à ordem do sistema. Pode-se observar que a eficiência do *solver* iterativo é bastante satisfatória, uma vez que o número de iterações necessárias para se atingir a convergência, nos diversos sistemas lineares analisados, ficou bem abaixo da ordem do sistema.

Observando as respostas de deslocamentos e velocidades apresentados na Figura 6.11 e Figura 6.12, respectivamente, conclui-se que o algoritmo desenvolvido consegue englobar a presença de condições iniciais em problemas analisados no domínio da frequência, tanto em termos de deslocamentos quanto de velocidades prescritos, de forma satisfatória.

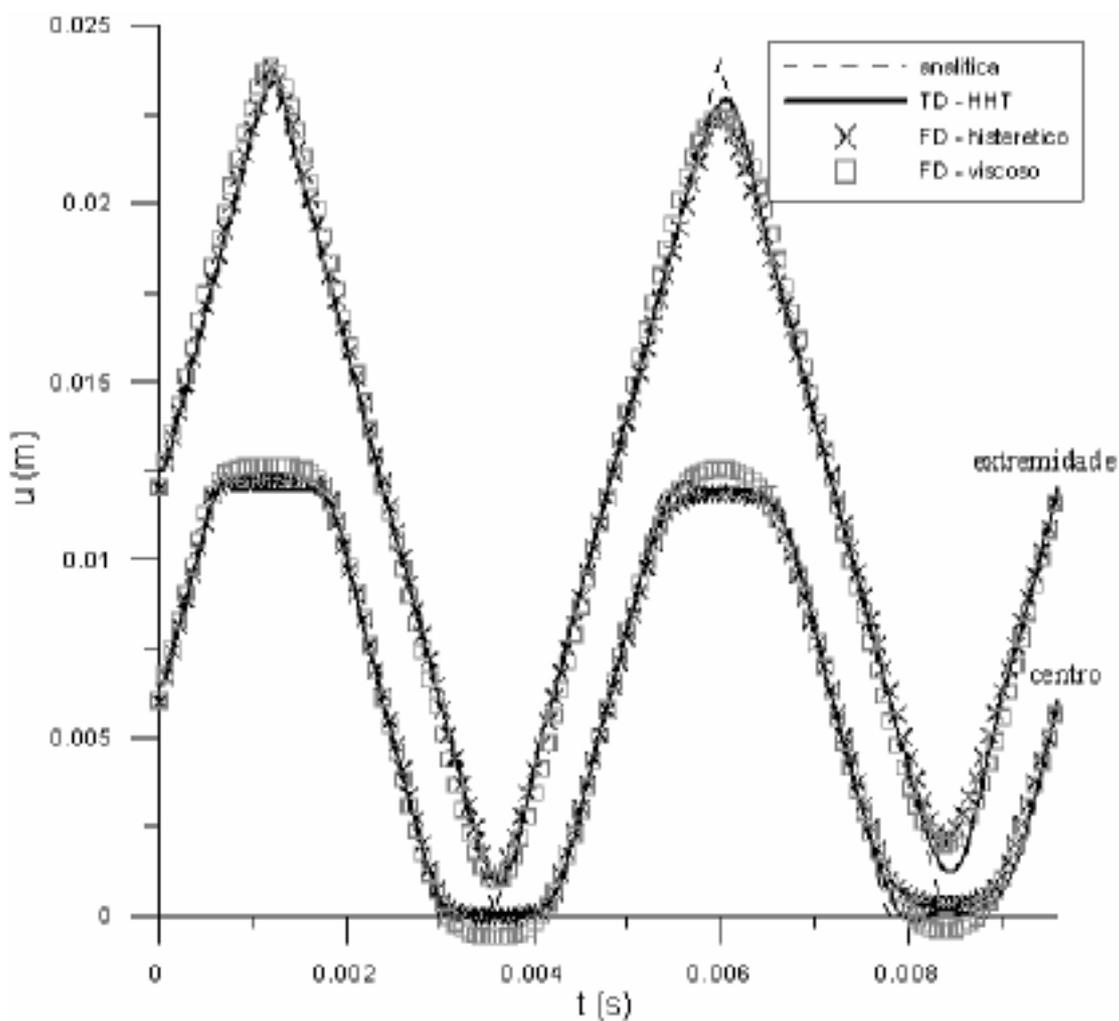


Figura 6.11 – Respostas de deslocamento na extremidade e centro da barra (exemplo 2).

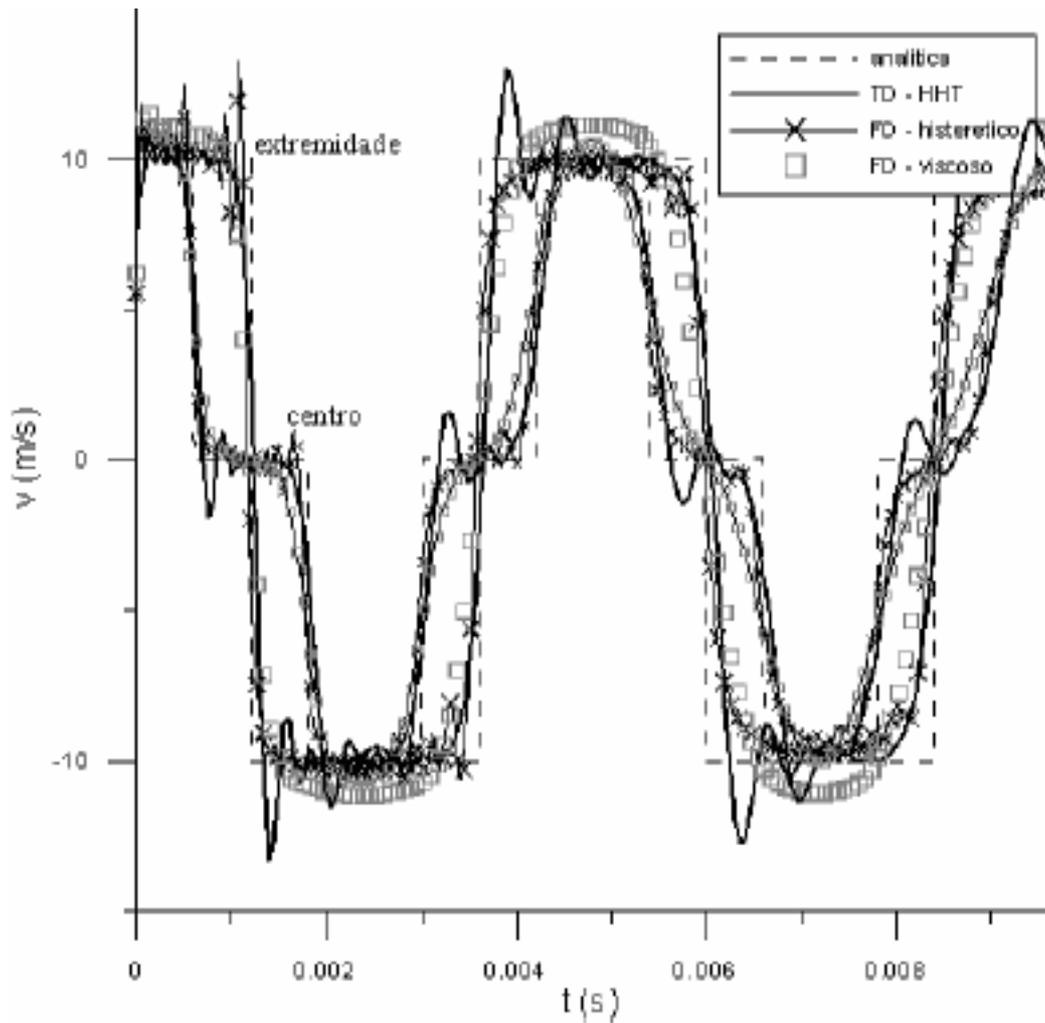


Figura 6.12 – Respostas de velocidade na extremidade e centro da barra (exemplo 2).

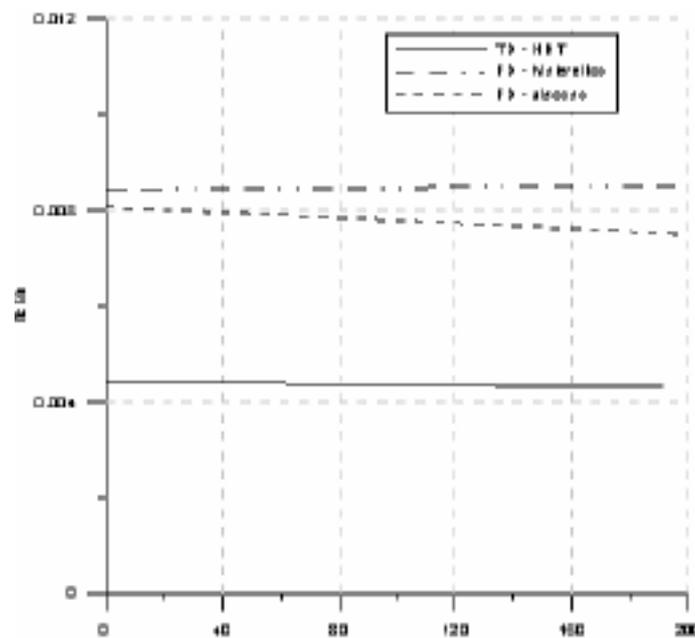


Figura 6.13 – Número de iterações normalizado pela ordem do sistema (exemplo 2).

6.3. Modelagem 3D acústica: Barra sob carregamento axial e condições iniciais em parte do domínio

A mesma barra do exemplo anterior foi analisada, considerando-se as condições iniciais expressas por

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = \frac{1}{4} \frac{P_0 L}{EA} \cdot \left(x - \frac{3L}{4}\right) \frac{4}{L}, \quad \frac{3L}{4} \leq x \leq L \\ U_0 = 0, \quad 0 \leq x < \frac{3L}{4} \\ V_0 = \frac{P_0 c}{EA}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

A Figura 6.14 e Figura 6.15 apresentam os resultados de deslocamentos e velocidades na extremidade e no centro da barra, considerando-se análise no domínio do tempo via esquema implícito HHT e domínio da frequência considerando-se amortecimento hysterético. Como no exemplo anterior, conclui-se que as respostas obtidas são satisfatórias e conseguem reproduzir a presença de campos iniciais de deslocamentos e velocidades.

A Figura 6.16 apresenta o número de iterações, normalizado em função da ordem dos sistemas analisados, considerando-se tanto o esquema de marcha no tempo quanto na frequência. Considerou-se, no processo de inicialização do procedimento iterativo de resolução dos sistemas, a solução inicial nula (TD-started e FD-started para problemas tempo e frequência dependentes, respectivamente), bem como a utilização da resposta anterior como solução inicial do passo de tempo ou frequência atual (TD-update e FD-update). Observa-se que a consideração de solução inicial adaptativa (solução inicial baseada no passo anterior) promove uma pequena redução no número de iterações. Ao longo do processo de marcha no tempo ou frequência, no entanto, a redução do número de iterações pode ser significativa. Assim, é aconselhável a adoção desta técnica de inicialização dos *solvers*, uma vez que tal procedimento pode ser facilmente implementado nos algoritmos de marcha no tempo e frequência.

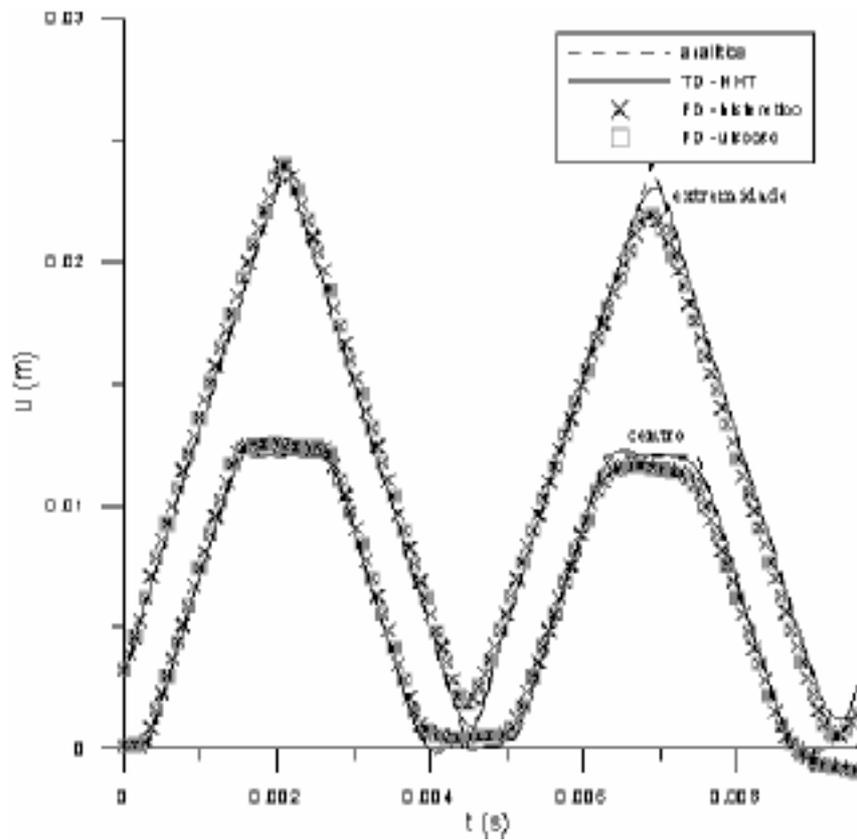


Figura 6.14 – Respostas de deslocamento na extremidade e centro da barra (exemplo 3).

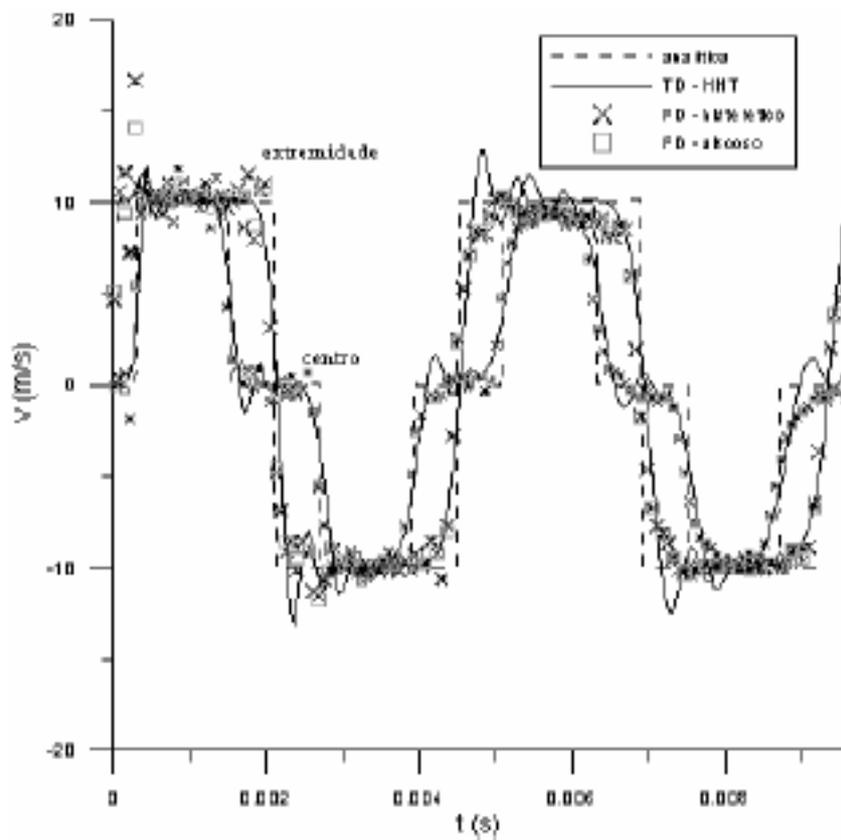


Figura 6.15 – Respostas de velocidade na extremidade e centro da barra (exemplo 3).

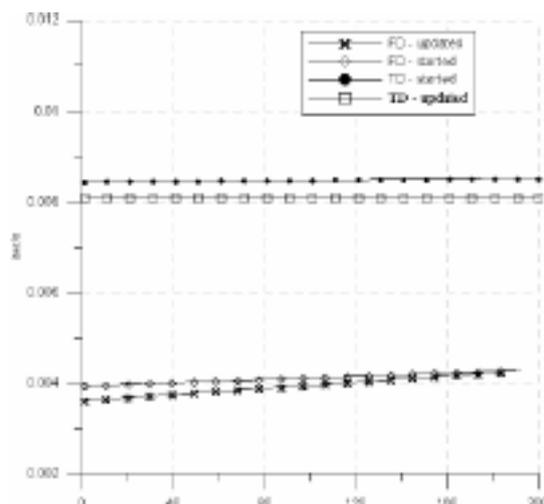


Figura 6.16 – Número de iterações normalizado pela ordem do sistema (exemplo 3).

6.4. Modelagem 3D/2D acústica: Membrana sob condição inicial de velocidade

Neste exemplo considerou-se uma membrana quadrada de lado igual a 50 centímetros, engastada em suas extremidades, sob condições iniciais (ver Figura 6.17a para mais detalhes) dadas pelas expressões

$$\begin{cases} U_0 = 0, & [0 \leq x \leq L] \cap [0 \leq y \leq L] \cap [0 \leq z \leq h] \\ V_0 = \frac{100c}{EA}, & \left[\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{3L}{4} \right] \cap \left[\frac{L}{4} \leq y \leq \frac{3L}{4} \right] \cap [0 \leq z \leq h] \\ V_0 = 0, & \left[x, y < \frac{L}{4} \right] \cap \left[x, y > \frac{L}{4} \right] \cap [0 \leq z \leq h] \end{cases} \quad (6.3)$$

O material constituinte da membrana possui velocidade de compressão igual a 1000cm/s e massa específica 0,01kg/cm³. Na modelagem bidimensional considerou-se um *grid* composto por 101x101 nós, discretizado por meio de 20000 elementos isoparamétricos triangulares lineares de 3 nós (Figura 6.17b). Na modelagem tridimensional o *grid* considerado, composto por 101x101x3 nós, foi discretizado em 2500 elementos isoparamétricos prismáticos parabólicos de 27 nós, conforme Figura 6.18.

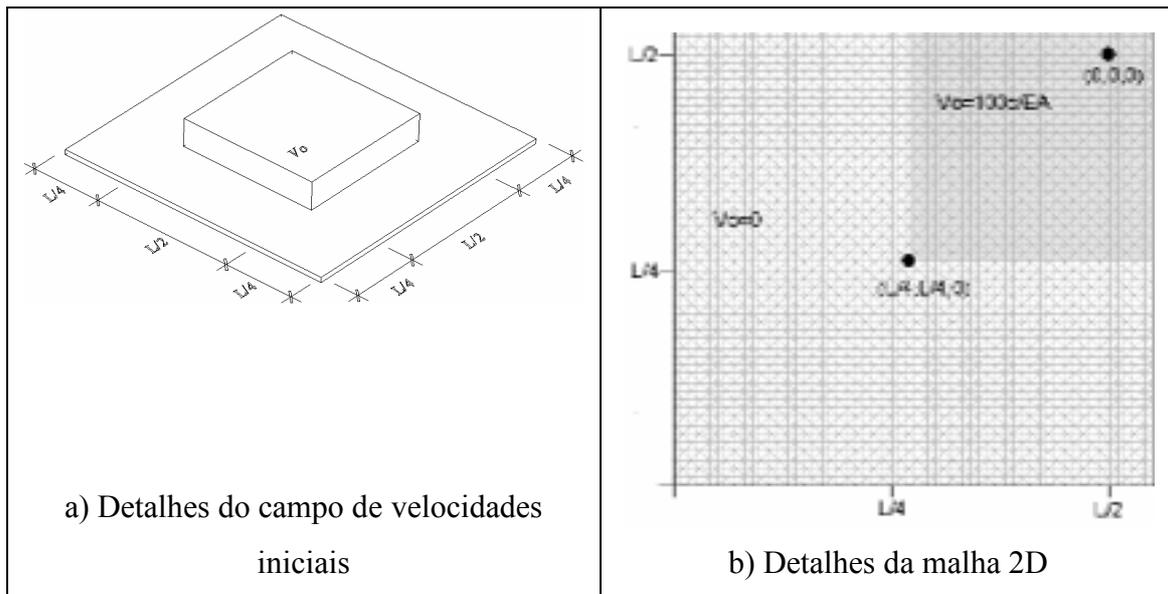


Figura 6.17 – Campo de velocidades: Membrana quadrada (exemplo 4).

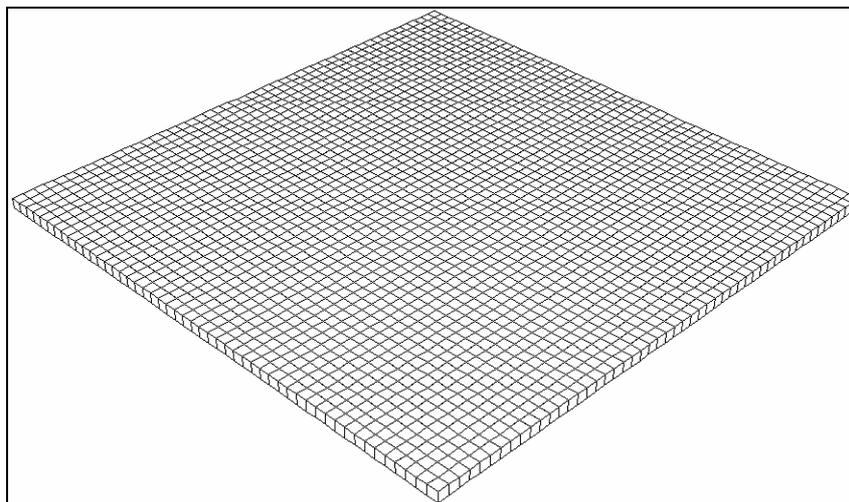


Figura 6.18 – Membrana quadrada (exemplo 4).
(30603 nós, 2500 elementos quadráticos de 27 nós).

Na modelagem frequência dependente, considerou-se 4096 intervalos de frequência, tempos de observação da resposta e total de análise, respectivamente iguais a 2,5 e 0,125 segundos. Na abordagem tempo-dependente considerou-se o esquema explícito da diferença central de marcha no tempo, tempo de análise 0,125 segundos e 1250 passos de tempo.

A Figura 6.19 e Figura 6.20 mostram os resultados de deslocamento vertical no centro da membrana $(0;0;0)$ e no ponto $(L/4;L/4;0)$ (vide Figura 6.17b), respectivamente, bem como solução analítica bidimensional deste problema (MORSE e

INGARD, 1968). Apresentam-se as respostas obtidas via modelagens bidimensionais e tridimensionais, considerando-se esquemas frequência-dependentes com amortecimento viscoso e histerético (FD-histeretico e FD-viscoso), esquemas de marcha no tempo (esquema explícito da diferença central) sem amortecimento (TD) e considerando-se amortecimento viscoso (TD-DC-viscoso). Como pode-se observar, as respostas obtidas, para os diversos modelos e estratégias de resolução de sistemas dinâmicos consideradas, estão próximas da solução analítica (solução sem amortecimento). Desta forma, conclui-se que os algoritmos desenvolvidos podem ser utilizados na resolução de problemas dinâmicos tempo e frequência dependente, em presença de campos iniciais de velocidade e/ou deslocamento. Uma vez que as respostas obtidas, na consideração de modelos bidimensionais e tridimensionais, foram praticamente idênticas em todas as situações de análise, optou-se por apresentar a resposta para apenas um destes.

Com o objetivo de estudar o comportamento do *solver* iterativo em função da magnitude da frequência de excitação dos diversos sistemas matriciais resultantes da análise da membrana sob condição inicial de velocidades, no domínio da frequência, procedeu-se à modelagem considerando-se a presença de amortecimento tanto viscoso (v) quanto histerético (h), para diferentes níveis de magnitude. A Figura 6.21 apresenta a regressão linear da curva correspondente ao número de iterações, normalizado em função da ordem do sistema, pela correspondente frequência de excitação. A Figura 6.22 apresenta os resultados de deslocamentos dos diversos sistemas amortecidos considerados.

Pode-se observar que a presença de amortecimento melhora o condicionamento do sistema, uma vez que, o maior número de iterações ocorre na resolução do problema sem presença de amortecimento, exceção feita para baixas frequências. Além disto, observa-se que o aumento na magnitude das frequências de excitação tende a piorar o condicionamento dos correspondentes sistemas matriciais, independentemente da presença ou não de mecanismos de amortecimento. Por fim, ressalta-se que a mesma análise foi efetuada considerando-se a versão complexa do algoritmo GMRES. Apesar deste algoritmo conduzir a respostas satisfatórias, do ponto de vista quantitativo, o tempo de processamento foi bem superior ao do gradiente conjugado. Isto se deve à característica de estagnação do erro associada ao GMRES, cujo estudo não foi abordado neste trabalho.

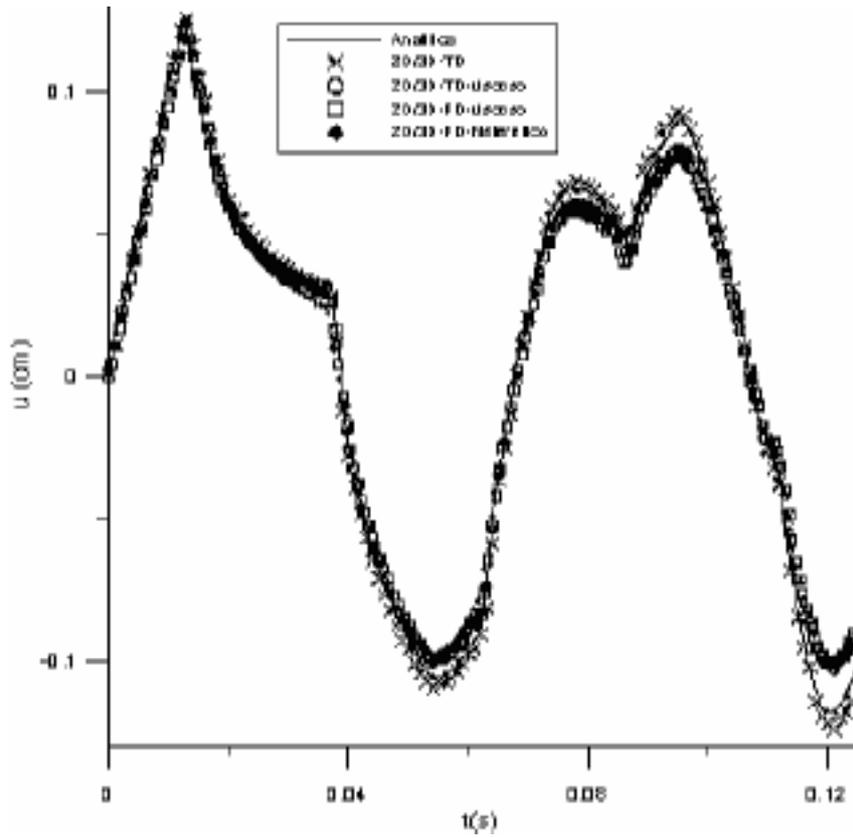


Figura 6.19 – Resposta de deslocamento no centro da membrana (exemplo 4).

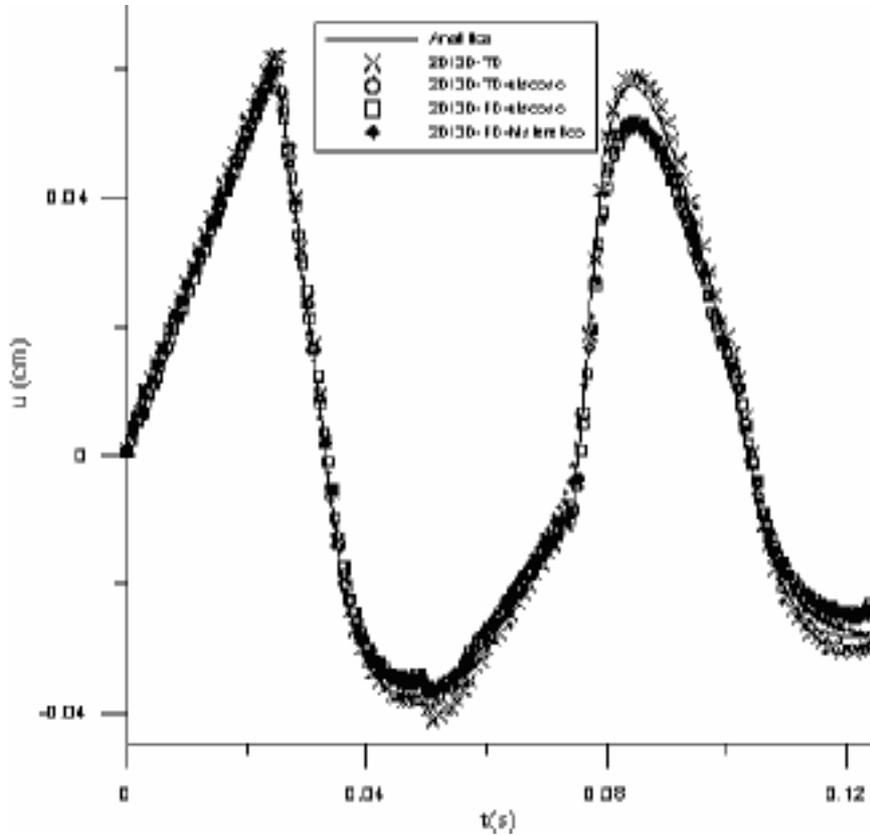


Figura 6.20 – Resposta de deslocamento no ponto (25,25,0) da membrana (exemplo 4).

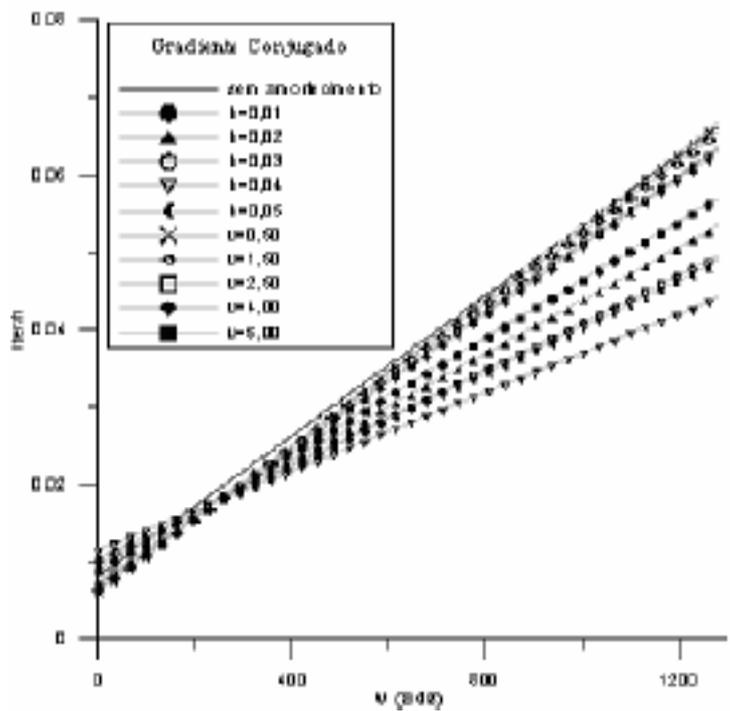


Figura 6.21 – Convergência do *solver* em função do amortecimento (exemplo 4).
Sem preconditionamento.

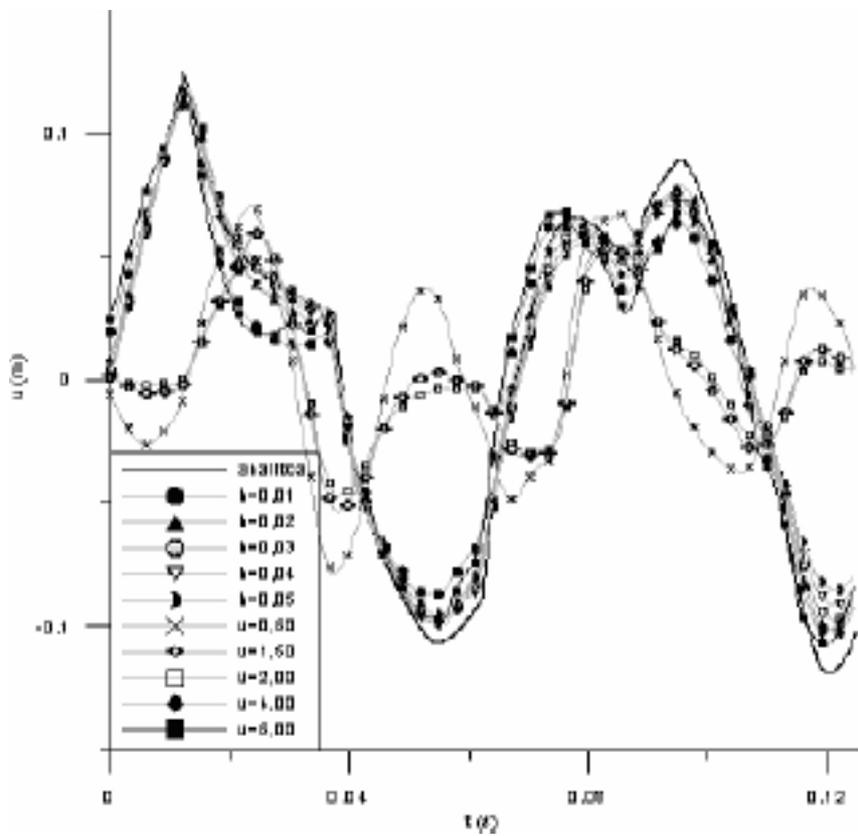


Figura 6.22 – Respostas amortecidas de deslocamento no centro da membrana.

6.5. Modelagem 3D/2D acústica: Membrana retangular sob condição inicial de deslocamento e velocidade

Neste exemplo considerou-se uma membrana retangular de lados $a = 20 \text{ cm}$ e $b = 40 \text{ cm}$, engastada em suas extremidades, sob condições iniciais (ver Figura 6.23 para mais detalhes) dadas pelas expressões

$$\begin{cases} U_0 = 0.01(x(a-x))(y(b-y)), & [0 \leq x \leq a] \cap [0 \leq y \leq b] \cap [0 \leq z \leq h] \\ V_0 = \frac{10^6 c}{EA}, & \left[\frac{a}{4} \leq x \leq \frac{3a}{4} \right] \cap \left[\frac{b}{4} \leq y \leq \frac{3b}{4} \right] \cap [0 \leq z \leq h] \\ V_0 = 0, & \left[x, y < \frac{a, b}{4} \right] \cap \left[x, y > \frac{a, b}{4} \right] \cap [0 \leq z \leq h] \end{cases} \quad (6.4)$$

O material constituinte da membrana possui as mesmas propriedades do exemplo anterior. Na modelagem bidimensional considerou-se um *grid* composto por 6400 elementos isoparamétricos triangulares lineares e no caso tridimensional o modelo foi discretizado em 800 elementos isoparamétricos prismáticos parabólicos de 27 nós, conforme Figure 6.24.

Da mesma forma que o exemplo anterior adotou-se período estendido igual a $T_p = 2.5 \text{ s}$ e 4096 passos de frequência. Na análise tempo-dependente adotou-se $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$ e 1250 passos de tempo. As respostas de deslocamento e velocidade para o centro da membrana (ponto A(a/2,b/2,0)) são apresentadas nas Figura 6.25 e Figura 6.26, respectivamente. Também foram plotadas, conforme visto na Figura 6.27 e na Figura 6.28, respectivamente, as respostas de deslocamento e velocidade no ponto B(a/4,b/4,0). Pode-se observar uma boa aproximação nas respostas obtidas tanto nos algoritmos tempo quanto frequência-dependentes, com e sem presença de amortecimento. Novamente verifica-se a validade do método para o caso geral de condições iniciais de deslocamentos e velocidades.

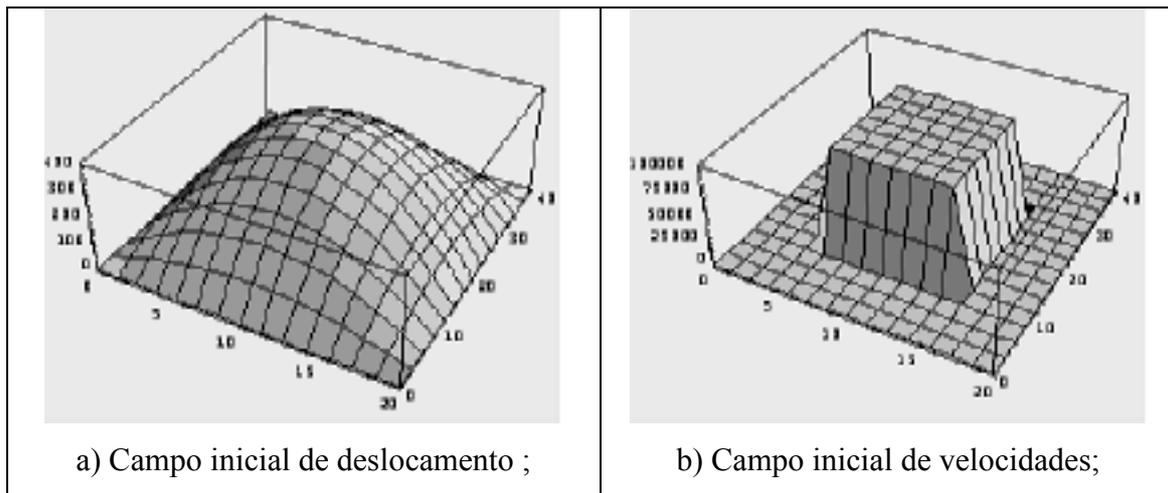


Figura 6.23 – Campo inicial de deslocamento e velocidade: Membrana retangular.

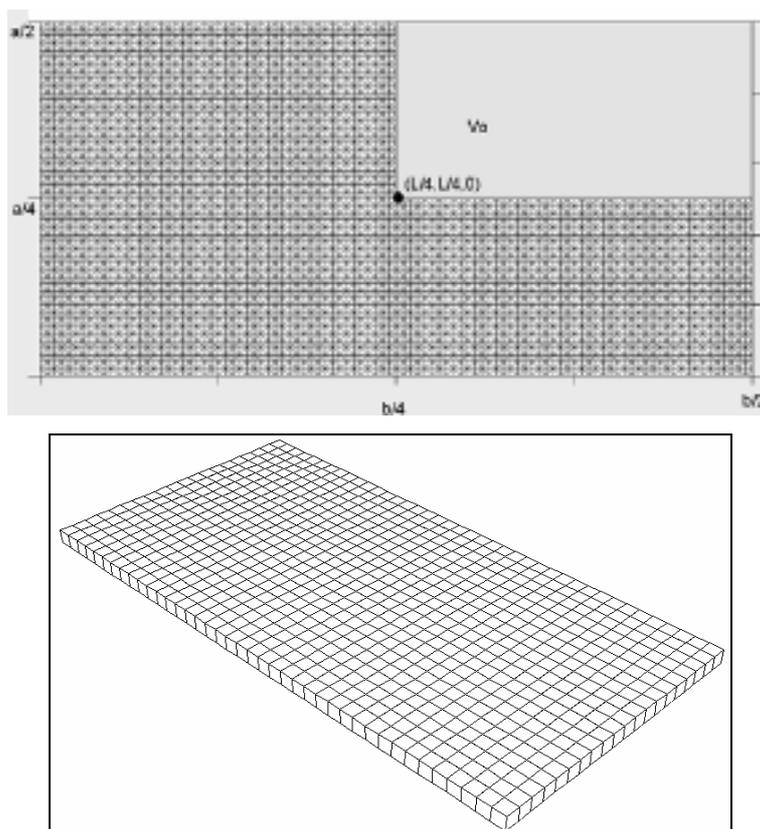


Figure 6.24 – Discretização especial 2D e 3D: Membrana retangular.

Malha 2D: 3321 nós, 6400 elementos triangulares lineares.

Malha 3D: 9963 nós, 800 elementos prismáticos parabólicos.

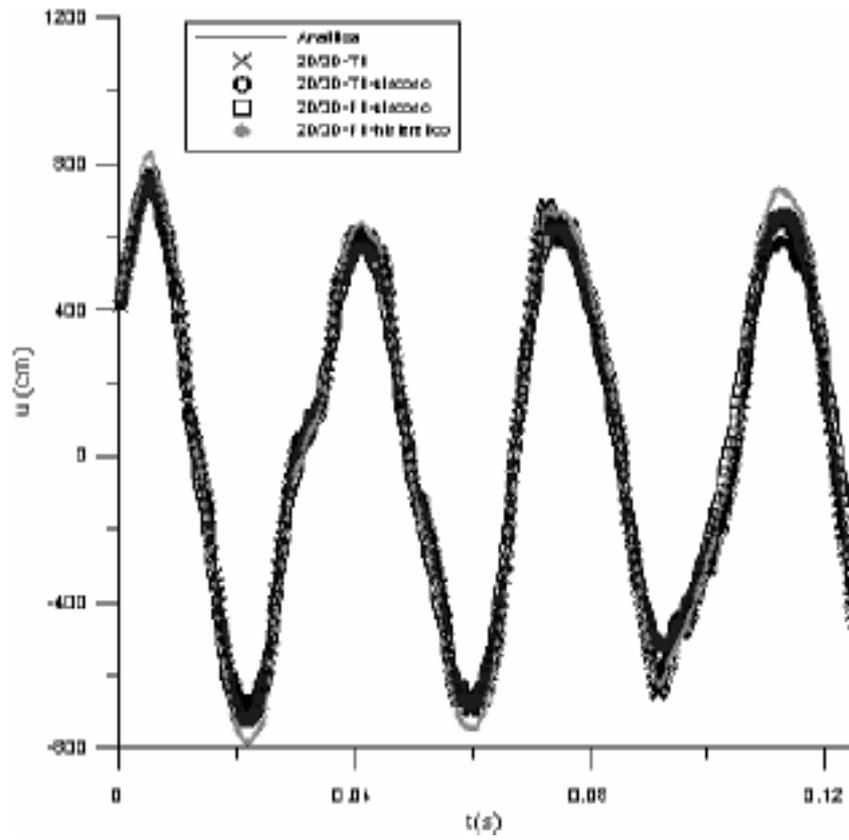


Figura 6.25 – Deslocamento no Centro: Membrana retangular.

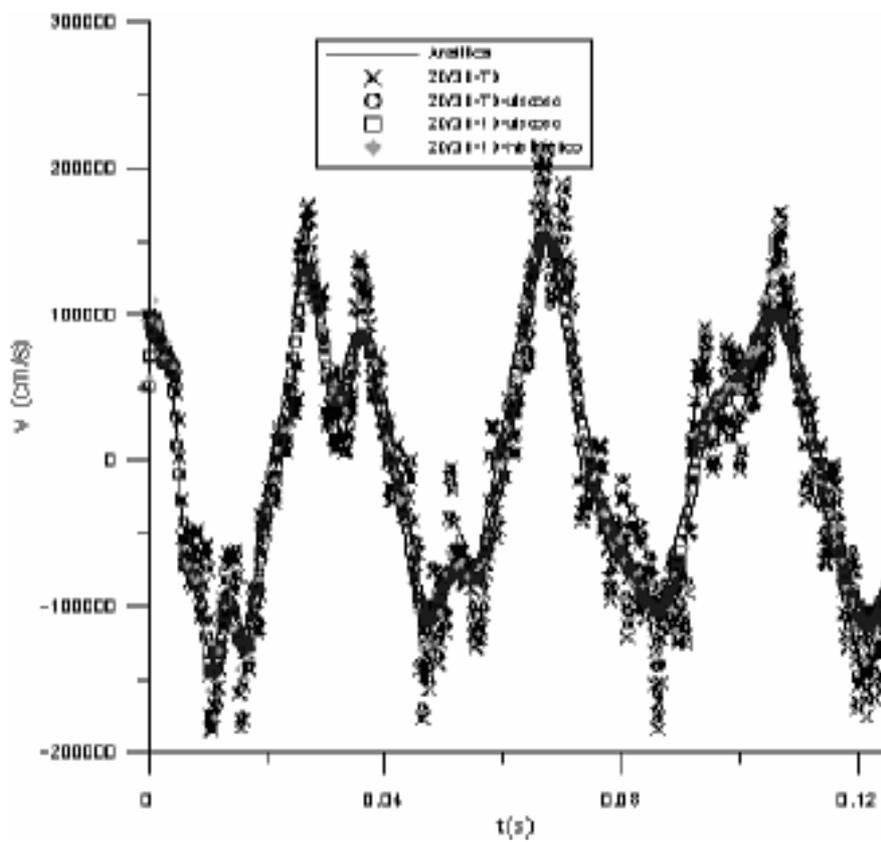


Figura 6.26 – Velocidade no Centro: Membrana retangular.

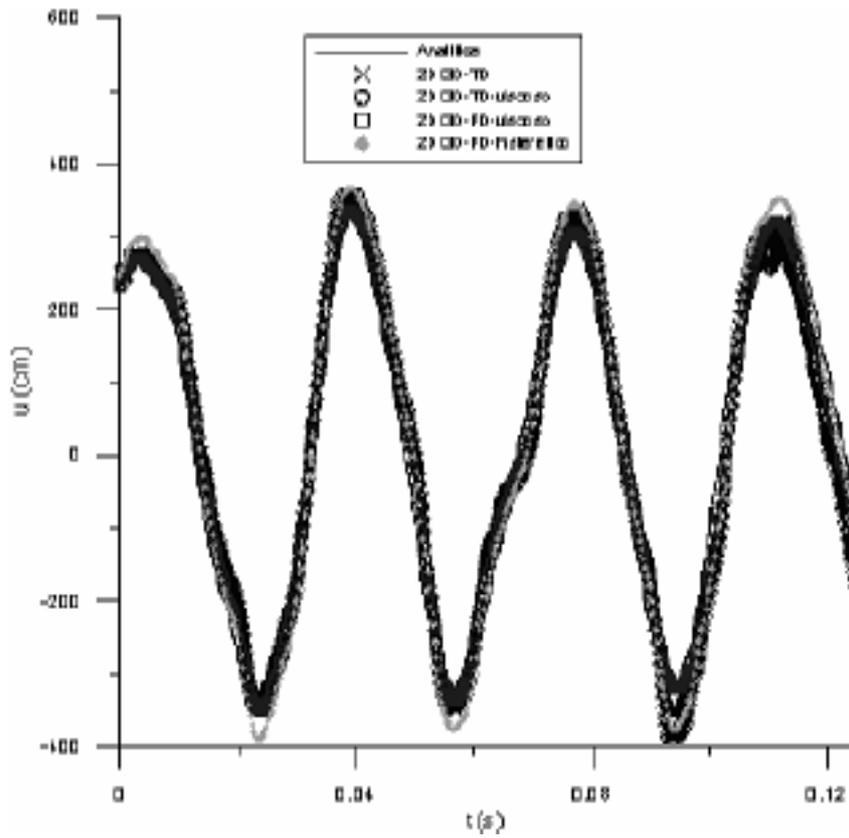


Figura 6.27. – Deslocamento no ponto B: Membrana retangular.

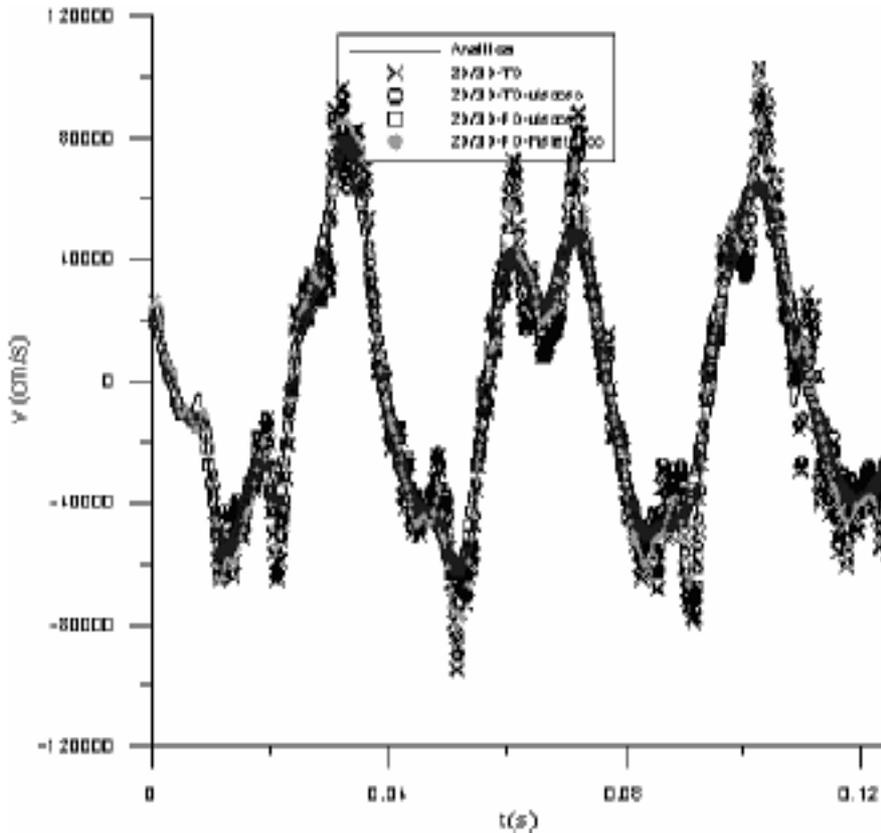


Figura 6.28 – Velocidade no ponto B: Membrana retangular.

6.6. Modelagem 2D elástica: Comparação entre esquemas de avanço no tempo

Com o objetivo de verificar a eficiência e a qualidade das respostas obtidas considerando-se os diversos esquemas de avanço no tempo apresentados neste trabalho, foram efetuadas análises de propagação de ondas em modelos elásticos, empregando-se os esquemas de marcha no tempo listados na Figura 6.29.

MDF-Diferença Central Explícito:
MEF- Diferença Central Explícito
MEF-Alfa-Generalizado Explícito
MEF-HHT Implícito
MEF-Lagrange Quarta Ordem Explícito
MEF-Runge-Kutta-Nystrom Explícito de Quarta Ordem

Figura 6.29 – Esquemas de avanço no tempo.

A análise consiste de uma barra engastada na base sob a ação de um carregamento uniforme aplicado bruscamente em sua extremidade e mantido constante no tempo (Heaviside). Os dois modelos considerados, constituídos de 17x9 e 161x81 pontos nodais (totalizando malhas com 153 e 13041 nós) espaçados a cada 1,50 e 0,15 centímetros, respectivamente, foram discretizados considerando-se elementos lagrangeanos quadrangulares quadráticos, conforme Figura 6.30. O módulo de elasticidade do material da barra, densidade e coeficiente de Poisson são dados por $E=1 \cdot 10^2$ MPa, $\rho=100.0 \text{ kg/m}^3$ e $\nu=0.0$, respectivamente. Considerou-se tempo total de análise igual a 3840.0 segundos e intervalos de tempo para as análises envolvendo as malhas com menor e maior refinamento como sendo 0.750 e 0.075 segundos, respectivamente. Os resultados obtidos, tanto para o MDF quanto para o MEF, considerando-se o processo clássico de inicialização dos esquemas de marcha no tempo (BATHE, 1996 e COOK, 2001) bem como a inicialização segundo técnica de consideração de pseudo-forças, desenvolvida neste trabalho, são apresentados nas Figura 6.31 a Figura 6.46.

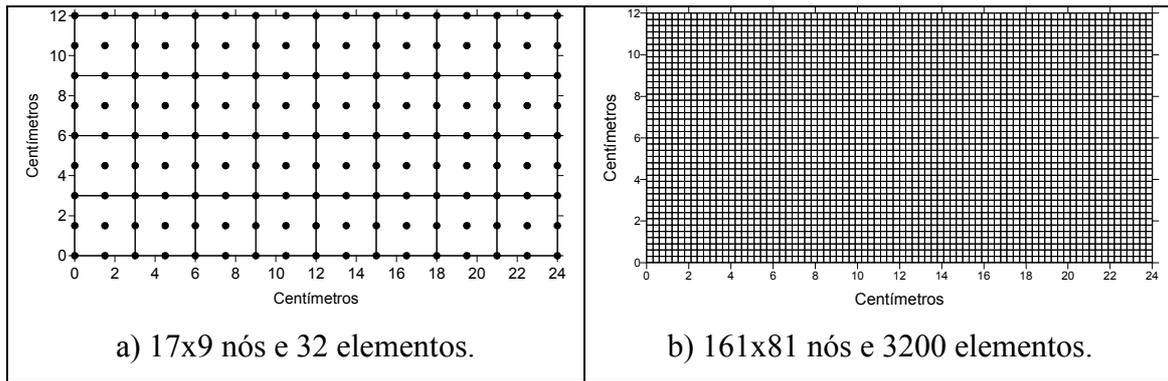


Figura 6.30 – Discretização espacial (exemplo 6).

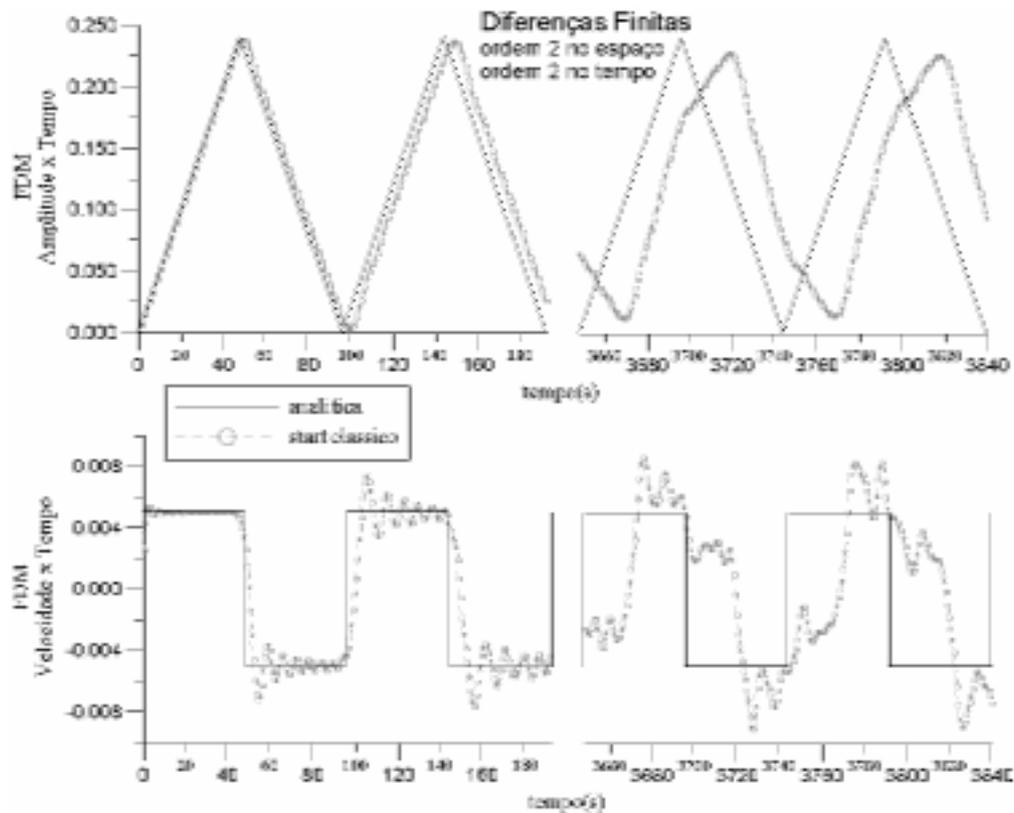


Figura 6.31 – Respostas obtidas via Método das Diferenças Finitas: grid 17x9.

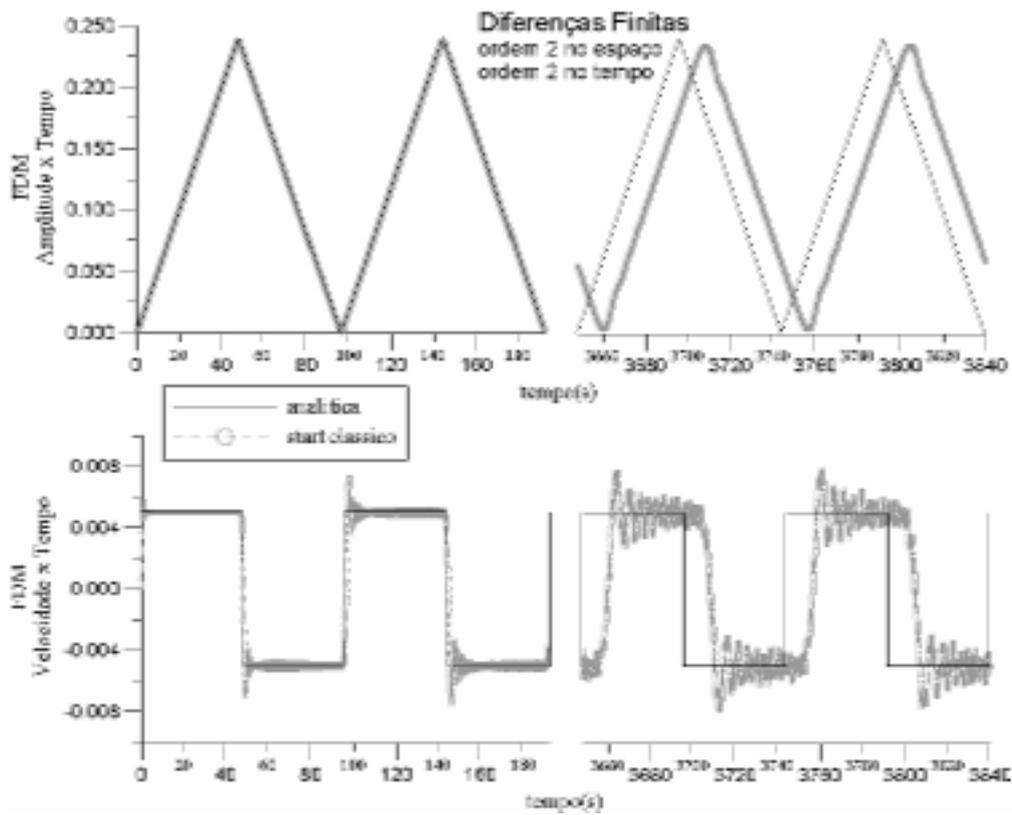


Figura 6.32 – Respostas obtidas via Método das Diferenças Finitas: grid 161x81.

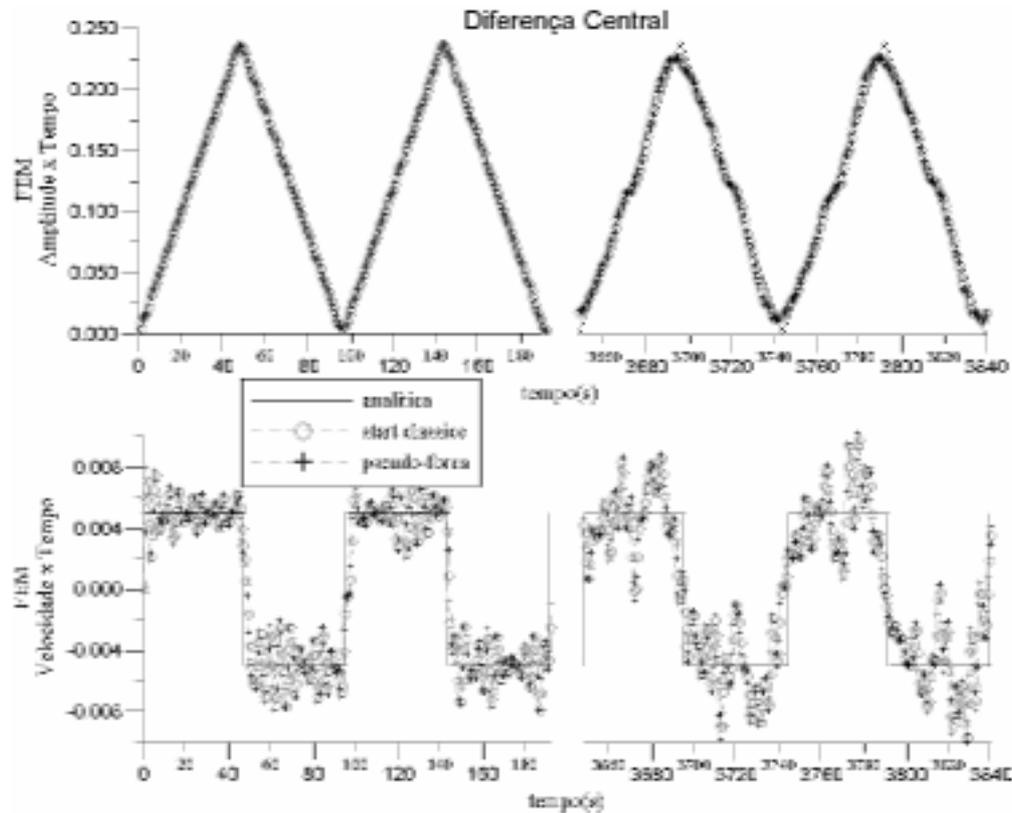


Figura 6.33 – Respostas obtidas via MEF: Diferença Central: grid 17x9.

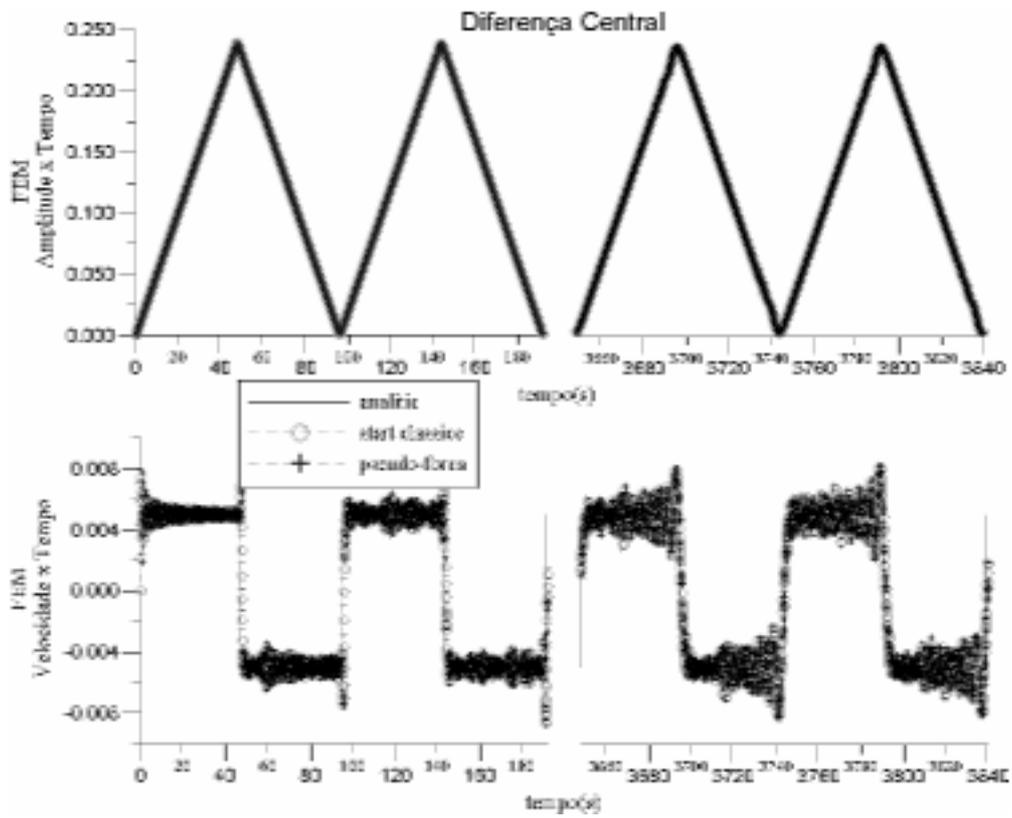


Figura 6.34 – Respostas obtidas via MEF: Diferença Central: grid 161x81.

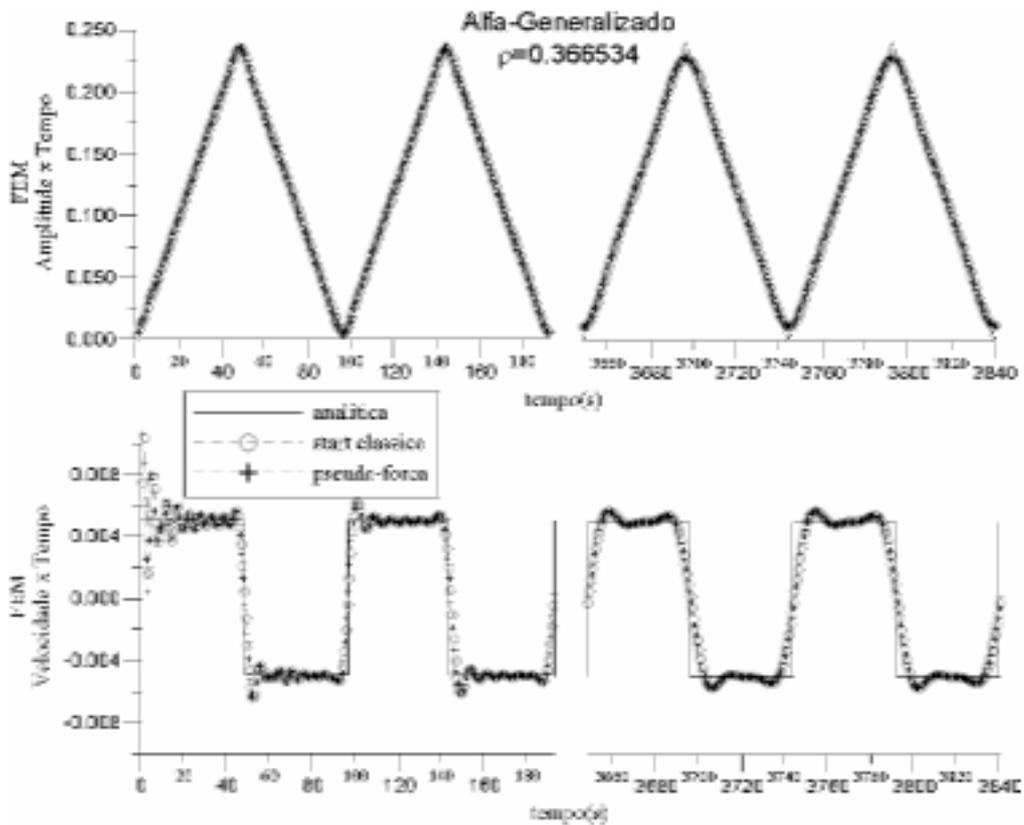


Figura 6.35 – Respostas obtidas via MEF: Alfa-generalizado ($\rho=0.3665$): grid 17x9.

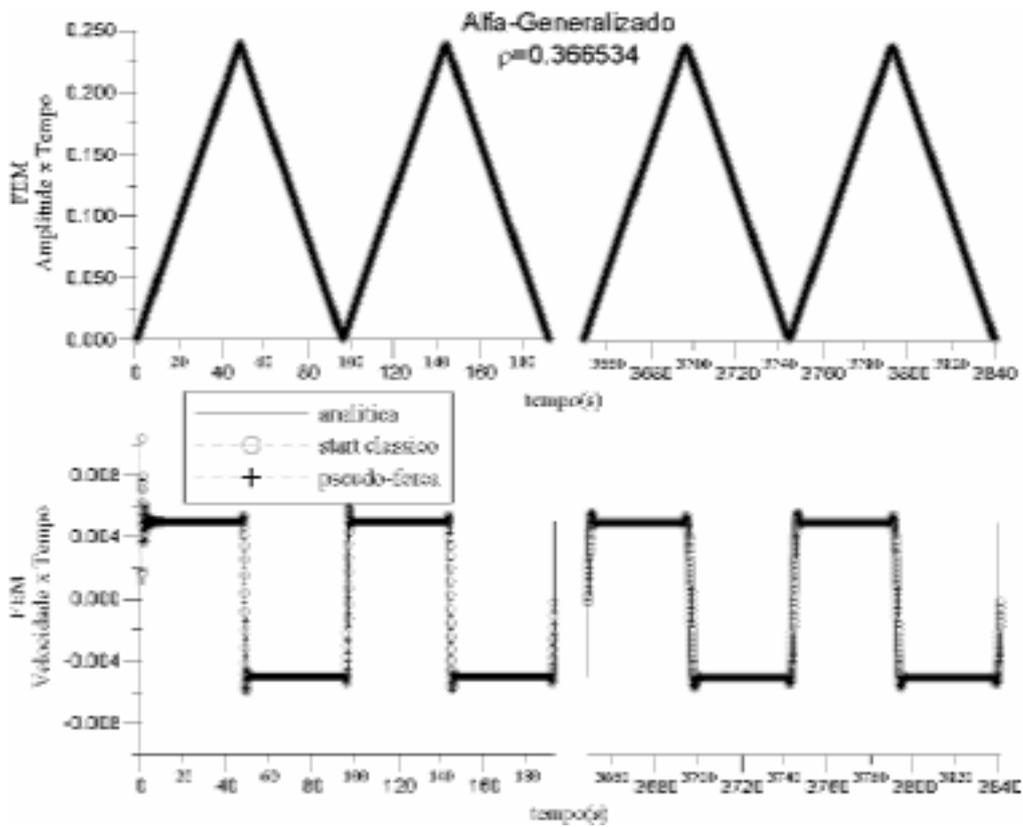


Figura 6.36 – Respostas obtidas via MEF: Alfa-generalizado ($\rho=0.3665$): grid 161x81.

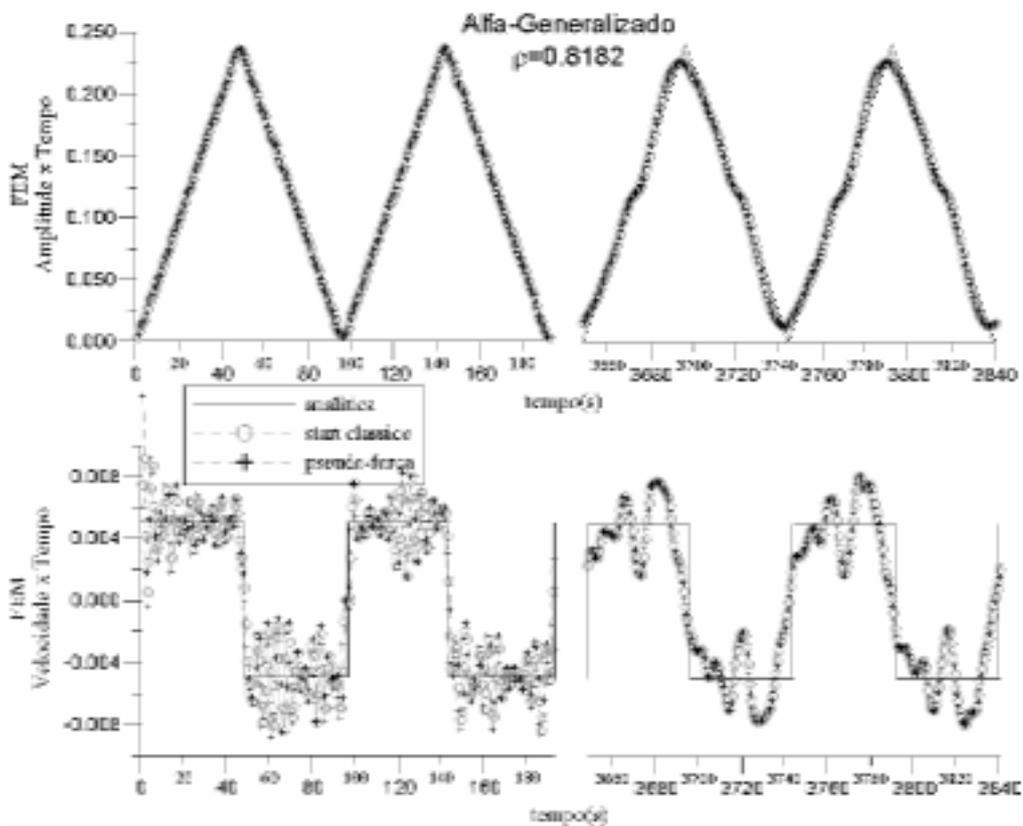


Figura 6.37 – Respostas obtidas via MEF: Alfa-generalizado ($\rho=0.8182$): grid 17x9.

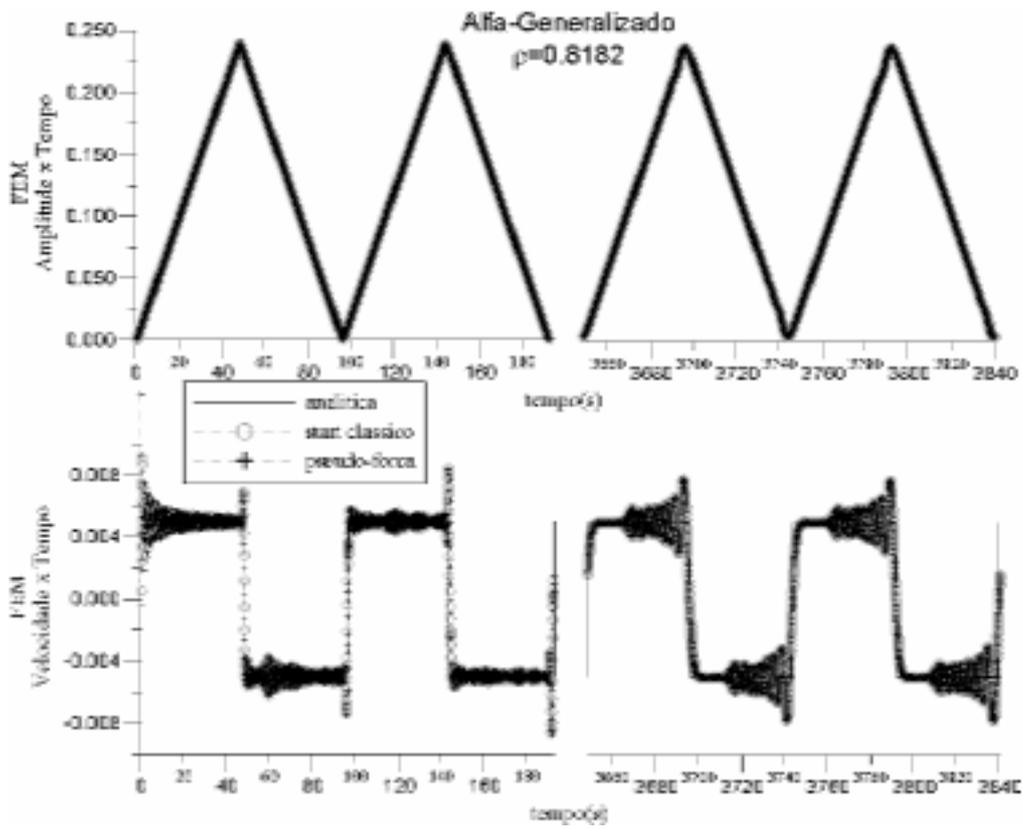


Figura 6.38 – Respostas obtidas via MEF: Alfa-generalizado ($\rho=0.8182$): grid 161x81.

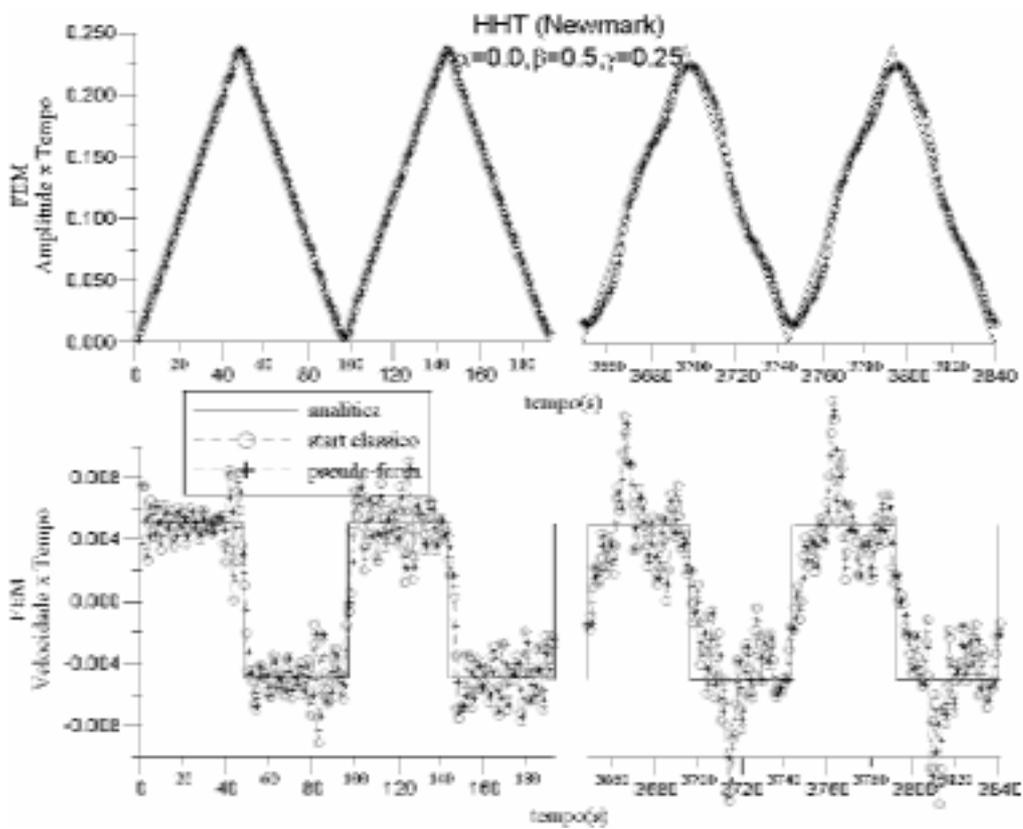


Figura 6.39 – Respostas obtidas via MEF: HHT (Newmark): grid 17x9.

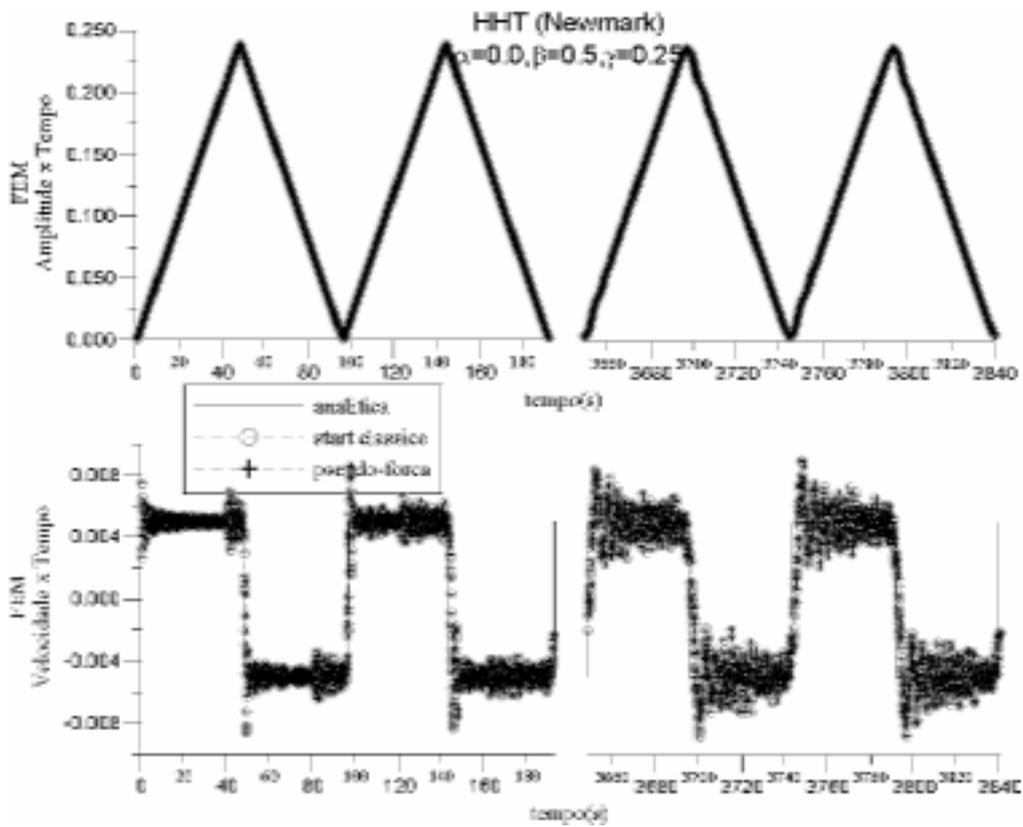


Figura 6.40 – Respostas obtidas via MEF: HHT (Newmark): grid 161x81.

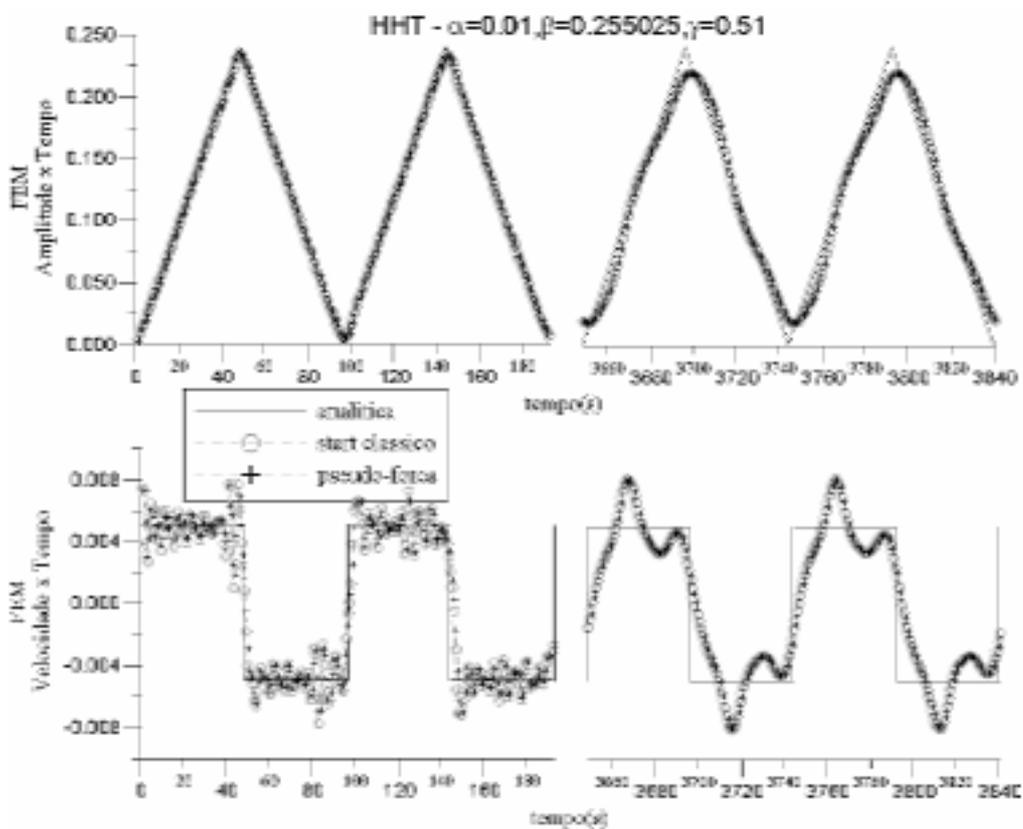


Figura 6.41 – Respostas obtidas via MEF: HHT ($\alpha=0.01$): grid 17x9.

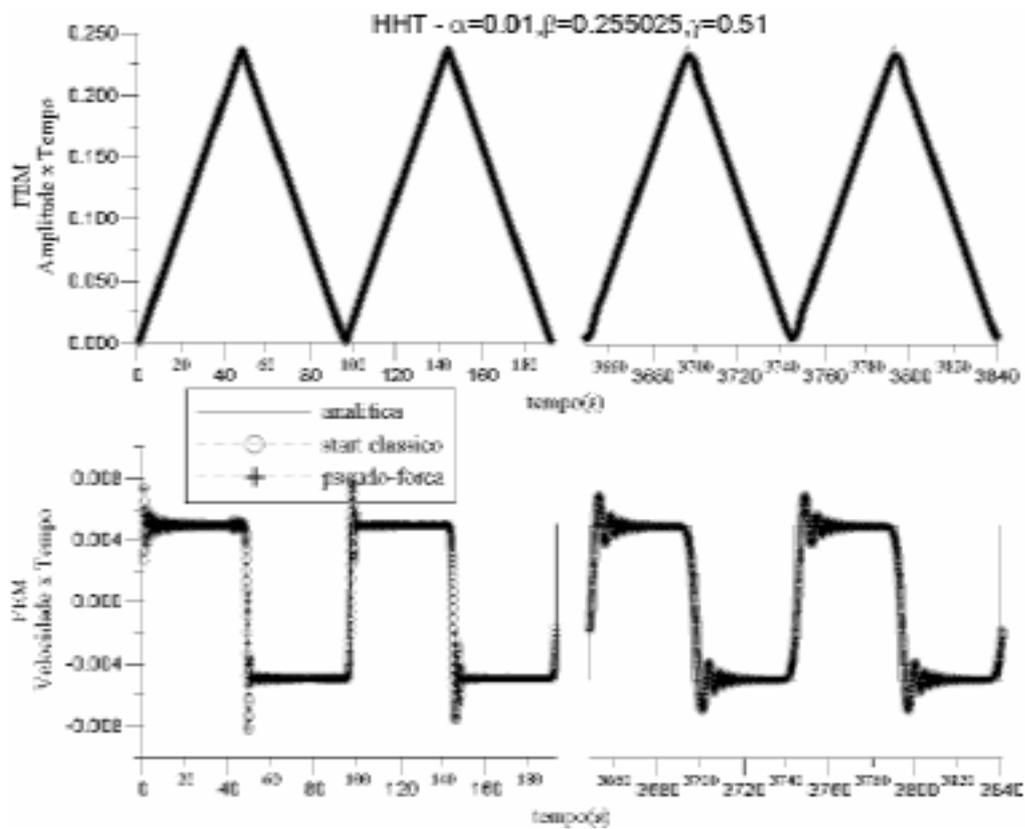


Figura 6.42 – Respostas obtidas via MEF: HHT ($\alpha=0.01$): grid 161x81.

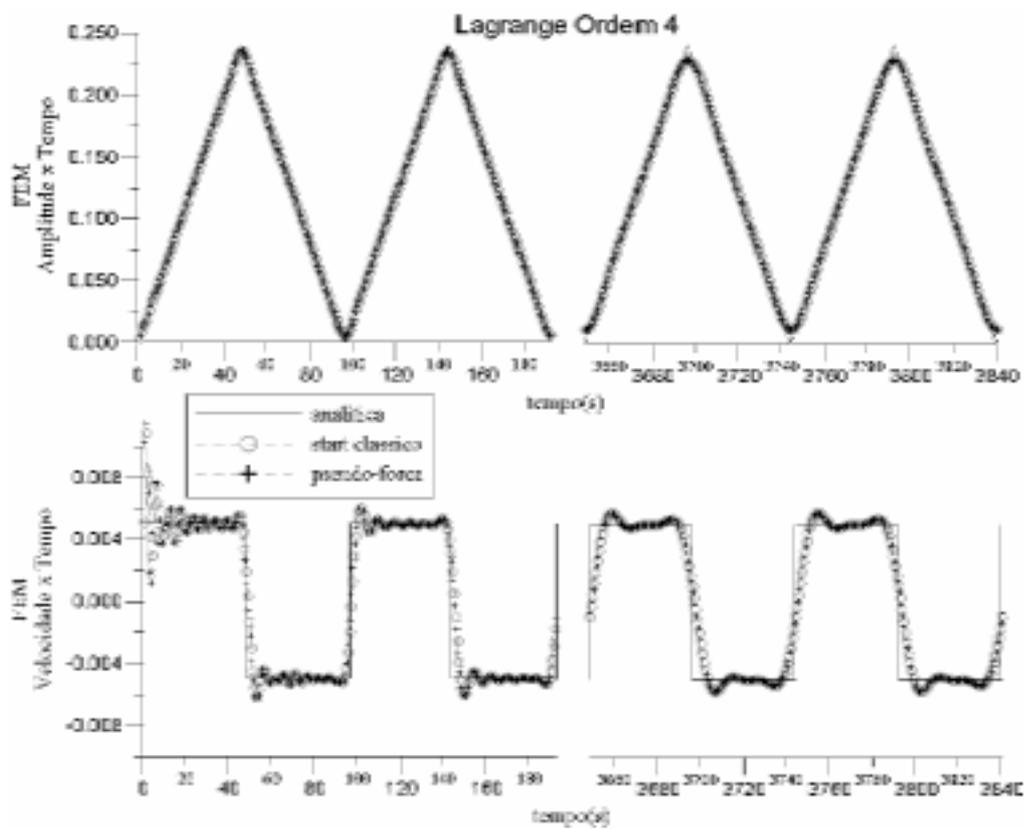


Figura 6.43 – Respostas obtidas via MEF: Lagrange de ordem 4: grid 17x9.

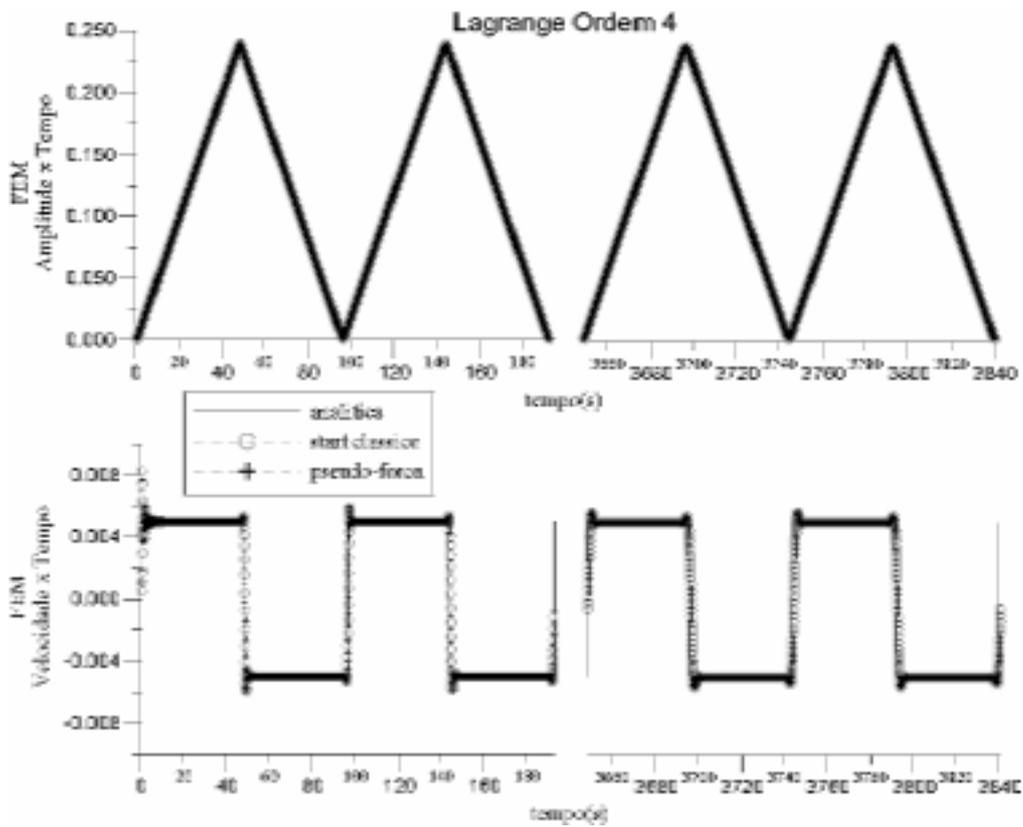


Figura 6.44 – Respostas obtidas via MEF: Lagrange de ordem 4: grid 161x81.

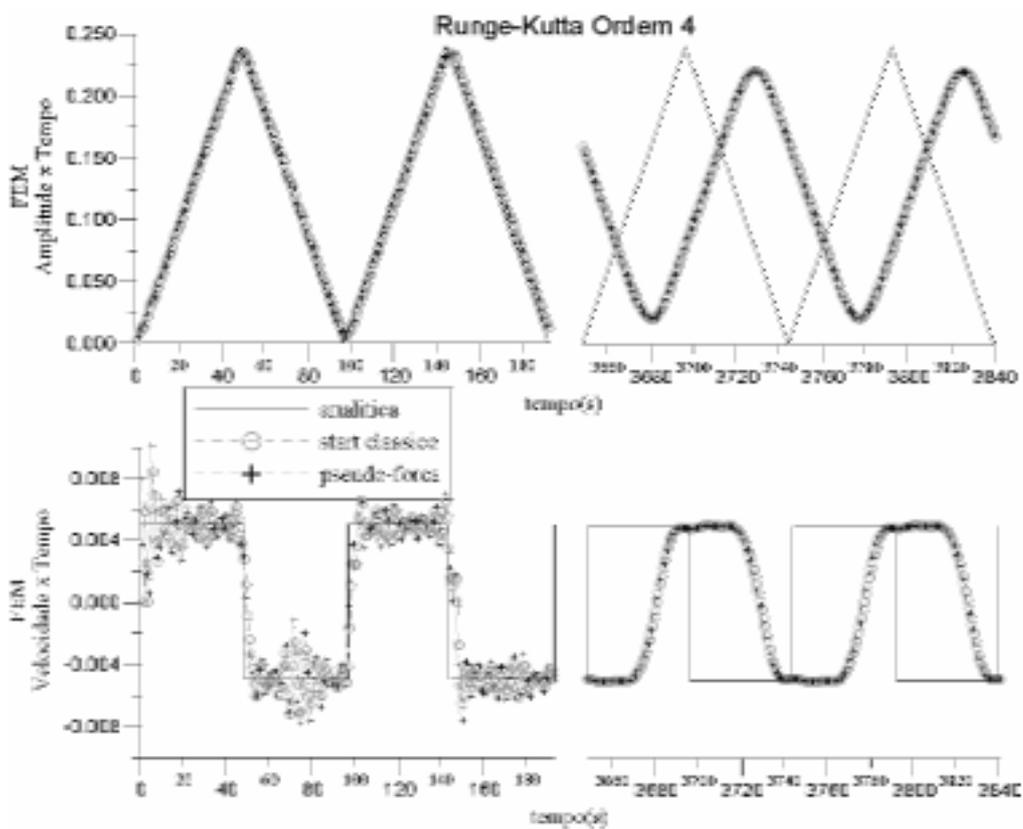


Figura 6.45 – Respostas obtidas via MEF: RKN ordem 4: grid 17x9.

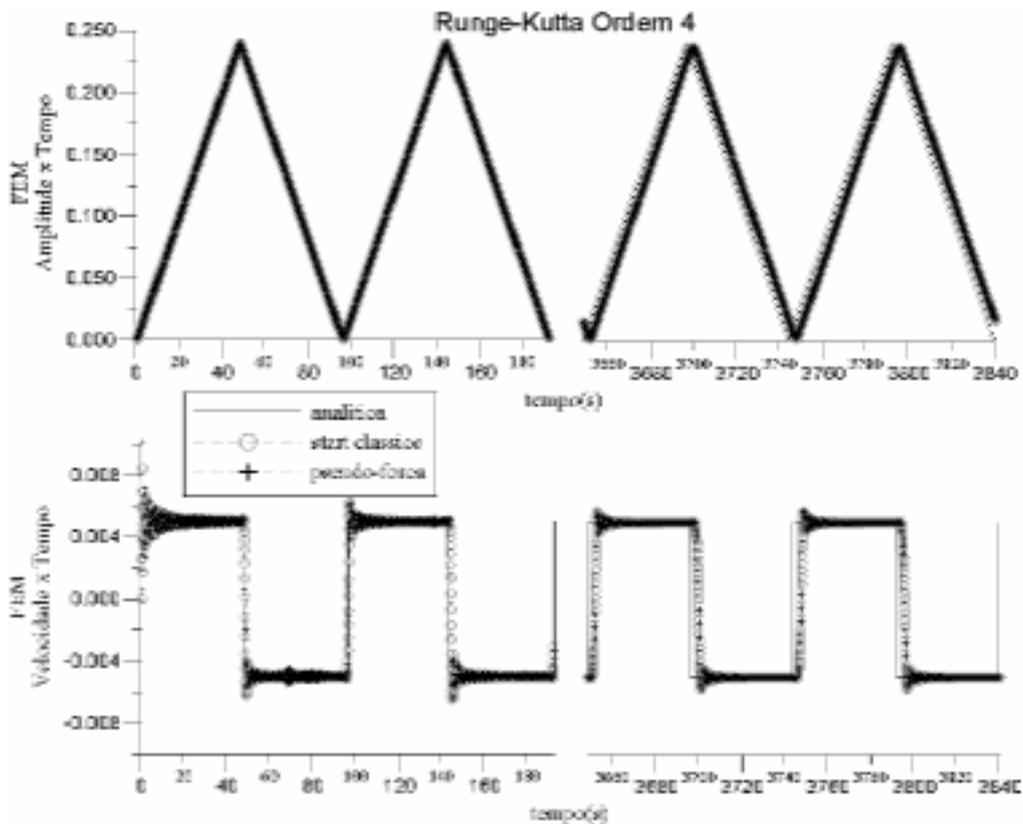


Figura 6.46 – Respostas obtidas via MEF: RKN ordem 4: grid 161x81.

De forma geral, observa-se que as respostas obtidas pelos diversos esquemas de marcha no tempo, considerando-se intervalos de observação próximos à origem, apresentam-se satisfatórias, se levarmos em conta, particularmente para o caso do modelo menor, os baixos níveis de refinamento adotados tanto na discretização espacial quanto na temporal. As respostas, em termos de velocidades, por sua vez, oscilam ao redor da solução analítica. O menor grau de precisão obtido para estas, se deve ao fato de sua obtenção envolver a derivação das aproximações obtidas para os deslocamentos, além de envolverem a representação de funções cujo comportamento no tempo é bem mais complexo, se comparado ao comportamento das funções que representam o campo de deslocamentos.

Em tempos de observação distantes da origem, de uma forma geral observa-se uma considerável degeneração na qualidade das respostas, pois erros devidos às aproximações, tanto espacial quanto temporal, são amplificados ao longo do procedimento de marcha no tempo. Observa-se que o Método de Runge-Kutta, apesar de possuir ordem 4 de precisão, apresenta alongamento numérico de período, proporcional ao nível de refinamento adotado. No MDF de segunda ordem, observa-se

que os resultados obtidos apresentam elevado nível de amortecimento numérico, tanto para a malha mais pobre (Figura 6.31) quanto para a malha mais refinada (Figura 6.32). Cabe ressaltar que, nas análises efetuadas via MEF considerando-se o esquema da Diferença Central (ver Figura 6.33 e Figura 6.34), tal amortecimento numérico reduziu-se bastante, se comparado à resposta obtida via MDF (Figura 6.31 e Figura 6.32).

A utilização do esquema implícito HHT (Figura 6.39, Figura 6.40, Figura 6.41 e Figura 6.42), apesar de dispendiosa do ponto de vista de performance, acarreta na obtenção de respostas com excelente nível de precisão, sendo indicada sua utilização em códigos que considerem esquemas de paralelização, em sua estrutura. Cabe ressaltar que os esquemas de avanço no tempo baseados neste método tiveram seus parâmetros, quando se fez necessário, escolhidos de forma a não permitir variações na amplitude ou período das respostas obtidas, o que poderia proporcionar respostas mais adequadas em tempos de análises pequenos, com prejuízo em análises em tempos de observação maiores.

Pode-se observar (Figura 6.35 e Figura 6.36) que o esquema explícito Alfa-Generalizado (CHUNG e LEE, 1996 e CHUNG e HULBERT, 1996) apresenta excelentes resultados, tanto em tempos de observação iniciais quanto distantes, principalmente considerando-se o parâmetro otimizado $\rho = 0,366534$. Valores inferiores ou superiores a este parâmetro apresentam respostas um pouco inferiores (Figura 6.37 e Figura 6.38). O esquema de quarta ordem baseado no polinômio de Lagrange de ordem quatro desenvolvido neste trabalho, apresenta, da mesma forma que o esquema Alfa-Generalizado, excelentes resultados (Figura 6.43 e Figura 6.44). Este método necessita de mais vetores correspondentes a soluções anteriores para a obtenção da resposta no tempo atual, em relação ao Alfa-Generalizado, mas por outro lado, não necessita de busca por parâmetros que promovam uma otimização das respostas.

Pode-se observar que as respostas obtidas considerando-se inicialização dos esquemas de marcha no tempo segundo conceito de pseudoforças apresenta resultados próximos ao esquema clássico de inicialização baseado na extrapolação para tempo de análise anterior ao tempo inicial.

A Figura 6.47 e Figura 6.48 mostram os tempos de montagem do sistema, de avanço no tempo e tempo total de resolução do problema. Adotou-se, na resolução dos sistemas lineares resultantes do esquema implícito de avanço no tempo HHT, o

algoritmo do Gradiente Conjugado, com tolerância igual a 10^{-10} . Considera-se, como critério de parada a norma do resíduo resultante ser menor que a tolerância.

Elemento	D. Central	Alfa G.	Lagrange	Runge-K	HHT
Montagem do sistema	0.05317	0.05394	0.05279	0.05317	0.074213
Avanço no tempo	18.4599	20.4369	23.4346	27.8489	89.9829
Tempo total	18.5169	20.4939	23.4908	27.9055	89.06

Figura 6.47 – Tempos de execução normalizados pelo tempo total de diferença finitas.

Obs.: Grid 17x9; Tempo de execução via diferenças finitas: 10,1619 segundos;

Elemento	D. Central	Alfa G.	Lagrange	Runge-K	HHT
Montagem do sistema	0.016226	0.016226	0.013529	0.01389	0.018816
Avanço no tempo	2.069521	2.134107	2.325168	5.781252	25.72997
Tempo total	2.086317	2.148465	2.338906	5.795351	25.74899

Figura 6.48 – Tempos de execução normalizados pelo tempo total de diferença finitas.

Obs.: Grid 161x81; Tempo de execução via diferenças finitas: 301,4432 segundos;

6.7. Modelagem 3D elástica: Viga bi-apoiada sob carregamento uniformemente distribuído

Seja uma viga bi-apoiada sob carregamento uniformemente distribuído do tipo Heaviside, aplicado em sua face superior e cuja magnitude vale 5 N. O comprimento da viga vale 5 metros, sua altura 0,4 metros e profundidade 1,0 metro. O modulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e massa específica valem, respectivamente 1,00 Pa, 0,30 e 2500 kg/m^3 . Considerou-se uma malha composta por 1275 pontos e 100 elementos lagrangeanos quadrangulares quadráticos de 27 nós, conforme Figura 6.49.

Considerou-se, na modelagem deste problema, abordagem no domínio do tempo e frequência. No caso da abordagem tempo dependente, adotou-se intervalo de tempo igual a 0,05 segundos e esquema implícito HHT (Newmark) sem amortecimento. No

domínio da frequência, considerou-se 4098 intervalos de frequência, período estendido de $1,2 \times 10^5$ segundos e amortecimento histerético com fator de amortecimento igual a 0,001. Em ambos os casos, o tempo de observação da resposta considerado foi $1,2 \times 10^3$ segundos.

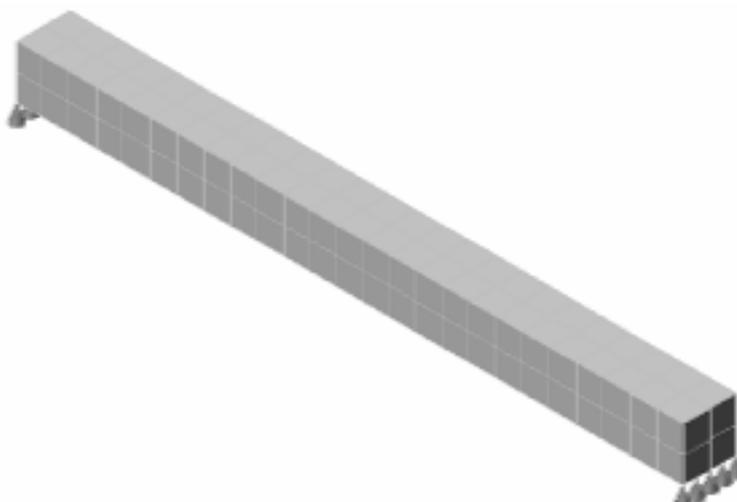


Figura 6.49 – Viga bi-apoiada composta por 100 elementos quadráticos de 27 nós.

As figuras Figura 6.50 e Figura 6.51 apresentam, respectivamente, os resultados de deslocamentos e velocidades verticais em pontos situados na linha neutra da seção transversal da viga, a 1, 2, 3, 4 e 5 metros dos apoios. Neste caso, tanto o campo de deslocamentos quanto de velocidades foram obtidos, considerando-se a configuração da viga no tempo $t=276.20$ segundos, ou seja, efetuou-se uma análise com condições iniciais nulas, imprimindo os campos neste intervalo de tempo. Assim, as condições iniciais foram lidas deste arquivo, e desta forma, obteve-se um campo inicial exato para as análises tempo e frequência dependentes. Alternativamente, adotou-se campos de deslocamentos e velocidades iniciais aproximados, considerando-se deslocamentos e velocidades nulos na direção horizontal, enquanto na direção vertical considerou-se os valores das expressões analíticas para um modelo de viga unidimensional, apresentado no APÊNDICE 4. Os resultados são apresentados na Figura 6.52 e Figura 6.53.

Pode-se observar que os resultados obtidos apresentam-se satisfatórios, se comparados às soluções analíticas. Observa-se que a adoção de uma configuração inicial aproximada acarreta em respostas de velocidades com elevado grau de oscilação, pois neste caso, o coeficiente de Poisson não é nulo, e conseqüentemente as componentes horizontais tem influência considerável no comportamento do sistema.

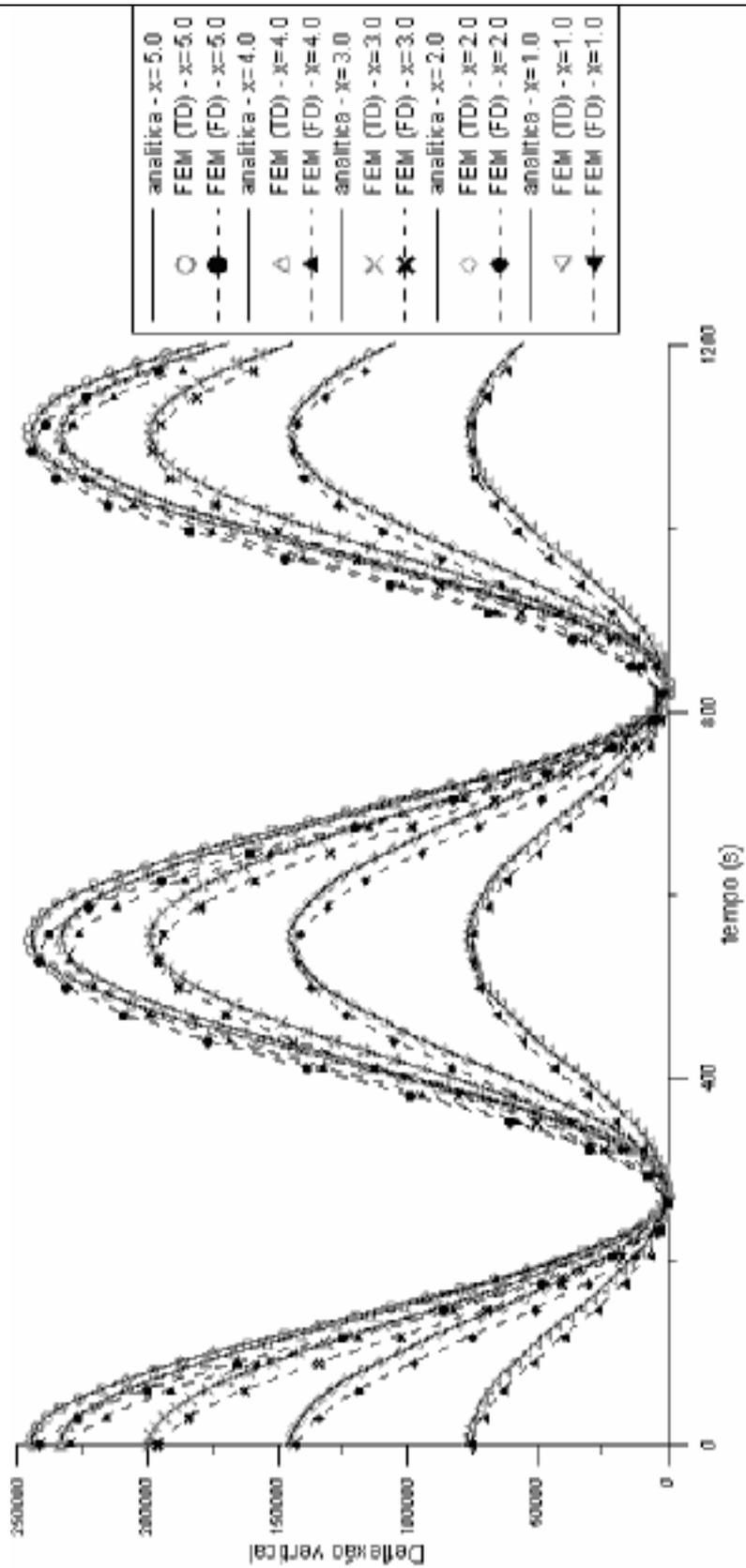


Figura 6.50 – Deflexão na viga: Condições iniciais exatas.

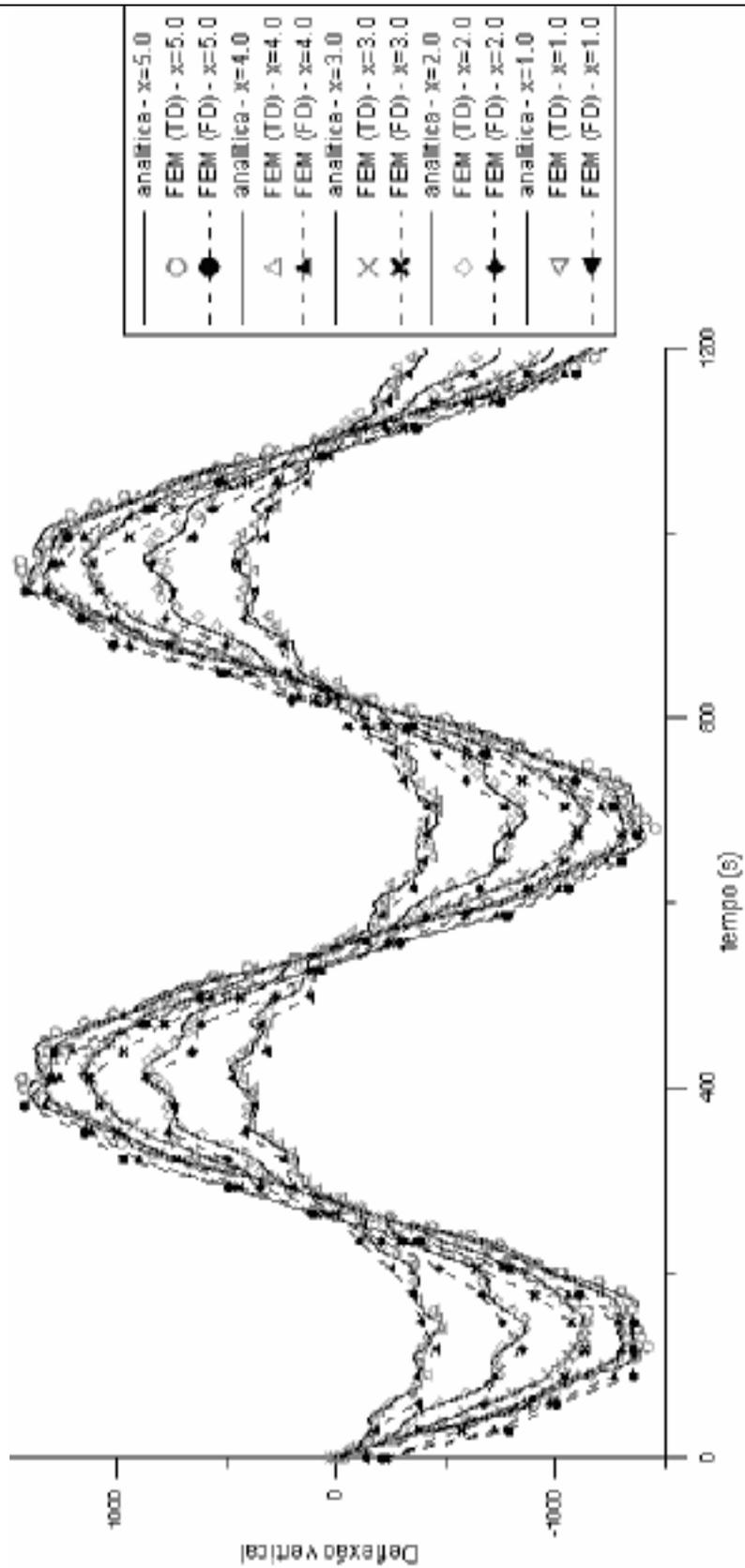


Figura 6.51 – Derivada temporal da deflexão na viga: Condições iniciais exatas.

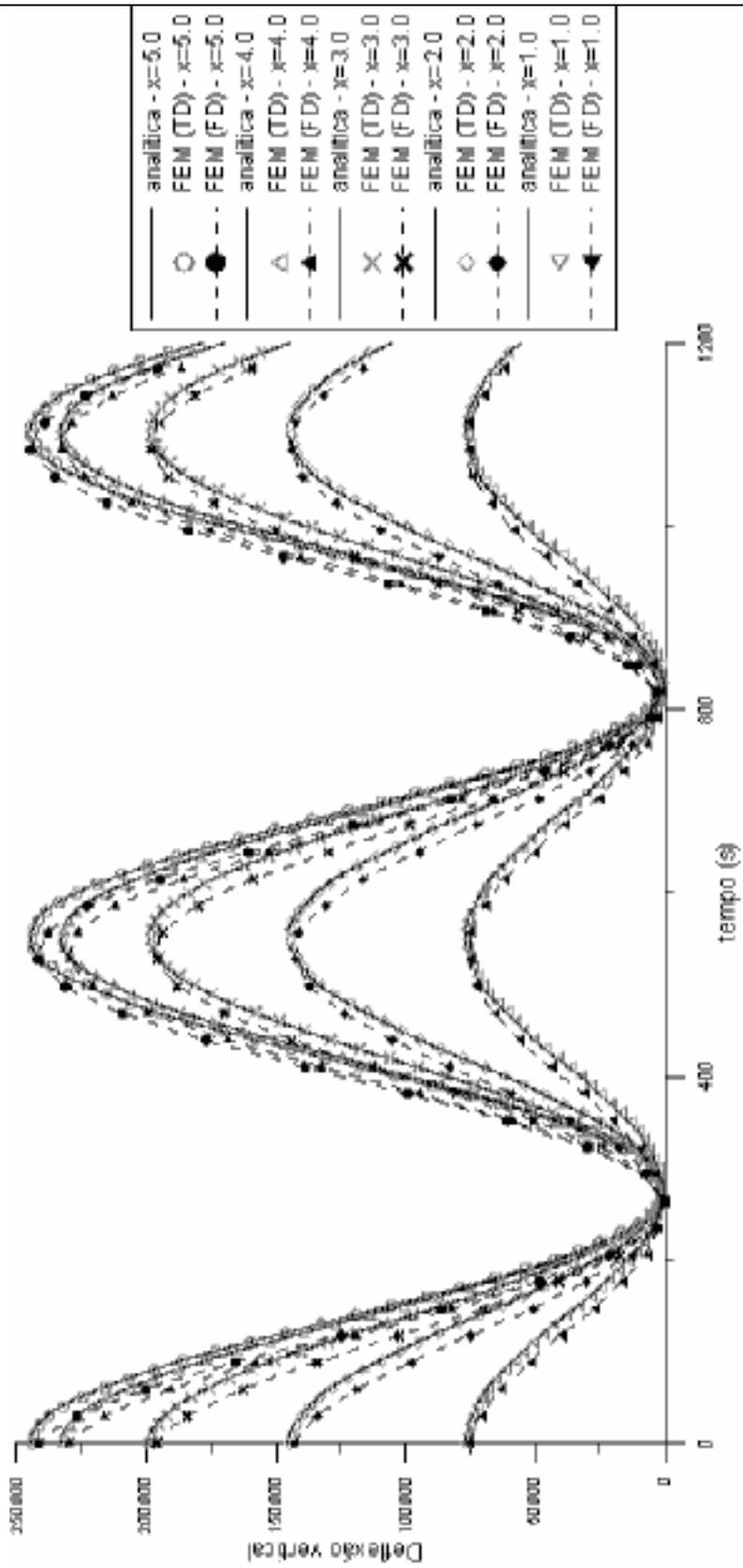


Figura 6.52 – Deflexão na viga: Condições iniciais aproximadas.

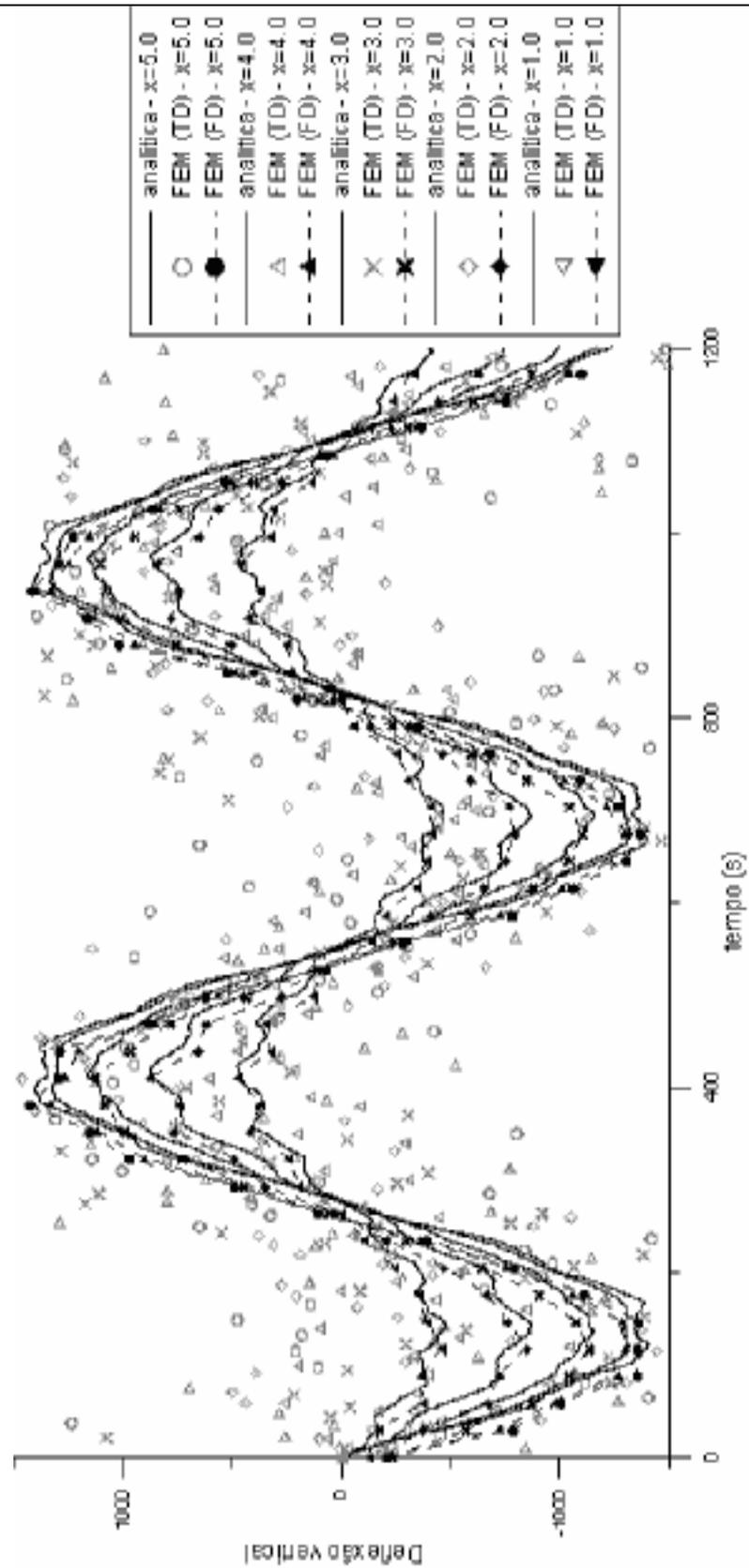


Figura 6.53 – Derivada temporal da deflexão na viga: Condições iniciais aproximadas.

6.8. Modelagem 2D acústica: Modelagem Sísmica bidimensional

Um domo salino (modelo SEG), com perfil de velocidades mostrados na Figura 6.54 e densidade constante igual a 2,10 em todo o domínio, foi modelado pelo Método das Diferenças Finitas (MDF) e Método dos Elementos Finitos (MEF). Na análise via Diferenças Finitas considerou-se um *grid* de 1039x277 pontos espaçados a cada 5 metros, totalizando 287803 pontos. A discretização espacial via Elementos Finitos considerou uma malha irregular composta por 153931 pontos e elementos triangulares quadráticos, concentrados na região de aplicação da fonte (ver Figura 6.55). Considerou-se, também, um modelo MEF composto por elementos quadrangulares quadráticos de iguais dimensões com espaçamento entre nós de 5 metros (287803 pontos).

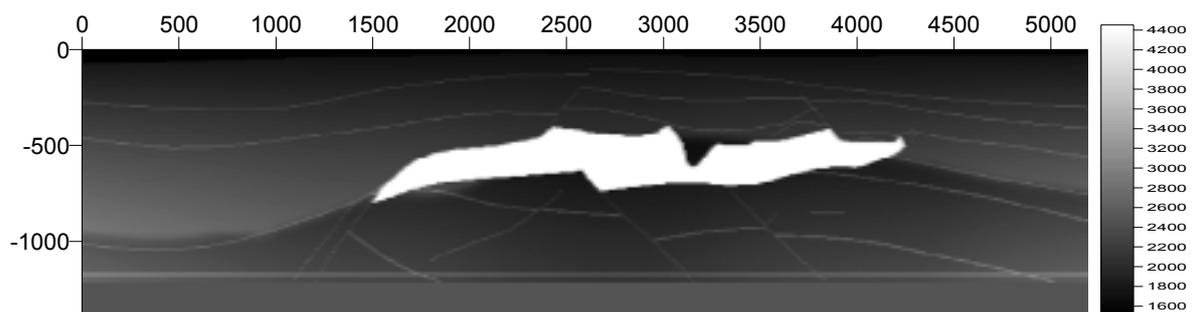


Figura 6.54 – Domo de sal: perfil de velocidades.

As condições de contorno do modelo consideradas foram: derivada de potencial igual a zero no contorno superior (superfície livre) e condições de contorno não-reflexivas nos demais lados. A fonte sísmica aplicada possui frequência de corte igual a 30 Hertz, estando situada a 2500 metros de distância da face esquerda do modelo e a 20 metros de profundidade. A incorporação de fontes prescritas, simulando explosões em levantamentos sísmicos para problemas geofísicos, pode ser representada, dentre outras funções, pela derivada segunda da gaussiana (MIRANDA, 1997), segundo lei de variação dada por:

$$f(f_c, t) = (1 - 2(\pi(\tilde{f}_c \cdot \tilde{t}))^2) e^{-\pi(\tilde{f}_c \cdot \tilde{t})^2} \quad (6.5)$$

com a frequência de corte \tilde{f}_c e defasagem de tempo \tilde{t} corrigidos, dados por $\tilde{f}_c = f/3\sqrt{\pi}$ e $\tilde{t} = t - (2\sqrt{\pi}/f_c)$, onde t e f são o tempo de defasagem e frequência de corte não corrigidos.

Assim, o vetor termo fonte \mathbf{s} pode ser acrescentado ao sistema matricial considerando uma expansão volumétrica unitária, multiplicando este resultado pela magnitude dada pela expressão (6.5), ou seja,

$$\mathbf{s} = f(f_c, t) \sum_{m=1}^N \int_{\Omega^m} (\mathbf{B}^{m,T} \mathbf{D}^m \mathbf{e}^m) d\Omega^m \quad (6.6)$$

com \mathbf{e}^m correspondendo ao vetor unitário do elemento m onde está aplicada a fonte.

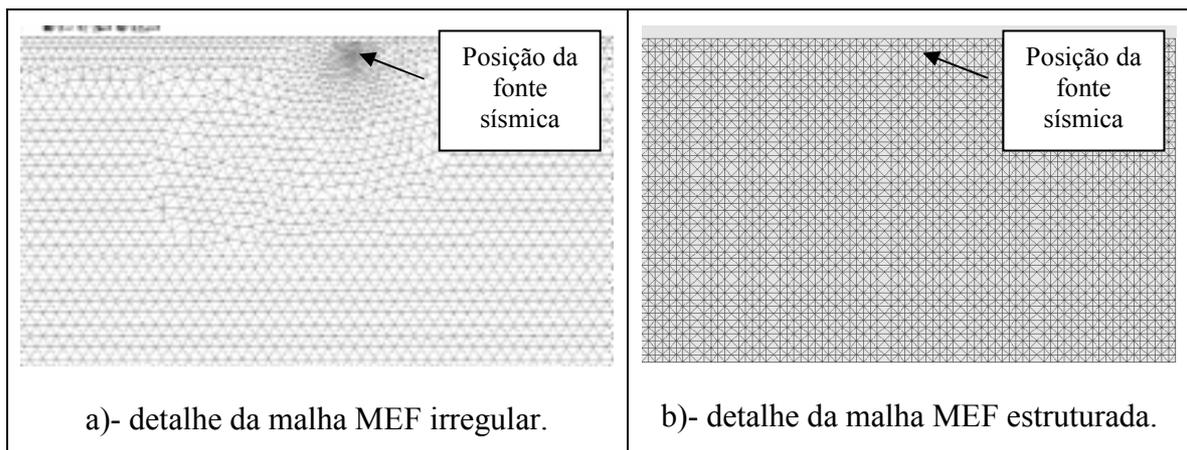


Figura 6.55 – Domo de sal: Detalhes da discretização espacial.

Nas análises via MDF e MEF tempo-dependentes adotou-se tempo total de análise igual a 1,5 segundos e intervalo de tempo de 0,20 milisegundos. Os resultados em termos de valores de pressão acústica (potencial) em função do tempo (eixo vertical voltado para baixo), medidos ao longo da superfície livre do modelo (eixo horizontal), e denominados sismogramas, são apresentados na Figura 6.56. Cabe ressaltar que considerou-se um aumento na percepção destes sismogramas em torno de 10 vezes, com o objetivo de aumentar a nitidez dos eventos relacionados a reflexões e refrações entre subcamadas geológicas.

Pode-se observar que as respostas obtidas através do Método das Diferenças Finitas, considerando-se operador heterogêneo (COHEN e JOLY, 1990) de quarta ordem no espaço e segunda no tempo, e do Método dos Elementos Finitos (esquema explícito da Diferença Central e elementos quadráticos) são semelhantes, tanto no que diz respeito às amplitudes quanto ao posicionamento das ondas refletidas e absorvidas. Observa-se também que, nos eventos de reflexão mais importantes, nenhuma diferença significativa existe, entre as respostas obtidas via MEF com malha estruturada (287803 pontos) e com malha irregular (153931 pontos). Desta forma, neste exemplo, a análise considerando-se malha de Elementos Finitos, otimizada com refinamento em torno da fonte sísmica, acarretou redução do número de graus de liberdade em torno de 50% em relação ao *grid* estruturado de Elementos Finitos. Assim, conclui-se que é possível obter uma elevada redução do custo computacional da análise, tornando-a competitiva com as efetuadas via Diferenças Finitas, sem redução significativa na qualidade das respostas obtidas.

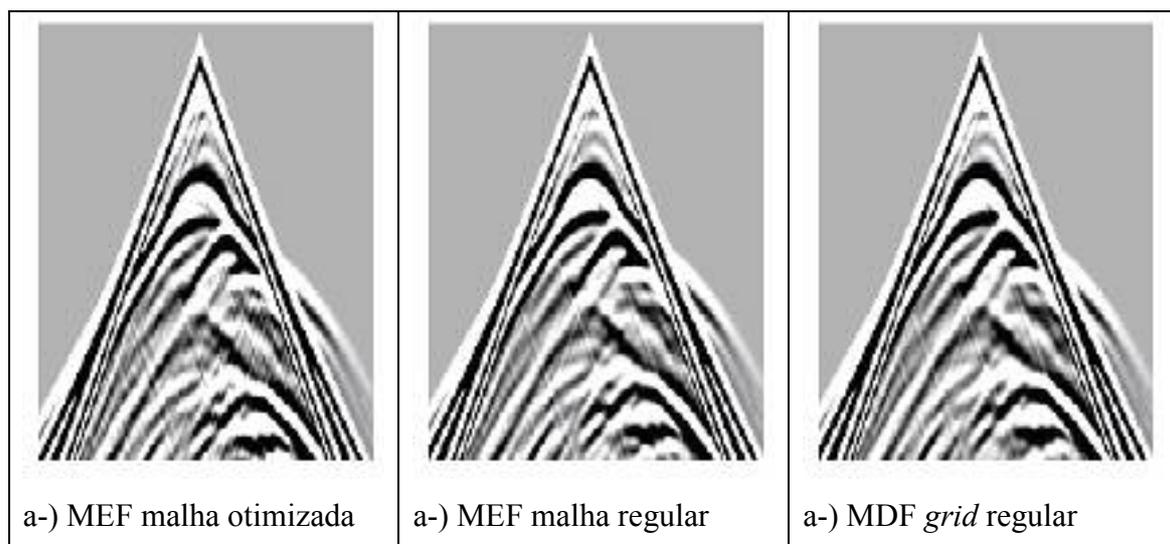


Figura 6.56 – Sismogramas: modelagem tempo dependente – Domo de sal.

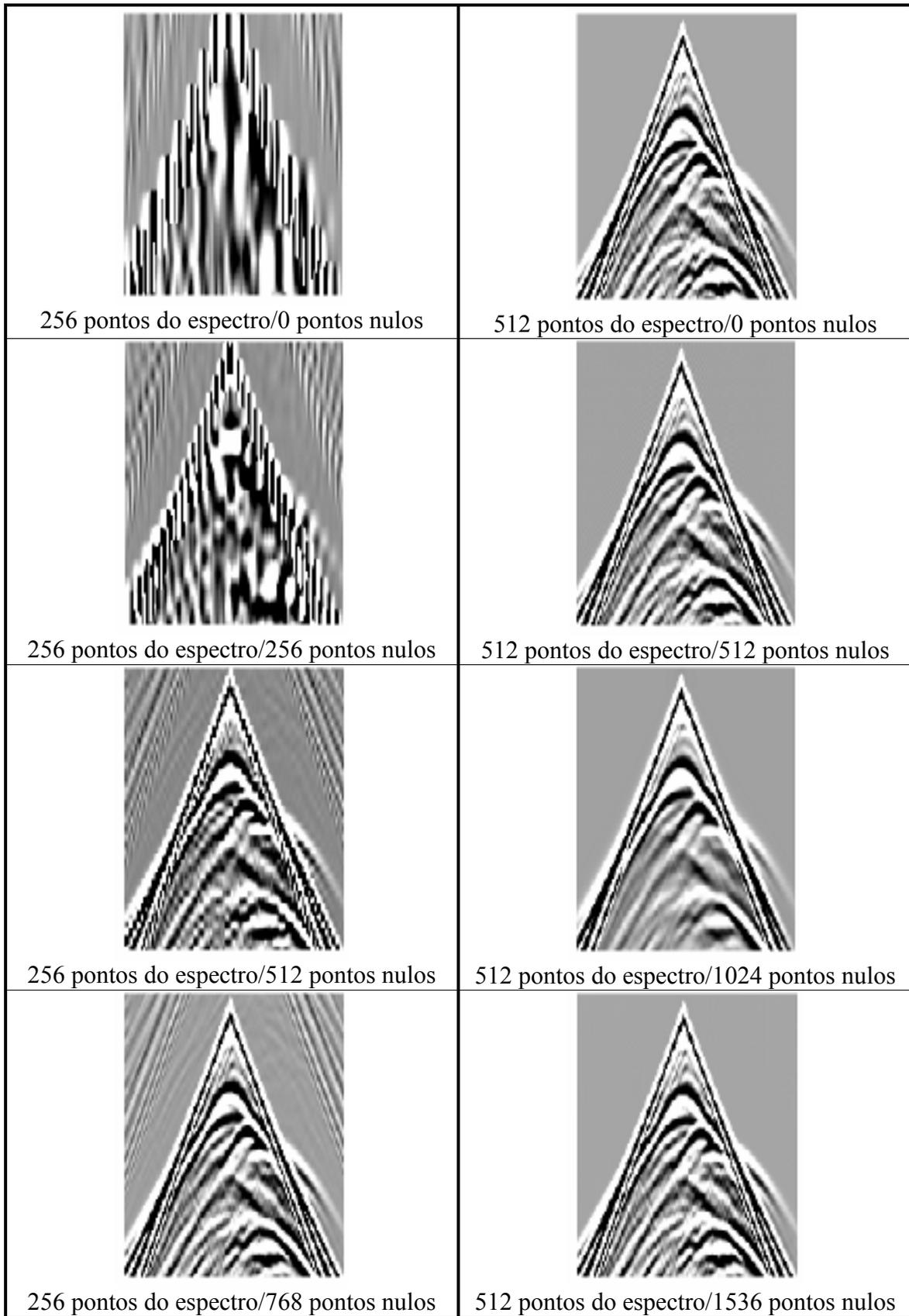


Figura 6.57 – Sismogramas: modelagem frequência dependente – Domo de sal.

Nas análises efetuadas via MEF no domínio da frequência, considerou-se a malha regular (287803 pontos), conforme apresentado na Figura 6.55. Considerou-se período estendido de 15,0 segundos e fator de amortecimento nulo. Adotou-se, na resolução dos sistemas de equações algébricas resultantes, o algoritmo do Gradiente Conjugado em conjunto com condicionamento de Jacobi. Como critério parada, considerou-se a norma do resíduo resultante ser menor que a tolerância, fixada em 10^{-10} . A Figura 6.58 apresenta o número de iterações (normalizados em relação à ordem do sistema) em função da frequência de excitação. Observa-se que o número de iteração se manteve sempre abaixo de 8% da ordem do sistema, e desta forma, conclui-se que o algoritmo apresenta uma redução considerável no tempo de resolução dos sistemas algébricos.

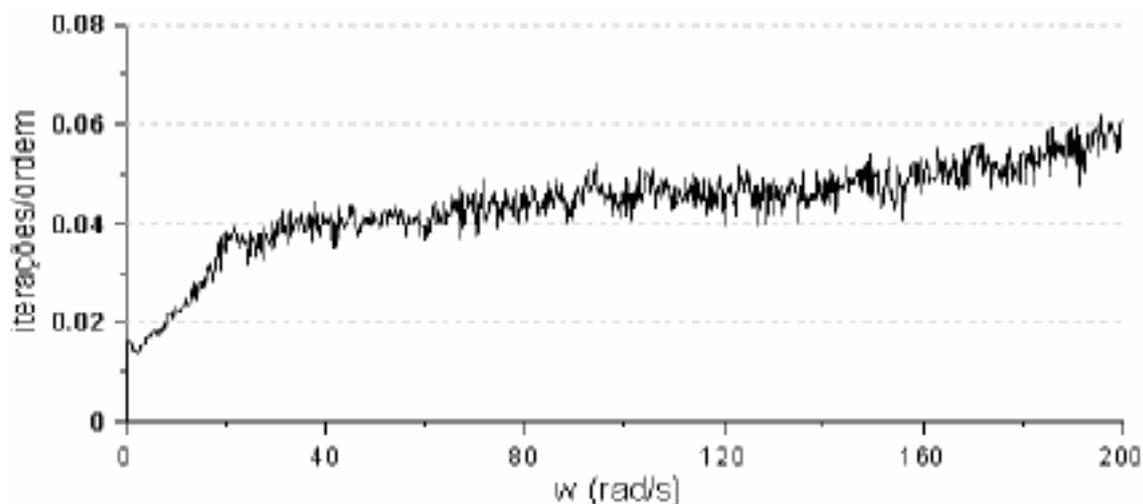


Figura 6.58 – Número de iterações em função das frequências do espectro.

Para a obtenção das respostas, via transformada inversa de Fourier, adotou-se a técnica de “zero-padding” (OPPENHEIM e SCHAFER, 1989) na interpolação dos valores temporais, ou seja, ao final dos espectros das respostas complexas foram inseridos valores nulos de forma a aumentar o número de pontos na transformada inversa, e desta forma melhorar a interpolação da resposta no tempo, sem alteração no resultado final.

A Figura 6.57 apresenta os sismogramas obtidos (aumento de 10 vezes na percepção) em função do número de pontos do espectro e do número de valores nulos adicionados a este espectro. Pode-se observar por esta figura que a técnica de “zero-padding”, bem como a consideração de quantidades maiores de pontos do espectro,

conduzem a melhores respostas, mas estas melhorias tornam-se insignificantes quando as componentes do espectro de frequências adicionadas à transformada apresentam baixa amplitude, ou seja, quando a contribuição dos modos de vibração possuem pouca influência na vibração do modelo. A Figura 6.59 apresenta o espectro do sismograma obtido via MEF na frequência. Observa-se que acima da frequência de corte (188.5 rad/s) as amplitudes são baixas, ou seja, acima deste valor, a resposta será pouco afetada pelo número de componentes do espectro considerados.

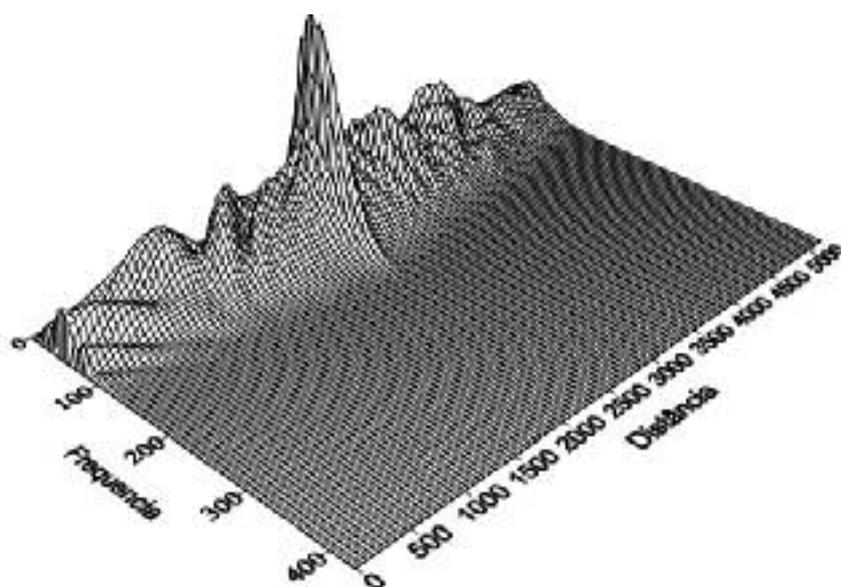


Figura 6.59 – Sismogramas: amplitude em função da frequência – Domo de sal.

Por fim, visando ressaltar a importância da interpolação das propriedades físicas em problemas analisados via MEF, onde as propriedades físicas dos modelos físicos considerados são altamente heterogêneas, foram efetuadas modelagens tempo-dependentes do Domo salino (Figura 6.54), considerando-se tanto a interpolação das propriedades físicas dentro do elemento (Figura 6.60a), a partir das próprias funções de forma dos elementos, bem como considerando-se as propriedades físicas constantes no interior dos elementos (Figura 6.60b). Considerou-se uma malha regular de elementos quadrangulares quadráticos gerados por um *grid* contendo 3117x831 pontos espaçados a cada 2,5 metros, e como esquema de marcha no tempo, o algoritmo explícito da Diferença Central. Pode-se observar, através dos resultados obtidos, que pontos difratores artificiais surgem quando as propriedades físicas são consideradas constantes no interior do elemento, uma vez que, neste caso, ocorre uma maior dificuldade de definição das interfaces entre as diversas subcamadas geológicas presentes no modelo.

Assim, na análise de estruturas contendo elevado grau de heterogeneidade nas propriedades físicas, a adoção do procedimento de interpolação nodal das propriedades físicas conduz a uma melhor definição das sub-regiões existentes em tais modelos.

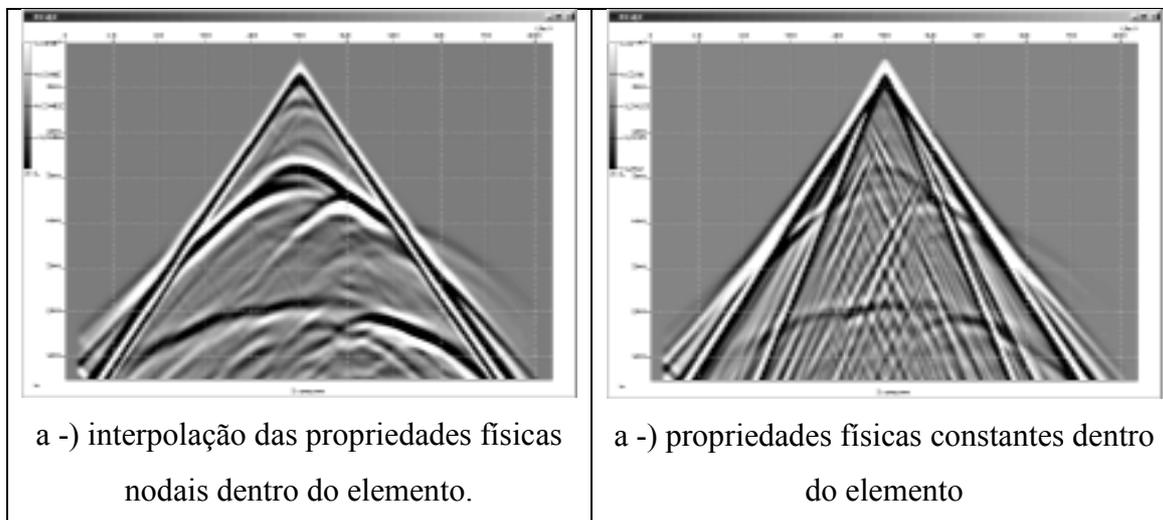


Figura 6.60 – Sismogramas: modelagem tempo dependente – Domo de sal.

6.9. Modelagem 2D elástica em paralelo: Modelagem Sísmica bidimensional

O mesmo domo de sal do exemplo anterior foi modelado via MEF elástico, adotando-se, neste caso, coeficiente de Poisson igual a 0,25 em todo o modelo e coeficiente de amortecimento hysterético igual 0,03. Considerou-se a mesma malha irregular do exemplo anterior, composta por 153931 pontos e 18433 elementos triangulares quadráticos, e fonte sísmica situada na mesma posição e com a mesma frequência de corte, ou seja, 30 Hertz.

Na modelagem tempo-dependente via Método dos Elementos Finitos optou-se pelo esquema implícito HHT ($\alpha = 0,01$, $\beta = 0,255015$ e $\gamma = 0,51$) de marcha no tempo. O tempo total de análise, da mesma forma que o exemplo anterior, foi de 1,5 segundos e intervalo de tempo de 2,0 milissegundos. O modelo foi dividido em quatro partições de iguais dimensões e processado em um *cluster* heterogêneo de PC's, segundo paradigma da Decomposição de Domínios. Utilizou-se *solver* iterativo do Gradiente Conjugado em conjunto com condicionamento de Jacobina resolução dos sistemas lineares resultantes. Os resultados de sismogramas nas direções horizontal e vertical, com aumento de 10 vezes na percepção, são apresentados na Figura 6.63.

Em seguida procedeu-se à análise do modelo, via Método das Diferenças Finitas (operador elástico heterogêneo de segunda ordem no tempo e no espaço, KELLY e MANFURT, 1975), até o tempo de 0,45 segundos, plotando-se então os campos de deslocamentos (Figura 6.61) e velocidades (Figura 6.62) neste instante. Estes campos foram então considerados como campo de condições iniciais na modelagem via Método dos Elementos Finitos no domínio da frequência. Adotou-se 10 segundos como tempo total de análise (período estendido somado ao período de carregamento) e 1,05 segundos como tempo de observação da resposta. Os resultados, considerando-se 1024 pontos do espectro e 2048 pontos nulos adicionais, são apresentados na Figura 6.64. Uma vez que as reflexões e amplitudes dos principais eventos, obtidas via algoritmo MEF no domínio da frequência, não apresentam variações significativas, se comparadas às obtidas via MEF no tempo (Figura 6.63), cuja análise foi efetuada em presença de amortecimento viscoso com fator de coeficiente igual a 1,30, conclui-se que as respostas obtidas via algoritmo MEF no domínio da frequência, sob presença de campos iniciais de deslocamentos e velocidades, apresentam-se bastante satisfatórias.

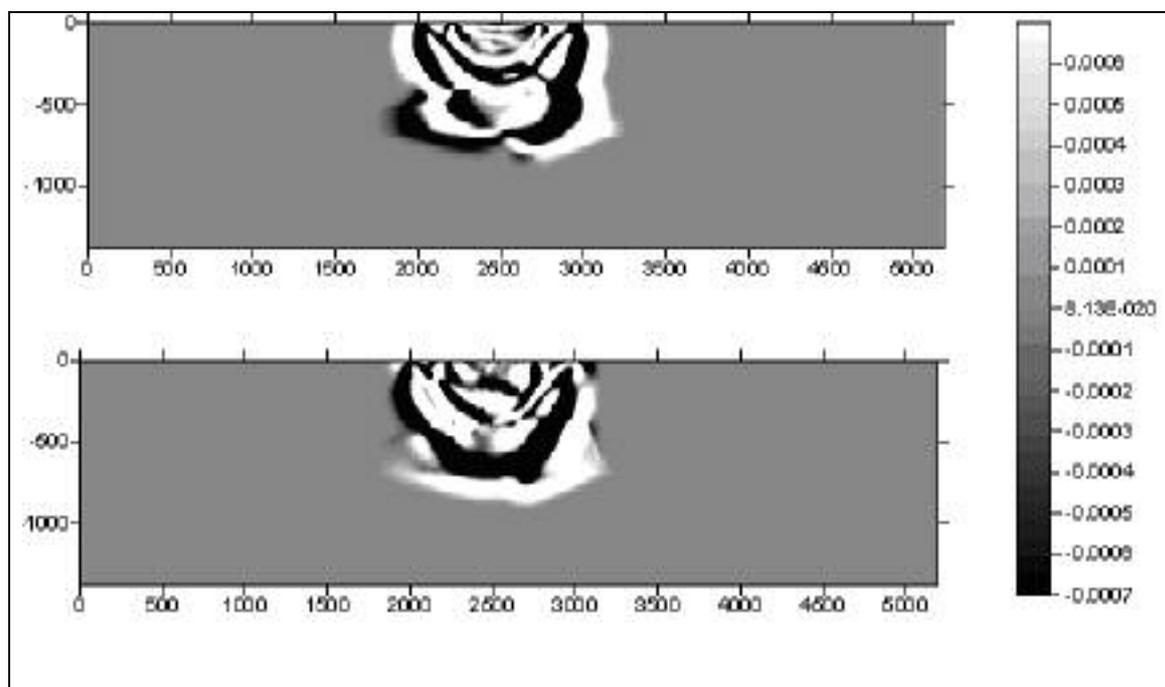


Figura 6.61 – Campo inicial de deslocamentos: modelagem elástica – Domo de sal.
Direções horizontal (superior) e vertical (inferior).

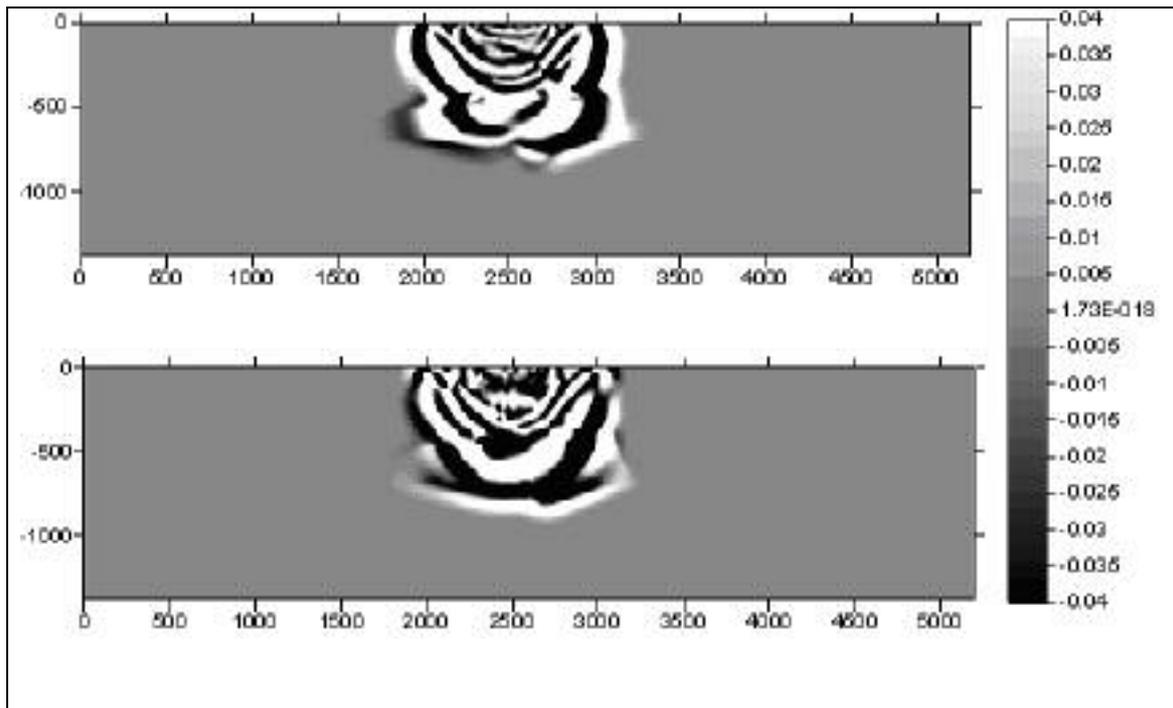


Figura 6.62 – Campo inicial de velocidades: modelagem elástica – Domo de sal.
Direções horizontal (superior) e vertical (inferior).

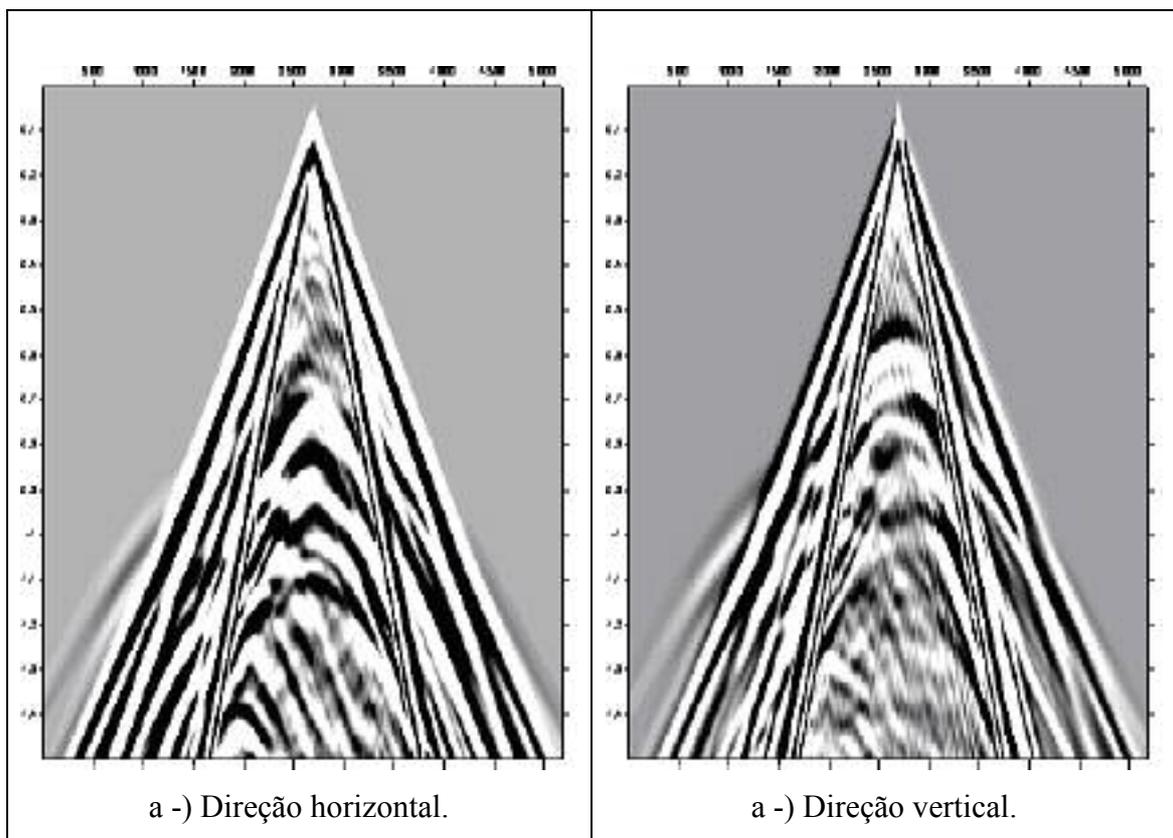


Figura 6.63 – Sismogramas: MEF no tempo – Domo de sal.

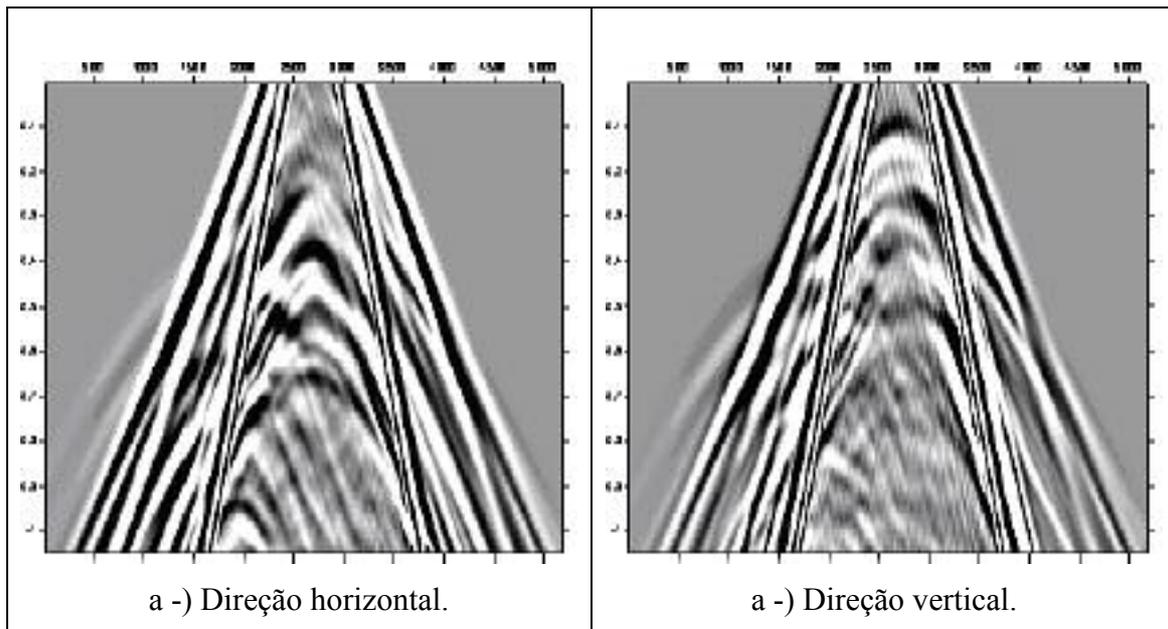


Figura 6.64 – Sismogramas: MEF na frequência – Domo de sal.

6.10. Modelagem 2D em paralelo: Análise de Performance em cluster de PC's

Com o objetivo de avaliar a performance e eficiência alcançadas pelos códigos computacionais desenvolvidos neste projeto, que consideram recursos de programação em paralelo baseados nas bibliotecas do PVM(Paralell Virtual Machine), foram realizadas análises via Método dos Elementos Finitos, em *cluster* de microcomputadores, segundo a técnica de paralelização denominada decomposição de domínio. A Figura 6.65 apresenta os diversos esquemas de decomposição considerados nas análises, partindo de um esquema composto por apenas uma partição, chegando a um total de 36. Para cada uma destas partições, considerou-se *grid* compostos de 160x160, 320x320, 480x480, 640x640, 800x800, 960x960, 1120x1120, 1280x1280, 1440x1440 e 1600x1600 pontos, espaçados a cada 10 metros. Em cada partição, uma fonte sistêmica de 30Hz foi aplicada no seu centro, com o objetivo de equalizar o nível de operações com valores não nulos realizadas em cada partição. O tempo de análise foi 0,1 segundos, intervalo de tempo de 0,2 milisegundos, sem impressão de sismogramas e *snapshots* (evitou-se escrever em disco para não alterar a performance das análises).

O tempo total de execução do programa de modelagem acústica desenvolvido é proporcional tanto ao número de incrementos de tempo necessários para se alcançar o

tempo final de análise quanto ao número de pontos do modelo geológico a ser analisado. Como o tempo de comunicação é proporcional ao número de nós pertencentes ao contato entre as diversas partições que compõem este modelo geológico, espera-se um comportamento linear dos resultados de performance.

A Figura 6.66 apresenta os resultados de tempo total de análise, obtidos em função do número total de graus de liberdade, para cada uma das análises efetuadas. Pode-se observar que a solução de rede utilizada neste trabalho comportou bem o tráfego gerado pelo problema, mesmo para um grande número de máquinas, não gerando nenhum tipo de overhead que destruísse o comportamento linear da resposta, mesmo para grandes valores do número de graus de liberdade do modelo. Apesar disto, alguns pontos anômalos surgiram na configuração composta por nove partições, devido provavelmente à influência da memória *cache*, como discutido em BRAGANÇA et. al (2003).

A partir dos resultados obtidos para o programa de modelagem acústico 2D pode-se fazer uma extrapolação e avaliar-se o tempo computacional para se realizar uma determinada simulação com as características semelhantes às estabelecidas nestas análises de performance.

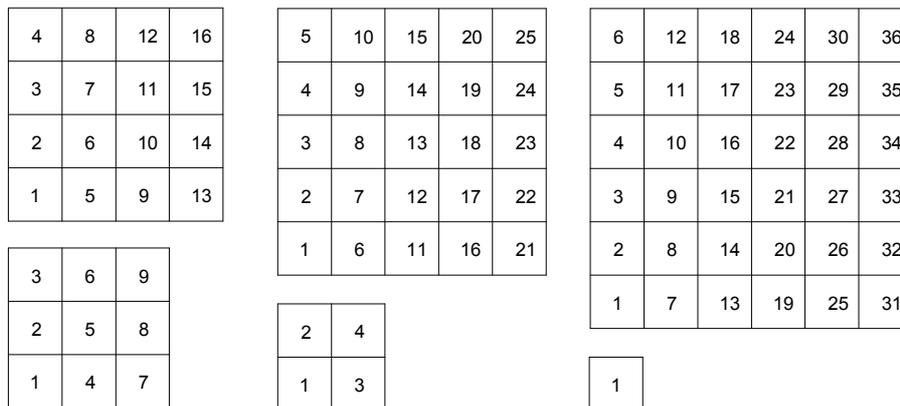


Figura 6.65 – Análise de performance: Esquema de particionamento.

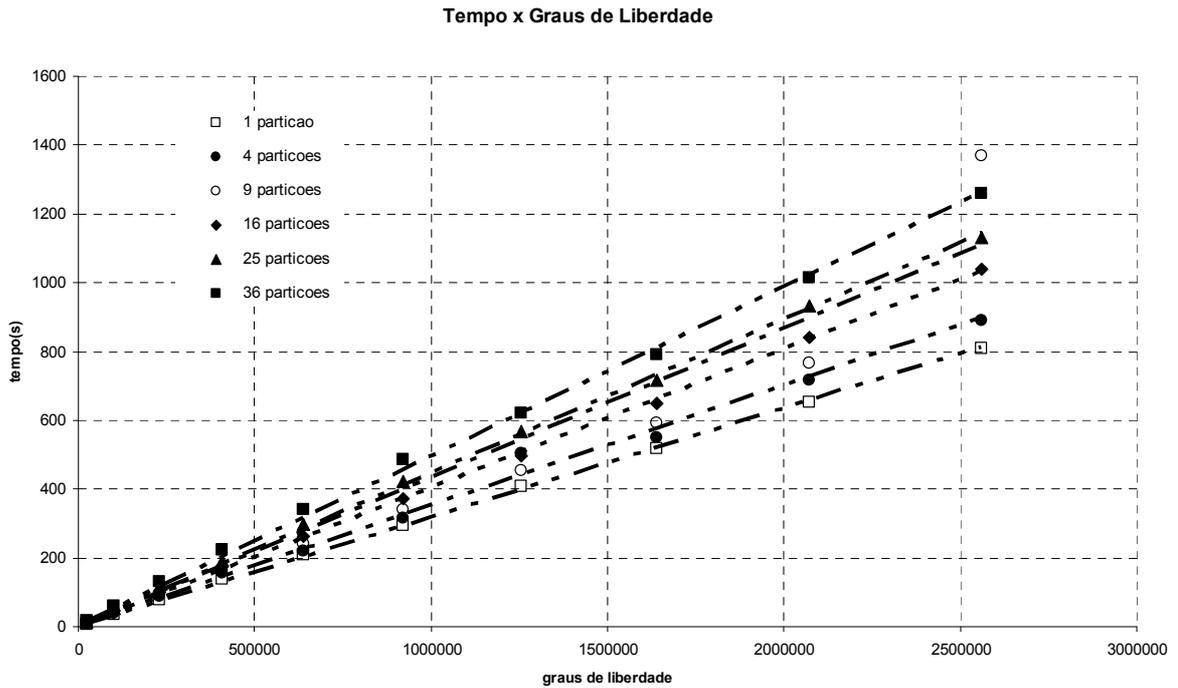


Figura 6.66 – Análise de performance: Gráfico tempo versus graus de liberdade.
 Configuração dos nós: Pentium III – 550 MHz, 768 Mb RAM, 512 Kb Cachê.
 Configuração da rede: Fast ethernet Switch 100 Mbps.

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

No presente trabalho desenvolveu-se um procedimento para a análise numérica de problemas de propagação de ondas, bi e tridimensionais, considerando-se a presença de estados iniciais de deslocamentos e velocidades, baseado na transformação do problema tempo-dependente em uma série, no domínio da frequência. Uma vez que a implementação deste último pode ser facilmente derivada de um algoritmo formulado para a resolução de problemas estáticos, tornou-se possível resolver problemas estacionários gerais, sob carregamento periódico ou não, com uma considerável facilidade, inclusive no que se refere à implementação de amortecimento viscoso e histerético do material, característica importante na análise de problemas de iteração solo-estrutura.

Apresentou-se uma técnica bastante geral para a consideração de condições iniciais em termos de campo de velocidades e/ou deslocamentos prescritos em análises efetuadas tanto no domínio do tempo quanto da frequência. Demonstrou-se que esta técnica pode ser deduzida de postulados básicos da mecânica clássica. Sua formulação possui uma forte base teórica e apresenta fácil entendimento físico. Como pode ser observado neste trabalho, tal técnica demonstrou ser bastante geral e pode ser aplicada a qualquer método numérico.

Apresentaram-se, de forma resumida, as equações diferenciais parciais que regem o problema de valor inicial e de contorno, relacionadas ao fenômeno da propagação de ondas em meios elásticos. Em seguida apresentou-se a formulação do MEF, baseada no método dos resíduos ponderados, particularmente a formulação de Galerkin e técnicas de resolução dos sistemas matriciais de equilíbrio dinâmico resultantes. Neste ponto foi introduzido um esquema de avanço no tempo de quarta ordem que se mostrou competitivo em relação ao Runge-Kutta clássico de quarta ordem e aos esquemas clássicos de segunda ordem, quando utilizados em problemas de propagação de ondas. Também foram descritas técnicas para implementação da transformada direta e inversa de Fourier, seguido de discussões sobre o período estendido e fenômeno de *aliasing*.

Os diversos algoritmos desenvolvidos neste trabalho foram validados a partir da análise de sistemas dinâmicos nos domínios do tempo e frequência. Apresenta-se no

primeiro exemplo um problema de fundação de máquina. Observando-se as possíveis falhas na concepção do projeto de um bloco de fundação de máquina, demonstrou-se a importância das análises dinâmicas a serem realizadas, considerando-se, algoritmos baseados tanto no domínio do tempo quanto na frequência.

Em seguida foram formulados problemas bi e tridimensionais acústicos, com presença de campos de velocidades e deslocamentos iniciais prescritos, cujas respostas obtidas via análise no domínio da frequência e via esquemas de marcha no tempo, foram comparadas a respostas analíticas, chegando-se a resultados satisfatórios no que diz respeito à qualidade destas respostas.

Além disto, conclui-se que a utilização de *solvers* iterativos, notadamente o gradiente conjugado, na resolução dos sistemas algébricos complexos originados do problema frequência-dependente apresenta resultados satisfatórios em termos de convergência, tanto na presença de mecanismos de amortecimento quanto em sistemas sem amortecimento. Cabe ressaltar que em análises cujo número de pontos de frequência, e conseqüentemente a magnitude das frequências de excitação, forem muito elevados, a taxa de convergência será reduzida em conseqüência do mal condicionamento relacionado à análise para altas frequências.

A resolução de problemas de propagação de ondas 2D, em modelos geofísicos com alto grau de complexidade e elevado número de graus de liberdade, considerando-se o desenvolvimento de algoritmos em *cluster* de microcomputadores foi também abordada neste trabalho. Tais respostas foram comparadas às obtidas via Método das Diferenças Finitas (MDF), largamente utilizado na modelagem de problemas geofísicos. As respostas obtidas por ambos os métodos mostraram-se semelhantes, tanto no que diz respeito às amplitudes quanto ao posicionamento das reflexões e refrações originadas nas estruturas geológicas das seções sísmicas consideradas. Desta forma, conclui-se que a formulação via MEF pode ser utilizada de forma satisfatória, alternativamente ao MDF, em análises geofísicas de estruturas geológicas complexas.

Cabe ressaltar que nas análises sísmicas efetuadas com malha de Elementos Finitos otimizada, com refinamento em torno da fonte sísmica, obteve-se redução significativa do número de graus de liberdade (em torno de 50%) em relação ao *grid* estruturado de Elementos Finitos. Como nenhuma diferença considerável entre os resultados obtidos nas análises via MEF foi observada, conclui-se que é possível obter uma elevada redução do custo computacional da análise, tornando-a competitiva com as análises via Diferenças Finitas, sem redução na qualidade das respostas. De fato, em

análises efetuadas em trabalhos recentes, obteve-se uma redução do número de graus de liberdades em torno de 70%, tornando a eficiência do MEF próxima à do MDF.

Em problemas físicos envolvendo materiais cujas propriedades físicas variam continuamente dentro do elemento, como no caso de modelos geológicos em levantamentos geofísicos, a aproximação por elementos com propriedades constantes acarreta no surgimento de ondas artificiais (pontos difratores) que em alguns casos podem interferir de forma significativa nas respostas obtidas. Assim, a interpolação das propriedades físicas dentro dos elementos, por meio das próprias funções de base utilizadas na formulação do MEF, mostrou-se uma importante técnica a ser adotada na análise de estruturas geológicas complexas, uma vez que o aumento no custo computacional quando da adoção desta técnica é desprezível, se comparado ao tempo de montagem das matrizes do sistema.

O emprego de *cluster* de PC's, na análise de problemas físicos de grande porte, constitui hoje uma realidade, devido, principalmente, ao baixo custo de obtenção e manutenção dos equipamentos constituintes desta arquitetura, se comparados à utilização de soluções baseadas em memória compartilhada (supercomputadores). Desta forma, torna-se importante que os códigos computacionais a serem desenvolvidos para aplicação em problemas de grande porte, comportem a abordagem considerando-se o emprego dos recursos da programação em paralelo, via *cluster* de PC's. Neste trabalho, desenvolveu-se algoritmos bidimensionais, tanto acústicos quanto elásticos, para a modelagem tempo-dependente de problemas gerais de propagação de ondas sísmicas, englobando-se os esquemas explícitos e implícitos apresentados neste trabalho. Observou-se, pelo comportamento linear dos resultados obtidos no teste de performance (aplicação 6.10), um adequado aproveitamento dos recursos de paralelização em problemas contendo elevado número de graus de liberdade.

Como sugestões para a continuidade do trabalho apresentado, podem ser considerados os seguintes itens:

Paralelização dos códigos MEF 3D, uma vez que análises tridimensionais de problemas de grande porte em geofísica apresentam resultados mais adequados por levarem em conta as reflexões devido a estruturas localizados fora da seção sísmica 2D;

Paralelização dos códigos MEF baseados no domínio da frequência, onde espera-se que, considerando-se a paralelização segundo a abordagem mista "decomposição de domínio/divisão de tarefas", as respostas sísmicas possam ser obtidas, via *cluster* de PC's, com baixa perda devido à transferência de dados pela rede e sua elevada

eficiência. Com isto, análises tridimensionais via MDF ou MEF poderão utilizar os recursos de rede de forma otimizada, diminuindo o tempo de resposta, principalmente em problemas geofísicos tridimensionais.

Estudo de esquemas de armazenamento de matrizes mais eficientes, como por exemplo, armazenamento por arestas, de forma a melhorar a performance dos códigos MEF.

Desenvolvimento de curvas de performance, tanto para os esquemas explícitos quanto implícitos, bi e tridimensionais. Tais curvas, particulares a cada arquitetura de rede, auxiliam na previsão do tempo de análise de problemas reais da indústria, bem como apresentam diretrizes para um melhor aproveitamento de um determinado cluster.

Estudo detalhado da eficiência e precisão dos diversos esquemas de avanço no tempo, considerando-se matrizes de massa diagonais, consistentes, bem como combinação entre estes esquemas de marcha no tempo.

8. REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A., 1974, *Handbook Of Mathematical Functions*, National Bureau Of Standards, Dover, New York.
- ADEMOYERO, O.O., BARTHOLOMEW-BIGGS, M.C., DAVIES, A.J., 2001, Computational Linear Algebra Issues in the Galerkin Boundary Element Method, *Computers and Mathematics with Applications*, 42, 1267-1283
- ARAÚJO, F. C., MARTINS, C. J. AND MANSUR, W. J., 2001, “An efficient BE iterative-solver-based substructuring algorithm for 3D time-harmonic problems in elastodynamics”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25, pp. 795-803.
- AXELSSON, O., 1986, “A general incomplete block-factorization method”, *Linear Algebra Appl.*, 74, 179-190.
- BANERJEE, P.K., 1994, *The Boundary Element Methods in Engineering State*. 1 ed. University of New York at Buffalo, McGraw-Hill.
- BAYSAL E., KOSLOFF D.D. AND SHERWOOD, J.W.C., 1984, “A Two-Way Nonreflecting Wave Equation”, *Geophysics*, 49, 231-241.
- BATHE, K.J., 1996, *Finite Element Procedures*. 1 ed. New Jersey, Prentice Hall Inc.
- BELYTSCHKO, T., MULLEN, R., 1978, “On Dispersive Properties Of Finite Element Solutions”, New York.
- BERTSEKAS, D., TSITSIKLIS, J.N., 1989, *Parallel and Distributed Computation, Numerical Methods*, Prentice Hall, New Jersey.
- BESKOS, D.E., MANOLIS, G.D., 1987, *Boundary Element Methods in Elastodynamics*. 1 ed. University of Southampton, Springer-Verlag.
- BRAGANÇA, R.S.N., BULCÃO, A.; DJALMA SOARES, M.F.; MANSUR, W.J., 1993, “Finite difference 3-D elastic and acoustic seismic modeling using Beowulf cluster” *VIII Congresso Internacional da SBGf e V Conferência Latino-americana de Geofísica*, 2003, Rio de Janeiro, Brasil.
- BREBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., 1984, *Boundary Element Thechniques*. 1 ed. University of Southampton, Springer-Verlag.
- BRIGHAM, E.O., 1974, *The Fast Fourier Transform*. 1 ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall Inc.

- BUCHER, H.F., 2000, *Aplicações das Transformadas tempo-frequência em Engenharia Civil*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- BUTKOV, A., 1988, *Física Matemática*, Ed. Guanabara Koogan, S. A.
- CABELLO, J., 1996, "Parallel Explicit Unstructured Grid Solvers on Distributed Memory Computers", *Advances in Engineering Software*, 26, 189-200.
- CHAN, C.H., CAI, C.W., CHEUNG, Y.K., 1992, "Convergence Studies Of Dynamic Analysis By Using Finite Element Method With Lumped Mass Matrix", *Journal Of Sound And Vibration*, 165.
- CHRISTON, M.A., 1999, "The Influence Of The Mass Matrix On The Dispersive Nature Of The Semi-Discrete, Second-Order Wave Equation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 173.
- CHUNG, J., HULBERT, G.M., 1996, "Explicit Time Integration Algorithms For Structural Dynamics With Optimal Numerical Dissipation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 137.
- CHUNG, J., LEE, J.M., 1996, "A New Family Of Explicit Time Integration Methods For Linear And Non-Linear Structural Dynamics", *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 37.
- CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., 1993, *Dynamics Of Structures*. 2 ed. University Of California, Berkeley, McGraw-Hill.
- COOK, R.D., 2001, *Concepts And Applications Of Finite Element Analysis*. 3 ed. New York John Wiley & Sons Inc.
- COOLEY, J.W., TUKEY, J.W., 1965, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", *Mathematics of Computation*, 19, 90, 297-301.
- COHEN, G., JOLY, P., 1990, "Fourth Order Schemes For The Heterogeneous Acoustics Equation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80, 397-407.
- DE LACERDA, L.A., WROBEL, L.C. AND MANSUR, W.J., 1997, "Dual Boundary Element Formulation for Sound Propagation Around Barriers Over an Impedance Plane", *Journal of Sound and Vibration*, 202, no 2, 235-247.
- DOMINGUEZ, J., 1993, *Boundary Elements in Dynamics*, 1 ed. Computer Mechanics Publications, Southampton, & Elsevier, London.
- DONGARRA, J.J., SORENSEN, D.C., 1986, "Linear Algebra on High Performance Computers", *Appl. Math. And Com*, 20, 57-88.

- ERINGEN, A.C., SUHUBI, E.S., 1975, *Elastodynamics*. 1ed. Academic Press, New York.
- FERREIRA, W.G., CLARET, A.M., VENANCIO-FILHO, F., MANSUR, W.J., BARBOSA, F.S., 2000, " A frequency-domain pseudo-force method for dynamic structural analysis. Nonlinear systems and nonproportional damping ", *J Brazilian Soc Mech*, XXII(4), 551–564.
- FOUFOULA-GEORGIU, E., KUMAR, P., 1994, "Wavelet Analysis in Geophysics: An Introduction", *Wavelets in Geophysics*, 4, Wavelet Analisis and its Applications, Academic Press, pp 1 – 43.
- FOX, C., WILLIAMS, R.D., MESSINA, C., 1994, *Parallel Computing Works!*, Morgan Kaufmann, San Francisco.
- FRAYSS, V., GIRAUD, L., 2000, "A Set of Conjugate Gradient Routines for Real and Complex Arithmetics", *CERFACS Technical Report*, TR/PA/00/47.
- FRENCH, A.P., 1974, *Mecánica Newtoniana*, Editora Reverté, Barcelona.
- GIJZEN, M.B., 1995, "Large Scale Finite Element Computations With GMRES-Like Methods In A Cray-Y-MP", *Applied Numerical Mathematics*, 19.
- GIVOLI, D., NETA, B., 2002, "High-order non-reflecting boundary conditions for dispersive waves", *Wave Motion*, 1114 ,1–15.
- GOLUB, G.H., VAN LOAN, C.F., 1996, *Matrix Computations*, 3rd ed. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD.
- GRAFF, K. F., 1975, *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications, New York.
- GROTE, M., HUCKLE, T., 1997, "Parallel preconditioning with sparse approximate inverses", *SIAM J. Sci. Comput.*, 18, 838-853.
- GRUNDMANN, H., TROMMER, E., 2001, "Transform methods-what can they contribute to (computational) dynamics?", *Computer & Structures*, 79, pp. 2091-2102.
- HALL, D., 1987, *Basic Accoustics*. 1 ed. Malabar, Florida, Krieger Publishing Company.
- HESTENES, M.R., STIEFEL, E.L., 1952, "Methods of conjugate gradients for solving linear systems", *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Section B 49 409-436.
- HIGDON, R. L., 1991, "Absorbing Boundary Conditions For Elastic Waves", *Geophysics*, 56, 231-241.

- HILBER, H.M., HUGHES, T.J.R., TAYLOR, R.L., 1977, "Improved Numerical Dissipation For Time Integration Algorithms In Structural Dynamics", *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*.
- HILLMER, P., 1990, "Foundation uplift and radiation damping effects calculated in the Laplace domain", *Computer & Geotechnics*, 9, pp. 101-112.
- HUGHES, T.J.R., 2000, *The Finite Element Method, Linear Static And Dynamic Finite Element Analysis*. 2 ed. New Jersey, Prentice-Hall.
- JACOB, B.P. E EBECKEN, N.F.F., 1994, "An Optimized Implementation of the Newmark/ Newton-Raphson Algorithm for the Time Integration of Nonlinear Problems", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol 10, pp 983-992
- KAWAMOTO, J.D., 1983, "Solution of nonlinear dynamic structural systems by a hybrid frequency–time domain approach", in: *MIT Research Report R83-5*, Dept. of Civil Engineering.
- KIM, K., 1993, "A Review Of Mass Matrices For Eigenproblems", *Computers & Structures*, 46.
- KINSLER, L.E., FREY, A.R., COPPENS, A.B., SANDERS, J.V., 1982, *Fundamentals of Acoustics*. 3 ed. New York, John Wiley & Sons.
- KELLY, K. R., MANFURT, K. J., 1975, "Numerical Modeling of Seismic Wave Propagation", *Geophysics reprint series*, Tulsa, Oklahoma, 13.
- MALVERN, L.E., 1969, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Englewood Cliffs, New Jersey.
- MANSUR W. J., CARRER J. A. M. , 1996, "Time-domain BEM Analysis for the 2D Scalar Wave Equation, Initial Conditions Contributions to Space and Time Derivatives", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, n. 13, 2169 - 2188.
- MANSUR, W. J., 1983, *Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*, Ph.D. Thesis, Southampton University.
- MANSUR, W.J., FERREIRA, W.G., VENANCIO-FILHO, F., CLARET, A.M., CARRER, J.A.M., 2000, "Time segmented frequency-domain analysis for non-linear multi-degree-of-freedom structural systems ", *J Sound Vib*, 237, 457–475.

- MANSUR, W.J., SOARES, D.J., FERRO, M.A.C., 2003a, "Initial Conditions in Frequency-domain Analysis: the FEM Applied to the Scalar Wave Equation", *Journal of Sound and Vibration*, Article in Press.
- MANSUR, W.J., ABREU, A.I., CARRER, J.A.M., 2003b, "Initial Conditions in Frequency-domain BEM Analysis", Article in Press.
- MARTINS, C.J., 2000, *Análise de Problemas 3D no Domínio da Frequência via Algoritmo Multidomínio de Acoplamento BE/BE* – Tese de Mestrado, Mestrado em Construções Metálicas, UFOP, Brasil.
- MATTHEES, W., 1982, "A strategy for the solution of soil dynamic problems involving plasticity by transform", *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 18, 1601–1611.
- MEYER, Y., 1993, *Wavelets: algorithms and applications*, 1 ed., Philadelphia, SIAM.
- MIRANDA, P.E.C, 1997, *Estratégias Eficientes Para Migração Reversa No Tempo Pré-Empilhamento 3-D Em Profundidade Pelo Método Das Diferenças Finitas*, Msc. Thesis, Universidade Federal Da Bahia.
- MORSE, P.M, INGARD, K.U., 1968, *Theoretical Acoustic*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London.
- MORSE, P.M., FESHBACH, H., 1953, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London.
- NOWACKI, W., 1963, *Dynamic of Elastic Systems*, New York John Wiley & Sons. Inc.
- OPPENHEIM, A.V., SCHAFER R.W, 1989, *Discrete Time Signal Processing*. 2 ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall Inc.
- PAZ, M., 1997, *Structural Dynamics – Theory and Computation*. 4 ed. New York, Chapman and Hall.
- PAPOULIS, A., 1957, "A new method of inversion of Laplace transforms ", *Q. App. Math*, 14(4), 405 – 414.
- PINI, G., GAMBOLATI, G., 1990, Is a simple diagonal scaling the best preconditioner for conjugate gradients on supercomputers?, *Adv. Water Resources*, Vol. 13, No. 3
- PROAKIS, J.G., MANOLAKIS, D.G., 1996, *Digital Signal Processing—Principles, Algorithms and Applications*. 3 ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall Inc.
- PRODONOFF, V., 1990, *Vibrações Mecânicas*, Maity Comunicação e Editora Ltda, Rio de Janeiro, Brasil.

- ROSA FILHO, J.C., 2002, *Modelagem Sísmica de Ondas Elásticas e Migração Reversa no tempo em Meios Transversalmente Isotrópicos*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SAAD, Y., 1995, *Iterative Methods For Sparse Linear Systems*. 1 ed. PWS Publishing Company, Boston.
- SHEWCHUK, J.R., 1994, *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain Edition 1 ¼*, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213
- SOARES, D.J., MANSUR, W.J., 2003, "An efficient time/frequency domain algorithm for modal analysis of non-linear models discretized by de FEM", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 3731–3745.
- SOUSA, L.A., CARRER, J.A.M., MARTINS, C.J., 2002, "Finite Element And Boundary Element Elastodynamic Formulations With A Fourth Order Finite Difference Method", *Third Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering*, GIMC_2002.
- TELLES, J.C.F., 1986, *Implementation Of Triangular Elements Into the BEASY System*, Computational Mechanics Institute, Southampton.
- THOMSON, W.T., 1973, *Theory of Vibration with Applications*. 1 ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall Inc.
- TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., 1980, *Theory of Elasticity*. Stanford University, McGraw-Hill.
- VAN DER VORST, H.A, SAAD, Y, 2000, "Iterative solution of linear systems in the 20th century", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123, 1-33
- VELETSOS, A., VENTURA, C., 1984, "Efficient analysis of dynamic response of linear systems ", *Earthquake Engrg. Struct. Dynam.*, 12, pp. 521-536.
- VELETSOS, A., VENTURA, C., 1985, "Dynamic analysis of structures by the DFT method ", *J. Struct. Engrg. ASCE 111*, pp. 2625–2642.
- VENÂNCIO-FILHO, F., CLARET, A.M., 1992, "Matrix formulation of the dynamic analysis of SDOF systems in the frequency domain.", *Comput Struct*, 42, 853–5.
- WASHIO, T., HAYAMI, K., 1994, "Parallel block preconditioning based on SSOR and MILU", *Numer. Linear Algebra Appl.*, 1,533-553.
- WIDDER, D.V., 1941, *The Laplace transform*. 1 ed. Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

WOLF, J.P., 1985, *Dynamic soil-structure interaction*. 1 ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall Inc.

ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., 1989, *The Finite Element Method, Vol. 1-2*, Mc-Graw-Hill.

9. APÊNDICE 1: ONDAS SÍSMICAS

Texto extraído de ROSA FILHO (2002).

As ondas sísmicas são perturbações mecânicas que se propagam nos meios rochosos. No âmbito da Sísmica de exploração, o fenômeno da propagação de energia (à exceção da fase de geração) toma como hipótese que as rochas são meios elásticos e, por essa razão, essas ondas são consideradas elásticas e as deformações reversíveis durante sua propagação. Os pontos do meio elástico que sofrem simultaneamente o mesmo distúrbio, ou seja, que estejam igualmente deslocados da posição de equilíbrio no mesmo instante de tempo, formam as chamadas frentes de ondas, que podem apresentar formas simples (planas, esféricas ou cilíndricas) ou, no caso de meios com grandes variações de propriedades elásticas, comumente encontradas em abordagens exploratórias, podem assumir formas mais complexas.

Segundo estabelece o princípio de Huygens, cada ponto de uma frente de onda atua como se ele próprio fosse uma nova fonte de distúrbio, gerando suas próprias frentes de onda que, coletivamente, constituirão uma nova frente de onda.

As ondas sísmicas podem ser divididas em várias categorias. Citando as mais conhecidas tem-se:

Ondas internas: também conhecidas como ondas de corpo, por se propagarem por toda a extensão dos corpos, e que podem ser classificadas de acordo com a direção dos movimentos oscilatórios gerados pela sua propagação:

ondas longitudinais: também chamadas compressionais, de rarefação, de dilatação, volumétricas, primárias ou, simplesmente, P, e

ondas transversais: também chamadas cisalhantes, distorcionais, equívolumétricas, rotacionais, secundárias ou S.

Ondas superficiais: são ondas cuja propagação se restringe a regiões próximas às superfícies livres e fronteiras dos corpos e que também podem ser classificadas de várias maneiras, tais como:

ondas Rayleigh: também chamadas R, Rg, Lr ou retrógradas,

ondas Love: também chamadas Lq ou Q e

ondas Stoneley: também chamadas entubadas.

Ondas aéreas: também chamadas ondas de choque.

Ondas guiadas: também conhecidas por ondas canalizadas ou cativas.

As ondas P provocam deslocamentos na mesma direção da propagação da onda (ver Figura A1.1), ou seja, uma alternância de compressões e distensões das partículas que compõem o meio na direção da propagação da onda, ocasionando alterações de volume sem alterar a forma (considerando as partículas como elementos cúbicos infinitesimais, os ângulos entre as arestas não se alteram). Essas ondas podem se propagar tanto em meios sólidos como fluídos e, quando comparadas aos outros tipos de ondas sísmicas, apresentam pequenas amplitudes, períodos curtos e velocidades altas. Quando se propagam em líquidos e gases, chamados meios acústicos e que só permitem a propagação de ondas P, recebem o nome de acústicas. As ondas aéreas são ondas P, cuja propagação ocorre no ar.

As ondas S provocam deslocamentos no plano perpendicular à direção da propagação da onda, ou seja, cisalhamentos ou rotações em direções perpendiculares à direção de propagação, ocasionando alterações de forma (ângulos entre arestas dos elementos cúbicos infinitesimais se deformam) sem alterar o volume. Em relação ao deslocamento no plano perpendicular à direção de propagação, as ondas S podem subdividir-se em dois tipos (ver Figura A1.1):

ondas SH: com deslocamentos na direção horizontal e

ondas SV: com deslocamentos perpendiculares aos relacionados às ondas SH.

As ondas S não se propagam em meios líquidos e, quando comparadas às ondas P, mostram amplitudes e períodos maiores e velocidades mais baixas. Ondas SH que se propagam dentro de camadas guias, limitadas entre camadas de velocidades mais altas, são chamadas de ondas de Evison.

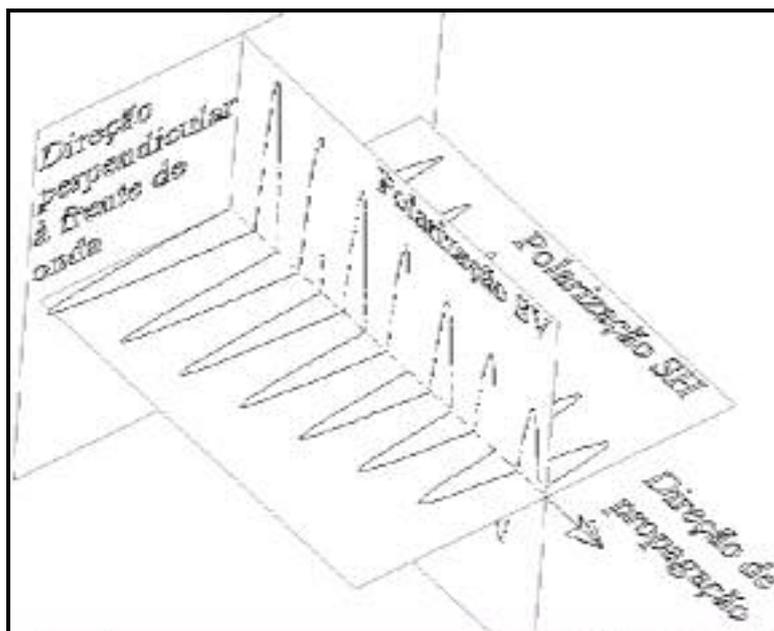


Figura A1.1 - Esquema ilustrativo da direção de propagação das ondas P e S.

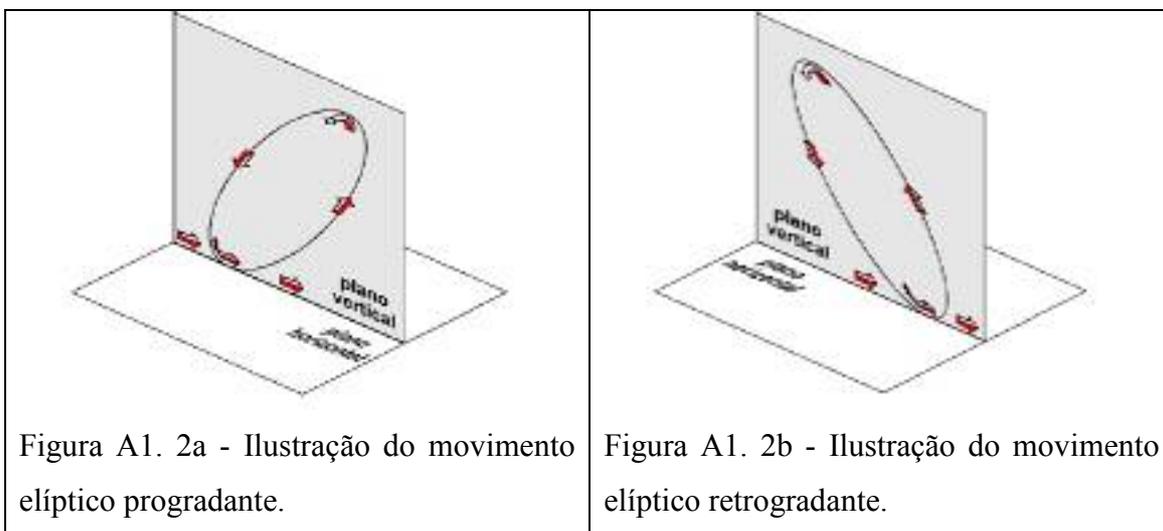
As ondas Rayleigh se propagam nas superfícies livres do meio. Nelas, os deslocamentos ocorrem no plano que contém a direção de propagação da onda e é, simultaneamente, perpendicular à superfície na qual a onda se propaga. Essas ondas resultam da combinação de deslocamentos longitudinais e transversais no referido plano, que acabam por conferir às partículas dois tipos de movimentos elípticos (o eixo maior da elipse dispõe-se ligeiramente inclinado em relação à direção de propagação da onda):

movimento elíptico progradante: se o meio sobreposto tem velocidade superior à do meio sotoposto (Figura A1. 2a) e

movimento elíptico retrogradante: se o meio sobreposto tem velocidade inferior à do meio sotoposto (Figura A1. 2b).

Uma característica marcante das ondas Rayleigh é que as amplitudes dos deslocamentos, que são bastante grandes nas superfícies em que se propagam, decrescem exponencialmente com o aumento da distância à referida superfície. As ondas Rayleigh são ondas dispersivas, com ciclos de frequências e velocidades distintos, e que, quando comparadas aos outros tipos de ondas sísmicas, apresentam períodos longos e velocidades de propagação próximas às das ondas S. Em aquisição de

dados sísmicos para exploração de petróleo, esse tipo de onda é o principal causador dos chamados cones de ruídos (ground roll).



As ondas Love se propagam na superfície do meio somente se este estiver sobreposto a outro de velocidade mais alta. Os deslocamentos associados à sua propagação ocorrem no plano da referida superfície e são transversais à direção de propagação da onda. Admite-se que a origem das ondas Love está relacionada à energia oriunda de reflexões aprisionadas entre camadas superficiais do meio. Essas ondas são bastante dispersivas e, dentre as demais ondas, são as responsáveis pelos maiores danos decorrentes de terremotos. Quando se propagam com períodos longos, são denominadas de ondas L, e quando se propagam no manto superior, sob a crosta oceânica, com períodos entre 1 e 4min, são chamadas de ondas G. As ondas Stoneley são características de meios com interfaces entre sólidos e líquidos e alguns casos excepcionais de interface sólido-sólido. O fato de serem comuns em paredes de tubulações e paredes de poços de petróleo lhes rendeu o nome de ondas entubadas.

As ondas guiadas são aquelas cuja propagação ocorre dentro de porções restritas do meio ou em uma camada guia; quando o comprimento de onda é maior que a espessura da camada, essa onda recebe o nome de onda de Lamb. Quando ocorrem associações entre dois ou mais modos de propagação de ondas de mesma fase aparente, diz-se que as ondas resultantes são ondas acopladas. Quando ocorrem acoplamentos entre ondas Rayleigh e aéreas, resultantes da propagação dos sons das fontes sísmicas pelas camadas de ar próximas à superfície do terreno (com velocidades próximas de

340m/s e frequências em torno de 100Hz), surgem as chamadas ondas Rayleigh e aéreas acopladas, ou ACRW (Air Coupled Rayleigh Waves), que têm velocidades e frequências ligeiramente superiores às das ondas aéreas. Ondas que envolvem deslocamentos dos tipos de ondas P e SV, características de camadas de baixa velocidade, encaixadas entre camadas de velocidades mais altas, são conhecidas como ondas Krey.

Em sismologia, também são empregadas outras terminologias para ondas sísmicas tais como:

ground waves: nome genérico das que se propagam pela superfície terrestre;

ondas circulares: que se propagam em círculos, paralelamente à superfície terrestre;

ondas Lg: ondas guiadas que se propagam por grandes distâncias na crosta terrestre com velocidades de aproximadamente 3500m/s;

ondas Pn: ondas P refratadas na descontinuidade sísmica de Moho, na base da crosta terrestre, cuja profundidade varia de 4km (sob a crosta oceânica) até 70km (sob grandes maciços da crosta continental) e onde a velocidade das ondas P aumenta abruptamente de 6500m/s para 7600m/s;

ondas I e K: ondas P que se propagam, respectivamente, nos núcleos interno e externo da Terra;

ondas J: ondas S que se propagam no núcleo interno da Terra e

cablebreak waves: que se propagam através do cabo de sustentação de ferramentas de perfis acústicos de poços e de cabos de aquisição de dados sísmicos marítimos.

Outra forma de classificação das ondas pode ser em função do comportamento das partículas durante o tempo de propagação. Nessa classificação, existem:

pulso: onda única, onde as partículas permanecem em repouso até serem atingidas por um distúrbio e em seguida retornam ao estado de repouso, e

trem de ondas: onde as partículas são atingidas por vários pulsos sucessivos;

quando a seqüência de pulsos é periódica, produz-se um trem de ondas periódico, que transmite às partículas um movimento também periódico (o mais simples é o movimento harmônico simples provocado por uma onda harmônica simples).

10. APÊNDICE 2: **ESQUEMAS DE AVANÇO NO TEMPO**

- **Esquema de Implementação do método da Diferença Central Explícito**

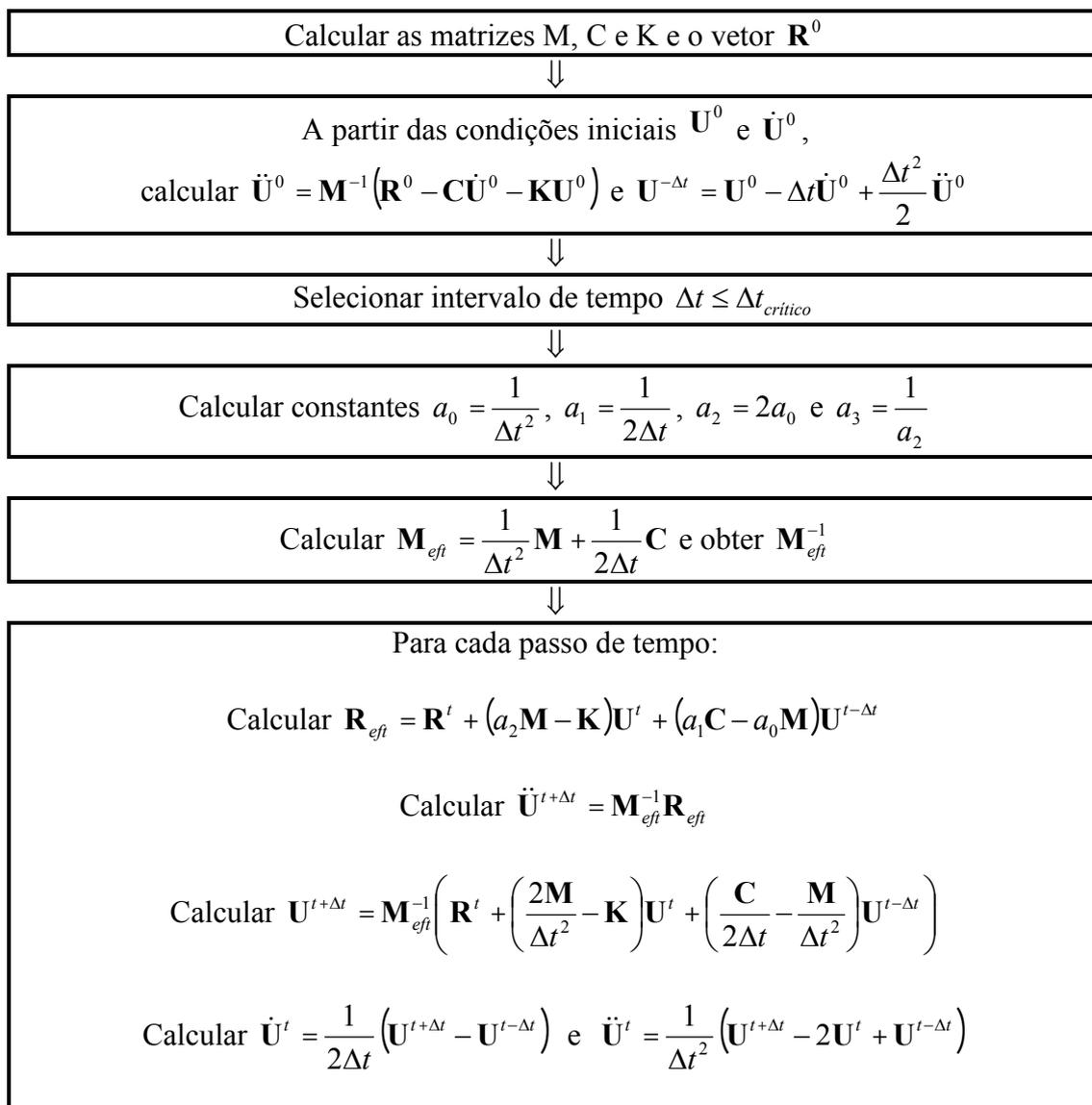


Figura A2.1 – Esquema Diferença Central Explícito

- **Esquema de Implementação do método Alfa-Generalizado Explícito**

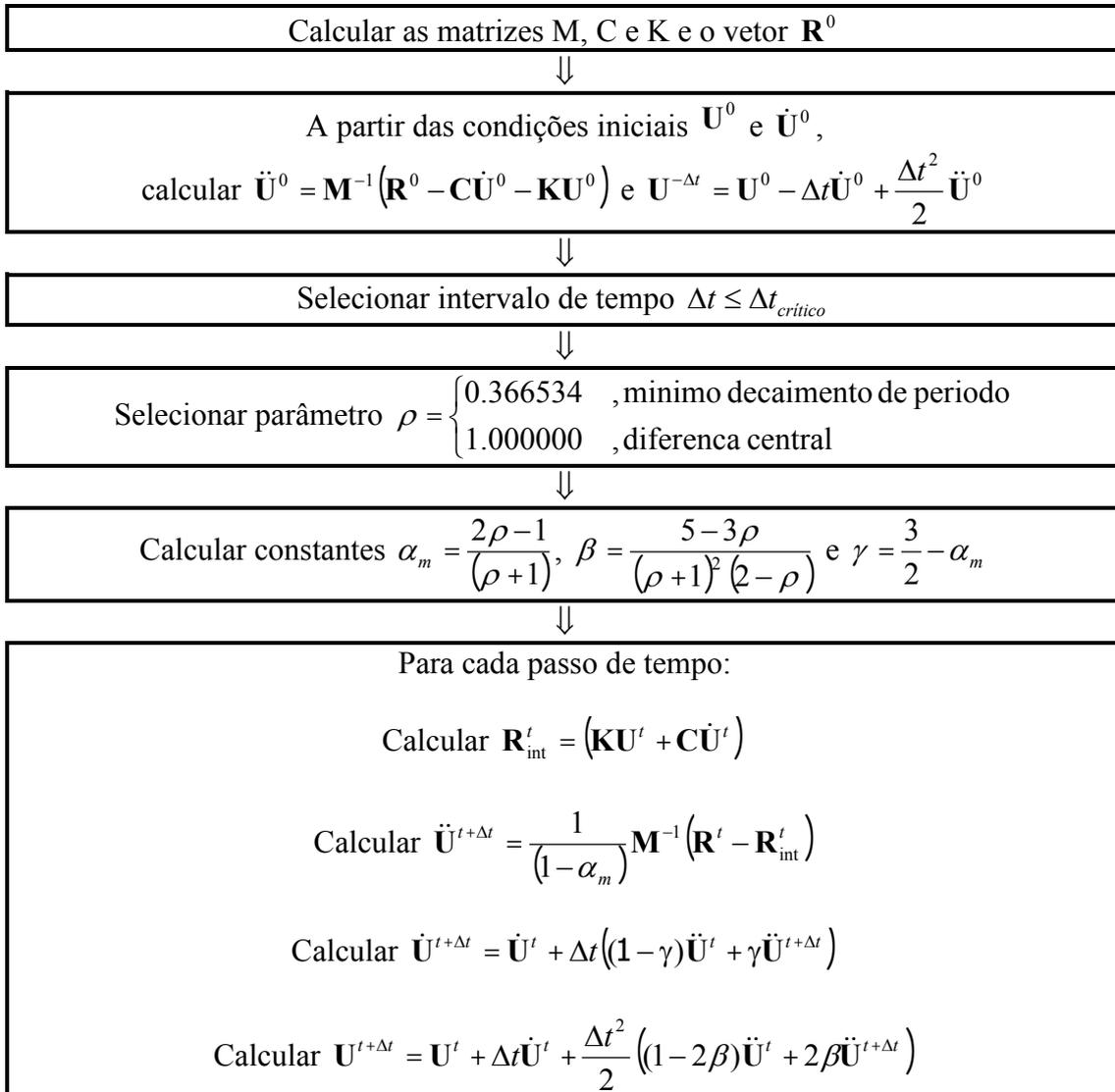


Figura A2.2 – Esquema Alfa-Generalizado Explícito

- **Esquema de Implementação do método de Lagrange Ordem 4 Explícito**

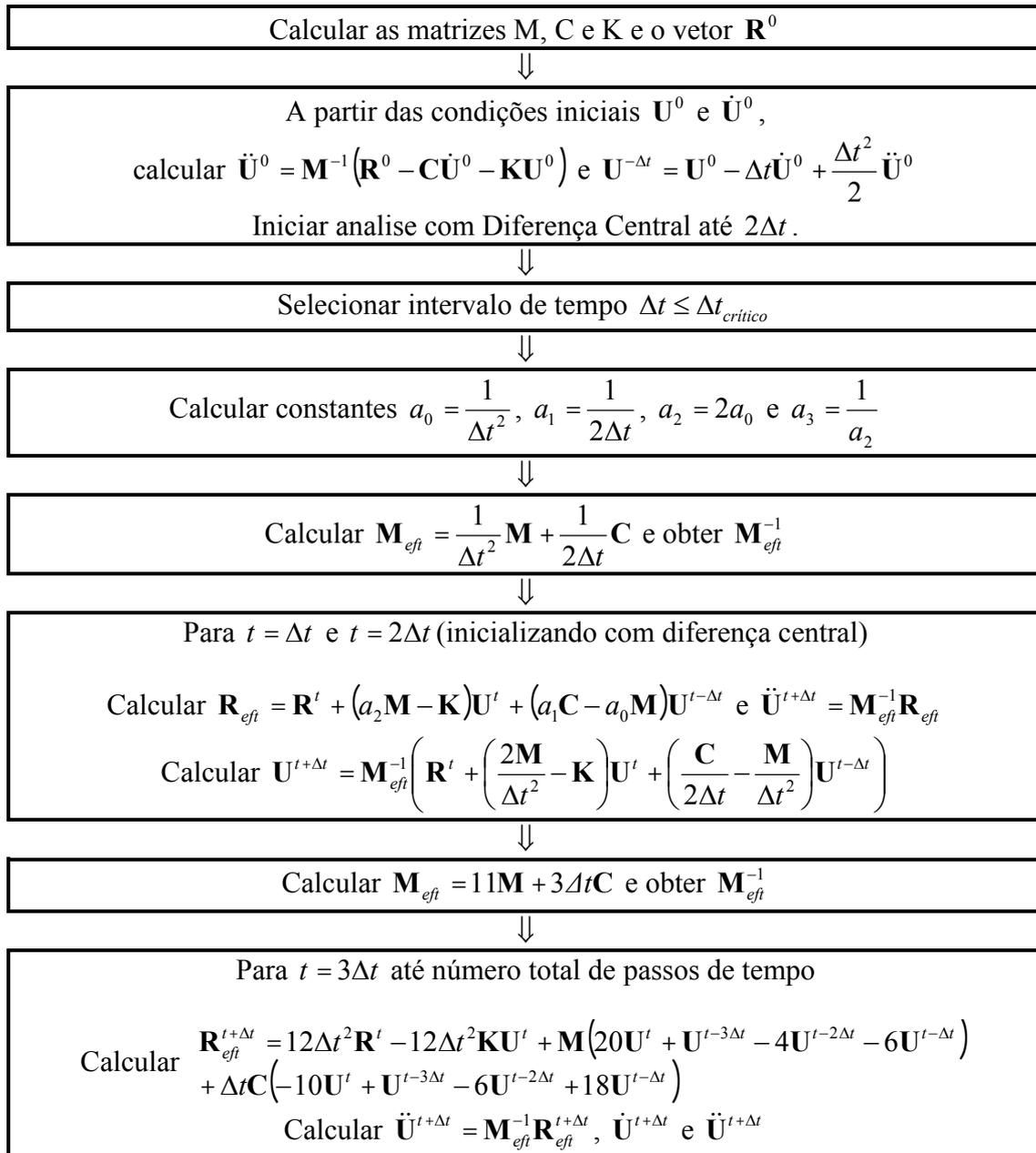


Figura A2.3 – Esquema de Lagrange Ordem 4 Explícito

- *Esquema de Implementação do método HHT Implícito*

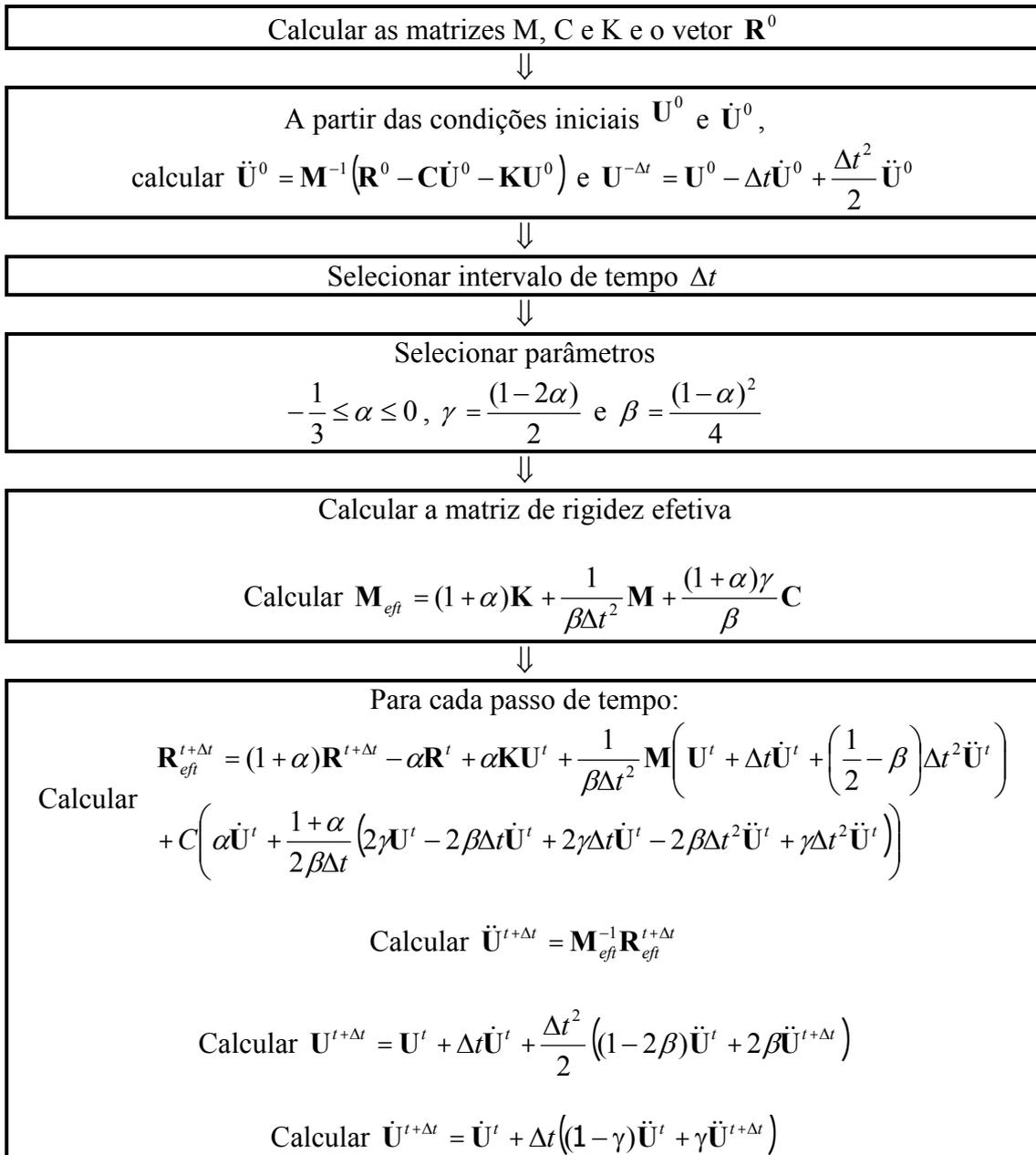


Figura A2.4 – Esquema HHT Implícito

- **Esquema de Implementação do método Runge-Kutta-Nyström clássico ordem 4**

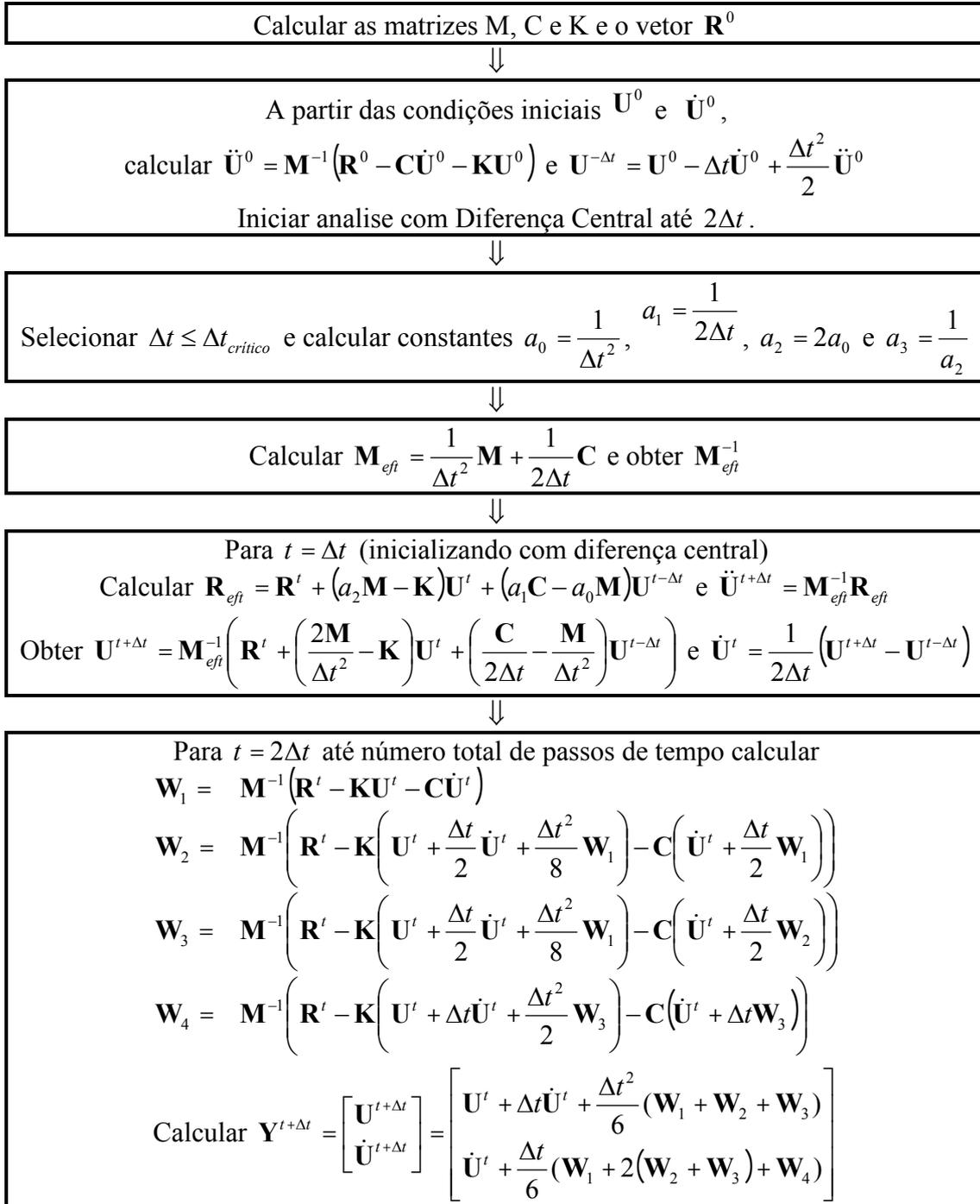


Figura A2.5 – Runge-Kutta-Nyström clássico ordem 4

11. APÊNDICE 3: GRADIENTE CONJUGADO PRECONDICIONADO SIMÉTRICO

Esquema de Implementação do algoritmo do Gradiente Conjugado com preconditionador e sem perda de simetria do sistema

Considerando

- **A** e **b** → matriz e vetor de termos independentes do sistema, respectivamente.
- **Q** → matriz de preconditionamento
- **Maxiter** → número máximo de iterações
- **tol** → tolerância para verificação da convergência
- **u** → vetor solução (em geral, inicialmente adota-se **u=0**)

n=0

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r}$$

$$a_1 = \mathbf{r}^T \mathbf{s}$$

$$a_0 = a_1$$

Enquanto
 $\text{erro} \leq \text{tol}^2 a_0$
e
 $n \leq \text{Maxiter}$

$$n=n+1$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{s}$$

$$\alpha = \frac{a_1}{\mathbf{s}^T \mathbf{q}}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} + \alpha \mathbf{s}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} - \alpha \mathbf{q}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}$$

$$a_2 = a_1$$

$$a_1 = \mathbf{r}^T \mathbf{d}$$

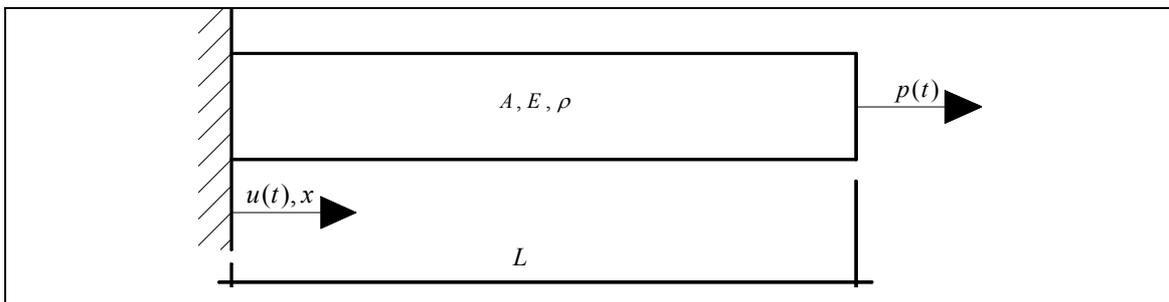
$$\beta = \frac{a_1}{a_2}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{d} - \beta \mathbf{s}$$

Figura A3.1 – Gradiente Conjugado Precondicionado Simétrico

12. APÊNDICE 4: SOLUÇÕES ANALÍTICAS DE PROBLEMAS DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS UTILIZADAS NESTE TRABALHO

A4.1- Barra engastada em uma extremidade e livre na outra, sob carregamento axial harmônico no tempo (NOWACKI, 1963):



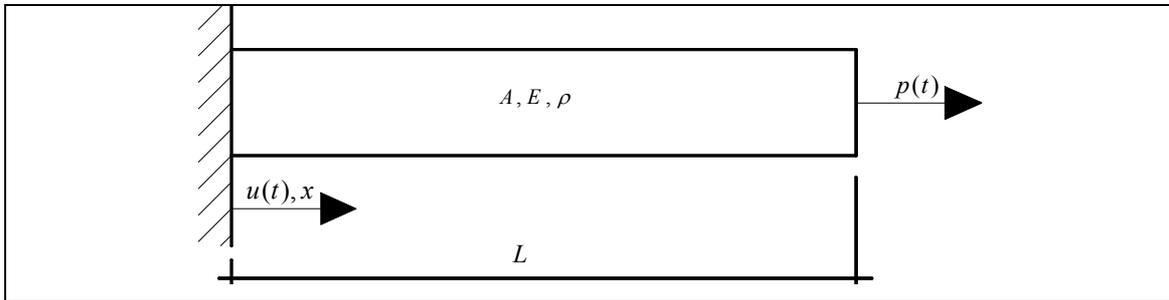
- $E \Rightarrow$ Módulo de elasticidade transversal;
- $A \Rightarrow$ Área da seção transversal;
- $\rho \Rightarrow$ Massa específica;
- $c \Rightarrow$ Velocidade da onda compressional: $c = \sqrt{E / \rho}$;

Histórico de Carregamento: $p(t) = P_0 \cdot e^{-i\omega t}$

$$\text{Deslocamento Axial: } u(x, t) = \left[\frac{c P_0}{E A} \frac{\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)}{\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right)} \right] \frac{1}{\omega} e^{-i\omega t}$$

$$\text{Velocidade Axial: } v(x, t) = -i \cdot \left[\frac{c P_0}{E A} \frac{\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)}{\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right)} \right] e^{-i\omega t}$$

A4.2- Barra engastada em uma extremidade e livre na outra, sob carregamento axial do tipo Heaviside (NOWACKI, 1963):



$E \Rightarrow$ Módulo de elasticidade transversal;

$A \Rightarrow$ Área da seção transversal;

$\rho \Rightarrow$ Massa específica;

$c \Rightarrow$ Velocidade da onda compressional: $c = \sqrt{E / \rho}$;

$$\text{Histórico de Carregamento: } p(t) = P_0 H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ P_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

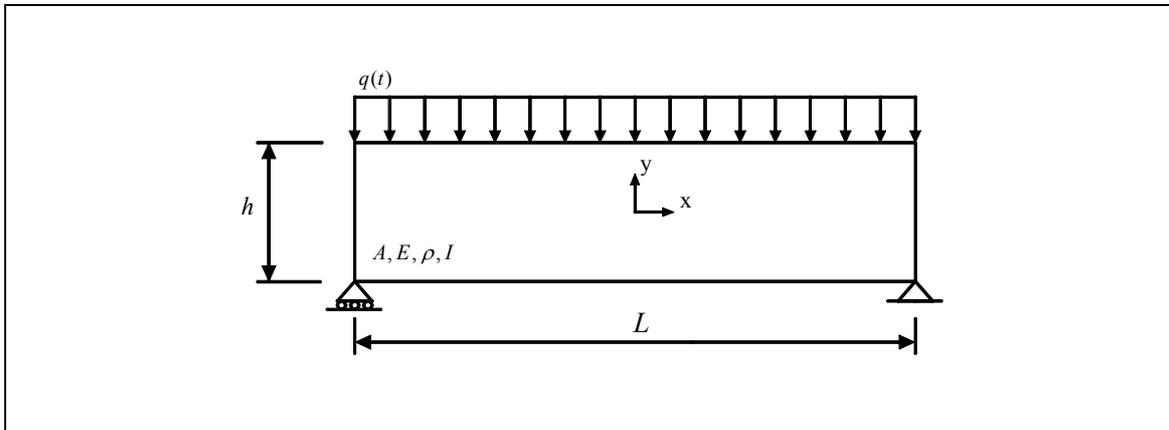
Deslocamento Axial:

$$u(x, t) = \frac{8 P_0 L}{\pi^2 E A} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \text{Sen} \left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{L} \right) \left(1 - \text{Cos} \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{c}{L} t \right) \right) \right\}$$

Velocidade Axial:

$$v(x, t) = \frac{8 P_0 L}{\pi^2 E A L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \text{Sen} \left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{L} \right) \left(\frac{(2n-1)\pi L}{2c} \text{Sen} \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{c}{L} t \right) \right) \right\}$$

A4.3- Viga bi-apoiada sob carregamento uniformemente distribuído do tipo Heaviside (CLOUGH e PENZIEN, 1993):



$E \Rightarrow$ Módulo de elasticidade transversal;

$A \Rightarrow$ Área da seção transversal;

$\rho \Rightarrow$ Massa específica;

$I \Rightarrow$ Momento de inércia;

$L \Rightarrow$ Comprimento da viga;

$h \Rightarrow$ Altura da viga;

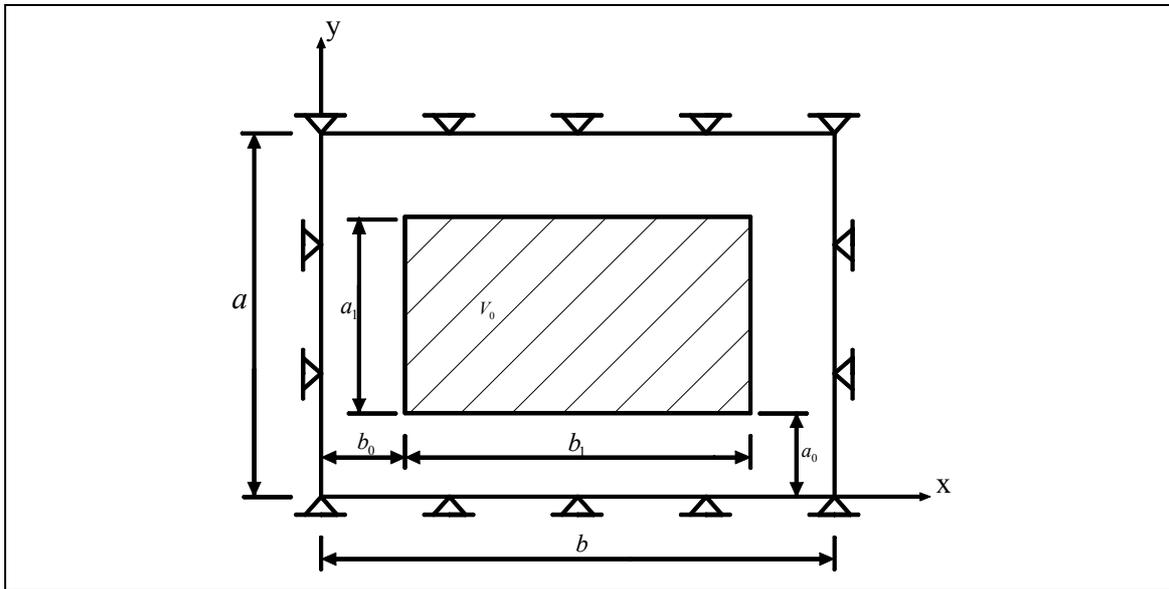
$$\text{Histórico de Carregamento: } q(t) = Q_0 H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Q_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Deflexão vertical: } w(x, t) = \frac{4L^4 Q_0}{\pi^2 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n-1)^5} (1 - \cos \beta_n t) \text{Sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$\text{Velocidade vertical: } \dot{w}(x, t) = \frac{4L^4 Q_0}{\pi^2 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n-1)^5} \beta_n (\text{Sen} \beta_n t) \text{Sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$\text{com: } \beta_n = \sqrt{\frac{EI\pi^4 (2n-1)^4}{\rho AL^4}}$$

A4.4- Membrana retangular simplesmente apoiada sob campo de velocidades inicial (MANSUR, 1983):



- $E \Rightarrow$ Módulo de elasticidade transversal;
 $\rho \Rightarrow$ Massa específica;
 $a, b \Rightarrow$ Dimensões da membrana;
 $V_0 \Rightarrow$ Magnitude da velocidade inicial prescrita;
 $c \Rightarrow$ Velocidade da onda compressional: $c = \sqrt{E / \rho}$;

$$\text{Deflexão vertical: } w(x, y, t) = \frac{2 V_0}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{mn v_{mn}} \text{Sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \text{Sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) G_{mn} \text{Sen} (2\pi v_{mn} t) \right\}$$

$$\text{Velocidade vertical: } \dot{w}(x, y, t) = \frac{2 V_0}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\pi}{mn} \text{Sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \text{Sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) G_{mn} \text{Cos} (2\pi v_{mn} t) \right\}$$

com:

$$v_{mn} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2};$$

$$G_{mn} = \left(\text{Cos} \frac{n\pi b_3}{b} \text{Cos} \frac{n\pi b_1}{b} \right) \left(\text{Cos} \frac{m\pi a_3}{a} \text{Cos} \frac{m\pi a_1}{a} \right), \quad \begin{cases} a_3 = a_1 + a_2 \\ b_3 = b_1 + b_2 \end{cases};$$

A4.5- Membrana retangular simplesmente apoiada sob campo de deslocamento e/ou velocidade inicial (caso geral, MORSE e INGARD, 1968):

$E \Rightarrow$	Módulo de elasticidade transversal;
$\rho \Rightarrow$	Peso específico;
$a, b \Rightarrow$	Dimensões da membrana;
$U_0 \Rightarrow$	Magnitude do deslocamento inicial prescrito;
$V_0 \Rightarrow$	Magnitude da velocidade inicial prescrita;
$c \Rightarrow$	Velocidade da onda compressional: $c = \sqrt{E / \rho}$;

$$\text{Campo de deslocamento inicial: } w_0(x, y) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \quad \cup \quad x > a_2 \\ 0 & y < b_1 \quad \cup \quad y > b_2 \\ g(x, y) & a_1 \leq x \leq a_2 \quad \cap \quad b_1 \leq y \leq b_2 \end{cases}$$

$$\text{Campo de velocidade inicial: } \dot{w}_0(x, y) = \begin{cases} 0 & x < a_3 \quad \cup \quad x > a_4 \\ 0 & y < b_3 \quad \cup \quad y > b_4 \\ h(x, y) & a_3 \leq x \leq a_4 \quad \cap \quad b_3 \leq y \leq b_4 \end{cases}$$

$$\text{Deflexão vertical: } w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \psi_{mn} (B_{mn} \text{Cos}(2\pi v_{mn} t) + C_{mn} \text{Sen}(2\pi v_{mn} t)) \}$$

$$\text{Velocidade vertical: } \dot{w}(x, y, t) = 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \psi_{mn} v_{mn} (C_{mn} \text{Cos}(2\pi v_{mn} t) - B_{mn} \text{Sen}(2\pi v_{mn} t)) \}$$

com:

$$v_{mn} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad \psi_{mn}(x, y) = \text{Sen} \frac{n\pi y}{b} \text{Sen} \frac{m\pi x}{a};$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \iint w_0(x, y) \psi_{mn}(x, y) dx dy, \quad C_{mn} = \frac{2}{\pi v_{mn} ab} \iint \dot{w}_0(x, y) \psi_{mn}(x, y) dx dy;$$

13. APÊNDICE 5: ALGORITMOS IMPLEMENTADOS

✓ Algoritmo de marcha no tempo baseado na formulação do MEF serial acústico 2D
✓ Algoritmo de marcha no tempo baseado na formulação do MEF paralelo acústico 2D
✓ Algoritmo de análise na frequência baseado na formulação do MEF serial acústico 2D
✓ Algoritmo de análise no tempo baseado na formulação do MEF serial acústico 3D
✓ Algoritmo de análise na frequência baseado na formulação do MEF serial acústico 3D
✓ Algoritmo de marcha no tempo baseado na formulação do MEF serial elástico 2D
✓ Algoritmo de marcha no tempo baseado na formulação do MEF paralelo elástico 2D
✓ Algoritmo de análise na frequência baseado na formulação do MEF serial elástico 2D
✓ Algoritmo de análise no tempo baseado na formulação do MEF serial elástico 3D
✓ Algoritmo de análise na frequência baseado na formulação do MEF serial elástico 3D
✓ Algoritmo de análise de espectro de frequências baseado nas transformadas de Fourier

Figura A5.1 – Lista dos algoritmos desenvolvidos neste trabalho.

Observações:

Os algoritmos desenvolvidos em paralelo, visando a utilização em *cluster* de microcomputadores, basearam-se na interface PVM (Parallel Virtual Machine);

Em todos os algoritmos tempo-dependentes (serial e paralelo) foram implementados os esquemas de avanço no tempo citados neste trabalho. No caso de análises efetuadas via esquema implícito de marcha no tempo, considerou-se o algoritmo dos gradientes conjugados para matrizes reais.

Em todos os algoritmos implementou-se a possibilidade das análises serem efetuadas considerando-se amortecimento viscoso. Nos algoritmos frequência-dependentes implementou-se também o amortecimento histerético.