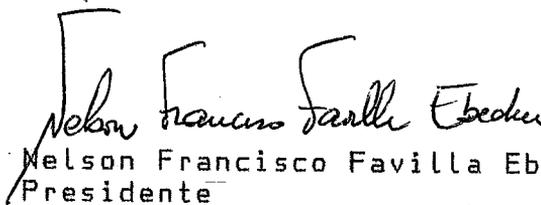


ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS SOB A AÇÃO DE
CARREGAMENTOS NÃO CONSERVATIVOS
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

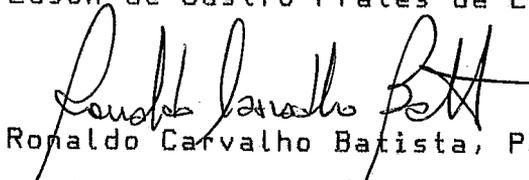
Marcos de Paula Jung

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:


Nelson Francisco Favilla Ebecken, D.Sc.
Presidente


Edson de Castro Prates de Lima, D.Sc.


Ronaldo Carvalho Batista, Ph.D.


Luis Landau, D.Sc.


Alvaro Maia da Costa, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 1991

JUNG, MARCOS DE PAULA

Análise Não-Linear de Estruturas sob à Ação de Carregamentos Não Conservativos Pelo Método dos Elementos Finitos. [Rio de Janeiro]. 1991.

VIII, 199 pp., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.5c) Engenharia Civil, 1991.

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE.

I. Estruturas I.COPPE/UFRJ II. Título (Série)

A minha esposa Ângela e filha
Sarah dedicamos este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Nelson Francisco Favilla Ebecken,
pela orientação, apoio e amizade.

Aos nossos amigos e professores do programa de
Engenharia Civil - COPPE.

Ao analista Carlos Alberto Ribeiro do C.P.D. da
U.F.J.F.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UF RJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.5c)

**ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS SOB À AÇÃO DE
CARREGAMENTOS NÃO CONSERVATIVOS
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Marcos de Paula Jung
Junho de 1991

ORIENTADOR: Nelson Francisco Favilla Ebecken
PROGRAMA: Engenharia Civil

A análise não-linear de estruturas sob carregamentos não conservativos pelo método dos elementos finitos, é o principal objetivo deste trabalho.

Os sistemas estruturais podem ser discretizados através de elementos de pórtico, casca ou da combinação dos mesmos.

Na análise estática, resolve-se o problema do sistema não simétrico de equações algébricas não lineares, através do método frontal. As equações dinâmicas pela integração direta.

O estudo da perda da estabilidade dos sistemas, ou seja, a pesquisa dos parâmetros críticos quando atuam as cargas não conservativas, é feita através do método desenvolvido e denominado subespaço frontal não simétrico.

Finalmente apresentam-se alguns exemplos e conclusões, cujos valores numéricos foram obtidos através do programa ANER, desenvolvido especificamente para as finalidades deste trabalho.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCES (D.Sc.)

Non-Linear Structural Analysis Under Non-Conservative Forces By Finite Element Method.

Marcos de Paula Jung

June 1991

THESIS SUPERVISOR: Nelson Francisco Favilla Ebecken

DEPARTMENT: Civil Engineering

The main purpose of the present work is the non-linear analysis of structures under non-conservative forces by finite element method.

The structural systems may be discretized in beam-elements, shell-elements or in a combination of these.

In statical analysis, the unsymmetric non-linear system of equations is solved by the frontal method. The dynamic equations are solved by direct integration.

The stability loss of the systems, this meaning the search of critical parameters under non-conservative loads, is studied using a developed method named unsymmetric frontal subspace.

Finally, some results and conclusions are presented, being the numerical examples solved in the computer program ANER, specifically created for this work.

ÍNDICE

	Pag.
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	13
II.1 - Equação do Movimento para um Sistema Não Conservativo	13
II.2 - Discretização dos Sistemas Estruturais	21
II.3 - Matriz de Rotação ou Transformação das Cargas Não Conservativas	38
II.4 - Carregamento Distribuído Não Conservativo do Tipo Circulatório	44
II.4.1 - Matriz de Correção de Carga para o Elemento de Casca	44
II.4.2 - Matriz de Correção de Carga para o Elemento de Pórtico	57
II.5 - Carregamento Concentrado Não Conservativo Circulatório	62
CAPÍTULO III - ANÁLISE ESTÁTICA	85
III.1 - Introdução	85
III.2 - Elemento de Pórtico	86
III.2.1 - Equações de Equilíbrio Não Linear	86
III.2.2 - Matriz de Rigidez Linear	93
III.2.3 - Matriz de Rigidez Não Linear e Vetor \tilde{F}	95
III.3 - Elemento de Casca	98
III.3.1 - Matriz de Rigidez Linear	99
III.3.2 - Matriz de Rigidez Não Linear e Vetor \tilde{F}	103
III.4 - Solução Frontal Não Simétrica	108
CAPÍTULO IV - ANÁLISE DINÂMICA	114
IV.1 - Considerações Gerais	114
IV.2 - Algoritmo de Newmark	121

CAPÍTULO V - CÁLCULO DE AUTOVALORES	125
V.1 - Análise da Estabilidade	125
V.1.1 - Considerações Gerais	125
V.1.2 - Critérios de Estabilidade	127
V.2 - Problemas de Autovalores e Vetores	137
V.3 - Subespaço Frontal Não-Simétrico	149
CAPÍTULO VI - ESTUDO DE CASOS	152
VI.1 - Introdução	152
VI.2 - Problemas onde apenas Ocorrem Grandes Deslocamentos	152
VI.3 - Problemas onde a Instabilidade Ocorre Somente quando Ocorrem Grandes Deslocamentos	157
VI.3.1 - Sistema Não Conservativo do tipo Divergente	157
VI.3.2 - Sistema Não Conservativo do tipo Flutter	161
VI.4 - Instabilidade Inicial	164
VI.4.1 - Sistema Não Conservativo do tipo Divergente	164
VI.4.2 - Sistema Não Conservativo do tipo Flutter	166
VI.5 - Sistema sob Carga Dinâmica, Não Conservativa	168
CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES	170
BIBLIOGRAFIA	173
APÊNDICE - Manual dos Procedimentos Implementados	185

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A análise de sistemas do tipo não conservativo, é um importante estudo associado com vários problemas na engenharia aeronáutica e espacial, como também em vários campos mais modernos da mecânica aplicada e engenharia.

Os carregamentos convencionais considerados na teoria da elasticidade e na estabilidade elástica, bem como em outros campos da mecânica aplicada são forças conservativas as quais possuem uma única função potencial. Tais forças satisfazem o princípio da conservação da energia e o trabalho por elas realizado sobre um deslocamento admissível em um corpo é independente da trajetória do corpo.

Exemplos simples, seriam as cargas permanentes que, permanecem constante em intensidade e direção durante a deformação e movimento do corpo.

As forças ditas não conservativas, são muito comuns. Surgem por exemplo da interação mecânica de um sistema contínuo com o meio que o envolve. São forças de interação, por exemplo, forças de contato que aparecem da interação com outros corpos sobre uma certa superfície de contato. As forças de contato em geral dependem da deformação e do movimento do corpo em que atuam e são quase sempre devido a sua natureza, não conservativas.

As cargas que surgem oriundas de pressões causadas por gases, água ou vento, podem ser consideradas como os mais importantes tipos de carregamentos que ocorrem na análise estrutural.

Estas cargas são dependentes dos deslocamentos e portanto não podem ser consideradas como de direção constante. Estes carregamentos são do tipo não conservativos e quando atuam em conjunto ou isoladamente sobre um sistema estrutural, geram problemas de análise não conservativas.

Os tipos mais comuns de forças não conservativas, são as chamadas forças circulatórias, tais como "follower"

forças e momentos, isto é forças não deriváveis de um potencial e não dependentes explicitamente do tempo, e que seguem completa ou parcialmente as deformações dos pontos onde estão aplicados.

As forças generalizadas externas que atuam em um sistema mecânico, podem classificar-se com relação a existência de uma função potencial (função trabalho) em duas categorias, forças monogenéticas e poligenéticas. As primeiras são forças que podem derivar do valor de um funcional escalar (função potencial ou trabalho) e são particularmente importantes quando utiliza-se formulação variacional. Seu trabalho infinitesimal sobre um incremento infinitesimal arbitrário dos deslocamentos generalizados é a diferencial desta função escalar.

Em contraste, as forças poligenéticas não são deriváveis de uma função (trabalho) potencial e o seu trabalho virtual não é a variação desta função escalar. No caso geral, a função potencial associada com forças monogenéticas, é uma função dos deslocamentos generalizados, velocidade e tempo.

Definem-se portanto, como forças conservativas qualquer força generalizada monogenética associada com um valor estacionário de uma função potencial dependente somente dos deslocamentos generalizados. Seu trabalho para qualquer deslocamento atual compatível do sistema depende somente da configuração inicial e final do sistema. Também o seu trabalho sobre qualquer deslocamento virtual do sistema, pode ser escrito, como a primeira variação da função potencial dependente do deslocamento. Forças conservativas podem ser independentes dos deslocamentos (cargas permanentes) ou dependentes dos deslocamentos tais como forças centrífugas.

De acordo com a definição dada acima, de forças conservativas, as forças poligenéticas bem como as monogenéticas possuindo potencial (generalizado) dependente da velocidade ou tempo devem ser consideradas como não conservativas. Forças não conservativas dependentes explicitamente do tempo são denominada forças instacionárias. Forças não conservativas estacionária (independentes do

tempo) podem classificar-se em dependentes da velocidade, sendo mono ou poligenéticas ou independentes da velocidade, isto é, puramente dependentes do deslocamento. No último caso, são forças poligenéticas e denominam-se forças circulatórias. Forças dependentes da velocidade e que realizam um trabalho negativo são ditas dissipativas.

Uma exceção às definições dadas acima diz respeito as forças reativas poligenéticas (trabalho nulo) que de acordo com os conceitos acima devem ser consideradas conservativas, apesar de elas não se derivarem de um potencial.

Uma outra exceção são algumas forças dependentes da velocidade como momentos Giroscópicos e forças Coriolis para as quais a dependência da velocidade ocorre de uma tal maneira que o trabalho sobre um movimento real do sistema é sempre nulo. Cargas deste tipo, são ditas Giroscópicas e são obviamente conservativas de acordo com as classificações anteriores.

O efeito de forças não conservativas do tipo circulatórias em uma formulação pelo método dos elementos finitos expressa-se pela contribuição de uma matriz à matriz de rigidez tangente, a qual é denominada na literatura de matriz de rigidez, que leva em conta o comportamento da carga, ou matriz de correção de carga, sendo que em geral a matriz resultante é não simétrica.

Com relação ao comportamento dos sistemas estruturais sujeitos às forças circulatórias, dois tipos de instabilidade podem ocorrer. Em termos gerais pode-se dizer que na análise de problemas de estabilidade elástica, a natureza dos carregamentos externos, determina a característica do problema de autovalor a que se chega na formulação das equações que regem o problema. Sendo o carregamento conservativo, a solução leva a problemas de autovalores associados a matrizes de rigidez efetivas simétricas e somente autovalores reais. Para carregamentos não conservativos, por exemplo do tipo circulatório (forças poligenéticas não explicitamente dependentes do tempo), chega-se a um problema de autovalor, associado a uma matriz de rigidez efetiva não simétrica, ocorrendo autovalores

complexos e reais.

Pode-se distinguir duas formas de instabilidade:

"Instabilidade estática ou divergência", existindo uma configuração de equilíbrio adjacente. A estrutura passa por uma posição de equilíbrio não trivial antes de atingir a instabilidade, isto é, a transição da estrutura da estabilidade para a instabilidade ocorre com um autovalor nulo. Para valores da carga acima da de flambagem, todos os autovalores são reais, sendo que o autovalor nulo mencionado anteriormente torna-se real e negativo.

"Instabilidade dinâmica ou flutter", oscilações senoidais com amplitudes crescentes exponencialmente acima da carga crítica. Nestes casos a perda da estabilidade do sistema ocorre com autovalores diferentes de zero. De fato a instabilidade do sistema manifesta-se por si mesma em oscilações com amplitudes crescentes ilimitadamente. A perda da estabilidade ocorre quando para um valor finito do carregamento, carga do flutter, pelo menos dois autovalores consecutivos tornam-se iguais. Além deste valor o movimento perturbado do sistema apresenta as mencionadas oscilações divergentes, com os autovalores críticos tornando-se complexos conjugados.

Expressando a intensidade da carga externa por um parâmetro p , o limite da estabilidade pode ser pesquisado observando o comportamento dos autovalores assim que o parâmetro da carga varia, isto é, pela relação $\lambda = \lambda(p)$, conforme as figuras I.1 e I.2, onde λ_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ são os autovalores do problema considerado.

Se $p=0$ todos os autovalores são reais e positivos, eles são as freqüências da estrutura sem carregamento. Para valores das cargas aplicadas inferiores a crítica todos os autovalores são positivos e reais (estável). Para a carga crítica o menor dos autovalores torna-se nulo, isto é, a curva correspondente intercepta o eixo das cargas p , atingindo-se a carga de flambagem. Subseqüente a $p_{\text{crítico}}$ o autovalor torna-se real negativo, sendo o fenômeno da divergência, ou então conforme a fig. I.2, os dois autovalores de mais baixo valor aproximam-se um do outro até convergirem, tornando-se complexos

conjugados para cargas além das críticas, fenômeno do flutter.

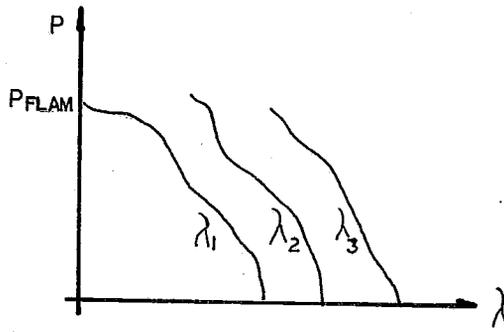


figura I.1 - Divergência

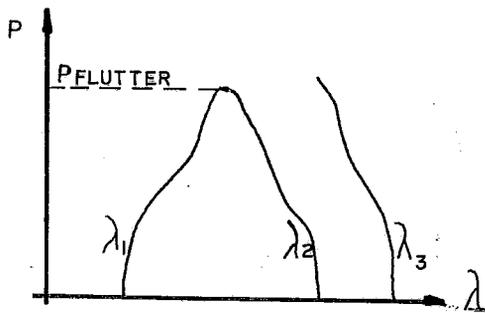


figura I.2 - Flutter

Com relação aos métodos de análise, os estudos demonstram a não aplicabilidade dos chamados métodos

estáticos quando da análise da instabilidade dos sistemas, para os quais a perda da estabilidade se dá na forma da instabilidade dinâmica ou flutter. O método do equilíbrio e o da energia chamados métodos estáticos, nos quais a carga crítica é associada a uma bifurcação do caminhamento do equilíbrio ou com uma transição da energia potencial total de positiva definida para positiva semidefinida, permanecem válidos como critérios para os sistemas do tipo divergente, sendo o método dinâmico mais geral, o apropriado ao estudo da instabilidade, onde ocorre o fenômeno do flutter e válido também para os casos onde ocorrem divergência.

Com relação a forma da instabilidade, os sistemas podem ser classificados em quatro tipos. Se as forças externas possuem um potencial (dependente apenas dos deslocamentos), são conservativas e a perda da estabilidade se dá apenas por instabilidade estática ou divergência. Se as forças são não conservativas, a forma pela qual a perda de estabilidade ocorre, requer um exame especial para cada problema. Ambas as formas de instabilidade são possíveis neste caso, isto é, o sistema pode perder estabilidade por divergência ou flutter. Com relação aos tipos de sistemas de acordo com a forma de instabilidade, os mesmos classificam-se em:

- Sistemas Puramente Conservativos:

São sistemas sujeitos a forças externas do tipo convencional conservativas (forças que derivam de uma função potencial), possuindo uma matriz de rigidez simétrica. Estes sistemas são classicamente conservativos, isto é, com respeito ao funcional da energia, a qual é conservada. A perda da estabilidade se dá somente na forma de instabilidade estática, divergência. As condições de divergência podem ser obtidas aplicando o método estático ou dinâmico.

- Sistemas Não Conservativos do Tipo Divergente

As forças externas atuantes no sistema são de características não conservativas. São classicamente não conservativas, isto é, com respeito ao funcional da energia, desde que a sua energia não é conservada. Entretanto, dependendo das condições de contorno outro

funcional específico, sem ser o da energia, apresenta características conservativas.

Entretanto, na formulação do método dos elementos finitos, a matriz de rigidez efetiva global, certamente permanece não simétrica.

Estes sistemas constituem uma classe excepcional dos sistemas não conservativos, os quais mecanicamente comportam-se como os conservativos, tornando-se instáveis por divergência e não por flutter. Vale, portanto, para estes casos o critério estático.

-Sistema Não Conservativos do Tipo Flutter:

São sistemas sujeitos a forças externas não conservativas, por exemplo do tipo circulatório, possuindo matrizes de rigidez efetivas não simétricas. A perda da estabilidade pode ocorrer somente na forma de flutter, portanto apenas o método dinâmico é adequado a análise da estabilidade.

-Sistemas do Tipo Híbrido:

Este tipo especial de sistema é também solicitado por forças não conservativas, por exemplo, também do tipo circulatório, mas podem apresentar os casos de divergência ou flutter. Dependendo das relações entre os parâmetros mais relevantes, geometria, condições de contorno, a carga crítica mínima pode corresponder a da perda de estabilidade estática ou a oscilatória, flutter. Se a menor carga crítica é do tipo divergente o sistema é denominado pseudo-divergente. No caso da carga crítica mínima corresponder a do tipo flutter, o sistema é denominado sistema do tipo pseudo-flutter.

A solução de problemas não conservativos por métodos analíticos resolve poucos casos, principalmente se forem não lineares.

Os primeiros estudos de problemas não conservativos considerando forças circulatórias conforme relata BLOTIN (1963), tiveram início com NIKOLAI (1928). Neste seu primeiro trabalho estudou a estabilidade da forma retilínea de uma barra flexível engastada em uma extremidade e livre na outra sujeita a uma força de compressão e a um momento torçor aplicados nesta

extremidade livre. Observou que quando o vetor do momento é tangencial, isto é, na direção da tangente do eixo deformado da barra, nenhuma forma de equilíbrio existe além da linear. Conclui portanto que o método usual de determinação de forças críticas não é válido para este problema. Após formular a equação para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio, desprezando o amortecimento e considerando uma seção de forma circular, mostrou que a mesma era instável qualquer que fosse, o valor do torque.

Em seus trabalhos subseqüentes, NIKOLAI (1928), estudou o mesmo problema anterior só que considerando barra com rigidez a flexão variável, sendo que neste caso, para pequenos valores do momento torçor, a forma retilínea é estável. Acima deste existe um valor crítico para o qual a forma retilínea deixa de ser estável. Finalmente no 3º Congresso Internacional de Mecânica Aplicada, NIKOLAI (1930) apresenta um trabalho sobre a estabilidade de eixos giratórios flexíveis em compressão e torção. Os trabalhos que se seguiram, de outros autores, eram variantes dos citados anteriormente e também comprovações dos resultados obtidos.

Na década de quarenta, devido as solicitações principalmente da indústria aeronáutica, houve um grande interesse por problemas de estabilidade de eixos em torção, podendo-se citar o trabalho de MORRIS (1951), que estudou a estabilidade a flexão e torção de uma barra em balanço de seção circular sujeita a uma força de compressão e a um momento torçor aplicado na extremidade tendo em vista a utilização em eixos de turbinas de aviões.

Outros problemas interessantes foram resolvidos por PFLÜGER (1950) e BECK (1952). Basicamente, trata-se da estabilidade de uma barra flexível engastada em uma extremidade e sujeita a uma força normal de compressão tangencial a deformada da barra. O primeiro autor demonstrou que para estes casos não existe nenhuma posição de equilíbrio próxima da indeformada. O segundo calculou o valor crítico da força. Outros autores a seguir, incluindo PFLÜGER (1955) consideraram o mesmo problema apenas

incluindo a massa concentrada e distribuída .

Foi na década de 50 que surgiram os primeiros de uma série de trabalhos de ZIEGLER (1966), relacionados com a estabilidade de uma barra flexível sujeita a várias condições de torção. Ele inclusive em ZIEGLER (1952) mostra que o critério de estabilidade dinâmico é o que deve ser utilizado no problema apresentado por PFLÜGER (1950) que conclui que por não existir nenhuma configuração de equilíbrio adjacente, a grandeza da carga podia crescer indefinidamente sem atingir um valor crítico segundo o critério de EULER.

HERMANN e BUNGAY (1964) apresentam um trabalho em que mostram para barras elásticas sujeita a forças não conservativas os vários modos de instabilidade dependendo do grau de não conservativismo da força.

Outro pesquisador da estabilidade que após o término de seu Doutorado em 1959 na Escola Técnica Superior de Stuttgart, Alemanha e que passou a publicar desde os anos de 1960 uma série de trabalhos foi LEIPHOLZ (1970). Mais recentemente podemos destacar entre seus vários trabalhos LEIPHOLZ e PFENDT (1982), onde apresentam as varias formas de instabilidade de placas em função da relação entre largura e o comprimento da mesma, quando sujeitas a forças circulatorias uniformemente distribuídas ao longo do plano da placa.

Dentro desta série de trabalhos analíticos e mais particularmente ligados a engenharia civil pode-se destacar os trabalhos de BURGUESS (1975), (1976), (1979) onde estuda a estabilidade de estacas esbeltas durante a cravação e a influência dos desvios sofridos pelas mesmas quando da sua instalação. Em trabalho anterior HERMANN e SMITH (1972) estudaram uma viga sobre fundação elástica com carregamento não conservativo.

Outro método de solução de problemas não conservativos é apresentado por ALTMAN e OLIVEIRA (1982), (1984a) e (1984b) ,que utilizam o funcional quadrático, exemplificando o método na solução do problema de BECK.

BAILEY e HAINES (1981), através de uma formulação HAMILTON-RITZ, obtém soluções analíticas diretas para

forças circulatorias, apresentando as equações matriciais aplicadas a viga-coluna.

Através do método dos elementos finitos, a solução de problemas não conservativos já se torna mais ampla que as soluções analíticas. Até o momento a maior parte das soluções são para problemas de estabilidade lineares, existindo vários trabalhos já publicados, como por exemplo BATUZ (1979), HIBBITT (1979), LOGANATHAN et alii (1979), SMITH (1979), GALLAGHER e MANG (1981), JUNG (1985).

Em problemas não lineares, se considerarmos a formulação da matriz de rigidez tangente não simétrica, que se obtém somando-se a matriz de rigidez a matriz de correção de cargas, a maior parte das análises existentes, despreza a rigidez de correção de carga, ou quando muito simetriza a matriz tangente.

ARGYRIS e SYMEONIDIS (1981) e ARGYRIS e STRAUB (1981), apresentam pelo método dos elementos finitos uma formulação natural aplicado a sistemas que são discretizados por elementos de pórtico. No primeiro trabalho pesquisam a estabilidade de sistemas estruturais, a maioria não lineares. No segundo trabalho fazem uma análise não linear dinâmica do que ocorre com os sistemas estruturais após a perda da estabilidade. No primeiro trabalho, os citados autores já chamam a atenção de que nem sempre a matriz de correção de carga é não simétrica. Exceções podem ocorrer dependendo de certas condições geométricas de contorno, ou seja, nestes casos pelo fato das forças aplicadas mudarem de direção, não surge nenhuma parcela adicional de trabalho para qualquer deslocamento virtual compatível. Nestas condições a matriz de rigidez global é simétrica, apesar da matriz de rigidez do elemento ser não simétrica.

SCHWEIZERHOF e RAMM (1984) mostram via método dos elementos finitos quando a carga sendo de aparência não conservativa pode resultar em matrizes simétricas. Não pesquisam para as cargas distribuídas a existência ou não de um potencial global, mas sim através da expressão da variação do trabalho externo das cargas do tipo pressões,

mostram que sob certas condições, como as cargas serem uniformes, determinados deslocamentos serem nulos ou prescritos, da extensão do carregamento, ou seja quando as parcelas não simétricas se tornam nulas ou desaparecem da expressão da variação do trabalho externo. Chamam a atenção de que para certos problemas deve-se fazer antes uma análise da situação antes de assimilá-los como não conservativos. Mostram também através de exemplos numéricos, que a técnica de simetrização da rigidez tangente, para certos casos produz resultados razoáveis.

Mais recentemente e utilizando também o método dos elementos finitos, junto com uma superposição modal, AGAR (1988) e AGAR (1989), analisa a estabilidade de pontes suspensas, quando o vento atinge determinadas velocidades, dando origem a forças aerodinâmicas atuando no piso da ponte, forças essas responsáveis pelo efeito do flutter.

O presente trabalho apresenta uma formulação através do método dos elementos finitos para solução de sistemas não conservativos, com possibilidade de se realizar através do programa que foi desenvolvido e denominado "ANER", análises estática e ou dinâmica de estruturas que possam ser discretizadas por elementos de pórtico espacial ou casca, bem como por elementos mais simples que se originam dos anteriores. Os carregamentos podem ser conservativos e/ou não conservativos, sendo estes últimos do tipo circulatório estacionários ou instacionários.

O programa ANER, permite também a análise da estabilidade estática ou dinâmica através do histórico da evolução dos autovalores para pesquisa das cargas críticas e dos componentes dos deslocamentos.

A estrutura é dita estável se perturbações admissíveis no seu estado de equilíbrio estático ou dinâmico, são seguidas de deslocamentos cujas magnitudes permanecem dentro de limites admissíveis durante o tempo de utilização da estrutura.

Para pequenos deslocamentos, vale a elasticidade infinitesimal, porém quando a instabilidade é precedida de grandes deslocamentos, tem-se que considerar equações não

lineares para o movimento. Para problemas complexos a análise da estabilidade dinâmica deve ser feita a partir da resposta transiente, através do estudo das variáveis cinemáticas e das frequências dos principais modos de vibração da estrutura.

Critérios mais específicos como os adotados por exemplo na instabilidade dinâmica por BOLOTIN (1964) ou com modelos discretos por EBCKEN (1982) podem ser adaptados a programação.

No capítulo dois, apresenta-se a discretização pelo método dos elementos finitos onde são apresentadas as equações gerais de problemas não conservativos bem como as matrizes de rigidez de correção de carga para os carregamentos considerados.

No capítulo três, apresenta-se a análise estática onde utiliza-se o método frontal para solução do sistema de equações não lineares e não simétrico dentro do processo incremental iterativo.

No capítulo quatro, as equações dinâmicas não lineares, tendo sido adotado o método de integração direta de Newmark.

No capítulo cinco a estabilidade com destaque para a formulação do método do subespaço frontal não simétrico, para obtenção de autovalores reais e complexos.

No capítulo seis, são apresentados alguns estudos de casos, tendo em vista principalmente testes das formulações apresentadas. Problemas mais específicos de engenharia, envolvendo grandes malhas com muitas incógnitas, exigem processamento numérico imenso, que se torna incompatível com o computador disponível no momento, mas porém de grande viabilidade dispendo-se de um supercomputador.

CAPÍTULO II

DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

II.1) EQUAÇÃO DO MOVIMENTO PARA UM SISTEMA NÃO CONSERVATIVO

A análise de estruturas elásticas, sujeitas a forças não conservativas do tipo circulatório, estacionárias ou instacionárias, ou seja, dependentes dos deslocamentos e independentes ou não do tempo, quando se utiliza uma formulação através do método dos elementos finitos, tais forças dão origem a uma matriz de rigidez adicional, em geral não simétrica, denominada matriz de correção de carga. Adotando-se a aproximação da matriz de rigidez tangente, esta torna-se também não simétrica.

A obtenção da matriz de rigidez de correção de carga pode ser baseada na formulação convencional, considerando-se deslocamentos cartesianos, ou conforme ARGYRIS e SYMEONIDIS (1981) através da formulação natural, considerando-se os deslocamentos naturais ou modos naturais do elemento, técnica já aplicada com bastante generalidade para problemas conservativos desde finais da década de setenta, e apresentada nos trabalhos de ARGYRIS, DUNNE e SCHARPF (1978), ARGYRIS, DUNNE, SCHARPF e MALEJANNAKIS (1978), ARGYRIS et alii (1979). Para o elemento triangular plano, as considerações sobre os modos rígidos e naturais são apresentadas em ARGYRIS, DUNNE, MALEJANNAKIS e SCHELKLE (1977).

Neste trabalho, para manter uma consistência com as formulações conservativas não lineares de BENJAMIN (1982) e CHUEIRI (1985), são considerados nos desenvolvimentos, deslocamentos nodais cartesianos ao invés dos naturais.

Para se obter as equações discretas através do método dos elementos finitos, supõe-se a nível de um elemento que os deslocamentos locais u possam ser expressos em função dos deslocamentos nodais cartesianos d_N pela especificação de um conjunto de funções de interpolação

ϕ_G , conforme a equação abaixo:

$$u_{\sim}(L) = \phi_G(L) d_{\sim N} \quad \text{II.1}$$

onde L é um vetor de coordenadas, por exemplo de área, que constituem um sistema de coordenadas locais.

Seja $p_{\sim s}^{NC}$, $p_{\sim v}^{NC}$ e $p_{\sim i}^{NC}$, $i = 1, \dots, k$ forças circulatorias de superfície, de volume e discretas atuando em um elemento finito arbitrário no espaço. Como as forças internas do elemento elástico formam um conjunto conservativo, o não conservatismo do elemento resulta da natureza das forças circulatorias externas. As matrizes de rigidez linear e a não linear podem ser obtidas pela formulação convencional e o comportamento das cargas externas é que será analisado, principalmente.

Em uma configuração deformada arbitrária do elemento, os vetores de carga circulatoria $p_{\sim s}^{NC}$, $p_{\sim v}^{NC}$ e $p_{\sim i}^{NC}$ são considerados como conhecidas funções não lineares dos deslocamentos locais do elemento $u_{\sim}(L)$. Podem ser escritas na forma funcional;

$$p_{\sim s}^{NC} = \lambda_{\sim s} f_{\sim s}(L, u_{\sim}(L)),$$

$$p_{\sim v}^{NC} = \lambda_{\sim v} f_{\sim v}(L, u_{\sim}(L)), \quad \text{II.2}$$

$$p_{\sim i}^{NC} = \lambda_{\sim i} f_{\sim i}(u_{\sim}(L_{\sim i})), \quad i = 1, \dots, k$$

onde $L_{\sim i}$ é o vetor das coordenadas do ponto de aplicação das forças discretas $p_{\sim i}^{NC}$, e os escalares $\lambda_{\sim s}$, $\lambda_{\sim v}$, $\lambda_{\sim i}$ nulos ou positivos, são os parâmetros de carga.

As funções vetoriais $f_{\sim s}$, $f_{\sim v}$ e $f_{\sim i}$ dependem logicamente do tipo da carga circulatoria e assume-se serem contínuas e diferenciáveis com relação a u_{\sim} e $u_{\sim}(L_{\sim i})$ respectivamente. Na configuração indeformada ($u_{\sim} = 0$) do e-

lemento as funções $f_{\tilde{s}}$ e $f_{\tilde{i}}$ reproduzem a distribuição inicial das forças.

O trabalho virtual δW^{NC} das forças não conservativas pode ser escrito na forma;

$$\delta W^{NC} = \int_S \delta \tilde{u}^T \tilde{p}_s^{NC} dS + \int_V \delta \tilde{u}^T \tilde{p}_v^{NC} dV + \sum_{i=1}^k \delta \tilde{u}^T(L_{\tilde{i}}) F_{\tilde{i}}^{NC} \quad \text{II.3}$$

onde assumindo-se pequenas deformações pode-se em geral, sem erros significativos avaliar a integral sobre a geometria indeformada do elemento.

Introduzindo (II.1) e (II.2) em (II.3), tem-se

$$\begin{aligned} \delta W^{NC} &= \delta \tilde{d}_N^T \left[\lambda_s \int_S \phi_G^T(L_{\tilde{s}}) f_{\tilde{s}} dS + \sum_{i=1}^k \int_V \phi_G^T(L_{\tilde{v}}) f_{\tilde{v}} dV + \sum_{i=1}^k \lambda_i \phi_G^T(L_{\tilde{i}}) f_{\tilde{i}} \right] = \\ &= \delta \tilde{d}_N^T F_{\tilde{e}}^{NC} \end{aligned} \quad \text{II.4}$$

onde $F_{\tilde{e}}^{NC}$ representa o vetor das forças nodais cinematicamente equivalentes, resultantes das forças circulatorias externas em correspondência com os deslocamentos nodais \tilde{d}_N .

Da equação (II.4) tem-se:

$$F_{\tilde{e}}^{NC} = \lambda_s \int_S \phi_G^T(L_{\tilde{s}}) f_{\tilde{s}} dS + \lambda_v \int_V \phi_G^T(L_{\tilde{v}}) f_{\tilde{v}} dV + \sum_{i=1}^k \lambda_i \phi_G^T(L_{\tilde{i}}) f_{\tilde{i}} \quad \text{II.5}$$

O trabalho virtual δW de todas as forças externas atuantes no elemento pode ser escrito, em geral, como a soma das contribuições conservativas e não conservativas

δW^C e δW^{NC} respectivamente.

$$\delta W = \delta W^C + \delta W^{NC} = \delta d_{\tilde{N}}^T \tilde{F}^C + \delta d_{\tilde{N}}^T \tilde{F}_{\tilde{e}}^{NC} \quad \text{II.6}$$

Considerando uma formulação incremental, o equilíbrio do elemento em uma configuração deformada, ou seja, no início de um incremento do carregamento pode ser expresso pelo princípio dos trabalhos virtuais.

$$\int_V \delta \tilde{\epsilon}^T \tilde{\sigma} dV = \delta W^C + \delta W^{NC} = \delta d_{\tilde{N}}^T \tilde{F}^C + \delta d_{\tilde{N}}^T \tilde{F}_{\tilde{e}}^{NC} \quad \text{II.7}$$

Considerando agora as variações incrementais nas tensões e deformações do elemento, bem como as nos deslocamentos nodais e correspondentes, forças nodais para uma variação diferencial da geometria do elemento ocorrida entre a configuração inicial e final ligada ao incremento da carga, a equação de equilíbrio partindo de (II.7) pode ser posta na forma,

$$d \left(\int_V \delta \tilde{\epsilon}^T \tilde{\sigma} dV \right) = d (\delta W^C) + d (\delta W^{NC}) \quad \text{II.8}$$

O primeiro termo do lado direito da equação reproduz a contribuição convencional devido a mudança no módulo da força conservativa nodal entre as duas configurações. O segundo termo pode ser escrito de uma forma mais explícita como;

$$d(\delta W^{NC}) = \delta d_{\tilde{N}}^T d\tilde{F}_{\tilde{e}}^{NC} = \delta d_{\tilde{N}}^T (d\tilde{F}_{\tilde{e}em}^{NC} + d\tilde{F}_{\tilde{e}ed}^{NC}) \quad \text{II.9}$$

Portanto a variação incremental total $dF_{\sim e}^{NC}$ de $F_{\sim e}^{NC}$ entre uma configuração inicial e incremental do elemento, é composta de duas parcelas. A primeira relativa a variação da grandeza da força circulatória externa entre duas configurações e a segunda, que surge devido a mudança de direção da força não conservativa dependente dos deslocamentos, quando o elemento deforma-se e sofre deslocamentos finitos (rotações) ao longo dos incrementos no carregamento. As diferenciais que aparecem em (II.9) podem ser escritas na forma;

$$\begin{aligned}
 dF_{\sim em}^{NC} &= \frac{\partial F_{\sim e}^{NC}}{\partial \lambda_s} d\lambda_s + \frac{\partial F_{\sim e}^{NC}}{\partial \lambda_v} d\lambda_v + \sum_{i=1}^k \frac{\partial F_{\sim e}^{NC}}{\partial \lambda_i} d\lambda_i = \\
 &= d\lambda_s \left(\int_S \phi_G^T f_{\sim s} dS \right) + d\lambda_v \left(\int_V \phi_G^T f_{\sim v} dV \right) + \sum_{i=1}^k d\lambda_i \phi_G^T (L_{\sim i}) f_i
 \end{aligned}$$

II.10

e

$$\begin{aligned}
 dF_{\sim ed}^{NC} &= \frac{\partial F_{\sim e}^{NC}}{\partial d_{\sim N}} dd_{\sim N} = \\
 &= \left[\lambda_s \int_S \phi_G^T \frac{\partial f_{\sim s}}{\partial d_{\sim N}} dS + \lambda_v \int_V \phi_G^T \frac{\partial f_{\sim v}}{\partial d_{\sim N}} dV + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^k \lambda_i \phi_G^T (L_{\sim i}) \frac{\partial f_i}{\partial d_{\sim N}} \right] dd_{\sim N}
 \end{aligned}$$

II.11

Na expressão do trabalho virtual, equação (II.9), o único termo novo é $dF_{\sim ed}^{NC}$, sendo que define-se

$$\underset{\sim}{K}^{NC} = \frac{\partial \underset{\sim}{F}^{NC}}{\partial \underset{\sim}{d}_N} \quad \text{II.12}$$

como a matriz de rigidez de correção de carga do elemento referida aos deslocamentos nodais $\underset{\sim}{d}_N$. A equação incremental geral de equilíbrio obida a partir da equação (II.8) e que (II.9) fornece a parcela nova do segundo membro, sendo os demais conhecidos, pode ser escrita na forma,

$$(\underset{\sim}{K}_L + \underset{\sim}{K}_{NL}) \underset{\sim}{d} \underset{\sim}{d}_N = \underset{\sim}{d} F^C + \underset{\sim}{d} F_{em}^{NC} + \underset{\sim}{d} F_{ed}^{NC} \quad \text{II.13}$$

Tendo em conta (II.11) e (II.12)

$$(\underset{\sim}{K}_L + \underset{\sim}{K}_{NL}) \underset{\sim}{d} \underset{\sim}{d}_N = \underset{\sim}{d} F^C + \underset{\sim}{d} F_{em}^{NC} + \underset{\sim}{K}^{NC} \underset{\sim}{d} \underset{\sim}{d}_N \quad \text{II.14}$$

ou considerando-se a formulação com incrementos pequenos mas finitos

$$(\underset{\sim}{K}_L + \underset{\sim}{K}_{NL} - \underset{\sim}{K}^{NC}) \Delta \underset{\sim}{d}_N = \Delta \underset{\sim}{F}^C + \Delta \underset{\sim}{F}_{em}^{NC} \quad \text{II.15}$$

A matriz $\underset{\sim}{K}^{NC}$ é não simétrica e por definição uma função não linear dos deslocamentos do elemento, dependendo também do carregamento anterior da estrutura, como indicado pelos fatores de carga λ_s , λ_v e λ_i .

A equação (II.15) pode ser escrita:

$$\underset{\sim}{K}_T \Delta \underset{\sim}{d}_N = \Delta \underset{\sim}{F}^C + \Delta \underset{\sim}{F}_{em}^{NC} \quad \text{II.16}$$

com

$$\tilde{K}_T = (\tilde{K}_L + \tilde{K}_{NL} - \tilde{K}_{NC}) \quad \text{II.17}$$

A matriz \tilde{K}_T representa a matriz de rigidez tangente do sistema não linear. Considerando-se todos os elementos finitos, a matriz de rigidez tangente global \tilde{K}_{TG} pode ser obtida pelo processo corrente de assembler da análise estrutural.

A equação do equilíbrio instantâneo de um sistema elástico não linear, solicitado por um carregamento não conservativo do tipo geral, ou seja, quando o carregamento é dependente do deslocamento, velocidade, aceleração e do tempo, pode ser obtida a partir da equivalência das cargas externas conservativas e não conservativas ao vetor nodal resultante das tensões internas e das forças de inércia que atuam nos nós do sistema discreto, bem como se forem considerados também a inclusão neste vetor das forças de amortecimento atuando nos nós. Considerando a não linearidade do problema e que a mesma é válida para pequenos (infinitamente pequenos) deslocamentos tem-se:

$$\begin{aligned} (\tilde{K}_L + \tilde{K}_{NL}) \ddot{d}_{\tilde{N}} + C \dot{d}_{\tilde{N}} + M \ddot{d}_{\tilde{N}} = dF_e^C + d\lambda F_{\tilde{N}}^{NC}(d_{\tilde{N}}, \dot{d}_{\tilde{N}}, \ddot{d}_{\tilde{N}}, t) + \\ + dF_e^{NC}(d_{\tilde{N}}, \dot{d}_{\tilde{N}}, \ddot{d}_{\tilde{N}}, t) \end{aligned} \quad \text{II.18}$$

No primeiro membro da equação (II.18) C e M são matrizes de amortecimento e massa, sendo $\dot{d}_{\tilde{N}}$ e $\ddot{d}_{\tilde{N}}$ os vetores das velocidades e acelerações nodais. No segundo membro $F_{\tilde{N}}^{NC}(d_{\tilde{N}}, \dot{d}_{\tilde{N}}, \ddot{d}_{\tilde{N}}, t)$ representa o vetor das forças nodais cinematicamente equivalente as forças não conservativas de superfície volume e discretas aplicadas aos elementos, e $\lambda F_{\tilde{N}}^{NC}(d_{\tilde{N}}, \dot{d}_{\tilde{N}}, \ddot{d}_{\tilde{N}}, t)$ as discretas ou diretamente aplicadas aos nós. No caso geral estes dois vetores são funções não

Lineares dependentes dos deslocamentos nodais \tilde{d}_N e suas derivadas, assumindo-se que sejam funções diferenciáveis com respeito a \tilde{d}_N , $\dot{\tilde{d}}_N$, $\ddot{\tilde{d}}_N$. A matriz diagonal $\tilde{\lambda}$ representa os fatores das cargas concentradas nos nós.

De uma forma análoga a obtenção anterior da matriz de rigidez \tilde{K}^{NC} , ou seja, observando a dependência funcional do segundo e terceiro membro da equação (II.18) em $\dot{\tilde{d}}_N$ e $\ddot{\tilde{d}}_N$, surgem as matrizes de amortecimento e massa não conservativas além da de rigidez de correção de carga.

$$\tilde{C}^{NC}(\tilde{d}_N, \dot{\tilde{d}}_N, \ddot{\tilde{d}}_N, t) = \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}_n^{NC}}{\partial \dot{\tilde{d}}_N} + \frac{\partial \tilde{F}_e^{NC}}{\partial \dot{\tilde{d}}_N} \quad \text{II.19}$$

$$\tilde{M}^{NC}(\tilde{d}_N, \dot{\tilde{d}}_N, \ddot{\tilde{d}}_N, t) = \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}_n^{NC}}{\partial \ddot{\tilde{d}}_N} + \frac{\partial \tilde{F}_e^{NC}}{\partial \ddot{\tilde{d}}_N} \quad \text{II.20}$$

$$\tilde{K}^{NC}(\tilde{d}_N, \dot{\tilde{d}}_N, \ddot{\tilde{d}}_N, t) = \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}_n^{NC}}{\partial \tilde{d}_N} + \frac{\partial \tilde{F}_e^{NC}}{\partial \tilde{d}_N} \quad \text{II.21}$$

Considerando-se uma formulação incremental e tendo em conta (II.18) a (II.21) resulta a equação geral de equilíbrio instantâneo.

$$\begin{aligned} & \tilde{K}_T(\tilde{d}_N, \dot{\tilde{d}}_N, \ddot{\tilde{d}}_N, t) \Delta \tilde{d}_N + [\tilde{C} - \tilde{C}^{NC}(\tilde{d}_N, \dot{\tilde{d}}_N, \ddot{\tilde{d}}_N, t)] \dot{\tilde{d}}_N + \\ & \quad + [\tilde{M} - \tilde{M}^{NC}(\tilde{d}_N, \dot{\tilde{d}}_N, \ddot{\tilde{d}}_N, t)] \ddot{\tilde{d}}_N = \\ & = \Delta \tilde{F}_e^C + \Delta \tilde{F}_n^{NC}(\tilde{d}_N, \dot{\tilde{d}}_N, \ddot{\tilde{d}}_N, t) + \Delta \tilde{F}_{em}^{NC} \end{aligned} \quad \text{II.22}$$

II.2) DISCRETIZAÇÃO DOS SISTEMAS ESTRUTURAIS

A superfície curva e contínua de uma casca será representada pelo comportamento de uma superfície constituída de pequenos elementos planos, ocorrendo convergência a medida que a subdivisão decresce. Em uma casca, os elementos estão sujeitos a flexões e forças no plano, causando deformações independentes no caso de elementos planos, restrito a deformações locais pequenas. As matrizes de rigidez são portanto avaliadas a partir das de flexão e estado plano combinadas adequadamente, sendo que são utilizados elementos triangulares, pois estes adaptam-se as cascas de geometria arbitrária.

Considerando-se as aproximações nas aplicações da engenharia optou-se pela associação dos elementos triangulares de estado plano, dois deslocamentos em cada nó, com o de flexão, três deslocamentos por nó, conforme apresentado por ZIENKIEWICZ (1971), resultando em um elemento com cinco graus de liberdade por nó, três translações e duas rotações, aplicável também em problemas não lineares onde elementos de ordem superior levam a soluções complexas.

A matriz de rigidez de cargas é formulada para cargas distribuídas no plano do elemento bem como normais a este mesmo plano, considerando-se deslocamentos nodais cartesianos. Obtém-se a matriz de rigidez de cargas relativa a todos os deslocamentos nodais, flexão e estado plano, uma vez que para esta matriz de correção de carga existem interações entre carregamentos atuantes a princípio no elemento de placa com os deslocamentos do elemento de membrana e vice-versa, ou seja, as componentes dependentes dos deslocamentos, oriundas de um carregamento não conservativo, associado ao elemento de flexão de placa, realizam trabalho virtual não conservativo sobre os deslocamentos do elemento de membrana, o mesmo ocorrendo com os carregamentos associados aos elementos de membrana, obrigando-se a formular a matriz de rigidez de correção de carga global do elemento, ou seja, para o elemento resultante da associação do de flexão com o de membrana,

não sendo possível a superposição das matrizes, como nos casos da rigidez linear e não linear.

O elemento triangular de estado plano, ZIENKIEWICZ (1971), com dois deslocamentos u_i e v_i por nó, três pontos nodais, está esquematizado na figura II.1 em relação aos eixos locais x, y, z .

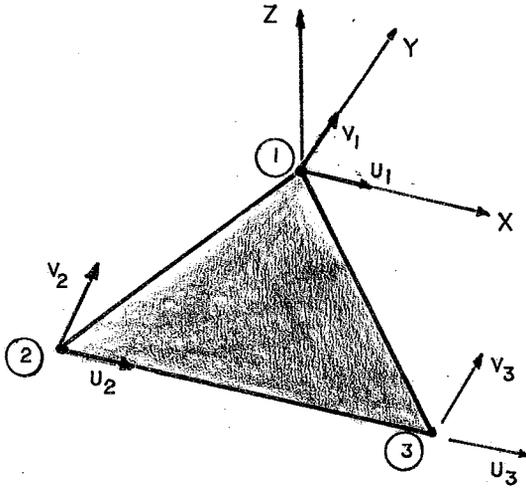


Figura II.1

Sendo os deslocamentos nodais

$$\underset{\sim}{d}_i^M = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{II.23}$$

As coordenadas de área L_1, L_2, L_3 de um ponto P são definidas conforme a figura II.2.

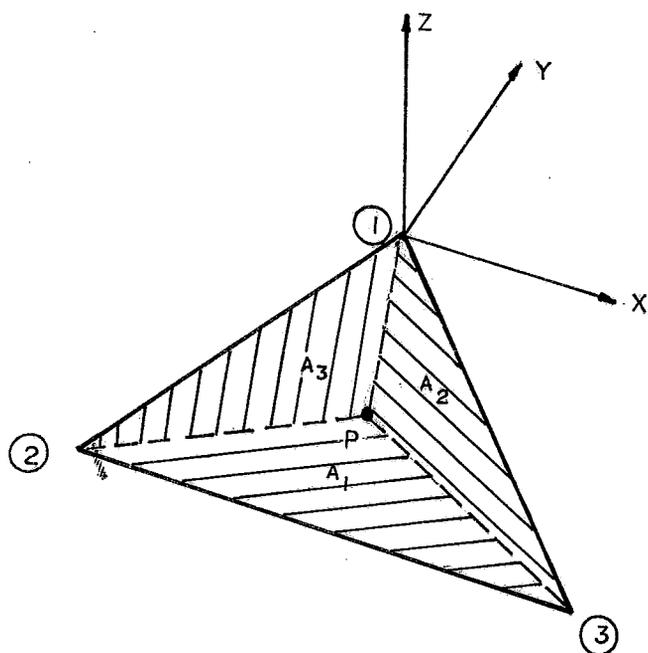


Figura II.2

$$L_1 = \frac{A_1}{A}; \quad L_2 = \frac{A_2}{A}; \quad L_3 = \frac{A_3}{A}$$

Onde A é a área do triângulo 123, sendo que nos pontos

$$1 \quad L_1 = 1, \quad L_2 = L_3 = 0$$

$$2 \quad L_2 = 1, \quad L_3 = L_1 = 0$$

$$3 \quad L_3 = 1, \quad L_2 = L_1 = 0$$

As relações entre as coordenadas de área L_1 , L_2 e L_3 e as cartesianas locais x , y , z são dadas pela expressão

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad \text{II.24}$$

O campo de deslocamentos assumido é

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} \quad \text{II.25}$$

onde c_i , $i = 1$ a 6 são os deslocamentos generalizados.

As constantes c_i podem ser obtidas resolvendo os dois sistemas de três equações que se obtém particularizando x , y para os pontos nodais 1, 2 e 3 e igualando o deslocamento u e v aos nodais correspondentes, resultando u e v em termos dos deslocamentos d_i^M . Substituindo (II.24) resulta:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{II.26}$$

ou

$$\tilde{u}_i^M = \tilde{a}_i^M \cdot \tilde{d}_i^M \quad \text{II.27}$$

O elemento triangular de flexão de placas, ZIENKIEWICZ (1971), VENÂNCIO (1971), LIMA (1972) E CHUEIRI (1985), com três pontos nodais e três deslocamentos w_i , θ_{xi} e θ_{yi} por nó esquematizado na figura II.3.

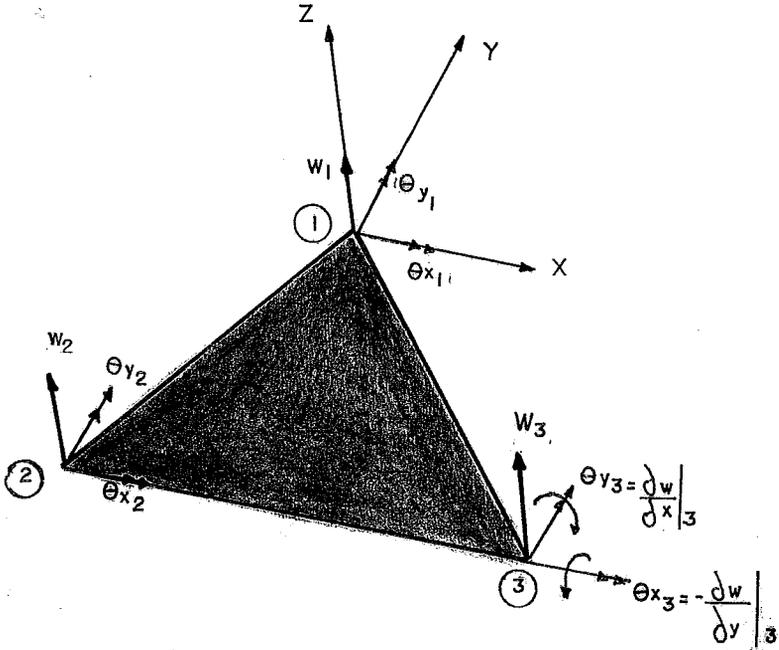


Figura II.3

Sendo os deslocamentos nodais:

$$z_{di}^T = \begin{bmatrix} w_i \\ \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{II.28}$$

O campo de deslocamento assumido para a deflexão w em coordenadas de área é definido por:

$$[w] = [L_1, L_2, L_3, L_1L_2, L_2L_3, L_1L_3, (L_1L_2^2 - L_2L_1^2), \\ \cdot (L_2L_3^2 - L_3L_2^2), (L_3L_1^2 - L_1L_3^2)] [c_i] \quad \text{II.29} \\ i = 1 \text{ a } 9$$

Considerando a expressão (II.24) das coordenadas cartesianas versus coordenadas de área, obtém-se para as derivadas, sendo

$$f = f(x, y)$$

onde,

$$x = x(L_1, L_2)$$

$$y = y(L_1, L_2)$$

as expressões:

$$\frac{\partial f}{\partial L_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial L_1}$$

II.30

$$\frac{\partial f}{\partial L_2} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L_2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial L_2}$$

Considerando (II.24), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{II.31}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{II.32}$$

Sendo

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j$$

$\underset{\sim}{J}$ a matriz Jacobiana

Por inversão de (II.31) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} \\ x_{32} & x_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \end{bmatrix} \quad \text{II.33}$$

Onde em coordenadas locais:

$$2A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad \text{II.34}$$

Para obtermos posteriormente a matriz de rigidez de correção de carga, necessita-se estabelecer a relação entre os deslocamentos em um ponto qualquer com os nodais, ou seja, o campo de deslocamentos em função dos nodais. Partindo de (II.29) pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} w \\ \left(\frac{\partial w}{\partial L_1} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial L_2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{bmatrix} \quad \text{II.35}$$

onde

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} L_1 L_2 & L_2 L_3 & L_1 L_3 \\ L_2 & -L_2 & -L_1 + L_3 \\ L_1 & -L_1 + L_3 & -L_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{13} = \begin{bmatrix} L_1 L_2^2 - L_2 L_1^2 & L_2 L_3^2 - L_3 L_2^2 & L_3 L_1^2 - L_1 L_3^2 \\ L_2^2 - 2L_2 L_1 & L_2^2 - 2L_2 L_3 & -L_1^2 + 4L_1 L_3 - L_3^2 \\ -L_1^2 + 2L_2 L_1 & L_3^2 - 4L_2 L_3 + L_2^2 & -L_1^2 + 2L_1 L_3 \end{bmatrix}$$

Sendo α os deslocamentos generalizados, representa-se a equação (II.35) por

$$d_{\tilde{L}}^F = \phi_{\tilde{L}} \alpha \quad \text{II.36}$$

Particularizando (II.35) para os pontos nodais 1,2,3

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial L_1}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial L_2}\right)_1 \\ w_2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial L_1}\right)_2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial L_2}\right)_2 \\ w_3 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial L_1}\right)_3 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial L_2}\right)_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{bmatrix} \quad \text{II.37}$$

ou

$$\underset{\sim}{d}_{TL}^F = \underset{\sim}{\phi}_{TL} \underset{\sim}{\alpha} \quad \text{II.38}$$

por inversão

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\phi}_{TL}^{-1} \underset{\sim}{d}_{TL}^F \quad \text{II.39}$$

Obtendo-se $\underset{\sim}{\phi}_{TL}^{-1}$ por inversão, tem-se:

$$\underset{\sim}{\phi}_{TL}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & -1/2 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{II.40}$$

Considerando a equação (II.31) pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial L_1} \right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial L_2} \right)_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{13} & y_{13} \\ 0 & x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \\ - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \end{bmatrix} \quad \text{II.41}$$

ou

$$\tilde{d}_{Li}^F = J_T \tilde{d}_i^F \quad \text{II.42}$$

sendo

$$J_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_{13} & x_{31} \\ 0 & y_{23} & x_{32} \end{bmatrix} \quad \text{II.43}$$

Considerando todos os deslocamentos nodais, $i = 1, 2, 3$ na equação (II.42).

$$\tilde{d}_{TL}^F = \begin{bmatrix} J_T & 0 & 0 \\ 0 & J_T & 0 \\ 0 & 0 & J_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{d}_1^F \\ \tilde{d}_2^F \\ \tilde{d}_3^F \end{bmatrix} \quad \text{II.44}$$

Substituindo (II.44) em (II.39):

$$\tilde{z}^{\alpha} = \phi_{TL}^{-1} \begin{bmatrix} J_T & 0 & 0 \\ 0 & J_T & 0 \\ 0 & 0 & J_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{d1}^F \\ z_{d2}^F \\ z_{d3}^F \end{bmatrix} \quad \text{II.45}$$

ou

$$\tilde{z}^{\alpha} = \Psi \begin{bmatrix} z_{d1}^F \\ z_{d2}^F \\ z_{d3}^F \end{bmatrix} \quad \text{II.46}$$

Sendo Ψ a matriz que transforma os deslocamentos nodais em generalizados.

$$\Psi = \begin{bmatrix} U_{\tilde{1}1} & U_{\tilde{1}2} & U_{\tilde{1}3} \\ U_{\tilde{2}1} & U_{\tilde{2}2} & U_{\tilde{2}3} \\ U_{\tilde{3}1} & U_{\tilde{3}2} & U_{\tilde{3}3} \end{bmatrix} \quad \text{II.47}$$

onde

$$U_{\tilde{1}1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{\tilde{1}2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{\tilde{1}3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{\tilde{2}1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{y_{23} - y_{13}}{2} & \frac{x_{23} - x_{13}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-y_{13}}{2} & \frac{x_{13}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{U}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -\Psi(4,2) & -\Psi(4,3) \\ 0 & \frac{-y_{23}}{2} & \frac{x_{23}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{U}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Psi(5,5) & -\Psi(5,6) \\ 0 & -\Psi(6,2) & -\Psi(6,3) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{U}_{31} = \begin{bmatrix} -1 & -\Psi(4,2) & -\Psi(4,3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \Psi(6,2) & \Psi(6,3) \end{bmatrix} \quad \tilde{U}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -\Psi(4,2) & -\Psi(4,3) \\ -1 & -\Psi(5,5) & -\Psi(5,6) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{U}_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \Psi(8,5) & \Psi(8,6) \\ -1 & \Psi(9,2) & \Psi(9,3) \end{bmatrix}$$

Retomando a equação (II.33) pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_{23}/2A & y_{31}/2A \\ 0 & x_{32}/2A & x_{13}/2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial L_1} \\ \frac{\partial w}{\partial L_2} \end{bmatrix} \quad \text{II.48}$$

Substituindo em (II.48) (II.35) na forma compacta

(II.36) e utilizando o valor de α dado em (II.46).

$$\begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_{23}/2A & y_{31}/2A \\ 0 & x_{32}/2A & x_{13}/2A \end{bmatrix} \phi_{\sim L} \psi_{\sim} \begin{bmatrix} d_{\sim 1}^F \\ d_{\sim 2}^F \\ d_{\sim 3}^F \end{bmatrix} \quad \text{II.49}$$

ou

$$\begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{32}/2A & x_{13}/2A \\ 0 & y_{32}/2A & y_{13}/2A \end{bmatrix} \phi_{\sim L} \psi_{\sim} d_{\sim T}^F \quad \text{II.50}$$

ou

$$\begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = J_{\sim TF} \phi_{\sim L} \psi_{\sim} d_{\sim T}^F \quad \text{II.51}$$

Sendo que as matrizes que aparecem na equação (II.51) estão explícitas e dadas nas equações (II.50), (II.35) e (II.47), respectivamente.

O produto das matrizes $\phi_{\sim L} \psi_{\sim}$ será representado por:

$$\phi_{\sim L} \psi_{\sim} = \begin{bmatrix} \text{AUX}(1) & \text{AUX}(2) & \dots & \text{AUX}(9) \\ \text{AUX1}(1) & \text{AUX1}(2) & \dots & \text{AUX1}(9) \\ \text{AUX2}(1) & \text{AUX2}(2) & \dots & \text{AUX2}(9) \end{bmatrix} \quad \text{II.52}$$

Sendo os coeficientes da matriz acima dados por:

$$\text{AUX}(1) = L_1 - L_1 L_2^2 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_3^2 L_1$$

$$\begin{aligned} \text{AUX}(2) = & L_1 L_2 \left(\frac{y_{23} - y_{13}}{2} \right) - L_1 L_3 \frac{y_{13}}{2} - \\ & - \left(\frac{y_{23} - y_{13}}{2} \right) (L_1 L_2^2 - L_2 L_1^2) - \frac{y_{13}}{2} (L_3 L_1^2 - L_1 L_3^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AUX}(3) = & L_1 L_2 \left(\frac{x_{13} - x_{23}}{2} \right) + L_1 L_3 \frac{x_{13}}{2} + \\ & + \left(\frac{x_{13} - x_{23}}{2} \right) (L_1 L_2^2 - L_2 L_1^2) + \frac{x_{13}}{2} (L_3 L_1^2 - L_1 L_3^2) \end{aligned}$$

$$\text{AUX}(4) = L_2 + L_1 L_2^2 - L_1^2 L_2 + L_2^2 L_3 - L_3^2 L_2$$

$$\begin{aligned} \text{AUX}(5) = & L_1 L_2 \left(\frac{y_{13} - y_{23}}{2} \right) - L_2 L_3 \frac{y_{23}}{2} + \\ & + \left(\frac{y_{13} - y_{23}}{2} \right) (L_1 L_2^2 - L_2 L_1^2) - \frac{y_{23}}{2} (L_3 L_2^2 - L_2 L_3^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AUX}(6) = & L_1 L_2 \left(\frac{x_{23} - x_{13}}{2} \right) + L_2 L_3 \frac{x_{23}}{2} + \\ & + \left(\frac{x_{23} - x_{13}}{2} \right) (L_1 L_2^2 - L_2 L_1^2) + \frac{x_{23}}{2} (L_3 L_2^2 - L_2 L_3^2) \end{aligned}$$

$$\text{AUX}(7) = L_3 - L_3 L_1^2 + L_3^2 L_1 - L_2^2 L_3 + L_3^2 L_2$$

$$\begin{aligned} \text{AUX}(8) = & L_2 L_3 \frac{y_{23}}{2} + L_1 L_3 \frac{y_{13}}{2} - \frac{y_{23}}{2} (L_3 L_2^2 - L_2 L_3^2) - \\ & - \frac{y_{13}}{2} (L_3 L_1^2 - L_1 L_3^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AUX}(9) = & -L_2L_3 \frac{x_{23}}{2} - L_1L_3 \frac{x_{13}}{2} + \frac{x_{23}}{2} (L_3L_2^2 - L_2L_3^2) + \\ & + \frac{x_{13}}{2} (L_3L_1^2 - L_1L_3^2) \end{aligned}$$

$$\text{AUX1}(1) = 1 + 2L_1L_2 + 4L_1L_3 - L_1^2 - L_2^2 - L_3^2$$

$$\text{AUX2}(1) = 2L_1L_3 - 2L_1L_2$$

$$\begin{aligned} \text{AUX1}(2) = & -\frac{1}{2} y_{12} (L_2 - L_2^2 + 2L_1L_2) - \frac{1}{2} y_{13} (L_3 - \\ & - L_1 - L_1^2 + 4L_1L_3 - L_3^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AUX2}(2) = & -\frac{1}{2} y_{12} (L_1 + L_1^2 - 2L_1L_2) - \frac{1}{2} y_{13} (-L_1 - L_1^2 + \\ & + 2L_1L_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AUX1}(3) = & \frac{1}{2} x_{12} (L_2 - L_2^2 + 2L_1L_2) + \frac{1}{2} x_{13} (L_3 - L_1 - L_1^2 + \\ & + 4L_1L_3) - L_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AUX2}(3) = & \frac{1}{2} x_{12} (L_1 + L_1^2 - 2L_1L_2) + \frac{1}{2} x_{13} (-L_1 - L_1^2 + \\ & + 2L_1L_3) \end{aligned}$$

$$\text{AUX1}(4) = -2L_1L_2 + 2L_2L_3$$

$$\text{AUX2}(4) = 1 + 2L_1L_2 + 4L_2L_3 - L_1^2 - L_2^2 - L_3^2$$

$$\text{AUX1}(5) = \frac{1}{2} y_{12} (L_2 + L_2^2 - 2L_1L_2) + \frac{1}{2} y_{23} (L_2 + L_2^2 - 2L_2L_3)$$

$$\begin{aligned} \text{AUX2}(5) = & \frac{1}{2} y_{12} (L_1 - L_1^2 + 2L_1L_2) + \frac{1}{2} y_{23} (L_2 - L_3 + L_2^2 - \\ & - 4L_2L_3 + L_3^2) \end{aligned}$$

$$\text{AUX1}(6) = -\frac{1}{2} x_{12} (L_2 + L_2^2 - 2L_1L_2) - \frac{1}{2} x_{23} (L_2 + L_2^2 - 2L_2L_3)$$

$$\text{AUX2}(6) = -\frac{1}{2} x_{12} (L_1 - L_1^2 + 2L_1L_2) - \frac{1}{2} x_{23} (L_2 - L_3 + L_2^2 - 4L_2L_3 + L_3^2)$$

$$\text{AUX1}(7) = -1 - 2L_2L_3 - 4L_1L_3 + L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

$$\text{AUX2}(7) = -1 - 2L_1L_3 - 4L_2L_3 + L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

$$\text{AUX1}(8) = \frac{1}{2} y_{23} (-L_2 + L_2^2 - 2L_2L_3) + \frac{1}{2} y_{13} (L_3 - L_1 + L_1^2 - 4L_1L_3 + L_3^2)$$

$$\text{AUX2}(8) = \frac{1}{2} y_{23} (L_3 - L_2 + L_2^2 - 4L_2L_3 + L_3^2) + \frac{1}{2} y_{13} (-L_1 + L_1^2 - 2L_1L_3)$$

$$\text{AUX1}(9) = -\frac{1}{2} x_{23} (-L_2 + L_2^2 - 2L_2L_3) - \frac{1}{2} x_{13} (L_3 - L_1 + L_1^2 - 4L_1L_3 + L_3^2)$$

$$\text{AUX2}(9) = -\frac{1}{2} x_{23} (L_3 - L_2 + L_2^2 - 4L_2L_3 + L_3^2) - \frac{1}{2} x_{13} (-L_1 + L_1^2 - 2L_1L_3)$$

A matriz final $J_{TF} \phi_L \psi$ será dada por:

$$\tilde{AXI} = \begin{bmatrix} \text{AUX}(1) & \dots & \text{AUX}(9) \\ \frac{x_{32} \text{AUX1}(1) + x_{13} \text{AUX2}(1)}{2A} & \dots & \frac{x_{32} \text{AUX1}(9) + x_{13} \text{AUX2}(9)}{2A} \\ \frac{y_{32} \text{AUX1}(1) + y_{13} \text{AUX2}(1)}{2A} & \dots & \frac{y_{32} \text{AUX1}(9) + y_{13} \text{AUX2}(9)}{2A} \end{bmatrix} \quad \text{II.53}$$

Incluindo-se o efeito de membrana obtém-se a expressão final que relaciona os deslocamentos de um ponto qualquer do elemento com os nodais.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \theta_{x_3} \\ \theta_{y_3} \end{bmatrix} \quad \text{II.54}$$

onde

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{AXI}(1,1) & \text{AXI}(1,2) & \text{AXI}(1,3) \\ 0 & 0 & \text{AXI}(2,1) & \text{AXI}(2,2) & \text{AXI}(2,3) \\ 0 & 0 & \text{AXI}(3,1) & \text{AXI}(3,2) & \text{AXI}(3,3) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AXI(1,4) & AXI(1,5) & AXI(1,6) \\ 0 & 0 & AXI(2,4) & AXI(2,5) & AXI(2,6) \\ 0 & 0 & AXI(3,4) & AXI(3,5) & AXI(3,6) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{13} = \begin{bmatrix} L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AXI(1,7) & AXI(1,8) & AXI(1,9) \\ 0 & 0 & AXI(2,7) & AXI(2,8) & AXI(2,9) \\ 0 & 0 & AXI(3,7) & AXI(3,8) & AXI(3,9) \end{bmatrix}$$

ou

$$\tilde{u} = \Phi_F \tilde{d}_N$$

II.55

No caso de cascas enrijecidas, os enrijecedores serão discretizados por elementos de viga espacial, com dois pontos nodais e seis deslocamentos por nó.

A formulação não se restringe obviamente apenas a utilização de enrijecedores, sendo válida também para qualquer tipo de estruturas reticuladas ou de associação destas com placas, cascas ou estado plano.

II.3) MATRIZ DE ROTAÇÃO OU TRANSFORMAÇÃO DAS CARGAS NÃO CONSERVATIVAS

Seja um pseudo vetor de rotação $\tilde{\vartheta}$ com rotações $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ nos eixos O_{xyz} locais.

$$\vec{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z) \quad \text{II.56}$$

sendo

$$|\vec{\theta}| = (\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)^{1/2} \quad \text{II.57}$$

Para rotações finitas, θ_x , θ_y e θ_z não podem ser consideradas como componentes de $\vec{\theta}$ por não existir uma identidade vetorial para $\vec{\theta}$, devido a não comutatividade de duas ou mais rotações finitas, pois a seqüência de aplicação leva a resultados diferentes.

Considerando carregamentos distribuídos circulatorios descritos pelo vetor:

$$\vec{p}^{nc} = (p_x^{nc}, p_y^{nc}, p_z^{nc}) \quad \text{II.58}$$

sendo p_z^{nc} perpendicular ao plano do elemento e p_x^{nc} e p_y^{nc} contidos no plano do elemento. Assim que o elemento se deforma p_z^{nc} mantém-se sempre normal a superfície deformada e p_x^{nc} e p_y^{nc} permanecem tangentes a mesma superfície, ou seja, a carga como um todo segue completamente as rotações da estrutura.

Na posição indeformada, o carregamento é definido pelo vetor:

$$\vec{p}_0^{nc} = (p_x^0, p_y^0, p_z^0) \quad \text{II.59}$$

Se considerarmos configurações deformadas incrementais, o vetor \vec{p}^{nc} é obtido pela transformação exata:

$$\vec{p}^{nc} = T_p(\vec{\theta}) \vec{p}_0^{nc} \quad \text{II.60}$$

onde $T_p(\vec{\theta})$ é uma função, em geral, não linear do

pseudovetor de rotação $\vec{\theta}$. A transformação (II.60) é apresentada em termos analíticos em livros clássicos de mecânica teórica e cálculo vetorial. Em uma forma nova matricial, foi utilizada pela primeira vez por ARGYRIS e SYMEONIDIS (1981), sendo posteriormente estabelecida e estudada com mais detalhes por ARGYRIS (1982). Representa-se $T_{\vec{p}}(\vec{\theta})$ pela expressão:

$$T_{\vec{p}} = I_3 + \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \vec{S} + \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sen } \theta/2}{\theta/2} \right)^2 \vec{S}^2 \quad \text{II.61}$$

sendo

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{II.62}$$

$$\vec{S}^2 = \begin{bmatrix} -(\theta_y^2 + \theta_z^2) & \theta_x \theta_y & \theta_x \theta_z \\ \theta_x \theta_y & -(\theta_x^2 + \theta_z^2) & \theta_y \theta_z \\ \theta_x \theta_z & \theta_y \theta_z & -(\theta_x^2 + \theta_y^2) \end{bmatrix} \quad \text{II.63}$$

Na expressão (II.61) se as funções trigonométricas forem expandidas em série em termos de θ e em um segundo passo considerarem-se as potências em \vec{S} obtém-se:

$$T_{\vec{p}} = I_3 + \vec{S} + \frac{1}{2!} \vec{S}^2 + \frac{1}{3!} \vec{S}^3 + \dots + \frac{1}{n!} \vec{S}^n + \dots \quad \text{II.64}$$

ou a expressão de $T_{\vec{p}}$

$$T_{\vec{p}} = e^{\vec{S}} \quad \text{II.65}$$

A matriz \tilde{S} é a matriz de rotação associada a pequenas rotações. As formulações seguintes, restringem-se a pequenas rotações incrementais. Como resultado a expressão (II.60) para o vetor de carga não conservativo na configuração deformada corrente reduz-se a uma função linear ou no máximo quadrática dos incrementos dos componentes do vetor de rotação $\tilde{\vartheta}$. De fato a equação (II.61) da matriz $T_{\tilde{P}}$ para $\tilde{\vartheta} \rightarrow 0$ tem a forma:

$$T_{\tilde{P}} = I_{\tilde{3}} + \tilde{S} + \frac{1}{2} \tilde{S}^2 \quad \text{II.66}$$

Na aplicação da expressão (II.66) ou na sua forma linear ($I_{\tilde{3}} + \tilde{S}$), deve-se analisar cada caso, e se preciso introduzir correções, para melhor representar o carregamento não conservativo.

CARREGAMENTO NÃO CONSERVATIVO VERTICAL

Seja o elemento triangular plano, sujeito ao carregamento vertical uniforme, não conservativo, normal ao plano do elemento, conforme indicado na figura II.4, onde estão indicados também os deslocamentos dos nós 1 a 3 do elemento.

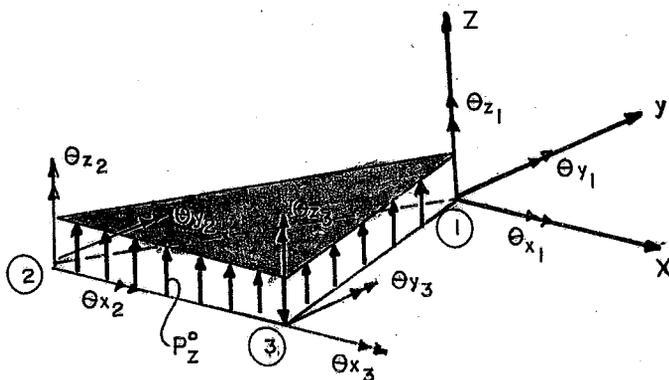


Figura II.4

Sendo o carregamento na posição indeformada dado por:

$$\tilde{p}_0^{nc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_z^0 \end{bmatrix} \quad \text{II.67}$$

Utilizando (II.60) obtém-se o vetor \tilde{p}^{nc} nas configurações deformadas incrementais dado por:

$$\tilde{p}^{nc} = T_{\tilde{p}}(\tilde{\vartheta}) \tilde{p}_0^{nc} \quad \text{II.60}$$

Considerando em primeira aproximação a expressão (II.66) restrita ao comportamento incremental linear

$$T_{\tilde{p}} = I_3 + \tilde{\vartheta} \quad \text{II.68}$$

Logo

$$\tilde{p}^{nc} = (I_3 + \tilde{\vartheta}) \tilde{p}_0^{nc} \quad \text{II.69}$$

Pela equação (II.62) e lembrando que para o elemento não se consideram rotações em torno do eixo z, e levando-se em conta (II.67).

$$\begin{bmatrix} p_x^{nc} \\ p_y^{nc} \\ p_z^{nc} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vartheta_y \\ 0 & 0 & -\vartheta_x \\ -\vartheta_y & \vartheta_x & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_z^0 \end{bmatrix} \quad \text{II.70}$$

Com relação a rotação Θ_z , pode-se também dizer que a mesma não dá origem a novas componentes para o \underline{p}^{nc} , sendo portanto nulo o trabalho virtual não conservativo.

Sendo o vetor na posição deformada em primeira aproximação obtido da equação (II.70), resultando

$$\begin{bmatrix} p_x^{nc} \\ p_y^{nc} \\ p_z^{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_z^0 \Theta_y \\ -p_z^0 \Theta_x \\ 0 \\ p_z^0 \end{bmatrix} \quad \text{II.71}$$

CARREGAMENTO NÃO CONSERVATIVO NO PLANO DO ELEMENTO

Na figura II.5 abaixo indica-se o carregamento no plano do elemento, bem como o vetor de carga na posição indeformada

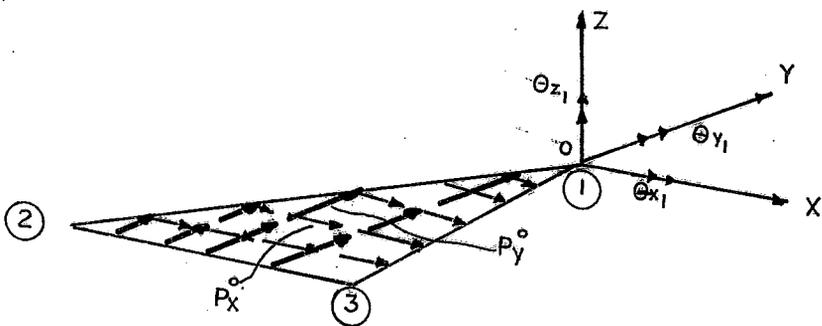


Figura II.5

Desprezando-se a rotação Θ_z , e considerando as forças uniformemente distribuídas p_x^0 e p_y^0 na posição indeformada, paralela aos eixos Ox e Oy respectivamente, obtém-se em primeira aproximação para o vetor na posição deformada, utilizando (II.62)

$$\begin{bmatrix} p_x^{nc} \\ p_y^{nc} \\ p_z^{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ -p_x^0 \Theta_y + p_y^0 \Theta_x \end{bmatrix} \quad \text{II.72}$$

Atuando um carregamento na direção dos três eixos Ox , Oy e Oz , basta superpor II.71 com II.72.

II.4) CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO NÃO CONSERVATIVO DO TIPO CIRCULATÓRIO

II.4.1) MATRIZ DE CORREÇÃO DE CARGA PARA O ELEMENTO DE CASCA

Formula-se a seguir a matriz de correção de carga relativas aos carregamentos distribuídos não conservativos apresentados nas figuras II.4 e II.5.

Considerando a expressão do trabalho virtual não conservativo das forças distribuídas.

$$\delta W^{nc} = \int_S \delta \tilde{u}_s^T p_s^{nc} dS = \int_S (\delta u \ \delta v \ \delta w) \begin{bmatrix} p_x^{nc} \\ p_y^{nc} \\ p_z^{nc} \end{bmatrix} dS \quad \text{II.73}$$

Denominando ϕ_G a matriz constituída das três

primeiras linhas de linhas de ϕ_F equações II.54 e II.55, o vetor dos deslocamentos de um ponto interior do elemento é

$$\underline{u} = \phi_G \underline{d}_N \quad \text{II.74}$$

sendo

$$\delta \underline{U}^T = \delta \underline{d}_N^T \phi_G^T \quad \text{II.75}$$

Substituindo-se (II.75) em (II.73):

$$\delta W^{NC} = \delta \underline{d}_N^T \left(\int_S \phi_G^T \underline{p}_S^{nc} dS \right) \quad \text{II.76}$$

Tendo-se em conta II.4

$$\underline{F}_e^{NC} = \int_S \phi_G^T \underline{p}_S^{nc} dS \quad \text{II.77}$$

Sendo o carregamento em primeira aproximação dado por (II.69) e substituindo na matriz \underline{S} , dada pela equação II.62 as rotações θ_x e θ_y expressas em função dos deslocamentos nodais, equação II.54.

$$\underline{p}_e^{nc} = \underline{p}_0^{nc} + \underline{S}(\phi_F \underline{d}_N) \underline{p}_0^{nc} \quad \text{II.78}$$

ou

$$\underline{p}_e^{nc} = \underline{p}_0^{nc} + \underline{C}^{NC} \underline{d}_N \quad \text{II.79}$$

Substituindo (II.79) em (II.77)

$$\tilde{F}_e^{NC} = \int_{\tilde{G}} \phi^T(L) [\tilde{p}_0^{nc} + \tilde{c}_{d_N}^{NC}] dS \quad \text{II.80}$$

Considerando (II.10) e (II.12) e sendo $\frac{\partial d_N}{\partial d_N} = [I_{15}]$, onde $[I_{15}]$ é a matriz identidade de ordem (15 x 15),

$$\tilde{K}_{\tilde{N}}^{NC} = \frac{\partial \tilde{F}_e^{NC}}{\partial d_N} = \int_S \phi^T(L) [I_0 + \tilde{c}_{\tilde{N}}^{NC}] dS \quad \text{II.81}$$

ou

$$\tilde{K}_{\tilde{N}}^{NC} = \int_S \phi^T(L) \tilde{c}_{\tilde{N}}^{NC} dS \quad \text{II.82}$$

que é a expressão que nos fornece a matriz de rigidez de correção de carga do elemento triangular plano, considerando o estado de flexão associado ao de membrana.

O segundo termo da equação II.78 pode ser escrito na forma.

$$\sum_{\tilde{N}} (\phi_{F_{d_N}}) \tilde{p}_0^{nc} = [\tilde{A}_{11} \quad \tilde{A}_{12} \quad \tilde{A}_{13}] \begin{bmatrix} 0 \\ P_x \\ 0 \\ P_y \\ 0 \\ P_z \end{bmatrix} \quad \text{II.83}$$

onde

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\phi_{F51} u_1 + \phi_{F52} v_1 + \dots + \phi_{F5,15} y_3) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\phi_{F41} u_1 + \phi_{F42} v_1 + \dots + \phi_{F4,15} \Theta_{y3}) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{13} = \begin{bmatrix} (\phi_{F51} u_1 + \phi_{F52} v_1 + \dots + \phi_{F5,15} \Theta_{y3}) \\ -(\phi_{F41} u_1 + \phi_{F42} v_1 + \dots + \phi_{F4,15} \Theta_{y3}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$S(\phi_{F,N}^d)_{P_0}^{nc} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} \\ \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{23} \end{bmatrix}$$

II.84

onde

$$\tilde{A}_{11} = [(\phi_{F51}^0 P_z^0 u_1 + \phi_{F52}^0 P_z^0 v_1 + \phi_{F53}^0 P_z^0 w_1 + \dots + \phi_{F5,15}^0 P_z^0 \Theta_{y3})]$$

$$\tilde{A}_{21} = [-(\phi_{F41}^0 P_z^0 u_1 + \phi_{F42}^0 P_z^0 v_1 + \phi_{F43}^0 P_z^0 w_1 + \dots + \phi_{F4,15}^0 P_z^0 \Theta_{y3})]$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{23} = [(\phi_{F41}^0 P_y^0 - \phi_{F51}^0 P_x^0) u_1 + (\phi_{F42}^0 P_y^0 - \phi_{F52}^0 P_x^0) v_1 + \dots + \\ + (\phi_{F4,15}^0 P_y^0 - \phi_{F5,15}^0 P_x^0) \Theta_{y3}] \end{aligned}$$

ou tendo-se em conta a equação (II.79)

$$\tilde{C}_{\tilde{N}}^{NC} = \tilde{A} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \ominus_{x1} \\ \ominus_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \ominus_{x2} \\ \ominus_{y2} \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \ominus_{x3} \\ \ominus_{y3} \end{bmatrix} \quad \text{II.85}$$

onde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \phi_{F51}^0 P_z & \phi_{F52}^0 P_z & \dots \\ -\phi_{F41}^0 P_z & -\phi_{F42}^0 P_z & \dots \\ (\phi_{F41}^0 P_y - \phi_{F51}^0 P_x) & (\phi_{F42}^0 P_y - \phi_{F52}^0 P_x) & \dots \\ \dots & \dots & \phi_{F5,15}^0 P_z \\ \dots & \dots & -\phi_{F4,15}^0 P_z \\ \dots & (\phi_{F4,15}^0 P_y - \phi_{F5,15}^0 P_x) & \dots \end{bmatrix}$$

Substituindo na equação II.82 as matrizes $\tilde{C}_{\tilde{N}}^{NC}$ e

$\tilde{G}_{\tilde{N}}^T$ tem-se:

$$\tilde{K}^{NC} = \int_S \begin{bmatrix} \phi_{F11} & \phi_{F21} & \phi_{F31} \\ \phi_{F12} & \phi_{F22} & \phi_{F32} \\ \phi_{F13} & \phi_{F23} & \phi_{F33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{F1,15} & \phi_{F2,15} & \phi_{F3,15} \end{bmatrix} \tilde{A} \, dS \quad \text{II.86}$$

A matriz \tilde{K}^{NC} será obtida por integração numérica, uma vez que os coeficientes que aparecem em (II.86) podem ser todos facilmente avaliados através das expressões estabelecidas anteriormente.

Se a carga for variável, na forma $\tilde{p}^0 = \tilde{p}_m + \tilde{\epsilon} \tilde{p}_d$ tem-se que avaliar na integração numérica também seus valores nos pontos de integração, ou seja, determinar a expressão de \tilde{p}^0 em coordenadas, L_1 , L_2 e L_3 .

No caso da matriz de rigidez de correção de carga, pode-se também utilizar a matriz de transformação na forma quadrática, equação (II.66). Neste caso, a equação II.78 quando substituída em (II.77) resulta, considerando apenas a parte variável do carregamento em II.78.

$$\tilde{F}_e^{NC} = \int_S \tilde{\phi}_G^T [S(\tilde{\phi}_{F\tilde{N}}^d) + \frac{1}{2} S^2(\tilde{\phi}_{F\tilde{N}}^d)] \tilde{p}_0^{nc} \, dS \quad \text{II.87}$$

Sendo

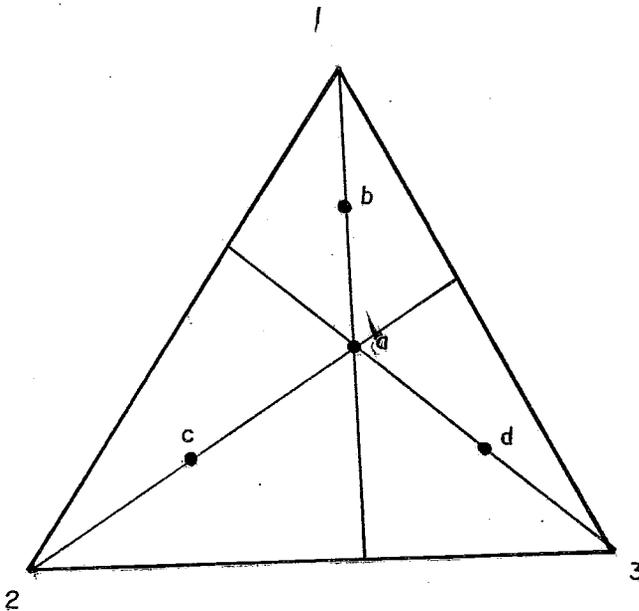
$$\tilde{K}^{NC} = \frac{\partial}{\partial \tilde{d}_N} \int_S \tilde{\phi}_G^T [S(\tilde{\phi}_{F\tilde{N}}^d) + \frac{1}{2} S^2(\tilde{\phi}_{F\tilde{N}}^d)] \tilde{p}_0^{nc} \, dS \quad \text{II.88}$$

ou em forma mais compacta

$$\tilde{K}^{NC} = \int_S \tilde{\phi}_G^T \frac{\partial}{\partial \tilde{d}_N} [C(\tilde{\phi}_F, \tilde{d}_N, \tilde{p}_0^{nc})] \, dS \quad \text{II.89}$$

INTEGRAÇÃO EM COORDENADAS DE ÁREA

Para a integração em coordenadas de área, utiliza-se o procedimento desenvolvido diretamente para elementos triangulares por HAMMER et alii (1950). Utiliza-se quatro pontos de integração, conforme a figura II.6. Esta integração fornece resultados exatos quando da integração de polinômios cúbicos.



pontos	Coordenadas			Peso W_i
	L_1	L_2	L_3	
a	1/3	1/3	1/3	-27/48
b	0,6	0,2	0,2	25/48
c	0,2	0,6	0,2	25/48
d	0,2	0,2	0,6	25/48

Figura II.6

resultando;

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 = \sum_{i=a}^d w_i f_i(L_1, L_2, L_3) \quad \text{II.90}$$

ou sendo $dA = dx dy$

$$\begin{aligned} I &= \int_A f(L_1, L_2, L_3) dA = \\ &= \int_A f(L_1, L_2, L_3) \det \underline{J} dL_1 dL_2 = \quad \text{II.91} \\ &= 2A \int_A f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 \end{aligned}$$

CONSIDERAÇÃO DA ROTAÇÃO Θ_z

A inclusão da rotação Θ_{zi} , $i=1,2,3$, tem como finalidade facilitar assembler. Os coeficientes de rigidez correspondentes são introduzidos com valores nulos, uma vez que as rotações não foram consideradas na formulação do elemento. A matriz (II.86) passa a ser (18 x 18) com três linhas e colunas correspondentes a Θ_z nulas. As rotações Θ_z em um nó não são conseqüentemente avaliados e não contribuem para a energia de deformação armazenada no elemento.

No sistema local, a matriz de rigidez do elemento é singular, pois são nulos os termos relativos a Θ_{zi} . No sistema global esta singularidade desaparece, a não ser que exista algum nó planar, (um nó que pertence a mais de um elemento, os quais se encontram em um mesmo plano).

Neste caso ocorre equação na direção de Θ_{zi} , igual a

$$0 = 0$$

Para evitar mensagens de erro no programa e tendo-se em conta que Θ_{zi} não afeta as tensões e não há

acoplamento do sistema de equações com relação a θ_{zi} , qualquer valor pode ser inserido na diagonal ii , $k_{\theta_{zi}}$, resultando a equação

$$k_{\theta_{zi}} \theta_{zi} = 0$$

Como a matriz de rigidez de correção de cargas é somada a de rigidez linear e não linear, onde já se introduz para estes casos um valor para a rigidez, mantem-se para \tilde{K}^{NC} os valores originais.

A rigidez é introduzida porém, somente na rigidez linear, com valor correspondente ao elemento da diagonal equivalente a rotação θ_{zi} do nó planar em questão. O valor desta rigidez, pode ser unitário no caso do nó planar ou independente do nó ser ou não planar, introduzir coeficientes de rigidez dados pela relação abaixo, onde o equilíbrio em coordenadas locais não é perturbado, isto é:

$$\begin{bmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \\ M_{zk} \end{bmatrix} = \alpha Et A \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{zk} \end{bmatrix} \quad \text{II.92}$$

Sendo $\alpha > 0$, um valor a arbitrar.

EIXOS LOCAIS E GLOBAIS - TRANSFORMAÇÕES

Sendo a matriz de rigidez \tilde{K}^{NC} , calculada em eixos locais (x, y, z) pode-se obter a matriz \tilde{K}^{NC} referida a eixos (X, Y, Z) que podem ser os mesmos para todos os elementos estruturais, sendo neste caso o sistema global, no qual faz-se o assembler dos elementos conforme ZIENKIEWICZ (1971).

Os deslocamentos do nó i no sistema local \tilde{d}_i^{F+M} relacionam-se com os globais \bar{d}_i^{F+M} através da expressão:

$$\bar{d}_i^{F+M} = L_{\tilde{}} \tilde{d}_i^{F+M} \quad \text{II.93}$$

as forças nodais

$$\bar{F}_i^{F+M} = L_{\tilde{}}^T F_{\tilde{}}^{F+M} \quad \text{II.94}$$

e as coordenadas locais x_i do ponto i , sendo a origem dos eixos locais o nó 1, Figura II.1 e II.3, e não coincidente com a origem dos eixos globais \bar{x} , sendo $\bar{x}^T = [x, y, z]$

$$\bar{x}_i = \bar{x}_1 + L_{\tilde{}} x_i \quad \text{II.95}$$

ou também

$$\bar{x}_i = L_{\tilde{}}^T (\bar{x}_i - \bar{x}_1) \quad \text{II.96}$$

sendo também de interesse para a fase não linear, para correções da matriz de rigidez, a expressão que nos dá as novas coordenadas ${}^t\bar{x}_i$ após ocorrido um deslocamento u_i no ponto i com coordenadas no estado inicial, ${}^0\bar{x}_i$, sendo u_i medido com relação ao sistema inicial.

$${}^t\bar{x}_i = u_i + {}^0\bar{x}_i \quad \text{II.97}$$

Nas expressões anteriores, a matriz $L_{\tilde{}}$ é dada por:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\lambda} & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{II.98}$$

sendo $\underset{\sim}{\lambda}$ a matriz dos cossenos diretores dos ângulos formados, entre os dois sistemas de referência local e global, ou seja

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{xX} & \lambda_{yX} & \lambda_{zX} \\ \lambda_{xY} & \lambda_{yY} & \lambda_{zY} \\ \lambda_{xZ} & \lambda_{yZ} & \lambda_{zZ} \end{bmatrix} \quad \text{II.99}$$

Na matriz acima λ_{xX} por exemplo é o cosseno dos ângulos formados pelos eixos Ox e OX e assim sucessivamente.

Para todos os deslocamentos e forças nodais, pode-se escrever:

$$\bar{\underset{\sim}{d}}_N = \underset{\sim}{T}_K \underset{\sim}{d}_N \quad \text{II.100}$$

$$\bar{\underset{\sim}{F}}_N = \underset{\sim}{T}_K \underset{\sim}{F}_N \quad \text{II.101}$$

sendo $\underset{\sim}{T}_K$ a matriz de rotação (ortogonal) dada por:

$$\underset{\sim}{T}_K = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\sim}{L} \end{bmatrix} \quad \text{II.102}$$

através de transformações ortogonais obtém-se a matriz de

rigidez de correção de carga referida aos eixos globais através da expressão:

$$\bar{K}_{\sim}^{NC} = T_{\sim K} K_{\sim}^{NC} T_{\sim K}^T \quad \text{II.103}$$

Para obtenção da matriz λ_{\sim} , considere o elemento da Figura II.7 abaixo:

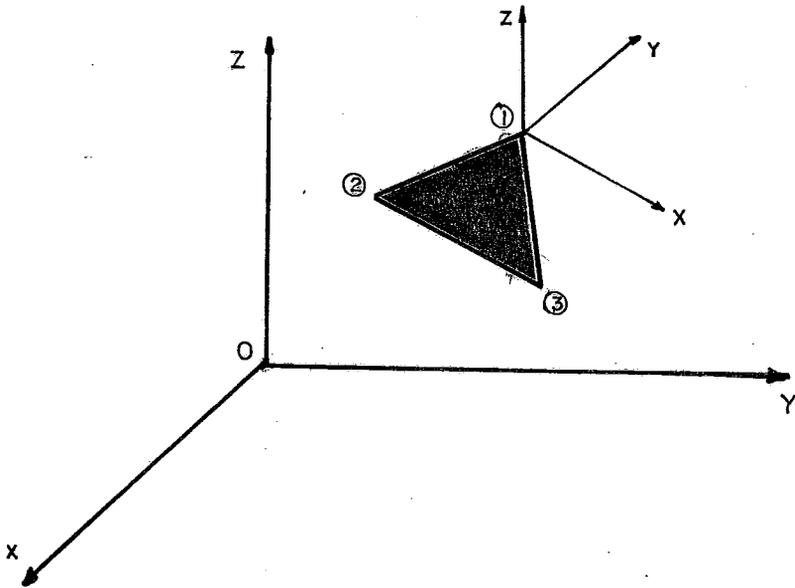


Figura II.7

No sistema local x, y, z , o eixo x é paralelo ao lado 2-3 e o eixo z perpendicular ao plano do elemento. Obtém-se os cossenos diretores dos eixos $x, \lambda_{xX}, \lambda_{xY}, \lambda_{xZ}$ através das expressões;

$$\tilde{\lambda}_x = \begin{bmatrix} \lambda_{xX} \\ \lambda_{xY} \\ \lambda_{xZ} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_{23}} \begin{bmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ Z_{32} \end{bmatrix} \quad \text{II.104}$$

onde l_{23} é o comprimento do lado 2-3 dado por:

$$l_{23} = \sqrt{X_{32}^2 + Y_{32}^2 + Z_{32}^2} \quad \text{II.105}$$

sendo

$$X_{32} = X_3 - X_2$$

$$Y_{32} = Y_3 - Y_2 \quad \text{II.106}$$

$$Z_{32} = Z_3 - Z_2$$

Como O_z é perpendicular ao plano do elemento

$$\tilde{\lambda}_z = \begin{bmatrix} \lambda_{zX} \\ \lambda_{zY} \\ \lambda_{zZ} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \tilde{\lambda}_x \wedge \tilde{V}_{12} \quad \text{II.107}$$

Sendo

$$\tilde{V}_{12} = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ Y_1 - Y_2 \\ Z_1 - Z_2 \end{bmatrix} \quad \text{II.108}$$

resulta

$$\lambda_{\sim z} = \begin{bmatrix} \lambda_{zX} \\ \lambda_{zY} \\ \lambda_{zZ} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} Y_{32}Z_{12} - Z_{32}Y_{12} \\ Y_{32}X_{12} - X_{32}Z_{12} \\ X_{32}Y_{12} - Y_{32}X_{12} \end{bmatrix} \quad \text{II.109}$$

e finalmente

$$\lambda_{\sim y} = \begin{bmatrix} \lambda_{yX} \\ \lambda_{yY} \\ \lambda_{yZ} \end{bmatrix} = \lambda_{\sim z} \wedge \lambda_{\sim x} = \frac{1}{l_{23}} \begin{bmatrix} \lambda_{zY}Z_{32} - \lambda_{zZ}Y_{32} \\ \lambda_{zZ}X_{32} - \lambda_{zX}Z_{32} \\ \lambda_{zX}Y_{32} - \lambda_{zY}X_{32} \end{bmatrix} \quad \text{II.110}$$

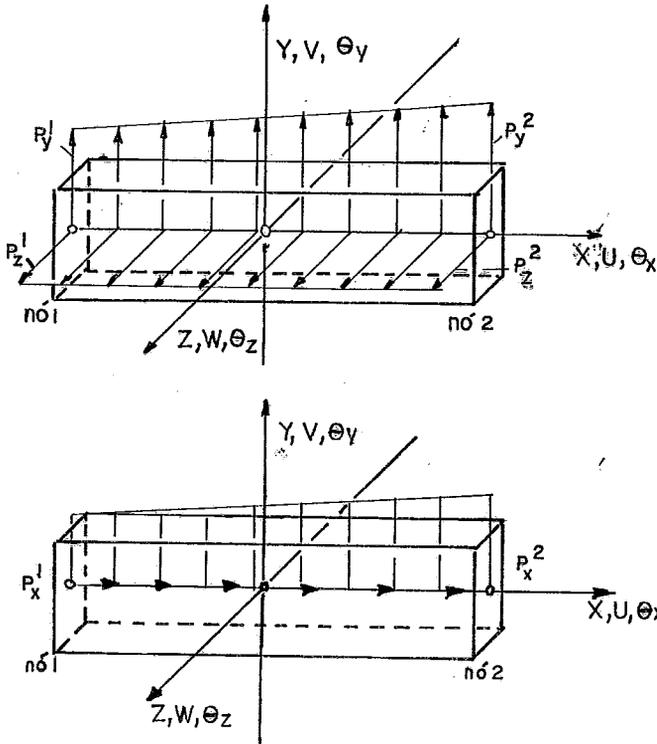
sendo a área A em coordenadas globais.

$$2A = \sqrt{(Y_{32}Z_{12} - Z_{32}Y_{12})^2 + (Z_{32}X_{12} - X_{32}Z_{12})^2 + (X_{32}Y_{12} - Y_{32}X_{12})^2}$$

II.111

II.4.2) MATRIZ DE CORREÇÃO DE CARGA PARA O ELEMENTO DE PÓRTICO

A matriz para o elemento de pórtico, para cargas distribuídas variáveis nos planos xz e xy e tangencial ao longo do eixo x, foi obtida por ARGYRIS E SIMEONIDIS (1981), através de uma formulação natural. Para adaptar a matriz para o triedro direto conforme indicado na figura II.8, aplica-se uma rotação definida pela matriz \tilde{R} abaixo:



$$P_{xm} = (P_x^2 + P_x^1)/2$$

$$P_{ym} = (P_y^2 + P_y^1)/2$$

$$P_{zm} = (P_z^2 + P_z^1)/2$$

$$P_{xd} = P_x^2 - P_x^1$$

$$P_{yd} = P_y^2 - P_y^1$$

$$P_{zd} = P_z^2 - P_z^1$$

Figura II.8

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{R}0 & & & \\ & \tilde{R}0 & & \\ & & \tilde{R}0 & \\ & & & \tilde{R}0 \end{bmatrix}$$

II.112

sendo

$$\tilde{R}0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

II.113

Troca-se também, o vetor de cargas de p_z para p_y e p_y para

($-P_z$), obtendo em coordenadas naturais de acordo com a figura II.8 a matriz

$$K_{\tilde{N}}^{NC} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{II.114}$$

onde

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & l_{pzm} & -l_{pym} \\ 0 & 0 & 0 & -l_{pzm} & 0 & l_{pxm} \\ 0 & 0 & 0 & l_{pym} & -l_{pxm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-l_{pyd}^2}{12} & \frac{l_{pxd}^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-l_{pzd}^2}{12} & 0 & \frac{l_{pxd}^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_{pzd}}{12} & \frac{l_{pyd}}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-l_{pxd}}{12} & \frac{-l_{pzd}}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-l_{pxd}}{12} & 0 & \frac{l_{pyd}}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_{pxd}^2}{60} & \frac{l_{pxm}^2}{12} & 0 & \frac{-l_{pym}^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-l_{pxm}^2}{12} & \frac{-l_{pzm}^2}{12} & \frac{-l_{pxd}^2}{60} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{lpzd}{12} & \frac{-lpyd}{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-l^2_{pyd}}{120} & \frac{-l^2_{pxd}}{120} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l^2_{pym}}{12} & \frac{-l^2_{pxm}}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-l^2_{pzm}}{12} & 0 & \frac{-l^2_{pxm}}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-l^2_{pzd}}{120} & 0 & \frac{l^2_{pxd}}{120} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{lpzd}{60} & \frac{lpzm}{12} & \frac{lpym}{12} & 0 & \frac{lpyd}{60} \\ 0 & \frac{-l^2_{pxd}}{1680} & \frac{-l^2_{pxm}}{120} & 0 & \frac{l^2_{pym}}{120} & 0 \\ 0 & \frac{l^2_{pxm}}{120} & \frac{-l^2_{pxd}}{240} & 0 & \frac{l^2_{pyd}}{240} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-l^2_{pxd}}{240} & \frac{-l^2_{pzd}}{240} & \frac{l^2_{pxm}}{120} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-l^2_{pxm}}{120} & \frac{-l^2_{pzm}}{120} & \frac{-l^2_{pxd}}{1680} \end{bmatrix}$$

A matriz de correção de cargas em coordenadas cartesianas, é obtida através de

$$\tilde{K}^{NC} = \tilde{A}_N^T \tilde{K}_N^{NC} \tilde{A}_N$$

II.115

onde \tilde{A}_N é a matriz que transforma os deslocamentos nodais

referidos a um sistema de coordenadas cartesianas em deslocamentos generalizados contendo os movimento de corpo rígido e determinados modos naturais de deformação. A matriz \tilde{A}_N com relação ao triedro direto é dada por

$$\tilde{A}_N = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/l & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/l & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/l & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2/l & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

II.116

A matriz de rigidez de correção de carga em eixos globais é obtida através da expressão

$$\tilde{K}_g^{NC} = \tilde{R}_0^T \tilde{R}_T^T \tilde{K}^{NC} \tilde{R}_T \tilde{R}_0 \quad \text{II.117}$$

onde a matriz \tilde{R}_0 é a que transforma o sistema de referência global para o local fixo, sendo a mesma obtida em GERE e WEAVER (1970). A matriz \tilde{R}_T é por sua vez a que transforma o sistema de referência local fixo para um sistema de referência local que acompanha o elemento em sua posição deformada denominado sistema de referência local móvel. A determinação da posição do sistema de referência móvel é feita através de ângulos de EULER, e apresentada de uma forma bastante explícita no trabalho de BENJAMIN (1982). Ressalta-se apenas que na determinação de seno de α e

cosseno de β , (equações (4.51a) e (4.51b) da referência anterior), quando os giros do sistema de referência medidos pelos ângulos α ou β forem maiores que noventa graus as expressões de seno de α e cosseno de β devem ser negativas, permanecendo positivos as expressões de cosseno de α e seno de β .

II.5) CARREGAMENTO CONCENTRADO NÃO CONSERVATIVO CIRCULATÓRIO

As cargas não conservativas, seja para o elemento de pórtico ou triangular, são consideradas inicialmente em eixos locais. Na figura II.9 indica-se a orientação dos eixos com relação a incidência dos nós.

Para uma determinada carga concentrada aplicada por exemplo no nó K, são obviamente idênticas as matrizes de correção de carga, se a mesma estiver aplicada no nó K do esquema A, B, C ou D. Para o elemento triangular, inclui-se também carga no nó L, sendo a formulação a mesma.

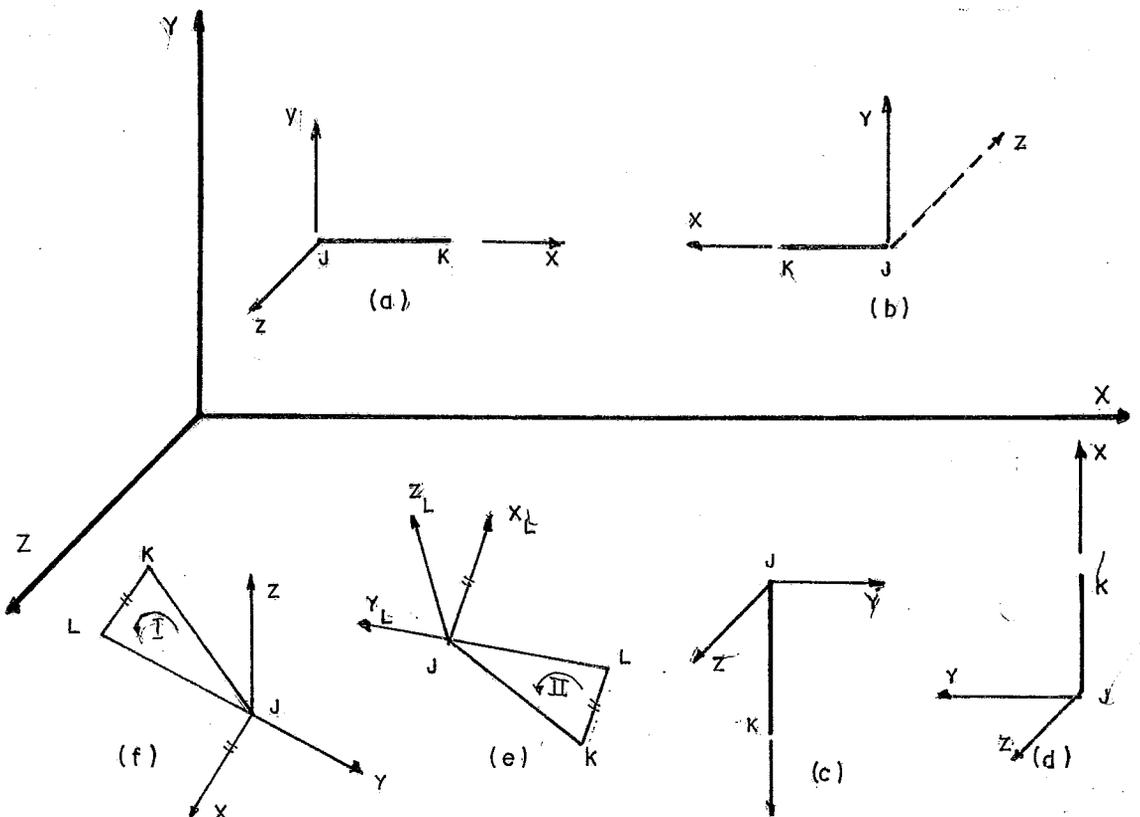


Figura II.9

A matriz de correção de carga, para cada elemento, é calculada observando a incidência dos nós, a direção e sentido do carregamento, a orientação dos elementos bem como os valores dos deslocamentos. Obviamente como as cargas são aplicadas aos nós, assim participam como cargas nodais na montagem do sistema de equações. Para o cálculo da matriz de rigidez de correção de cargas como a matriz de rigidez global da estrutura é montada a partir das matrizes de rigidez dos elementos que compõem a malha, considerar-se-á para esta finalidade, a carga não como nodal, mas sim repartida em n parcelas, sendo n o número de elementos que concorrem no ponto de aplicação da carga e cada parcela como atuante na extremidade de um só elemento. Na figura II.10 exemplifica-se para o caso de três elementos de barra.

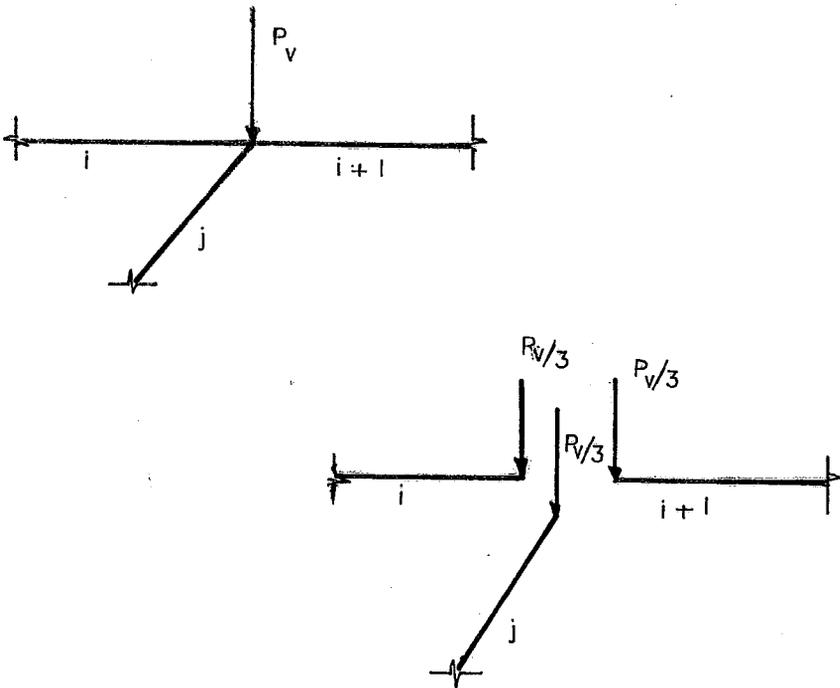


Figura II.10

Para cargas concentradas nas extremidades de um elemento, a equação II.2 para a carga circulatória concentrada, pode ser escrita de forma mais simples, em

função dos deslocamentos dos nós.

$$\tilde{P}^{NC} = \tilde{\lambda} \tilde{P}^{NC}(d_{\tilde{N}}) \quad \text{II.118}$$

onde $\tilde{\lambda}$ é a matriz diagonal dos fatores da carga.

O incremento do vetor da força circulatória entre duas configurações incrementais da estrutura é:

$$d\tilde{P}^{NC} = d\tilde{\lambda} \tilde{P}^{NC}(d_{\tilde{N}}) + \tilde{\lambda} \frac{\partial [\tilde{P}_i(d_{\tilde{N}})]}{\partial d_{\tilde{N}}} dd_{\tilde{N}} \quad \text{II.119}$$

ou em termos incrementais

$$\Delta \tilde{P}^{NC} = \Delta \tilde{\lambda} \tilde{P}^{NC} + \tilde{\lambda} \tilde{K}^{NC} \Delta d_{\tilde{N}} \quad \text{II.120}$$

Antes de se obter a expressão geral da matriz de correção para uma barra deformada, apresenta-se a matriz para uma barra em balanço discretizada por um único elemento conforme a figura II.11.

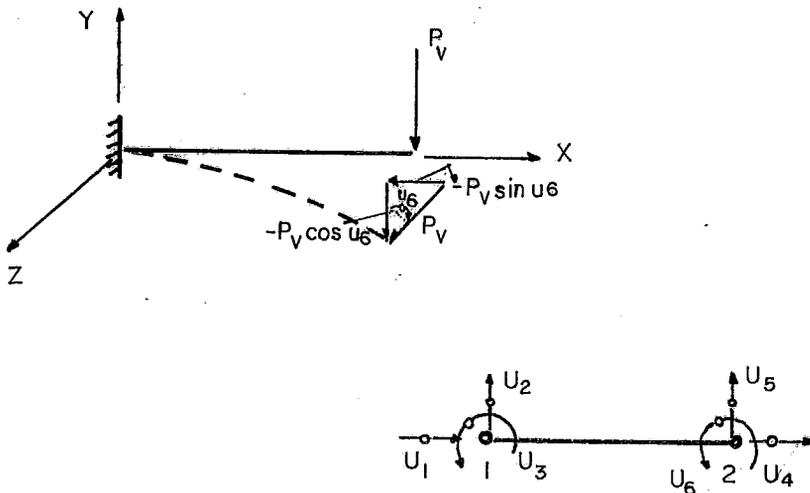


Figura II.11

O vetor de cargas, equação II.118 será:

$$\underset{\sim}{P}_i^{NC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -P_V & -P_V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \text{sen } U_6 \\ \text{cos } U_6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{II.121}$$

A matriz de correção $\underset{\sim}{K}^{NC}$

$$\underset{\sim}{K}^{NC} = \frac{\partial \underset{\sim}{P}_i^{NC}}{\partial \underset{\sim}{d}_N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_V \text{cos} U_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_V \text{sen} U_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{II.122}$$

CARGA VERTICAL - EXPRESSÕES DA RIGIDEZ

Considera-se um nó intermediário, que inclui o caso do nó extremo, caso de carga aplicada na ponta de um balanço, figura II.12. Supondo que as rotações possam ocorrer no sentido horário e anti-horário e lembrando que o trabalho realizado pelas cargas não conservativas depende da trajetória percorrida entre a posição inicial e final, torna-se difícil generalizar as expressões da rigidez. Supõe-se a princípio para os elementos de pórtico que as cargas acompanham totalmente as rotações U_6 ou U_{12} dos nós. A incidência dos nós é sempre JK. Para obter expressões iguais para casos análogos, porém com inversão de sentido da força, trabalha-se com valor algébrico da força e módulo

da rotação.

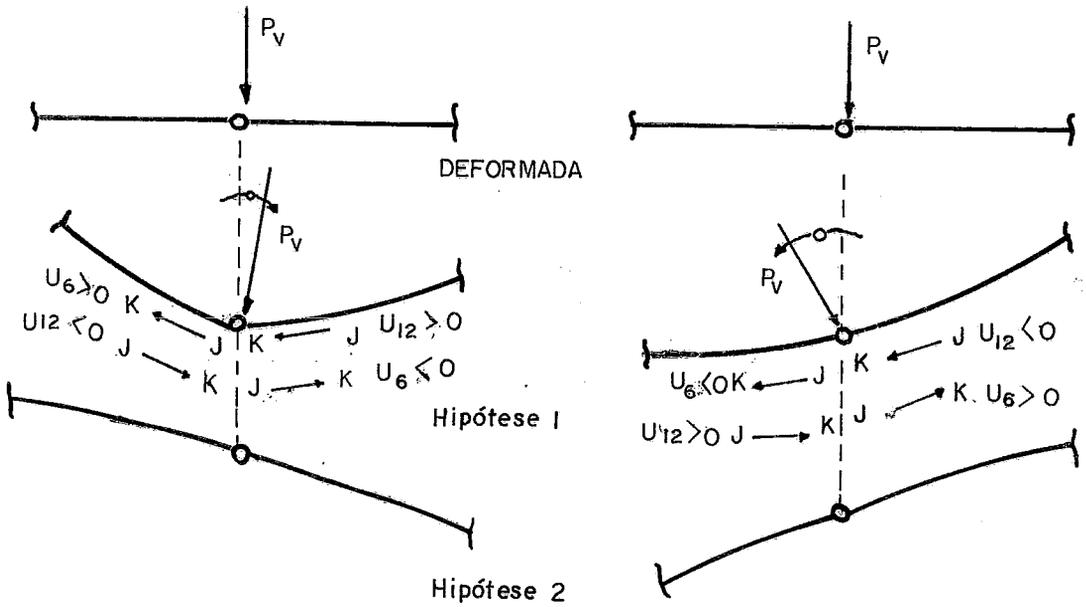


Figura II.12

Observando a orientação dos eixos, figura II.9, tem-se as componentes do vetor de cargas indicados na figura II.13.

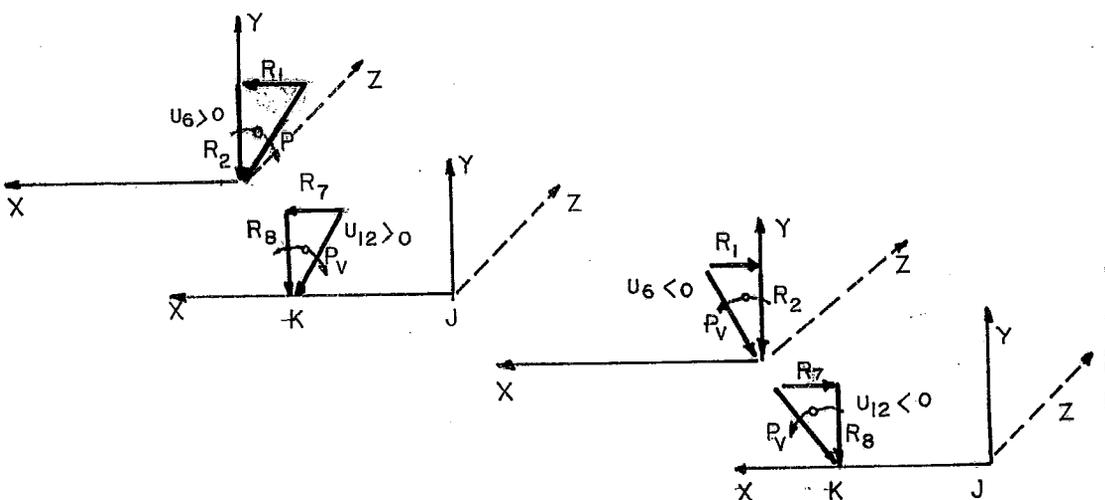


figura II.13

Resultando para os coeficientes não nulos da matriz de rigidez de correção de carga.

Rotação $U_6 > 0$

Rotação $U_6 < 0$

$$R_1 = -P_v \text{sen } |U_6| \quad \text{II.123a}$$

$$R_1 = P_v \text{sen } |U_6| \quad \text{II.124a}$$

$$R_2 = P_v \text{cos } |U_6|$$

$$R_2 = P_v \text{cos } |U_6| \quad \text{II.124a}$$

$$K_{1,6}^{NC} = -P_v \text{cos } |U_6| \quad \text{II.125a}$$

$$K_{1,6}^{NC} = P_v \text{cos } |U_6| \quad \text{II.126a}$$

$$K_{2,6}^{NC} = -P_v \text{sen } |U_6|$$

$$K_{2,6}^{NC} = -P_v \text{sen } |U_6| \quad \text{II.126a}$$

Para a rotação U_{12} , expressões análogas as anteriores

Rotação $U_{12} > 0$

Rotação $U_{12} < 0$

$$R_7 = -P_v \text{sen } |U_{12}| \quad \text{II.123b}$$

$$R_7 = P_v \text{sen } |U_{12}| \quad \text{II.124b}$$

$$R_8 = P_v \text{cos } |U_{12}|$$

$$R_8 = P_v \text{cos } |U_{12}| \quad \text{II.124b}$$

$$K_{7,12}^{NC} = -P_v \text{cos } |U_{12}| \quad \text{II.125b}$$

$$K_{7,12}^{NC} = P_v \text{cos } |U_{12}| \quad \text{II.126b}$$

$$K_{8,12}^{NC} = -P_v \text{sen } |U_{12}|$$

$$K_{8,12}^{NC} = -P_v \text{sen } |U_{12}| \quad \text{II.126b}$$

No caso de rotações cujos ângulos sejam maiores que noventa graus, conforme indicado na figura II.14, resulta para as componentes do vetor de carga supondo $90^\circ < U_{12} < 180^\circ$.

$$R_7 = P_v \text{cos } (|U_{12}| - 90^\circ) = P_v \text{sen } |U_{12}| \quad \text{II.127}$$

$$R_8 = P_v \text{sen } (|U_{12}| - 90^\circ) = P_v \text{cos } |U_{12}| \quad \text{II.128}$$

e se $|U_{12}| > 180^\circ$

$$R_7 = -P_v \operatorname{sen} (|U_{12}| - 180^\circ) = P_v \operatorname{sen} |U_{12}|$$

$$R_8 = -P_v \operatorname{cos} (|U_{12}| - 180^\circ) = P_v \operatorname{cos} |U_{12}|$$

II.129

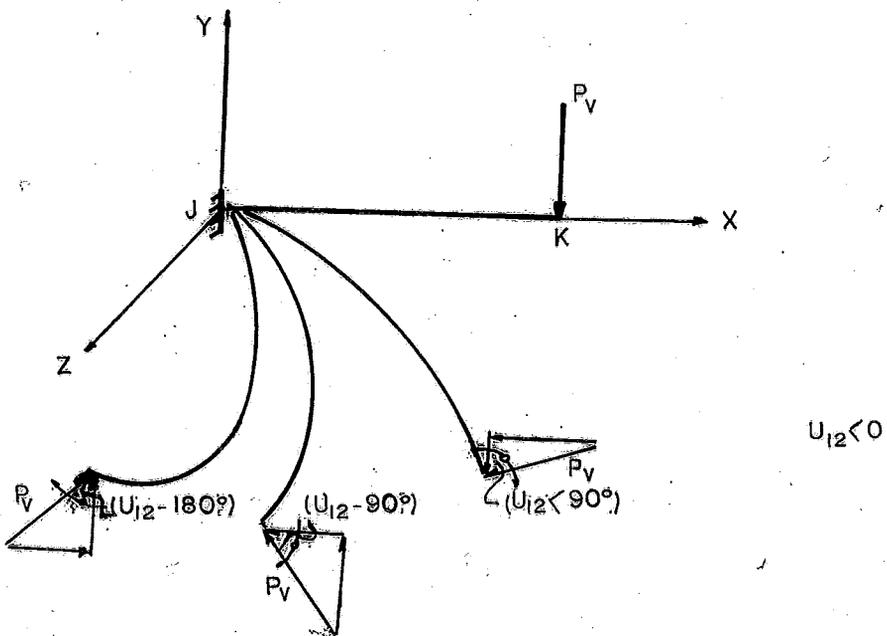


Figura II.14

As expressões (II.127), (II.128) e (II.129) são análogas as (II.124) o que dá coeficientes de rigidez iguais aos das equações (II.126).

Como no caso acima, também não se alteram as expressões se a superfície superior da deformada for convexa, com a carga atuando para cima conforme a figura II.15.

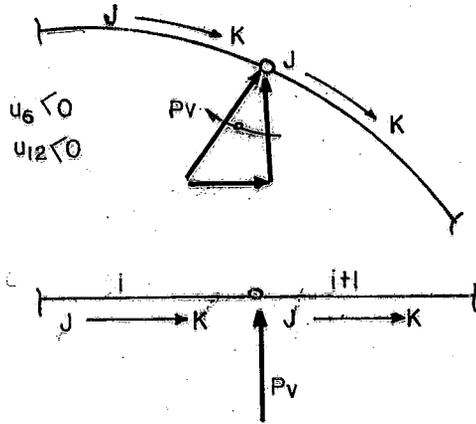


figura II.15

Considerando a carga aplicada ao nó J

$$R_1 = P_v \operatorname{sen} |U_6| \quad \text{II.130a}$$

$$R_2 = P_v \operatorname{cos} |U_6|$$

$$K_{1,6}^{NC} = P_v \operatorname{cos} |U_6| \quad \text{II.131a}$$

$$K_{2,6}^{NC} = -P_v \operatorname{sen} |U_6|$$

Se a carga estiver aplicada no nó K resultam expressões idênticas as anteriores:

$$R_7 = P_v \operatorname{sen} |U_{12}| \quad \text{II.130b}$$

$$R_8 = P_v \operatorname{cos} |U_{12}|$$

$$K_{7,12}^{NC} = P_v \cos |U_{12}|$$

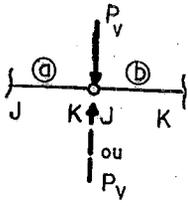
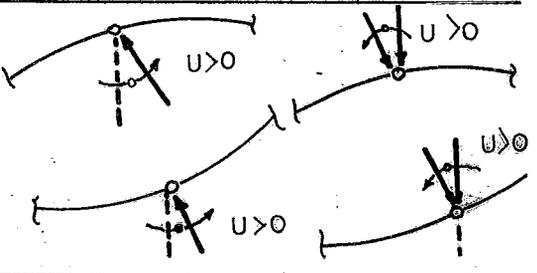
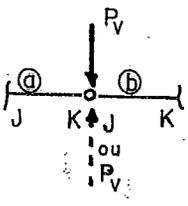
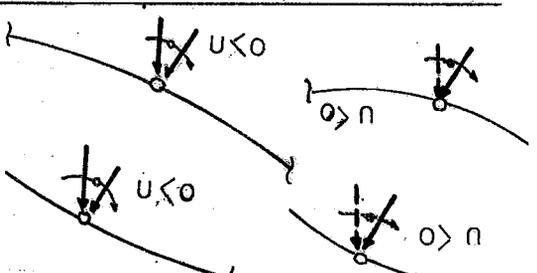
$$K_{8,12}^{NC} = -P_v \operatorname{sen} |U_{12}|$$

II.131b

Todos os coeficientes da matriz de rigidez calculados anteriormente, são em relação aos eixos fixos locais.

Em resumo o que interessa é o sentido das rotações. Em função destas, surgem as matrizes de rigidez que se diferenciam apenas se a rotação é positiva ou negativa. No quadro II.1, alguns casos para rotações positivas e negativas.

QUADRO II.1

ROTAÇÃO	CONFIGURAÇÃO INICIAL	DEFORMADAS E CARREGAMENTOS
> 0 Rigidez tipo 1		
< 0 Rigidez tipo 2		

Sendo P_v a carga vertical e U_{12} e U_6 as rotações dos nós K e J tem-se para os coeficientes de rigidez para os elementos a e b os valores apresentados no quadro II.2.

QUADRO II.2

TIPO 1 $U > 0$		TIPO 2 $U < 0$	
a)	$K^{NC}(7,12) = - P_V \cos U_{12} $		$K^{NC}(7,12) = - P_V \cos U_{12} $
	$K^{NC}(8,12) = - P_V \sen U_{12} $		$K^{NC}(8,12) = - P_V \sen U_{12} $
b)	$K^{NC}(1,6) = - P_V \cos U_6 $		$K^{NC}(1,6) = - P_V \cos U_6 $
	$K^{NC}(2,6) = - P_V \sen U_6 $		$K^{NC}(2,6) = - P_V \sen U_6 $

No caso da carga acompanhar as rotações U_4 e U_{10} em torno do eixo x, obtem-se os valores apresentados no quadro II.3.

QUADRO II.3

TIPO 1 $U > 0$		TIPO 2 $U < 0$	
a)	$K^{NC}(8,10) = - P_V \sen U_{10} $		$K^{NC}(8,10) = - P_V \sen U_{10} $
	$K^{NC}(9,10) = P_V \cos U_{10} $		$K^{NC}(9,10) = - P_V \cos U_{10} $
b)	$K^{NC}(2,4) = - P_V \sen U_4 $		$K^{NC}(2,4) = - P_V \sen U_4 $
	$K^{NC}(3,4) = P_V \cos U_4 $		$K^{NC}(3,4) = - P_V \cos U_4 $

CARGA HORIZONTAL - EXPRESSÕES DA RIGIDEZ

Consideram-se as mesmas deformadas do quadro

II.1, porém atuando no nó carga concentrada P_H , contida no eixo x local inicial. Supõe-se que a carga acompanhe totalmente a rotação U_6 ou U_{12} do nó J ou nó K respectivamente, conforme a figura II.16.

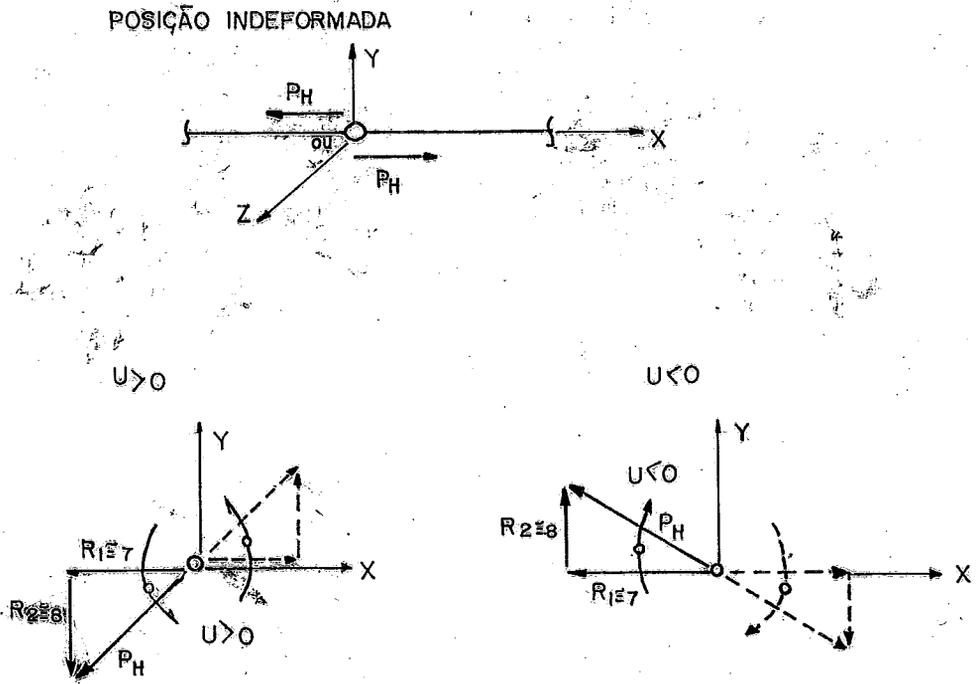


Figura II.16

Obtendo-se para os coeficientes de rigidez não nulos os valores.

$$U > 0$$

$$R_1 = R_7 = P_H \cos |U| \quad \text{II.132a}$$

$$R_2 = R_8 = P_H \text{sen} |U|$$

$$K^{NC}(1,6) = (7,12) = P_H \text{sen} (|U_6| \text{ ou } |U_{12}|)$$

$$K^{NC}(2,6) = (8,12) = P_H \cos (|U_6| \text{ ou } |U_{12}|)$$

$$K^{NC}(1,6) = (7,12) = -P_H \text{sen} (|U_6| \text{ ou } |U_{12}|)$$

$$K^{NC}(2,6) = (8,12) = -P_H \cos (|U_6| \text{ ou } |U_{12}|)$$

$$U < 0$$

$$R_1 = R_7 = P_H \cos |U| \quad \text{II.132b}$$

$$R_2 = R_8 = -P_H \text{sen} |U|$$

II.133a

II.133b

Considerando a deformada no plano xz , ou seja, acompanhando a carga a rotação U_5 ou U_{11} totalmente, basta nas expressões anteriores permutar $2 \rightarrow 3$, $8 \rightarrow 9$, $6 \rightarrow 5$, $12 \rightarrow 11$ e o sinal de $y \rightarrow -z$, obtendo-se os coeficientes.

$$U > 0 \quad \begin{aligned} K^{NC}(1,5) &= (7,11) = -P_H \text{sen}(|U_5| \text{ ou } |U_{11}|) \\ K^{NC}(3,5) &= (9,11) = -P_H \text{cos}(|U_5| \text{ ou } |U_{11}|) \end{aligned} \quad \text{II.134a}$$

$$U < 0 \quad \begin{aligned} K^{NC}(1,5) &= (7,11) = -P_H \text{sen}(|U_5| \text{ ou } |U_{11}|) \\ K^{NC}(3,5) &= (9,11) = P_H \text{cos}(|U_5| \text{ ou } |U_{11}|) \end{aligned} \quad \text{II.134b}$$

CARGA NA DIREÇÃO Z

Na figura II.17, apresenta-se a posição indeformada no plano xz e yz .

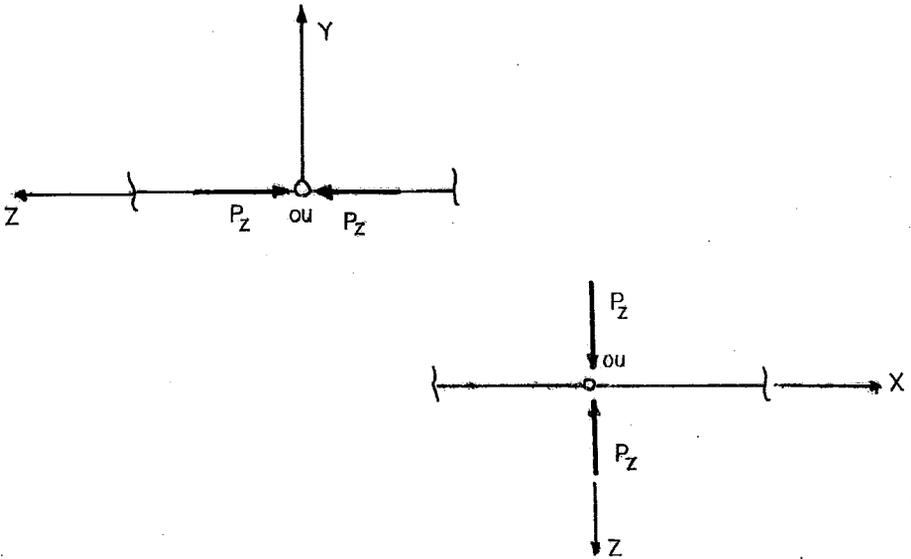


Figura II.17

Obtém-se para os coeficientes de rigidez não nulos:

$$K^{NC}(1,5) = (7,11) = P_z \cos(|U_5| \text{ ou } |U_{11}|) \quad \text{II.135a}$$

$$K^{NC}(3,5) = (9,11) = -P_z \text{sen}(|U_5| \text{ ou } |U_{11}|)$$

$U > 0$

$$K^{NC}(2,4) = (8,10) = -P_z \cos(|U_4| \text{ ou } |U_{10}|) \quad \text{II.136a}$$

$$K^{NC}(3,4) = (9,10) = -P_z \text{sen}(|U_4| \text{ ou } |U_{10}|)$$

$$K^{NC}(1,5) = (7,11) = -P_z \cos(|U_5| \text{ ou } |U_{11}|) \quad \text{II.135b}$$

$$K^{NC}(3,5) = (9,11) = -P_z \text{sen}(|U_5| \text{ ou } |U_{11}|)$$

$U < 0$

$$K^{NC}(2,4) = (8,10) = P_z \cos(|U_4| \text{ ou } |U_{10}|) \quad \text{II.136b}$$

$$K^{NC}(3,4) = (9,10) = -P_z \text{sen}(|U_4| \text{ ou } |U_{10}|)$$

Sendo as equações II.135 quando a rotação é em torno do eixo y e as equações II.136 em torno de x .

RIGIDEZ DE CORREÇÃO DE CARGA - ELEMENTO TRIANGULAR

Consideram-se a princípio dois tipos de elementos triangulares, quanto a geometria e incidência dos nós, tendo-se em conta que os eixos locais são determinados em função da numeração e geometria do elemento.

Na região onde ocorrem cargas, os elementos que possuem este nó em comum, devem ser triângulos retângulos, ou seja, malha ortogonal nesta região. Na figura II.18, indicam-se como devem ser numerados os nós, para os elementos tipo I e II.

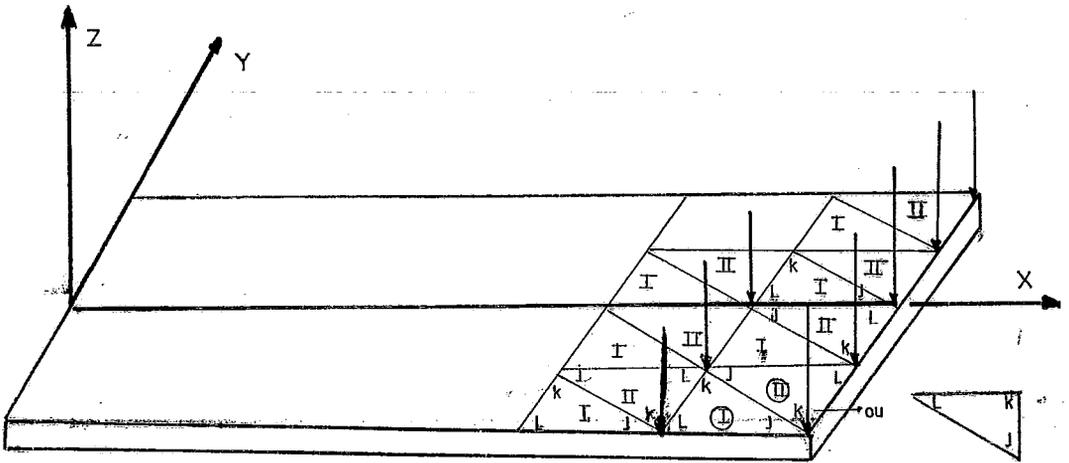


Figura II.18

A matriz de rigidez é calculada com relação ao primeiro eixo local, em qualquer posição deformada. Neste caso, supõe-se que a carga acompanhe apenas uma das rotações em torno dos eixos x ou y locais fixos.

ELEMENTOS TIPO I

Indica-se na figura II.19 o elemento tipo I, com carga concentrada nos nós.

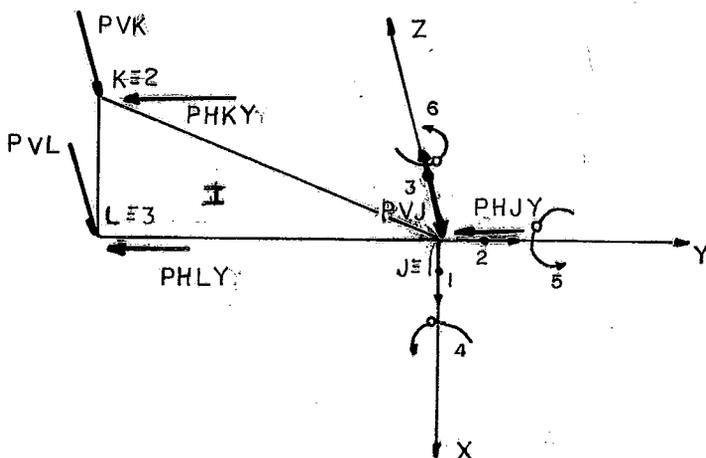


Figura II.19

CARGA ACOMPANHANDO A ROTAÇÃO EM TORNO DO EIXO X

Supondo a carga acompanhando a rotação conforme a figura II.20.

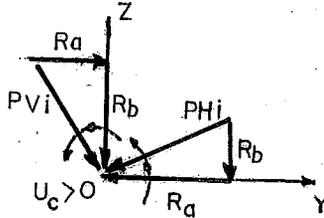


Figura II.20

Obtem-se para os coeficientes de rigidez P_v

$$U > 0$$

$$R_a = -PV_i \operatorname{sen} |U_c| \qquad R_a = PH_i \cos |U_c| \qquad \text{II.137a}$$

$$R_b = PV_i \cos |U_c| \qquad R_b = PH_i \operatorname{sen} |U_c|$$

$$K^{NC}(a, b) = -PV_i \cos |U_c| \qquad K^{NC}(a, c) = -PH_i \operatorname{sen} |U_c| \qquad \text{II.138a}$$

$$K^{NC}(b, c) = -PV_i \operatorname{sen} |U_c| \qquad K^{NC}(b, c) = PH_i \cos |U_c|$$

$$U < 0$$

$$R_a = PV_i \operatorname{sen} |U_c| \qquad R_a = PH_i \cos |U_c| \qquad \text{II.137b}$$

$$R_b = PV_i \cos |U_c| \qquad R_b = -PH_i \operatorname{sen} |U_c|$$

$$K^{NC}(a, c) = PV_i \cos |U_c| \qquad K^{NC}(a, c) = -PH_i \operatorname{sen} |U_c| \qquad \text{II.138b}$$

$$K^{NC}(b, c) = -PV_i \operatorname{sen} |U_c| \qquad K^{NC}(b, c) = -PH_i \cos |U_c|$$

sendo

Nó i	a	b	c
J	2	3	4
K	8	9	10
L	14	15	16

Como um outro exemplo apresenta-se o caso das cargas PV_i acompanhando a rotação em torno do eixo y e PH_i em torno de z conforme a figura II.21.

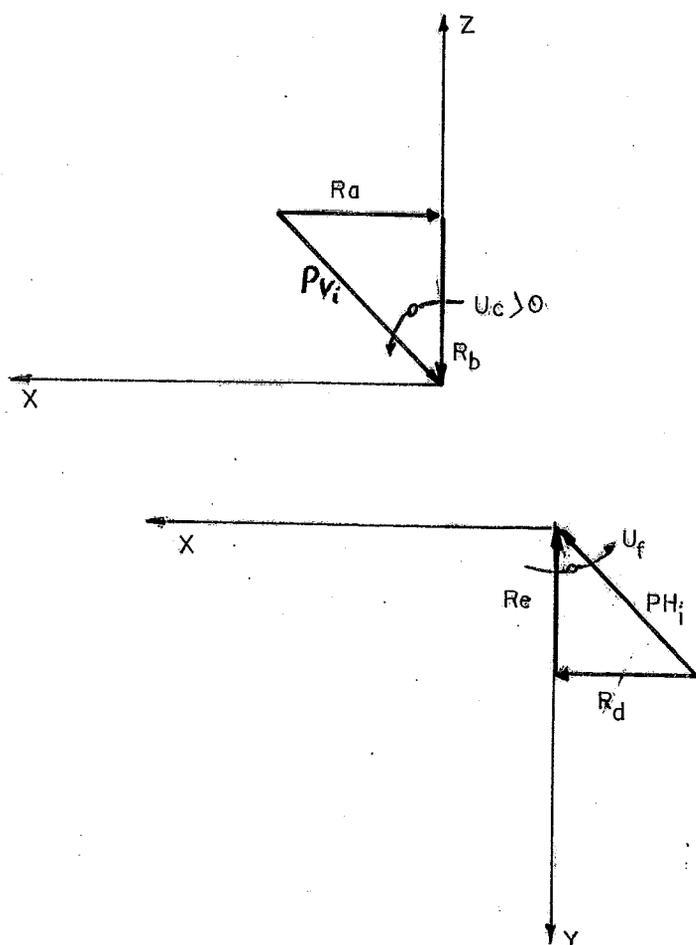


Figura II.21

$$U > 0$$

$$R_a = PV_i \operatorname{sen} |U_c| \quad \text{II.139a}$$

$$R_d = -PH_i \operatorname{sen} |U_f| \quad \text{II.140a}$$

$$R_b = PV_i \operatorname{cos} |U_c|$$

$$R_e = PH_i \operatorname{cos} |U_f|$$

$$K^{NC}(a, c) = PV_i \operatorname{cos} |U_c| \quad \text{II.141a}$$

$$K^{NC}(d, c) = -PH_i \operatorname{cos} |U_f| \quad \text{II.142a}$$

$$K^{NC}(b, c) = -PV_i \operatorname{sen} |U_c|$$

$$K^{NC}(e, f) = -PH_i \operatorname{sen} |U_f|$$

$$U < 0$$

$$R_a = -PV_i \operatorname{sen} |U_c| \quad \text{II.139b}$$

$$R_d = PH_i \operatorname{sen} |U_f| \quad \text{II.140b}$$

$$R_b = PV_i \operatorname{cos} |U_c|$$

$$R_e = PH_i \operatorname{cos} |U_f|$$

$$K^{NC}(a, c) = -PV_i \operatorname{cos} |U_c| \quad \text{II.141b}$$

$$K^{NC}(d, c) = PH_i \operatorname{cos} |U_f| \quad \text{II.142b}$$

$$K^{NC}(b, c) = -PV_i \operatorname{sen} |U_c|$$

$$K^{NC}(e, f) = -PH_i \operatorname{sen} |U_f|$$

sendo

Nó i	a	b	c
J	1	3	5
K	7	9	11
L	13	15	17

Nó i	d	e	f
J	1	2	6
K	7	8	12
L	13	14	18

ELEMENTO TIPO II

Na figura II.22, apresenta-se o elemento tipo II,

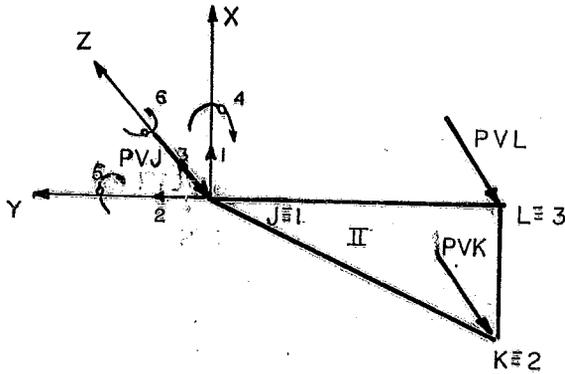


Figura II.22

sendo que com relação aos eixos locais, as expressões dos coeficientes de rigidez serão as mesmas que as do elemento tipo I.

GRANDES DESLOCAMENTOS E A CARGA CONCENTRADA NÃO CONSERVATIVA ACOMPANHANDO TOTALMENTE APENAS UMA DAS ROTAÇÕES DO NÓ EM QUE ESTÁ APLICADA

Para o elemento de pórtico, considerando os eixos globais, os locais fixos e os locais móveis, em uma posição deformada qualquer, a rigidez de correção de carga é calculada sempre com relação aos eixos locais fixos, sendo que obtida a rigidez não linear nos eixos móveis e que depois desta ser somada a linear e através da matriz de rotação transformada para os eixos locais fixos, é que se subtrai a rigidez de correção de carga. Obtém-se

posteriormente através da rotação fixo-global, aplicada sobre a rigidez resultante nos eixos fixos a rigidez efetiva do elemento, utilizada para montagem do sistema de equações, ou melhor, da matriz global.

Com relação ao elemento triangular a matriz de correção é calculada em qualquer posição deformada com relação ao primeiro eixo local, sendo através da rotação eixo local 1-global, transformada para os eixos globais, sendo então subtraída da rigidez linear mais a não linear em eixos globais.

Considerando portanto para o elemento de pórtico ou o triangular, sempre o cálculo da matriz de rigidez de correção de carga em relação aos eixos locais fixos (pórtico) ou locais iniciais (triangular), na ocorrência de grandes rotações, não seria válido superpor os coeficientes calculados anteriormente, caso a carga ou cargas acompanhem mais de uma rotação. Observar portanto nestes casos, as combinações de carregamentos a serem considerados conforme indicado em a, b ou c.

Considerar

- a) PV_i , PH_i ou PZ_i isoladamente, ou
- b) PV_i com PH_i e $PZ_i = 0$, ou
- c) PZ_i com PH_i e $PV_i = 0$

Sendo ainda que em:

- a) Se houver $PV_i \neq 0$, acompanha a rotação x ou z (Pórtico) ou y (Triang.).
 $PH_i \neq 0$, acompanha a rotação y ou z (Pórtico)
x ou z (Triângulo)
- b) Ambas acompanham a rotação z
- c) Ambas acompanham a rotação y

GRANDES DESLOCAMENTOS, CARGA CONCENTRADA NÃO CONSERVATIVA ACOMPANHANDO TODAS AS ROTAÇÕES DO NÓ EM QUE ESTÁ APLICADA

Para o caso da carga acompanhando todas as rotações do seu ponto de aplicação e sendo estas rotações

finitas e conseqüentemente deixando de serem grandezas vetoriais a posição final do vetor carga vai depender da ordem em que as rotações ocorrem e novas considerações tornam-se necessárias.

A rigidez de correção de carga é calculada em função da posição deformada, tornando-se necessário estabelecer relações entre a deformada inicial e a atual. Existem na literatura várias formas que expressam estas relações, porém com termos não lineares que relacionam os deslocamentos do ponto de aplicação da carga, tornando-se bastante complexo obter as componentes da carga em uma posição deformada qualquer para posterior obtenção da rigidez de correção de carga.

Conhecendo porém a matriz de rotação de uma posição deformada para uma fixa inicial, (os valores numéricos que permitem as transformações), pois se forem utilizadas as expressões analíticas surgem os mesmos problemas relacionados anteriormente para explicitar as componentes em função das grandes rotações, adota-se a solução incremental, consistente com a linearização adotada na análise conservativa.

Seja a figura II.23, onde considera-se uma carga vertical aplicada, no nó K de um elemento i , com valor inicial igual a ΔP .

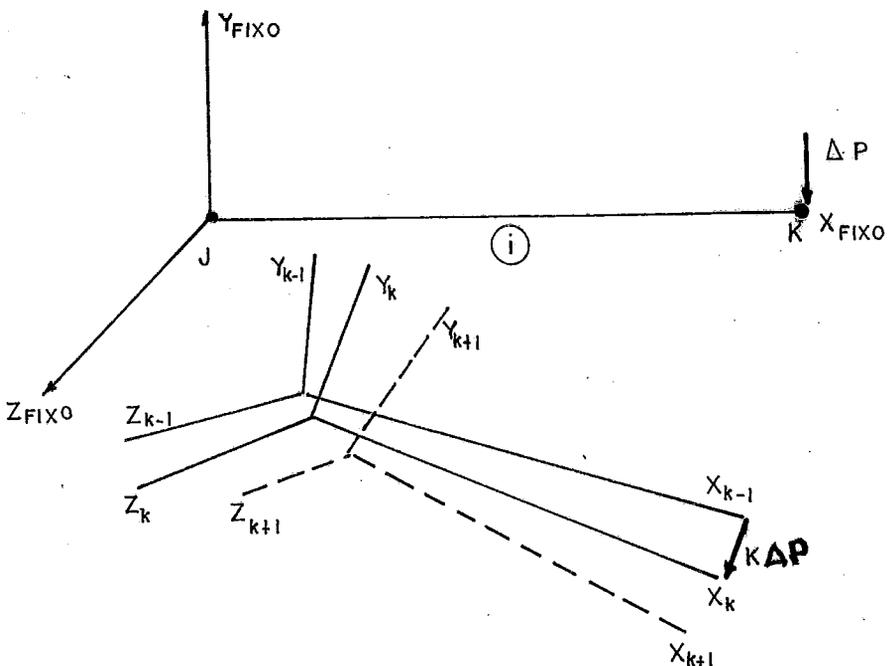


Figura II.23

Sendo conforme a figura II.23, x_k, y_k, z_k os eixos móveis atuais, conhecido o valor da carga e desejando-se obter $\tilde{\Delta U}^k$ que define a posição deformada $k + 1$, calcula-se:

a) No eixo móvel k a rigidez não linear mais a linear (constante). Transforma-se esta rigidez para o eixo fixo, através da matriz de rotação atual, do eixo k para o fixo.

b) Calcula-se a matriz de correção de carga, com relação a x_{k-1} , utilizando expressões em função dos deslocamentos incrementais $\tilde{\Delta U}^{k-1}$ conhecidos, sendo que neste incremento as expressões são praticamente independente da ordem em que ocorrem as rotações incrementais. Posteriormente transforma-se a matriz de rigidez para o eixo fixo, através da rotação anterior, eixo $k-1$ para o fixo.

Como exemplo, apresenta-se a matriz de rigidez de correção de carga para uma carga concentrada vertical que acompanha todas as rotações do seu ponto de aplicação. Para ficar consistente com a análise conservativa, supõe-se que as rotações ocorram dentro de um incremento conforme os ângulos de EULER, na ordem indicada na figura II.24, ou seja uma rotação em torno de y medida pelos valores incrementais ΔU_5 e ΔU_{11} , uma segunda rotação em torno do eixo z , medida por ΔU_6 ou ΔU_{12} e finalmente uma terceira em torno do eixo x , ΔU_4 ou ΔU_{10} , passando o sistema de x, y, z para para x'', y'', z'' .

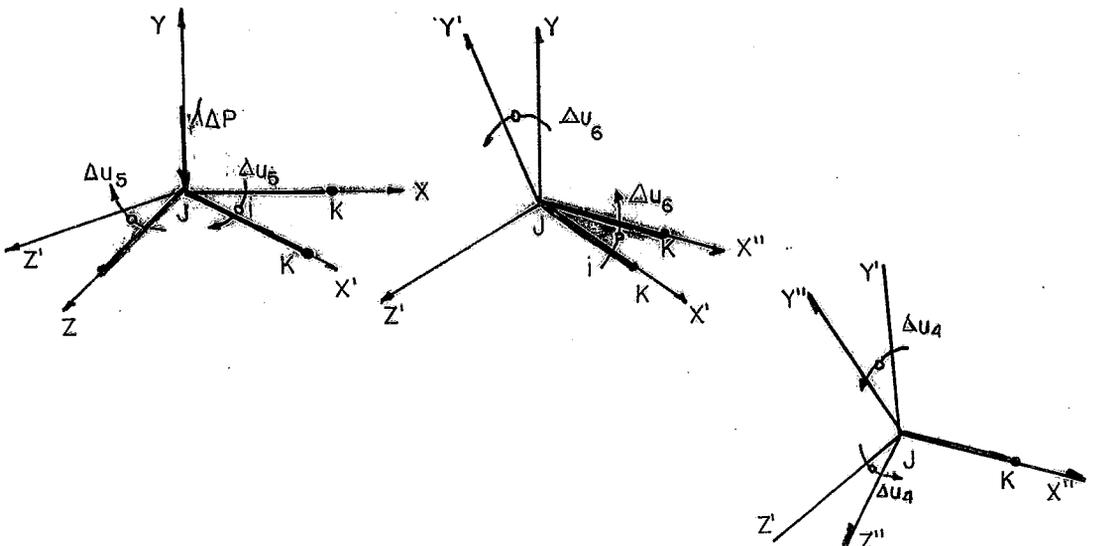


Figura II.24

A carga vertical $\lambda\Delta P$, acompanha todas as rotações, obtendo-se as seguintes componentes do vetor de carga com relação do sistema x, y, z sendo que a rotação ΔU_5 não influencia, conforme a figura II.25.

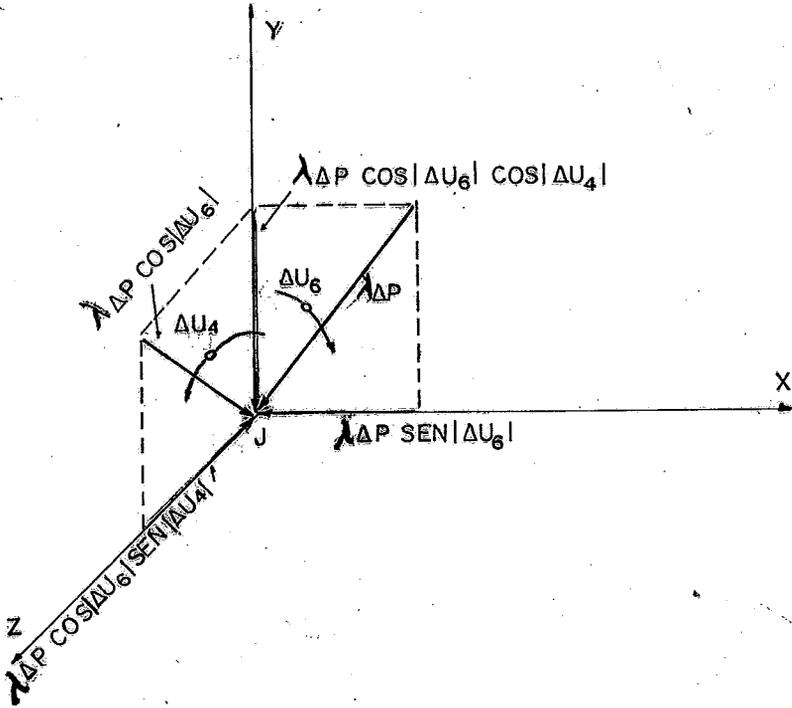


Figura II.25

$$R_1 = \lambda\Delta P \text{sen} |\Delta U_6|$$

$$R_2 = \lambda\Delta P \text{cos} |\Delta U_6| \text{cos} |\Delta U_4|$$

II.143

$$R_3 = \lambda\Delta P \text{cos} |\Delta U_6| \text{sen} |\Delta U_4|$$

Sendo os coeficientes da matriz de rigidez para $\Delta U_6 < 0$ e $\Delta U_4 > 0$.

$$K^{NC}(1,6) = \lambda\Delta P \text{cos} |\Delta U_6|$$

$$K^{NC}(2,4) = -\lambda\Delta P \text{cos} |\Delta U_6| \text{sen} |\Delta U_4|$$

$$K^{NC}(3,4) = \lambda\Delta P \text{cos} |\Delta U_6| \text{cos} |\Delta U_4|$$

II.144

$$K^{NC}(2,6) = -\lambda\Delta P \text{sen} |\Delta U_6| \text{cos} |\Delta U_4|$$

$$K^{NC}(3,6) = -\lambda\Delta P \text{sen} |\Delta U_6| \text{sen} |\Delta U_4|$$

Se por exemplo $\Delta U_4 < 0$, as componentes R_1 e R_2 permanecem as mesmas, ficando porém R_3 negativa:

$$R_3 = -\lambda \Delta P \cos |\Delta U_6| \operatorname{sen} |\Delta U_4| \quad \text{II.145}$$

sendo que os coeficientes não nulos da matriz de rigidez permanecem os mesmos de (II.144) com exceção de $K^{NC}(3,4)$ e $K^{NC}(3,6)$ que terão sinais contrários aos de (II.144). Se a carga estiver aplicada no nó K , basta na numeração 1, 2, ...6 utilizar 7, 8, ..., 12.

De forma análoga ao caso apresentado pode-se obter a matriz de rigidez de correção de carga para vários outros tipos de carga concentrada. Tendo-se em conta que na realidade não existe a carga concentrada, o melhor é refinar a malha, nos pontos de aplicação das pseudo cargas concentradas e considerá-las como distribuídas, utilizando a formulação para cargas distribuídas apresentada no item (II.4).

Pode-se também fazer uma formulação para as cargas concentradas, utilizando a matriz de transformação em sua forma linear ou quadrática, conforme apresentada em (II.62) e (II.63). Utilizando-se a fórmula linear (II.62), obtém-se uma solução válida mais para problemas lineares, conforme alguns trabalhos citados no capítulo I, sendo a forma quadrática mais consistente com as equações (II.143).

CAPÍTULO III

ANÁLISE ESTÁTICA

III.1) INTRODUÇÃO

Analisando apenas linearmente um sistema estrutural, pode-se obter uma estrutura segura, porém com pouco aproveitamento do material ou ao contrário com uma margem de segurança bastante reduzida podendo até que a mesma chegue ao colapso. Estes fatos ocorrem e só podem ser determinados previamente realizando-se uma análise não linear, a qual mostra que os efeitos não lineares se conduzirem a um enrijecimento do sistema estrutural, resulta se a análise for linear em uma estrutura anti-econômica e se os efeitos não lineares se caracterizam por perda da rigidez ou instabilidade, a análise linear pode levar até mesmo a ruína da estrutura. Existem casos em que a instabilidade só ocorre com grandes deslocamentos, sendo os valores críticos obtidos somente por uma análise não linear.

Basicamente os casos mais correntes encontrados na literatura são os de análise não linear devido a grandes deslocamentos, os de comportamento não linear do material e os de grandes deformações ou seja alongamentos e distorções grandes em relação a unidade ou então a associação dos casos anteriores. O primeiro caso é denominado de análise não linear geométrica e o segundo de não linearidade física, sendo estes os mais correntes na prática.

Quando se adota a hipótese de pequenos deslocamentos, translações e rotações pequenas comparadas as dimensões da estrutura ou a unidade, isto implica em pequenas deformações, sendo que a hipótese de pequenas deformações ou seja alongamentos e distorções pequenos em relação a unidade pode ocorrer com grandes deslocamentos, pois as deformações referem-se a um volume infinitesimal do corpo.

Neste trabalho adota-se o comportamento físico do material como linear, pequenas deformações e grandes des-

locamentos, tanto para o elemento de pórtico como o de casca, sendo que a matriz de correção de carga independe do comportamento do material.

Para o elemento de pórtico, adota-se a formulação desenvolvida por BENJAMIN (1982), que considera um elemento de eixo reto e seção transversal constante com dois pontos nodais com seis incógnitas por nó, três rotações e três translações. Com hipótese das pequenas deformações, as seções permanecem planas após a deformação e também que o elemento está sujeito apenas a rotações de corpo rígido, mantendo o eixo reto e a seção transversal e o comprimento constante. As relações entre as configurações deformada e indeformada é uma transformação linear. Além disto a adoção de um sistema de referência móvel ou seja a adoção da configuração anterior como referência, o campo de deslocamentos é referido a estes eixos móveis, podendo-se utilizar as funções de interpolação da análise linear, hipóteses análogas as adotadas no Capítulo II.

Para o elemento de casca, adota-se a formulação geométrica não linear desenvolvida por CHUEIRI (1985) para o elemento apresentado no item II.2, onde transforma-se o problema tridimensional em um bidimensional, ou seja conhecendo-se os deslocamentos da superfície média pode-se ter os deslocamentos de toda a estrutura. Adota-se para tanto as hipóteses de Kirchhoff para placas delgadas, segundo a qual, as retas normais à superfície média permanecem normais após a deformação, além de não sofrerem extensibilidade. A formulação adotada é proposta por Von-Karman, que considera grandes rotações, bem maiores que as deformações, porém desprezíveis em relação a unidade.

III.2) ELEMENTO DE PÓRTICO

III.2.1) EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO NÃO LINEAR

O problema básico em uma análise não linear é encontrar o estado de equilíbrio de um corpo correspondente

as cargas ou agentes externos aplicados. Se o corpo for discretizado através de elementos finitos, a condição de equilíbrio pode ser expressa por

$$\tilde{t}_R - \tilde{t}_F = \tilde{0} \quad \text{III.1}$$

onde o vetor \tilde{t}_R contém as forças externas aplicadas nos pontos nodais na configuração do sistema de elementos finitos correspondentes ao tempo t e o vetor \tilde{t}_F as forças nodais equivalentes as tensões de elementos nesta mesma configuração.

Em uma análise estática a variável t que aparece na equação (III.1), bem como posteriormente Δt e a expressão $t+\Delta t$ não significam efeitos do tempo, mas sim apenas para representar a configuração correspondente a certo nível de carga bem como a alteração deste nível através de incrementos que se adicionam as cargas obtendo-se nova configuração deformada. Ficam assim as expressões gerais, sendo que no estudo da análise dinâmica a mesma será basicamente uma análise estática aonde são introduzidas as forças de inércia e amortecimento.

O equilíbrio do corpo considerando-se uma formulação Lagrangeana BATHE (1982), ou seja, quando acompanha-se o movimento de todas as partículas de um corpo desde a configuração inicial até a final, e sendo a formulação também incremental, no instante ou configuração $t+\Delta t$ a equação de equilíbrio pode ser expressa através do princípio dos trabalhos virtuais na forma

$$\int_{t+\Delta t} \tilde{t}_{ij}^{\Delta t} \delta_{t+\Delta t} e_{ij}^{\Delta t} dV = \tilde{t}_R^{\Delta t} \quad \text{III.2}$$

onde $\tilde{t}_{ij}^{\Delta t}$ é uma componente cartesiana do tensor de

tensões de Cauchy na configuração $t+\Delta t$ e δ significa variação em

$${}^{t+\Delta t}e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\delta u_i}{\delta x_j^{t+\Delta t}} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i^{t+\Delta t}} \right]$$

que é uma componente do tensor de deformação na mesma configuração $t+\Delta t$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbb{R}$ é o trabalho virtual das cargas aplicadas.

Uma dificuldade que aparece é que na equação III.2 a configuração do corpo no incremento de carga $t+\Delta t$ é desconhecida e também que para uma solução incremental onde a configuração do corpo muda em cada incremento, é que o tensor de Cauchy em $t+\Delta t$, não pode ser obtido simplesmente adicionando ao tensor de tensões de Cauchy em t um incremento de tensões devido somente a deformação do material, porque no cálculo do tensor de Cauchy no tempo $t+\Delta t$ também deve-se levar em conta a rotação do corpo como rígido, porque as componentes do tensor mudam quando o mesmo está sujeito apenas a movimento de corpo rígido. Lembra-se que uma nova configuração é atingida após o movimento e deformação dos elementos de volume infinitesimais através de uma deformação propriamente dita, uma rotação de corpo rígido e uma translação até a posição atual.

Para superar estes problemas, utiliza-se o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, que além de ser como o de Cauchy simétrico, as suas componentes são invariantes sob rotações de corpo rígido. Com relação ao tensor de deformação, utiliza-se o tensor de deformação de Green-Lagrange que além de simétrico, os movimentos de rotação de corpo rígido do material não mudam suas componentes. Além do mais pode-se demonstrar que o trabalho virtual pode ser calculado usando o tensor de Cauchy ou o 2º de Piola-Kirchhoff sendo as integrais realizadas no volume corrente ou original, obtendo-se o mesmo resultado.

A equação III.2 considerando a configuração inicial do corpo como referência, pode ser escrita na forma

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij}^o \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}^o dV = {}^{t+\Delta t} \mathbb{R} \quad \text{III.3}$$

onde

${}^{t+\Delta t} S_{ij}^o$ - é uma componente cartesiana do 2º tensor de tensões de Piola-Kirchhoff.

${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}^o$ - é uma componente cartesiana do tensor de deformação de Green-Lagrange.

Na notação anterior, o índice esquerdo superior ($t+\Delta t$) indica a configuração em que a componente do tensor ocorre e o índice esquerdo inferior (o) a configuração com relação a qual a grandeza no caso tensor é medido.

O trabalho virtual externo é calculado pela expressão

$${}^{t+\Delta t} \mathbb{R} = \int_{0A} {}^{t+\Delta t} f_i^s \delta u_i dA + \int_{0V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i dV \quad \text{III.4}$$

onde

${}^{t+\Delta t} f_i^s$ - são as componentes cartesianas das forças de superfície.

${}^{t+\Delta t} f_i^B$ - são as componentes cartesianas das forças de massa

δu_i - variação virtual das componentes cartesianas do vetor de deslocamentos totais.

A equação (III.3) pode ser linearizada, para tanto decompõe-se as tensões e deformações incrementalmente, conforme BATHE (1982).

$${}^{t+\Delta t}{}^o S_{ij} = {}^t{}^o S_{ij} + {}^o S_{ij} \quad \text{III.5}$$

e

$${}^{t+\Delta t}{}^o \varepsilon_{ij} = {}^t{}^o \varepsilon_{ij} + {}^o \varepsilon_{ij} \quad \text{III.6}$$

sendo que o incremento da componente do tensor de deformação é constituído de duas parcelas, uma linear e outra não linear.

$${}^o \varepsilon_{ij} = {}^o e_{ij} + {}^o n_{ij} \quad \text{III.7}$$

Utilizando para equação constitutiva a aproximação

$${}^o S_{ij} = {}^o C_{ijrs} {}^o e_{rs} \quad \text{III.8}$$

e como aproximação para variação do incremento das componentes de deformação

$$\delta {}^o \varepsilon_{ij} = \delta {}^o e_{ij} \quad \text{III.9}$$

obtem-se a equação (III.3) em uma forma incremental

linearizada.

$$\int_{0V} {}_0^c c_{ijrs} {}_0^e e_{rs} \delta_0^e e_{ij} {}^0 dV + \int_{0V} {}_0^t s_{ij} \delta_0^n e_{ij} {}^0 dV =$$

$$= {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbb{R}} - \int_{0V} {}_0^t s_{ij} \delta_0^e e_{ij} {}^0 dV \quad \text{III.10}$$

A equação (III.10) pode ser utilizada para calcular um incremento nos deslocamentos, o qual é usado para avaliar aproximações para os deslocamentos, deformações e tensões correspondentes a configuração $t+\Delta t$. A aproximação para os deslocamentos $t+\Delta t$ é simplesmente obtida somando-se aos deslocamentos calculados na configuração t os incrementos obtidos através da equação (III.10), e as deformações usando os deslocamentos nas equações cinemáticas ou seja no tensor das deformações. As tensões dependerão obviamente da equação constitutiva utilizada.

Uma vez obtida a aproximação para os deslocamentos, pode-se avaliar o erro através da expressão

$$\text{Erro} = {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbb{R}} - \int_{0V} {}_0^{t+\Delta t(1)} s_{ij} \delta_0^{t+\Delta t(1)} e_{ij} {}^0 dV \quad \text{III.11}$$

onde o índice superior direito (1), sugere que uma iteração, em geral será necessária, sendo que a equação (III.11) quando comparada com (III.10) mostra que devem ser equivalentes as variações

$$\delta_0^e e_{ij} \equiv \delta_0^{t+\Delta t} e_{ij} \quad \text{III.12}$$

quando os deslocamentos da mesma configuração forem

utilizados.

Para reduzir o erro, devem ser feitas iterações dentro de um mesmo incremento até que a diferença entre os trabalhos virtuais externo e interno, (equação III.11) seja inferior a uma tolerância considerada. Portanto a equação (III.10) resolvida repetidamente para o índice k variando de 1, 2, 3, ... será

$$\int_{0V} {}_0C_{ijrs} \Delta_0 e_{rs}^{(k)} \delta_0 e_{ij} \quad {}_0dV + \int_{0V} {}_0S_{ij}^t \delta \Delta_0 n_{ij}^{(k)} \quad {}_0dV =$$

$$= {}_0R_{\sim}^{t+\Delta t} - \int_{0V} {}_0S_{ij}^{t+\Delta t(k-1)} \delta {}_0\varepsilon_{ij}^{t+\Delta t(k-1)} \quad {}_0dV \quad \text{III.13}$$

sendo os deslocamentos dados por

$$t+\Delta t_{u_i}^{(k)} = t+\Delta t_{u_i}^{(k-1)} + \Delta u_i^{(k)} \quad \text{III.14}$$

As equações (III.13) e (III.14) correspondem ao método de NEWTON-RAPHSON modificado, uma vez que no 1º membro da equação (III.13) não se atualiza os tensores de tensão e constitutivo. Isto equivale a se utilizar uma matriz de rigidez tangente constante dentro de cada incremento.

A aproximação do método dos elementos finitos na equação (III.13), com atualização dos tensores de tensão e constitutivo em cada iteração, ou seja, utilizando-se o método de NEWTON-RAPHSON conduz a

$$t+\Delta t_{K_T}^{(k-1)} \Delta U_{\sim}^{(k)} = t+\Delta t_{\sim}R - t+\Delta t_{\sim}F^{(k-1)} \quad \text{III.15}$$

sendo a matriz de rigidez tangente a soma das rigidez

linear (em geral constante) e a não linear

$${}^{t+\Delta t} \underset{\sim}{K}_T^{(k-1)} = \underset{\sim}{K}_L + {}^{t+\Delta t} \underset{\sim}{K}_{NL}^{(k-1)} \quad \text{III.16}$$

No caso de carregamentos não conservativos, considera-se a matriz de correção de carga (equação II.17) que reescrita fica

$${}^{t+\Delta t} \underset{\sim}{K}_T^{(k-1)} = \underset{\sim}{K}_L + {}^{t+\Delta t} \underset{\sim}{K}_{NL}^{(k-1)} - {}^{t+\Delta t} \underset{\sim}{K}_{NC}^{(k-1)} \quad \text{III.17}$$

os deslocamentos são calculados por

$${}^{t+\Delta t} \underset{\sim}{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \underset{\sim}{U}^{(k-1)} + \Delta \underset{\sim}{U}^{(k)} \quad \text{III.18}$$

Substituindo (III.16) em (III.15), pode-se identificar as integrais da equação (III.13) com a aproximação do método dos elementos finitos e calcular as matrizes de rigidez linear, não linear bem como o vetor das cargas nodais equivalente as tensões de elementos, sendo ainda que nesta discretização pelo método dos elementos finitos um ponto relevante é que devido a adoção do referencial móvel, o tensor de tensão utilizado é o de Cauchy, ou seja, nos eixos móveis o tensor de Cauchy é igual ao 2º de Piola-Kirchhoff referido ao referencial fixo.

III.2.2) MATRIZ DE RIGIDEZ LINEAR

A matriz de rigidez linear que aparece na equação (III.16) é a mesma utilizada na análise linear e se mantém

constante durante o processo incremental. Esta matriz é calculada com relação ao referencial móvel, o que permite que a mesma permaneça constante, sendo que a passagem do referencial móvel para o fixo é que leva em conta a mudança na geometria. Esta matriz pode ser obtida na literatura corrente, GERE E WEAVER (1970), cujos coeficientes não nulos são transcritos abaixo

$K_{\sim L} =$	K_{11}					K_{17}					
		K_{22}				K_{26}		K_{28}			$K_{2,12}$
			K_{33}		K_{35}			K_{39}		$K_{3,11}$	
				K_{44}					$K_{4,10}$		
					K_{55}			K_{59}		$K_{5,11}$	
						K_{66}		K_{68}			$K_{6,12}$
							K_{77}				
								K_{88}			$K_{8,12}$
									K_{99}		$K_{9,11}$
										$K_{10,10}$	
											$K_{11,11}$
											$K_{12,12}$

III.19

$$K_{11} = \frac{EA_x}{L}$$

$$K_{17} = -K_{11}$$

$$K_{22} = \frac{12EI_z}{L^3}$$

$$K_{26} = \frac{6EI_z}{L^2}$$

$$K_{28} = -K_{22}$$

$$K_{2,12} = K_{26}$$

$$K_{33} = \frac{12EI_y}{L^3}$$

$$K_{35} = \frac{-6EI_y}{L^2}$$

$$K_{39} = -K_{33}$$

$$K_{3,11} = K_{35}$$

$$K_{44} = \frac{GI_x}{L}$$

$$K_{4,10} = -K_{44}$$

$$K_{55} = \frac{4EI_y}{L}$$

$$K_{5,9} = \frac{6EI_y}{L^2}$$

$$K_{5,11} = \frac{2EI_y}{L}$$

$$K_{66} = \frac{4EI_z}{L}$$

$$K_{68} = \frac{-6EI_z}{L^2}$$

$$K_{6,12} = \frac{2EI_z}{L}$$

$$K_{77} = K_{11}$$

$$K_{88} = K_{22}$$

$$K_{8,12} = -K_{26}$$

$$K_{99} = K_{33}$$

$$K_{9,11} = -K_{35}$$

$$K_{10,10} = K_{4,4}$$

$$K_{11,11} = K_{5,5}$$

$$K_{12,12} = K_{6,6}$$

III.20

A_x - área da seção transversal

I_x - constante de torção

I_y - momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo y

I_z - momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z

E - módulo de elasticidade

G - módulo de elasticidade transversal $\left(G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \right)$

ν - coeficiente de Poisson

III.2.3) MATRIZ DE RIGIDEZ NÃO LINEAR E VETOR F

A matriz de rigidez não linear bem como o vetor das forças nodais equivalentes as tensões de elementos foram totalmente explicitados por BENJAMIN (1982), cujos valores reaperentam-se abaixo.

MATRIZ DE RIGIDEZ NÃO LINEAR EM EIXOS MÓVEIS

Os coeficientes não nulos de K_{NL}^N são

$$K_{11}^N = -\frac{F_1}{L}$$

$$K_{12}^N = -\frac{F_2}{L}$$

$$K_{13}^N = -\frac{F_3}{L}$$

$$K_{15}^N = -\frac{F_5}{L}$$

$$K_{16}^N = -\frac{F_6}{L}$$

$$K_{17}^N = -K_{11}^N$$

$$K_{18}^N = -K_{12}^N$$

$$K_{19}^N = -K_{13}^N$$

$$K_{1,11}^N = F_3 + \frac{F_5}{L}$$

$$K_{1,12}^N = -F_2 + \frac{F_6}{L}$$

$$K_{22}^N = -\frac{12I_z}{L^3 A_x} F_1 - \frac{6}{5L} F_1$$

$$K_{24}^N = \frac{F_3}{2} + \frac{F_5}{L}$$

$$K_{26}^N = -\frac{6I_z}{L^2 A_x} F_1 - \frac{F_1}{10}$$

$$K_{27}^N = \frac{F_2}{L}$$

$$K_{28}^N = \frac{12I_z}{L^3 A_x} F_1 + \frac{6}{5L} F_1$$

$$K_{2,10}^N = -\frac{F_3}{2} - \frac{F_5}{L}$$

$$K_{2,12}^N = -\frac{6I_z}{L^2 A_x} F_1 - \frac{F_1}{10}$$

$$K_{33}^N = -\frac{12I_y}{L^3 A_x} F_1 - \frac{6}{5L} F_1$$

$$K_{34}^N = -\frac{F_2}{2} + \frac{F_6}{L}$$

$$K_{35}^N = \frac{6I_y}{L A_x} F_1 + \frac{F_1}{10}$$

$$K_{37}^N = \frac{F_3}{L}$$

$$K_{39}^N = \frac{12I_y}{L^3 A_x} F_1 + \frac{6}{5L} F_1$$

$$K_{3,10}^N = \frac{F_2}{2} - \frac{F_6}{L}$$

$$K_{3,11}^N = \frac{6I_y}{L^2 A_x} F_1 + \frac{F_1}{10}$$

$$K_{44}^N = -\frac{I_x}{LA} F_1$$

$$K_{45}^N = \frac{L}{12} F_2$$

$$K_{46}^N = \frac{L}{12} F_3$$

$$K_{48}^N = -\frac{F_3}{2} - \frac{F_5}{L}$$

$$K_{49}^N = \frac{F_2}{2} - \frac{F_6}{L}$$

$$K_{4,10}^N = -K_{44}^N$$

$$K_{4,11}^N = -K_{45}^N$$

$$K_{11,12}^N = -K_{46}^N$$

$$K_{55}^N = -\frac{4I_y}{LA} F_1 - \frac{2L}{15} F_1$$

$$K_{57}^N = \frac{F_5}{L}$$

$$K_{5,11}^N = -\frac{2I_y}{LA} F_1 + \frac{L}{30} F_1$$

$$K_{66}^N = -\frac{4I_z}{LA} F_1 - \frac{L}{5} F_1$$

$$K_{67}^N = \frac{F_6}{L}$$

$$K_{68}^N = \frac{6I_z}{AL^2} F_1 + \frac{F_1}{10}$$

$$K_{6,10}^N = -\frac{L}{12} F_3$$

$$K_{6,12}^N = -\frac{2I_z}{LA} F_1 + \frac{L}{30} F_1$$

$$K_{77}^N = -\frac{F_1}{L}$$

$$K_{78}^N = K_{12}^N$$

$$K_{79}^N = K_{13}^N$$

$$K_{7,11}^N = -K_{1,11}^N$$

$$K_{7,12}^N = -K_{1,12}^N$$

$$K_{88}^N = K_{22}^N$$

$$K_{8,10}^N = K_{24}^N$$

$$K_{8,12}^N = -K_{26}^N$$

$$K_{99}^N = K_{33}^N$$

$$K_{9,10}^N = K_{34}^N$$

$$K_{9,11}^N = -K_{35}^N$$

$$K_{10,10}^N = K_{44}^N$$

$$K_{10,11}^N = K_{45}^N$$

$$K_{10,12}^N = K_{46}^N$$

$$K_{11,11}^N = K_{55}^N$$

$$K_{12,12}^N = K_{66}^N$$

A matriz de rigidez linear e não linear são calculadas nos eixos móveis. A passagem destas para o referencial global é feita através de expressão análoga a utilizada para a de correção de carga dada pela equação (II.117).

VETOR DAS CARGAS NODAIS EQUIVALENTES A TENSÕES

Em uma análise incremental iterativa, em uma configuração e nível de carga $t+\Delta t$, em uma iteração k , o vetor de cargas nodais equivalentes a tensões de elemento pode ser calculado através da expressão

$$t+\Delta t \underset{\sim}{F}^{(k)} = t+\Delta t \underset{\sim}{F}^{(k-1)} + \underset{\sim}{K}_L \Delta U^{(k)} \quad \text{III.21}$$

Em eixos globais o vetor é obtido por

$$t+\Delta t \underset{\sim}{F}_g^{(k)} = \underset{\sim}{R} D^T \underset{\sim}{R} T^T t+\Delta t \underset{\sim}{F}^{(k)} \quad \text{III.22}$$

III.3) ELEMENTO DE CASCA

III.3.1) MATRIZ DE RIGIDEZ LINEAR

A matriz de rigidez linear pode ser obtida na literatura corrente sendo relacionadas a seguir as matrizes para estado plano de tensão e flexão de placas que superposta resultam na matriz do elemento.

RIGIDEZ PARA ESTADO PLANO DE TENSÃO

A matriz pode ser obtida da integral

$$K_{\sim m} = \int_V B_{\sim 1}^T D_{\sim} B_{\sim 1} dV \quad \text{III.23}$$

sendo a matriz $B_{\sim 1}$ que relaciona as deformações e os deslocamentos nodais $\xi_{\sim} = B_{\sim 1} d_i^M$ ($i = 1, 2, 3$)

$$B_{\sim 1} = \frac{1}{2} A \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{21} \end{bmatrix} \quad \text{III.24}$$

e D_{\sim} a matriz que relaciona as tensões e as deformações $\sigma_{\sim} = D_{\sim} \xi_{\sim}$, para materiais isotrópicos.

$$D_{\sim} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{III.25}$$

Em (III.23) sendo os termos constantes e chamando de t a espessura do elemento e A a área

$$\underline{K}_m = \underline{B}_1^T \underline{D} \underline{B}_1 A t \quad \text{III.26}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA FLEXÃO DE PLACAS

A matriz pode ser obtida através da integral

$$\underline{K}_f = \int_A \underline{B}_2^T \underline{DB} \underline{B}_2 dA \quad \text{III.27}$$

sendo \underline{DB} a matriz que relaciona os momentos fletores as curvaturas $\underline{m} = \underline{DB} \underline{k}$

$$\underline{DB} = \frac{t^3}{12} \underline{D} \quad \text{III.28}$$

e a matriz \underline{B}_2 dada por

$$\underline{B}_2 = \underline{T} \underline{F} \underline{U} \quad \text{III.29}$$

sendo \underline{T} a matriz que relaciona as curvaturas \underline{k} com as curvaturas \underline{k}_n em coordenadas naturais ou de área, $\underline{k} = \underline{T} \underline{k}_n$

$$\tilde{T} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} y_{23}^2 & y_{31}^2 & 2y_{31}y_{23} \\ x_{32}^2 & x_{13}^2 & 2x_{13}x_{32} \\ 2x_{32}y_{23} & 2x_{13}y_{31} & 2(x_{13}y_{23} + x_{32}y_{31}) \end{bmatrix} \quad \text{III.30}$$

A matriz \tilde{F} é a relação entre o vetor k_n e os deslocamentos generalizados α , $k_n = \tilde{F} \alpha$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2L_2 & -2L_2 & 6(L_1 - L_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2L_1 & -6(L_2 - L_3) & 2L_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2(L_1 - L_2) & -2(2L_2 - L_3) & 2(2L_1 - L_3) \end{bmatrix} \quad \text{III.31}$$

e finalmente a matriz \tilde{U} a que relaciona os deslocamentos generalizados ao nodais $\alpha = \tilde{U} d_i^F$ ($i = 1, 2, 3$) conforme a equação (II.47).

Para explicitar a matriz dada pela equação (III.27), calcula-se a mesma em termos dos deslocamentos generalizados α através da expressão

$$K_{\tilde{f}}^{\alpha} = \int_A \tilde{F}^T H \tilde{F} d_L \quad \text{III.32}$$

sendo H

$$H = \tilde{T}^T D B \tilde{T} \quad \text{III.33}$$

Na equação (III.32) as integrais de polinômio do

tipo

$$I = \int_A L_1^m L_2^n L_3^p dA,$$

são calculados por

$$I = 2A \frac{m! n! p!}{(m + n + p + 2)!}, \text{ com } dA = 2A_1 dL_1 dL_2$$

A matriz $K_{\sim f}$ é obtida pela expressão

$$K_{\sim f} = \underset{\sim}{U}^T K_{\sim f}^{\alpha} \underset{\sim}{U} \quad \text{III.34}$$

A matriz $K_{\sim f}^{\alpha}$ está explicitada no trabalho de LIMA (1972).

A matriz do elemento superpondo os efeitos de membrana e flexão é:

$$K_L = \begin{bmatrix} K_{\sim 11}^m & 0 & K_{\sim 12}^m & 0 & K_{\sim 13}^m & 0 \\ 0 & K_{\sim 11}^f & 0 & K_{\sim 12}^f & 0 & K_{\sim 13}^f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{\sim 21}^m & 0 & K_{\sim 22}^m & 0 & K_{\sim 23}^m & 0 \\ 0 & K_{\sim 21}^f & 0 & K_{\sim 22}^f & 0 & K_{\sim 23}^f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{\sim 31}^m & 0 & K_{\sim 32}^m & 0 & K_{\sim 33}^m & 0 \\ 0 & K_{\sim 31}^f & 0 & K_{\sim 32}^f & 0 & K_{\sim 33}^f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III.35

sendo os coeficientes acima obtidos da subdivisão das matrizes de rigidez do estado de membrana K_m e de flexão K_f na forma abaixo com $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} K_{11}^m & K_{12}^m & K_{13}^m \\ K_{21}^m & K_{22}^m & K_{23}^m \\ K_{31}^m & K_{32}^m & K_{33}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}_i \quad \text{III.36}$$

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ M_x \\ F_y \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} K_{11}^f & K_{12}^f & K_{13}^f \\ K_{21}^f & K_{22}^f & K_{23}^f \\ K_{31}^f & K_{32}^f & K_{33}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ \Theta_x \\ \Theta_y \end{Bmatrix}_i \quad \text{III.37}$$

onde

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}_i \text{ e } \begin{Bmatrix} F_x \\ M_x \\ F_y \end{Bmatrix}_i$$

são os vetores que contêm as forças nodais equivalentes.

III.3.2) MATRIZ DE RIGIDEZ NÃO LINEAR E VETOR F

A formulação adotada é a que foi desenvolvida por CHUEIRI (1985), sendo está bastante específica para o elemento considerado.

A condição de equilíbrio pode ser escrita

$$\tilde{\mathbb{R}} - \tilde{\mathbb{F}} = 0 \quad \text{III.38}$$

sendo que pelo princípio dos trabalhos virtuais o trabalho interno W_i será

$$W_i = \tilde{\mathbb{F}}^T d\tilde{d}_N = \int_V \tilde{\sigma}^T d\tilde{\varepsilon} dV \quad \text{III.39}$$

As relações entre deformações e deslocamento

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mathbb{B}} d\tilde{d}_N \quad \text{III.40}$$

fornece

$$d\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mathbb{B}}' d\tilde{d}_N \quad \text{III.41}$$

resultando em

$$\tilde{\mathbb{F}} = \int_V \tilde{\mathbb{B}}'^T \tilde{\sigma} dV \quad \text{III.42}$$

Como $\tilde{\mathbb{R}}$ e $\tilde{\mathbb{F}}$ dependem dos deslocamentos $d\tilde{d}_N$, a equação (III.38) é não linear.

Sendo a matriz de rigidez tangente para o caso conservativo a que relaciona incrementos de forças e deslocamentos

$$d\tilde{F} = \tilde{K}_T d\tilde{d}_N \quad \text{III.43}$$

A diferencial da equação (III.42) com relação aos deslocamentos $d\tilde{d}_N$ será

$$d\tilde{F} = \int_V (\tilde{B}'^T d\tilde{\sigma} + d\tilde{B}'^T \tilde{\sigma}) dV \quad \text{III.44}$$

que pode ser escrita após obter as expressões de $d\tilde{\sigma}$ e da parcela $d\tilde{B}'^T \tilde{\sigma}$, veja CHUEIRI (1985) na forma

$$d\tilde{F} = \left[\int_V (\tilde{B}'^T \tilde{D}' \tilde{B}' + \tilde{G}^T \tilde{T}' \tilde{G}) dV \right] d\tilde{d}_N \quad \text{III.45}$$

ou mais explicitamente

$$d\tilde{F} = \left[\int_A \left(\begin{bmatrix} \tilde{B}_1^T & 0 \\ \tilde{B}_5^T & \tilde{B}_2^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{D}M & 0 \\ 0 & \tilde{D}B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_5 \\ 0 & \tilde{B}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{G}^T \tilde{M}' \tilde{G} \end{bmatrix} \right) dA \right] \cdot d\tilde{d}_N \quad \text{III.46}$$

onde

$$d\tilde{d}_N = \begin{Bmatrix} dd_i^M \\ dd_i^F \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

comparando (III.46) com (III.43) obtém-se a matriz \tilde{K}_T

$$K_{\tilde{T}} = \int_A \begin{bmatrix} \tilde{B}_1^T \cdot DM \cdot \tilde{B}_1 & \tilde{B}_1^T \cdot DM \cdot \tilde{B}_5 \\ \tilde{B}_5^T \cdot DM \cdot \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2^T \cdot DB \cdot \tilde{B}_2 + \tilde{B}_5^T \cdot DM \cdot \tilde{B}_5 + \tilde{G}^T \cdot \tilde{M}' \cdot \tilde{G} \end{bmatrix} \cdot dA \quad \text{III.47}$$

A matriz $K_{\tilde{T}}$ pode ser representada pela soma de duas matrizes

$$K_{\tilde{T}} = K_{\tilde{L}} + K_{\tilde{NL}} \quad \text{III.48}$$

onde

$$K_{\tilde{L}} = \int_A \begin{bmatrix} \tilde{B}_1^T \cdot DM \cdot \tilde{B}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2^T \cdot DB \cdot \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \quad \text{III.49}$$

é a matriz apresentada no item (III.31) é $K_{\tilde{NL}}$ a não linear dada por

$$K_{\tilde{NL}} = \int_A \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_1^T \cdot DM \cdot \tilde{B}_5 \\ \tilde{B}_5^T \cdot DM \cdot \tilde{B}_1 & \tilde{B}_5^T \cdot DM \cdot \tilde{B}_5 + \tilde{G}^T \cdot \tilde{M}' \cdot \tilde{G} \end{bmatrix} \cdot dA \quad \text{III.50}$$

Na expressão anterior DM é a matriz obtida de

$$DM = t D \quad \text{III.51}$$

A matriz \tilde{B}_S é a que relaciona os incrementos dos deslocamentos nodais $dd_{\tilde{N}}$ com os incrementos das parcelas não lineares das deformações ou seja

$$d\tilde{\epsilon}^{M,L} = \tilde{B}_S dd_{\tilde{N}} \quad \text{III.52}$$

sendo a deformação total dada pela soma das parcelas lineares e não lineares

$$\tilde{\epsilon}^M = \tilde{\epsilon}^{M,O} + \tilde{\epsilon}^{M,L} \quad \text{III.53}$$

A matriz \tilde{M}' é a que contém os esforços ou seja

$$\tilde{M}' = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad \text{III.54}$$

e finalmente a matriz \tilde{G} é a que relaciona os deslocamentos nodais com as derivadas com relação a x e y do deslocamento W ou seja

$$DW = \tilde{G} dd_{\tilde{N}} \quad \text{III.55}$$

As matrizes citadas estão explicitadas no trabalho de CHUEIRI (1985).

O vetor \tilde{F} das força nodais internas equação (III.42) pode ser escrito

$$\tilde{F} = \int_A \begin{bmatrix} B_1^T \cdot n \\ B_5^T \cdot \tilde{n} + B_2^T \cdot \tilde{m} \end{bmatrix} \cdot dA \quad \text{III.56}$$

Sendo o vetor \tilde{n} o que contém esforços e \tilde{m} os momentos fletores.

Para obter a rigidez não linear equação (III.50) e do vetor das forças internas equação (III.56), como nem todas as matrizes podem ser explicitadas, utiliza-se a integração numérica análoga a descrita no item (II.4.1).

As matrizes anteriores são calculadas nos eixos locais móveis e são transformadas para os eixos globais através da matriz de rotação apresentada no item (II.4.1).

III.4) SOLUÇÃO FRONTAL NÃO SIMÉTRICA

As técnicas de solução de sistemas de equações algébricas lineares ou não lineares, basicamente se enquadram em dois métodos, com relação a forma de se fazer a montagem das equações e a obtenção dos resultados. É óbvio que devido ao computador utilizado não serão consideradas as técnicas desenvolvidas para supercomputadores ou aqueles equipamentos que permitem processamento paralelo, sendo que o método adotado neste trabalho também tem sido utilizado por alguns autores em equipamentos do tipo super.

Os métodos convencionais de solução adotados nos programas existentes na literatura, partem da matriz cheia com a solução por inversão GERE & WEAVER (1967), banda fixa WEAVER (1967) com solução por inversão ou CHOLESKI e também banda fixa com Gauss-Seidel ou método da matriz esparsa ZIENKIEWICZ (1971). Com o aparecimento de computadores de maior porte na década de 70, bem como do surgimento de formulações não lineares incrementais iterativas aparecem publicações com a consideração da banda variável WILSON e

BATHE (1976) com o armazenamento da matriz em forma de sky-line e também, trabalhos onde se utilizam outra técnica chamada frontal, IRONS (1970) e mais recentemente rotinas detalhadas como em HINTON e OWEN (1977), IRONS e AHMAD (1980), HINTON E OWEN (1980). Tanto o Sky-Line como o método Frontal utilizam uma solução direta através da eliminação de Gauss para obtenção das incógnitas sendo porém que nos trabalhos anteriores consideram-se apenas sistemas de equações simétricas.

Adota-se neste trabalho a solução frontal que segundo IRONS E AHMAD (1980) é o método de solução mais natural pois considera a contribuição de elemento por elemento na montagem das equações. A origem do método é um segredo, porém é certo que surgiu dentro da Companhia Boeing por volta de 1958. A primeira referência é o trabalho de GREENE, STROME e WEIKEL (1961).

Para sistemas não simétricos, existem vários trabalhos fora do método frontal para grandes sistemas, esparsos, tais como KEY (1973), GUPTA e TANJI (1977) ou CROTTY (1982) para grandes sistemas de equações não simétricas com solução em bloco, porém com rotinas bastante extensas. Outro trabalho semelhante ao anterior é apresentado por GOPALAKRISHNAN e PALANIAPPAN (1982) com a solução toda na memória. A comparação entre os métodos encontram-se em vários trabalhos, sendo de destaque a excelente publicação de WILSON, TAYLOR e SACKETT (1980) que para certos tipos de problemas e utilizando de micro a supercomputadores comprovam que frontal versus banda variável perfazem praticamente o mesmo número de operações para se decompor o sistema e também durante a resolução.

Em problemas simétricos a solução frontal tem sido otimizada, podendo-se reduzir o Front tais como nas rotinas apresentadas por RAZZAQE (1980), PINA (1981), RANDOLPH e SLOAN (1983), gerações automática SADEK (1981) e nos casos de problemas com grande largura de front a solução por partição BEER e HASS (1982).

Recentemente, conforme trabalhos de BRUSSINDO e SONNAD (1989) e HOWARD, CONNOLLEY e ROLLETT (1989) os métodos iterativos do tipo Gradientes Conjugados e suas

variantes tem sido utilizadas em lugar dos métodos diretos, por serem comprovadamente muito mais eficientes, conforme resultados apresentados pelos autores anteriores, inclusive com utilização de supercomputadores.

A solução frontal adotada para a solução de sistemas de equações não simétricas é de TAYLOR e HUGHES (1981), que tem como referência ou base os trabalhos de HOOD (1976), HOOD (1977a) e HOOD (1977b). A rotina de TAYLOR e HUGHES (1981) destina-se a solução de problemas de escoamento de fluídos viscosos, ou seja, das equações de NAVIER-STOKES, sendo que a rotina sofreu várias adaptações e implementações tais como a resolução de sistemas quando muda apenas o vetor dos termos independentes, vários vetores de termos independentes para atender a iteração inversa múltipla com ou sem resolução, e outras tendo em vista a solução das equações de equilíbrio dinâmico e cálculo de autovalores.

O objetivo do método frontal é a eliminação de variáveis assim que as contribuições de todos os elementos que influenciam um determinado ponto nodal ou suas variáveis, já estão computadas na matriz global. Assim que uma variável ou as variáveis de um ponto nodal já possuem as equações totalmente montadas e a matriz do front está preenchida ou todos os elementos já foram considerados, as variáveis ou equações são eliminadas.

A matriz global completa, nunca será montada, a não ser no caso dela ser de ordem inferior a dimensão do front.

Em uma solução simétrica apenas a metade da matriz do front é armazenada na memória. Na solução não simétrica além de armazenar todos os coeficientes das equações que estão no front, o pivot na eliminação de Gauss é escolhido sempre entre o coeficiente de maior valor da diagonal principal. Assim que uma equação é eliminada, a equação na forma reduzida é escrita no disco, fazendo-se um deslocamento nos coeficientes da matriz e do vetor independente do front, tornando a última linha e coluna nulas. A seguir faz-se nova eliminação e assim sucessivamente até que se crie espaço no front para consideração da

contribuição de um novo elemento ou se todos os elementos já contribuíram, faz-se apenas eliminações porém deslocando-se os coeficientes e zerando sempre as últimas linhas e colunas, o que corresponde a uma otimização com relação ao frontal convencional pois trabalha-se com menos valores nulos. Após eliminar as equações as novas contribuições entram nas vagas deixadas por estas.

Em termos resumidos, a rotina cria em uma primeira etapa uma matriz que contém para cada elemento a numeração dos nós nas colunas dois em diante e um sinal negativo caso o nó apareça pela última vez neste elemento. Isto é que permite saber se a equação está ou não montada.

Em outra parte da rotina após definidas as dimensões das matrizes que irão trabalhar no front, tais como a rigidez global e vetores independentes, define-se um parâmetro NCRIT de forma que novas contribuições de um elemento só entrarão na matriz-global quando o número de equações existentes for menor que este valor NCRIT. Este valor em geral é igual a dimensão do front menos o número de variáveis de um elemento.

Outro ponto de destaque é a criação primeiro a nível local de um vetor que indica para cada variável do elemento que está sendo considerado a correspondência com a variável global, inclusive se houver sinal negativo é porque a contribuição está toda somada, e outro vetor a nível global, sendo que indica que variável global está armazenada em cada linha no front e se a equação está toda montada. Para cada elemento que está sendo considerado cria-se também um vetor que diz em que linha e coluna da matriz ou parte da matriz global que está no front, os coeficientes da matriz do elemento devem se somados.

Após preencher a matriz do front ou seja quando o número de equações é maior que NCRIT perfaz-se a eliminação pelo método de Gauss escolhendo sempre como pivot o maior valor diagonal, sendo então os coeficientes da nova matriz

$$k_{ij} \text{ fica } k_{ij} - k_{i',LPIVOT} \cdot \frac{k_{LPIVOT,j}}{k_{LPIVOT,LPIVOT}}$$

e os vetores do segundo membro

$$b_{ij} \text{ fica } b_{ij} - b_{i'LPIVOT} \cdot \frac{b_{LPIVOT,j}}{k_{LPIVOT, LPIVOT}} \quad \text{III.58}$$

obtém-se uma nova matriz, por exemplo, com valores obrigatoriamente nulos, na coluna do pivot a exceção do próprio.

LPIVOT

							0										
							0										
							0										
							0										
							0										
							0										
							0										
LPIVOT	E	Q	U	A	Ç	Ã	D	A	A	R	M	A	Z	E	N	A	R
								0									
								0									

As condições de contorno são introduzidas antes da eliminação ou seja quando se checa se a equação está toda montada pesquisa-se também através de um outro vetor que indica que a variável tem ou não um valor fixo e em caso afirmativo introduz-se zeros na linha e coluna e o valor unitário na diagonal e o prescrito no segundo membro.

Após as eliminações e armazenamento das equações pivotais em disco, juntamente com o vetor que indica quem é quem no Front, pode-se realizar a retrosubstituição obtendo-se os valores da variáveis, as quais são calculadas na ordem em que aparecem no front, mas no final da retrosubstituição o vetor das variáveis está ordenado.

No processo incremental iterativo, ou seja na solução da equação (III.15) onde a matriz ${}^{t+\Delta t}K_T^{(k-1)}$ de

rigidez tangente na forma geral é a dada por (III.17) sendo que a rigidez linear e não linear para o elemento de pórtico são as apresentadas nos itens (III.2.2) e (III.2.3) e para o caso de casca nos itens (III.3.1) e (III.3.2), sendo a rigidez de correção de carga para o elemento de casca no item (II.4.1) e a de pórtico em (II.4.2). Para carga concentrada, no item (II.5). Considera-se que há convergência na solução da equação (III.15) quando obtido o incremento dos deslocamentos em uma iteração k e os deslocamentos por (III.18) verifica-se o critério

$$\frac{\|\Delta \underline{U}^{(k)}\|_2}{\|\underline{t} + \Delta \underline{t}_{\underline{U}}^{(k)}\|_2} \leq \text{TOL}$$

onde $\|\cdot\|_2$ representa a norma Euclidiana e TOL uma tolerância adotada.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DINÂMICA

IV.1) CONSIDERAÇÕES GERAIS

Na década de setenta as múltiplas exigências por soluções através de uma análise dinâmica não linear, levaram a várias pesquisas sobre o assunto afim de se obterem eficientes procedimentos capazes de atenderem a demanda por projetos mais representativos e com segurança também mais definida. Atualmente uma grande variedade de problemas podem ser eficientemente resolvidos, mas a análise não linear é um assunto ainda inesgotável dentro da visão atual.

Em geral os problemas dinâmicos podem ser basicamente de dois tipos, propagação de ondas e de vibração de estruturas. Para este último tipo de problema, basicamente são dois os métodos quando deseja-se obter a solução, ou seja, a superposição modal e a integração direta do sistema de equações que representa o equilíbrio instantâneo.

Considerando a equação (III.15), com a introdução das forças de inércia e amortecimento dadas por $-M^{t+\Delta t}\ddot{U}(k)$ e $-C^{t+\Delta t}\dot{U}(k)$ no vetor $^{t+\Delta t}R$, onde \tilde{M} e \tilde{C} são as matrizes de massa e amortecimento e $^{t+\Delta t}\ddot{U}(k)$ e $^{t+\Delta t}\dot{U}(k)$ respectivamente as acelerações e velocidades no instante $t+\Delta t$ na iteração (k) ,

$$\tilde{M}^{t+\Delta t}\ddot{U}(k) + \tilde{C}^{t+\Delta t}\dot{U}(k) + \tilde{K}^{t+\Delta t}(k-1)\Delta U(k) = \tilde{R}^{t+\Delta t} - \tilde{F}^{t+\Delta t}(k-1)$$

$k = 1, 2, \dots$

IV.1

A solução da equação (IV.1) através da superposição modal pode ser encarada como uma forma de reduzir o número de equações de maneira que se possa utilizar com

maior eficiência um método de integração direta.

Comprovadamente a superposição modal é bastante eficiente em uma análise linear e também se alguns poucos modos são excitados pela carga, tendo também sido aplicada com sucesso em problemas com não linearidades localizadas. A eficiência acima diz respeito a exatidão dos resultados quando considera-se problemas representados por milhares de equações, bem como o tempo de CPU.

Em uma análise não linear mais abrangente a matriz de rigidez tangente muda a cada instante ou incremento e sendo o carregamento não conservativo além disto será não simétrica, podendo ocorrer grandes variações nos autovetores e valores e, conseqüentemente, para se obter a resposta através da superposição modal, utilizando os modos da vibração livre sem amortecimento, que é a forma mais utilizada na prática para se reduzir um sistema de milhares de equações a algumas dezenas, o custo computacional pode até ultrapassar o da integração direta do sistema de equações originais.

Considerando a superposição modal, o objetivo da mesma é realizar uma transformação dos deslocamentos nodais na forma

$${}^{t+\Delta t} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{P} \underset{\sim}{X}(t) \quad \text{IV.2}$$

onde $\underset{\sim}{X}(t)$ é um vetor dependente do tempo e denominado deslocamentos generalizados. A matriz $\underset{\sim}{P}$ na prática é em geral a que contém os m primeiros modos ou autovetores do problema de vibrações livres obtidos da solução da equação.

$${}^{t+\Delta t} \underset{\sim}{K}^{(k-1)} \underset{\sim}{\Theta}_i = \omega_i^2 \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\Theta}_i \quad \text{IV.3}$$

ou considerando apenas algumas configurações, da equação

$$\tau \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\Theta}_i = \omega_i^2 \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\Theta}_i \quad \text{IV.4}$$

Os deslocamentos (IV.2) são obtidos por

$$\tilde{u}^{t+\Delta t} = \sum_{i=1}^m \tilde{\Theta}_i^{t+\Delta t} x_i \quad \text{IV.5}$$

ou

$$\tilde{u}^{t+\Delta t} = \tilde{\Theta}^{t+\Delta t} \tilde{X}(t) \quad \text{IV.6}$$

onde $\tilde{\Theta}$ é a matriz de ordem $(n \times m)$ contendo os m primeiros autovetores e denominada de matriz modal e $\tilde{X}(t)$ de deslocamentos nas coordenadas modais.

Quando utiliza-se no cálculo de autovetores e valores o método de LANCZOS (1950), a matriz modal $\tilde{\Theta}$, irá conter arranjados em colunas, não os m primeiros autovetores, mas sim devido a eficiência do algoritmo os autovetores correspondentes aos m modos que mais influenciam na solução independente da ordem dos mesmos no spectrum. Neste caso o método da superposição modal passa a ser denominado de método da superposição de modos de Lanczos, obtendo-se com um custo computacional menor e com uma aproximação melhor os deslocamentos e principalmente os esforços, quando comparado com a clássica superposição modal.

Trabalhos sugerindo a utilização de algoritmos do tipo LANCZOS, foram realizados por WILSON et alii (1982), WILSON (1985), NOUR-OMID e CLOUGH (1984) e (1985).

Outros trabalhos que comprovam a excelência do processo também para sistemas simétricos, lineares ou com não linearidades localizadas e amortecimento proporcional são os de LIMA, LANDAU, EBCKEN e ELLWANGER (1985), COUTINHO et alii (1986) e COUTINHO, LANDAU, LIMA e EBCKEN (1987).

Aplicando a transformação de coordenadas dada por (IV.6) com $\tilde{\Theta}$ contendo m autovetores calculados por LANCZOS obtém-se o sistema de equações reduzidas na forma

$$\begin{aligned}
 \underset{\sim}{M}_m \underset{\sim}{\ddot{X}}(k) + \underset{\sim}{C}_m \underset{\sim}{\dot{X}}(k) + \underset{\sim}{K}_m \underset{\sim}{X}(k) &= \\
 &= \underset{\sim}{\Theta}^T (t+\Delta t \underset{\sim}{R} - t+\Delta t \underset{\sim}{F}(k-1)) \quad \text{IV.7} \\
 & \quad k=1,2,\dots
 \end{aligned}$$

sendo

$$\underset{\sim}{M}_m = \underset{\sim}{\Theta}^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\Theta} \quad \text{IV.8}$$

$$\underset{\sim}{C}_m = \underset{\sim}{\Theta}^T \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\Theta} \quad \text{IV.9}$$

$$\underset{\sim}{K}_m = \underset{\sim}{\Theta}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\Theta} \quad \text{IV.10}$$

obtendo-se por integração numérica de (IV.7) o vetor $\underset{\sim}{\Delta X}^{(k)}$ e as coordenadas modais por

$$\begin{aligned}
 t+\Delta t \underset{\sim}{X}(k) &= t+\Delta t \underset{\sim}{X}(k-1) + \underset{\sim}{\Delta X}^{(k)} \quad \text{IV.11} \\
 & \quad k=1,2,\dots
 \end{aligned}$$

e os deslocamentos por

$$t+\Delta t \underset{\sim}{U}(k) = \underset{\sim}{\Theta} \underset{\sim}{X}(k) \quad \text{IV.12}$$

RIGIDEZ NÃO SIMÉTRICA E AMORTECIMENTO NÃO PROPORCIONAL

A solução de problemas não simétricos com ou sem amortecimento utiliza em geral duas bases para a transformação das coordenadas. Na realidade existe uma certa

relação com a ortogonalidade dos modos quando são considerados os autovetores da transposta, ou seja, considerando um problema de autovalores dado pela equação

$$\tau_{\sim}^T K_{\sim} \vartheta_{\sim i} = \omega_i^2 M_{\sim} \vartheta_{\sim i} \quad \text{IV.13}$$

e o da transposta por

$$\tau_{\sim}^T K_{\sim}^T \psi_{\sim j} = \omega_j^2 M_{\sim} \psi_{\sim j} \quad \text{IV.14}$$

supondo M_{\sim} simétrica se for massa consistente e os autovalores iguais quando o determinante de $\tau_{\sim}^T K_{\sim}$ é igual ao da transposta $\tau_{\sim}^T K_{\sim}^T$.

Considerando a transposta de (IV.13) pós multiplicada por $\psi_{\sim j}$ e (IV.14) pré-multiplicada por $\vartheta_{\sim i}^T$,

$$\vartheta_{\sim i}^T \tau_{\sim}^T K_{\sim} \psi_{\sim j} = \omega_i^2 \vartheta_{\sim i}^T M_{\sim} \psi_{\sim j} \quad \text{IV.15}$$

$$\vartheta_{\sim i}^T \tau_{\sim}^T K_{\sim}^T \psi_{\sim j} = \omega_j^2 \vartheta_{\sim i}^T M_{\sim} \psi_{\sim j} \quad \text{IV.16}$$

ou

$$\vartheta_{\sim i}^T M_{\sim} \psi_{\sim j} (\omega_i^2 - \omega_j^2) = 0 \quad \text{IV.17}$$

sendo $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$

$$\vartheta_{\sim i}^T M_{\sim} \psi_{\sim j} = \psi_{\sim j}^T M_{\sim} \vartheta_{\sim i} = 0 \quad \text{IV.18}$$

e escalando os autovetores e premultiplicando (IV.13)

por $\underline{\psi}_j^T$

$$\underline{\psi}_j^T \underline{K} \underline{\phi}_i = \omega_i^2 \quad \text{IV.19}$$

Existindo amortecimento proporcional os autovetores $\underline{\phi}$ e $\underline{\psi}$ desacoplam o sistema de equações (IV.1) ou no caso de amortecimento não proporcional reduzem o sistema de equações, podendo o mesmo ser resolvido através de um processo de integração numérica.

Os dois conjuntos de autovetores a esquerda $\underline{\psi}$ e a direita $\underline{\phi}$, podem ser complexos e o serão com certeza no caso do amortecimento não proporcional. Além disto, caso deseje-se fazer uma superposição modal mais representativa, ou seja, ao invés de considerar os dois conjuntos de autovetores obtidos das equações das vibrações livres sem amortecimento (IV.13) e (IV.14), se incluído o amortecimento, o cálculo dos autovetores será ainda muito mais trabalhoso.

Recentemente surgiram trabalhos onde a aritmética complexa é contornada, pois não são calculados os autovetores verdadeiros do problema, mas uma ou duas bases formadas por vetores de LANCZOS que além de reais, são bem mais fáceis de serem gerados, sejam em problemas simétricos com amortecimento não proporcional, como em TAYLOR e CHEN (1988) ou em problemas não simétricos CRAIG e KIM (1988), ou para sistemas de equações com matrizes gerais NOUR-OMID e REGELBRUGGE (1989), sendo ainda que o sistema de equações reduzido, obtido usando os vetores de Lanczos é ainda menor que aquele que se obtém quando são utilizados os modos de vibração livre sem ou com amortecimento.

A formulação consiste basicamente em transformar o sistema de n equações diferenciais de segunda ordem dado por (IV.1) em um de $2n$ equações de primeira ordem através da introdução de um novo conjunto de variáveis, ou seja, o vetor velocidade.

$${}_{\sim}^{t+\Delta t} \underline{V} = {}_{\sim}^{t+\Delta t} \underline{U} \quad \text{IV.20}$$

é utilizado na transformação, podendo com (IV.1) e (IV.20) escrever o sistema de duas equações, considerando a rigidez em uma configuração τ ,

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{M} \\ \underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_{\sim}^{t+\Delta t} \underline{U} \\ {}_{\sim}^{t+\Delta t} \underline{U} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\tau} \underline{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_{\sim}^{t+\Delta t} \underline{V} \\ {}_{\sim}^{t+\Delta t} \underline{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ {}_{\sim}^{t+\Delta t} \underline{R} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.21}$$

ou

$$\underset{\sim}{B} {}_{\sim}^{t+\Delta t} \underline{Y} + \underset{\sim}{A} {}_{\sim}^{t+\Delta t} \underline{Y} = {}_{\sim}^{t+\Delta t} \underline{F} \quad \text{IV.22}$$

sendo a solução da forma

$${}_{\sim}^{t+\Delta t} \underline{Y} = \underset{\sim}{\Theta} e^{\lambda t} \quad \text{IV.23}$$

resulta

$$\lambda \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{\Theta} + \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\Theta} = \underset{\sim}{0} \quad \text{IV.24}$$

e

$$\lambda \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{\Psi} + \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{\Psi} = \underset{\sim}{0} \quad \text{IV.25}$$

A utilização do algoritmo de Lanczos aplicado as

equações (IV.24) e (IV.25) fornecem os dois conjuntos de m vetores \tilde{Q} e \tilde{P} de Lanczos que formam uma base e são utilizados em conjunto com um método de pesos e resíduos para reduzir o sistema de $2n$ equações a um de m equações que são resolvidos por um método de integração direta, não envolvendo operações com valores complexos. Obtida as coordenadas de Lanczos faz-se a superposição através dos vetores de Lanczos gerados pela equação (IV.24), já tendo sido obtido bons resultados com m da ordem de $\frac{1}{50}$ a $\frac{1}{100}$ de n .

Com relação aos autovalores, os mesmos são obtidos do problema reduzido que se obtém ao projetar o sistema original dado por (IV.24) no subespaço formado pelos vetores de Lanczos.

Como foi visto a superposição modal envolve sempre uma integração numérica e considerando a formulação de problemas com grandes não linearidades, a princípio implementou-se no programa ANER, apenas a integração numérica conforme o item IV.2.

IV.2) ALGORITMO DE NEWMARK

O algoritmo escolhido para a solução das equações de equilíbrio dinâmico é o de NEWMARK (1959), já bastante conhecido na literatura. Em resumo, constitui-se em um método de integração direta com solução estável sem restrições porém implícito, ou seja, envolve a solução de um sistema de equações análogas as da análise estática para obtenção dos deslocamentos nodais ao longo do tempo, ou melhor, em intervalos de tempos pré-determinados.

Como hipóteses fundamentais pode-se enumerar:

a) Ao invés de satisfazer o sistema de equações em qualquer tempo t , satisfaz-se o mesmo somente em intervalos discretos Δt . Todas as técnicas das soluções estáticas são válidas, pois a dinâmica é a estática acrescida das forças de inércia.

b) As variações dos deslocamentos, velocidades e acelerações são assumidas nos intervalos Δt . Dependendo desta variação tem-se um algoritmo particular. Este

baseia-se no método da aceleração linear.

c) Para se obter a solução no tempo $t+\Delta t$, supõe-se conhecido além de ${}^0\tilde{U}$, ${}^0\dot{\tilde{U}}$, ${}^0\ddot{\tilde{U}}$ a solução também no tempo t .

Despreza-se o amortecimento e assume-se que:

$${}^{t+\Delta t}\tilde{U} = {}^t\tilde{U} + \left[\left(1-\delta\right) {}^t\ddot{\tilde{U}} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{\tilde{U}} \right] \Delta t \quad \text{IV.26}$$

$${}^{t+\Delta t}\tilde{U} = {}^t\tilde{U} + {}^t\dot{\tilde{U}} \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) {}^t\ddot{\tilde{U}} + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{\tilde{U}} \right] \Delta t^2 \quad \text{IV.27}$$

sendo α e δ parâmetros que se relacionam com a estabilidade e exatidão da integração. Adota-se para os mesmos os valores correspondentes ao método da aceleração média permanente. O esquema do algoritimo resume-se em:

- 1) Formar as matrizes de Rigidez K e Massa M .
- 2) Fixar condições iniciais ${}^0\tilde{U}$, ${}^0\dot{\tilde{U}}$ e ${}^0\ddot{\tilde{U}}$.
- 3) Selecionar incremento Δt e calcular as constantes de integração a_i $i=1$ a 7.
- 4) Obter a rigidez efetiva $\hat{K} = K + a_0 M$
Para cada incremento de tempo 5) a 7).
- 5) Calcular o vetor de carga efetivo no tempo $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\hat{R} = {}^{t+\Delta t}R + M (a_0 {}^t\dot{\tilde{U}} + a_2 {}^t\ddot{\tilde{U}} + a_3 {}^t\ddot{\tilde{U}})$$

- 6) Obter os deslocamentos no tempo $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\hat{K} {}^{t+\Delta t}\tilde{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{R}$$

- 7) Calcular acelerações e velocidades no tempo $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\tilde{U}} = a_0 \left({}^{t+\Delta t}\tilde{U} - {}^t\tilde{U} \right) - a_2 {}^t\dot{\tilde{U}} - a_3 {}^t\ddot{\tilde{U}}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\tilde{U}} = {}^t\dot{\tilde{U}} + a_6 {}^t\ddot{\tilde{U}} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{\tilde{U}}$$

No passo 6 resolve-se o sistema pelo método frontal, sendo que nos demais incrementos, não havendo alteração da rigidez se for análise linear ou se não se atualizar a rigidez nas iterações dentro de um incremento no caso da análise não linear, utiliza-se a resolução, ou seja, a matriz de rigidez já está eliminada e opera-se apenas o vetor das cargas.

No caso da análise não linear com $\alpha = \frac{1}{4}$ e $\delta = \frac{1}{2}$ em (IV.26) e (IV.27)

$${}^{t+\Delta t}\tilde{U} = {}^t\tilde{U} + \frac{\Delta t}{2} \left({}^t\ddot{U} + {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right) \quad \text{IV.28}$$

$${}^{t+\Delta t}\tilde{U} = {}^t\tilde{U} + \frac{\Delta t}{2} \left({}^t\ddot{U} + {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right) \quad \text{IV.29}$$

e sendo

$${}^{t+\Delta t}\tilde{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\tilde{U}^{(k-1)} + \Delta\tilde{U}^{(k)} \quad \text{IV.30}$$

obtem-se de (IV.28) a (IV.30)

$${}^{t+\Delta t}\tilde{U}^{(k)} = \frac{4}{\Delta t^2} \left({}^{t+\Delta t}\tilde{U}^{(k-1)} - {}^t\tilde{U} + \Delta\tilde{U}^{(k)} \right) - \frac{4}{\Delta t} {}^t\ddot{U} - {}^t\ddot{U} \quad \text{IV.31}$$

e substituindo IV.1 com $\tilde{C} = \tilde{Q}$, obtém-se

$${}^{t+\Delta t}\hat{K}^{(k-1)} \Delta\tilde{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\tilde{R} - {}^{t+\Delta t}\tilde{F}^{(k-1)} - M \left[\frac{4}{\Delta t^2} \left({}^{t+\Delta t}\tilde{U} - {}^t\tilde{U} \right) - \frac{4}{\Delta t} {}^t\ddot{U} - {}^t\ddot{U} \right] \quad \text{IV.32}$$

sendo

$$t + \Delta t_{\tilde{K}}^{\wedge}(k-1) = t + \Delta t_{\tilde{K}}(k-1) + \frac{4}{\Delta t^2} M_{\tilde{K}} \quad \text{IV.33}$$

CAPÍTULO V

CÁLCULO DE AUTOVALORES

V.1) ANÁLISE DA ESTABILIDADE

V.1.1) CONSIDERAÇÕES GERAIS

A estabilidade iniciou-se nos estudos de ARISTÓTELES e ARQUIMEDES. O primeiro analisava o movimento que ocorria após a perturbação e determinava a estabilidade do estado não perturbado através do curso de movimento. No último caso a pura situação geométrica do estado perturbado era utilizado para determinar a estabilidade do sistema não perturbado. O primeiro é o método cinemático, que tornou-se importante nas últimas décadas, com relação a estabilidade do movimento dos sistemas técnicos. O segundo método é o geométrico, ligado aos trabalhos de TORRICELLI, LAGRANGE e outros, que dominou os estudos no campo da mecânica, até poucas décadas atrás, o que foi por sinal pouco benéfico ao desenvolvimento do assunto.

O método da energia, constitui-se em um terceiro método, usado para determinar a estabilidade de uma posição de equilíbrio de um corpo elástico, com várias aplicações feitas por S. Timoshenko, porém, restritas a certos casos. Até hoje, vários métodos existem separadamente e várias teorias de estabilidade são formuladas sendo que em geral o método geométrico - estático e o da energia, estão ligados aos problemas da elasticidade e estática, e o cinemático predominando na dinâmica.

Não há uma definição absoluta de estabilidade, ela evolui e se ajusta aos requisitos particulares do problema em estudo. Por exemplo, na análise da estabilidade dinâmica de estruturas, de acordo com o problema analisado e o critério adotado, existem vários conceitos e definições na literatura. EBECKEN (1982) apresenta exemplos, dos quais destaca-se a "ressonância paramétrica", fenômeno largamente estudado por BOLOTIN (1964) para várias formas estruturais

e por ele denominado instabilidade dinâmica, onde o sistema é dito instável se uma perturbação sobreposta a sua resposta devido a cargas (periódicas) resulta em um acréscimo ilimitado das componentes de deslocamento.

A estrutura é dita estável se perturbações admissíveis, no seu estado de equilíbrio estático ou dinâmico, são seguidas de deslocamentos cuja magnitudes permanecem dentro de limites admissíveis durante o tempo de utilização da estrutura.

Para pequenos deslocamentos, vale a elasticidade infinitesimal. Porém, quando a instabilidade é precedida de grandes deslocamentos, tem-se que considerar equações "Não Lineares" para o movimento. Para problemas complexos a análise da estabilidade dinâmica deve ser feita a partir da resposta transiente, através do estudo das variáveis cinemáticas e das frequências dos principais modos de vibração da estrutura.

Para outros tipos de problemas, por exemplo cascas axissimétricas o critério de cálculo das cargas críticas é definido pela variação máxima de volume de deformação relativo aos carregamentos impostos. Para carregamentos inferiores ao crítico, a relação entre o parâmetro de deformação e o carregamento atuante é aproximadamente linear. Existe porém um valor do carregamento para o qual um pequeno acréscimo correspondente a uma grande variação do parâmetro de deformação. Este é admitido como carregamento crítico. As referências anteriores apresentam vários exemplos.

Em termos gerais, as características comuns de todas definições modernas de estabilidade, consistem em especificar um estado sem perturbação cuja estabilidade é para ser analisada. Aplicar ao estado anterior uma perturbação. Fixar normas para cada estado. Determinar as mudanças nas normas na transição de um estado para outro.

Baseado neste comportamento chega-se a conclusão da estabilidade ou não do estado não perturbado. Apesar das simples hipóteses, os métodos que as utilizam levam a vários critérios e conceitos conforme comprova a literatura corrente.

V.1.2) CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE

Considerando-se a princípio os critérios de estabilidade, ditos estáticos, dois deles são largamente usados para a determinação das regiões de estabilidade, bem como os limites de estabilidade. São eles os critérios da energia, e estático. As aplicações destes critérios denominam-se o método da energia e o método do equilíbrio.

No método do equilíbrio assume-se que por causa do estado de equilíbrio neutro no limite de estabilidade, posições de equilíbrio adjacentes podem existir para as mesmas condições de cargas. Se é assumida a posição de equilíbrio trivial para a qual os deslocamentos são nulos, a aplicação do método do equilíbrio, postula que posições de equilíbrio não triviais existem. Se elas ocorrem, podem ser determinadas por métodos da estática. Neste caso denomina-se "critério de estabilidade estático", por causa de que o parâmetro crítico é determinado a partir da existência de posições de equilíbrio não triviais. A instabilidade ocorre quando excede-se o valor crítico deste parâmetro.

A primeira objeção séria a validade geral dos dois critérios clássicos de estabilidade foi feita por ZIEGLER (1977). Ele mostrou que o critério estático só pode ser automaticamente usado para problemas conservativos. Isto porque em geral para problemas não conservativos não há nenhuma posição de equilíbrio não trivial.

ZIEGLER (1977) recomenda um terceiro critério para os casos em que os dois anteriores não podem ser aplicados com certeza. Este é o "critério cinemático" que consiste no seguinte: - deslocamentos com relação a posição de equilíbrio do sistema elástico são impostos. Discute-se o movimento perturbado que ocorre. Se ele permanece limitado por todo tempo, implica na estabilidade da posição de equilíbrio.

Considerando primeiro a equação do movimento de um sistema com apenas um grau de liberdade pode-se observar CLOUGH e PENZIEN (1975) que as equações do movimento apresentam soluções estáveis com movimentos com amplitudes limitadas, quando a solução da equação característica

apresenta raízes imaginárias puras, no caso de não haver amortecimento e raízes reais negativas (amortecimento crítico) ou raízes complexas com partes reais negativas para amortecimento inferior ao crítico.

O critério cinemático corresponde a se obter soluções não triviais da equação do movimento de um sistema estrutural, sem aplicação de forças externas a não ser aquelas necessárias para iniciar o movimento e que são expressas sob a forma de condições iniciais, ou seja, considerar a equação das vibrações livres, por exemplo, sem amortecimento.

$$\tilde{K}_T \tilde{U}(t) + \tilde{M} \ddot{\tilde{U}}(t) = 0 \quad V.1$$

onde cada solução não trivial, caracteriza um modo de vibração em que todos os graus de liberdade descrevem movimentos harmônicos em fase. Supõe-se solução do tipo

$$\tilde{U}(t) = \tilde{\Theta} e^{i\omega t} \quad V.2$$

onde ω é a frequência natural (rad/seg) associada ao modo natural de vibração $\tilde{\Theta}$ que é o vetor formado pelas amplitudes máximas dos deslocamentos correspondentes.

Substituindo (V.2) em (V.1) obtém-se o problema de autovalor generalizado

$$\tilde{K}_T \tilde{\Theta} = \omega^2 \tilde{M} \tilde{\Theta} \quad V.3$$

Fazendo $\omega^2 = -\lambda$ e $\omega = \pm(\lambda)^{1/2}$ na equação (V.3)

$$(\tilde{K}_T - \lambda \tilde{M}) \tilde{\Theta} = 0 \quad V.4$$

Sendo a equação característica que fornece o autovalor λ para soluções não triviais ($\Theta \neq 0$),

$$\det |K_T - \lambda M| = 0$$

V.5

Como os deslocamentos são dados pela equação (V.2), o comportamento do movimento perturbado bem como a estabilidade é decidida pelo termo $e^{\omega t}$.

Conforme observações anteriores, se ω é imaginário, há um movimento de oscilação que pode ser dito ESTÁVEL. Depende logicamente do comportamento do autovalor λ . A estabilidade é dada por λ e pela estrutura da matriz K_T . A investigação da estabilidade é conduzida traçando-se no plano complexo (figura V.1), o caminhamento do autovalor λ . O eixo real positivo é a região de estabilidade, (somente se λ é positivo e real pode ω ser imaginário). Os diferentes valores de λ que permitem traçar o gráfico, originam-se por ser λ função de um parâmetro, por exemplo o carregamento. Se o carregamento varia, o ponto representativo da imagem de λ muda de posição no plano complexo. Perde-se a estabilidade quando a imagem de λ deixa o eixo real positivo. Isto pode ocorrer se λ passa pela origem ou se λ torna-se complexo. O valor do parâmetro para qual isto ocorre é o crítico, sendo que interessa o menor valor crítico.

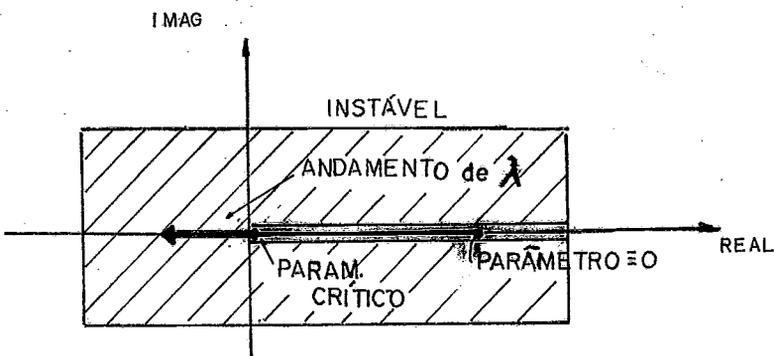


Figura V.1

Supondo ser \tilde{K}_T simétrica, então \tilde{K}_T tem somente autovalores reais e positivos e a imagem de λ move-se sempre ao longo do eixo real.

Neste caso, a perda da estabilidade ocorre somente se λ passa pela origem e torna-se negativo. ω então tem uma parte real positiva ocorrendo a instabilidade. O limite de estabilidade é dado por $\lambda=0$.

O raciocínio anterior, foi elaborado sobre o problema de autovalor na forma generalizada.

Porém, sendo \tilde{K}_T simétrica, e supondo M positiva definida (obtida por uma formulação considerando massa consistente ou diagonal com massa concentrada com $m_{ii} > 0$), o problema generalizado pode ser posto na forma standard $\tilde{K}_T \tilde{\Theta} = \lambda \tilde{\Theta}$, sendo que se \tilde{K}_T é simétrica, resulta em \tilde{K}_T também simétrica, a qual por sua vez terá autovalores também $\lambda > 0$ e iguais aos autovalores da forma generalizada.

Sendo o limite de estabilidade dado por $\lambda=0$, isto implica em $\det |\tilde{K}_T| = 0$, que é o critério de estabilidade estático, que corresponde também a uma posição de equilíbrio não nula.

Considera-se a seguir o caso em que \tilde{K}_T é uma matriz não simétrica, e deixando de lado as considerações sobre matrizes fracamente assimétricas e as não simétricas que podem tornar-se simétricas, sendo que para ambos os casos pode-se aplicar o critério estático. Considera-se que desde que a matriz seja não simétrica, utiliza-se o critério a ser discutido neste segundo caso. Como no caso anterior, para haver estabilidade λ deve ser real e $\lambda \geq 0$, porque então ω é imaginário e o movimento perturbado consiste de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio. Sendo \tilde{K}_T não simétrica, isto significa que ela pode ter autovalores complexos para valores suficientemente grandes do parâmetro considerado, sem que qualquer autovalor, torne-se primeiro nulo. Assim que λ torna-se complexo, ω tem uma parte real positiva, o que significa a perda de estabilidade. Graficamente pode-se visualizar o processo (Figura V.2), como a imagem de λ movendo-se do eixo real positivo, diretamente para o plano complexo, região de instabilidade sem antes passar pela origem.

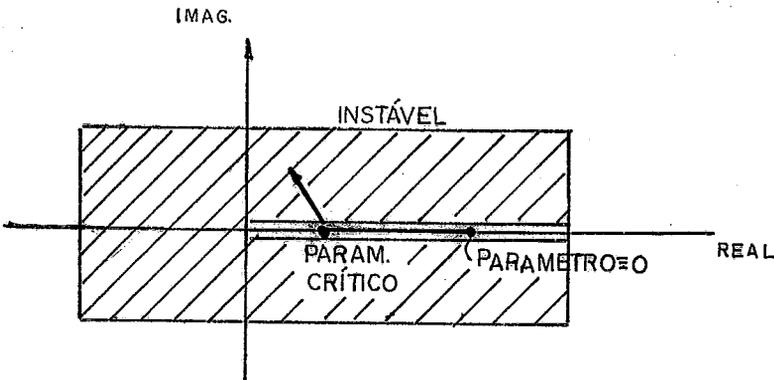


Figura V.2

A curva de autovalor (frequência X carga) nunca intercepta o eixo da carga. Não existe nenhuma posição de equilíbrio não trivial, não podendo-se usar o critério estático. Este tipo de instabilidade só pode ser discutido pelo "critério cinemático". Deve-se resolver a equação de autovalor na forma indicada em (V.4) ou (V.5).

Ocorre a instabilidade assim que um dos autovalores λ torna-se complexo. Uma técnica de pesquisa das raízes seria arbitrar valores para o parâmetro envolvido com \tilde{K}_T , e pesquisar na solução da equação anterior os valores de λ .

Ocorre o fenômeno de "FLUTTER" quando dois autovalores λ_i, λ_{i+1} , convergem, tornando-se complexos conjugados para valores do parâmetro acima deste crítico.

Com relação a influência do amortecimento frente aos critérios apresentados, pode-se resumidamente dizer LEIPHOLZ (1970), que o critério estático é suficiente se a matriz \tilde{K}_T é simétrica e a matriz \tilde{C} de amortecimento é diagonal e positiva, ou antissimétrica. Também se \tilde{K}_T for simetrizável, porém $\tilde{C} = c \tilde{I}$ sendo os coeficientes de amortecimento $c > 0$.

Se \tilde{K}_T for não simétrica (fortemente), o critério cinemático é suficiente, desde que $\tilde{C} = c \tilde{I}$, ($c > 0$). De ou-

tra forma se \tilde{C} é uma matriz diagonal positiva, porém com elementos diferentes um dos outros, há uma descontinuidade na condição de estabilidade com relação ao caso sem amortecimento. Tal problema deve ser calculado levando-se realmente em conta o amortecimento.

Considerando o amortecimento a equação do movimento tem a forma

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{u}}(t) + \tilde{C} \dot{\tilde{u}}(t) + \tilde{K}_T \tilde{u}(t) = \tilde{0} \quad \text{V.6}$$

Soluções serão da forma

$$\tilde{u}(t) = \tilde{e}_C e^{pt} \quad \text{V.7}$$

resultando

$$\left(p^2 \tilde{M} + p \tilde{C} + \tilde{K}_T \right) \tilde{e}_C = \tilde{0} \quad \text{V.8}$$

Para soluções não triviais, a equação característica, será

$$\det \left| p^2 \tilde{M} + p \tilde{C} + \tilde{K}_T \right| = 0 \quad \text{V.9}$$

Conforme considerações anteriores o sistema é estável se todas as raízes tiverem partes reais negativas. Se pelo menos uma das raízes tiver parte real positiva, o sistema é instável. Raiz nula indica a possibilidade de instabilidade estática ou dinâmica. Se não há raízes com partes reais positivas, mas um par de raízes imaginárias puras, tem-se um caso crítico, o sistema pode ser estável ou instável.

No caso geral, havendo amortecimento, igual ou

superior ao crítico, as raízes são reais e negativas. Inferior ao crítico, complexas com partes reais negativas, quando o sistema é estável.

Em geral na prática não se resolve a equação (V.9) e sim transforma-se o sistema de n equações diferenciais de 2ª ordem dado por (V.6) em um sistema de $2n$ equações de 1ª ordem que podem ser posta na forma

$$\underset{\sim}{B} \dot{\underset{\sim}{Y}}(t) + \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{Y}(t) = \underset{\sim}{0} \quad \text{V.10}$$

onde

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{M} \\ \underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{C} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} -\underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K} \end{bmatrix} \quad \text{V.11}$$

e

$$\underset{\sim}{Y}(t) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{U}(t) \\ \underset{\sim}{U}(t) \end{bmatrix} \quad \text{V.12}$$

Sendo $\underset{\sim}{Y}(t) = \underset{\sim}{\Theta} e^{\lambda t}$, equação (V.10) para o problema de autovetor a direita é

$$\lambda \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{\Theta} + \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\Theta} = \underset{\sim}{0} \quad \text{V.13}$$

e a esquerda

$$\lambda \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{\Psi} + \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{\Psi} = \underset{\sim}{0} \quad \text{V.14}$$

Em geral é muito difícil obter todos os autova-

lores e vetores das equações acima (V.13) e (V.14) o que leva a técnicas de reduzir o problema de $2n \times 2n$ equações a uma de ordem $m \times m$, com $m \ll 2n$, não só com objetivo da superposição modal, conforme item (IV.1), capítulo IV, como também para cálculo de autovalores item (V.2) e (V.3).

A pesquisa de carregamentos críticos através do comportamento dos autovalores pode portanto ser feito através do critério estático ou dinâmico, sendo o critério dinâmico o único capaz de prever a ocorrência de flutter. No caso de carregamento conservativo, se a instabilidade ocorre de forma estática (flambagem) ou se for não conservativo (divergência) qualquer um dos critérios pode ser adotado para cálculo da carga crítica.

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO NÃO LINEAR

Em um nível de carga $t+\Delta t$ ou $t+\Delta t_{\tilde{R}}$ a equação de equilíbrio será

$$\left(\tilde{K}_L + {}^{t+\Delta t} \tilde{K}_{NL}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \tilde{K}_{NC}^{(i-1)} \right) \Delta \tilde{U}^i = {}^{t+\Delta t} \tilde{R} - {}^{t+\Delta t} \tilde{F}^{(i-1)} \quad \text{V.15}$$

após a convergência obtém-se

$${}^{t+\Delta t} \tilde{U}^i = {}^{t+\Delta t} \tilde{U}^{(i-1)} + \Delta \tilde{U}^i \quad \text{V.16}$$

sendo a rigidez tangente

$${}^{t+\Delta t} \tilde{K}_{\tau}^i = \tilde{K}_L + {}^{t+\Delta t} \tilde{K}_{NL}^i - {}^{t+\Delta t} \tilde{K}_{NC}^i \quad \text{V.17}$$

resolvendo o problema de autovalores

$$\left[\tilde{K}_L + \lambda \left({}^{t+\Delta t} \tilde{K}_{NL}^i - {}^{t+\Delta t} \tilde{K}_{NC}^i \right) \right] \tilde{\Theta} = 0 \quad \text{V.18}$$

O carregamento $\tilde{R}^{t+\Delta t}$ é crítico se $\lambda = 1$. Se isto não ocorrer considera-se um novo incremento e assim sucessivamente.

Se o problema for fracamente não linear pode-se obter o carregamento crítico através de

$$\tilde{R}_{CRIT} = \lambda \cdot \tilde{R}^{t+\Delta t} \quad V.19$$

ou por extrapolação no gráfico da figura V.3

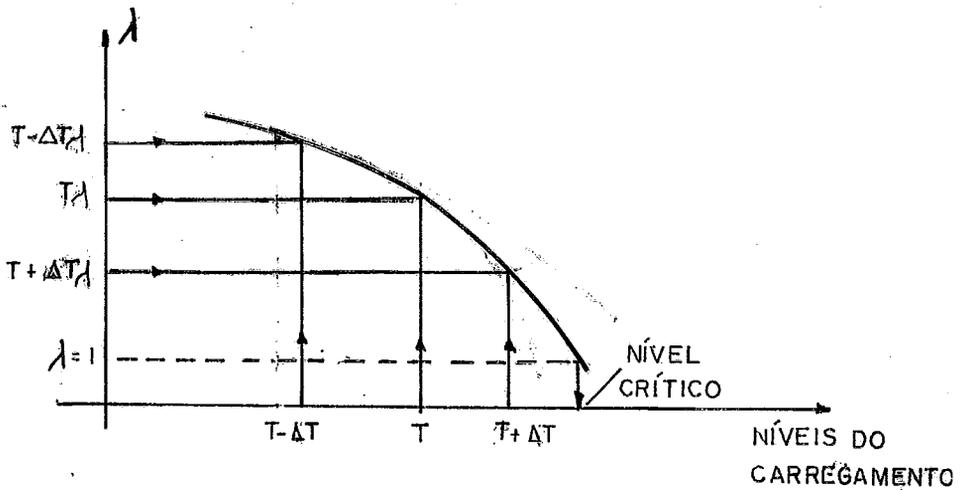


Figura V.3

Se a análise for linear o termo entre parenteses na equação (V.18) se reduz a matriz de rigidez geométrica.

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO NÃO LINEAR

A equação do movimento é

$$\left(\tilde{K}_L + {}^{t+\Delta t} \tilde{K}_{NL}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} \tilde{K}_{NC}^{(i-1)} \right) \tilde{\Delta U}^i + \tilde{M} {}^{t+\Delta t} \tilde{U}^i = {}^{t+\Delta t} \tilde{R} - {}^{t+\Delta t} \tilde{F}^{(i-1)} \quad \text{V.20}$$

obtem-se

$${}^{t+\Delta t} \tilde{U}^i = {}^{t+\Delta t} \tilde{U}^{(i-1)} + \tilde{\Delta U}^i \quad \text{V.21}$$

sendo a rigidez tangente

$${}^{t+\Delta t} \tilde{K}_T^i = \tilde{K}_L + {}^{t+\Delta t} \tilde{K}_{NL}^i - {}^{t+\Delta t} \tilde{K}_{NC}^i \quad \text{V.22}$$

resultando o problema de autovalor

$${}^{t+\Delta t} \tilde{K}_T^i \tilde{\Theta} = \omega^2 \tilde{M} \tilde{\Theta} \quad \text{V.23}$$

Pesquisando os vários níveis de carga tem-se flambagem (carregamento conservativo, $\tilde{K}_{NC} = 0$) ou divergência (não conservativo) caso $\omega_1 = 0$. Se $\omega_i = \omega_{i+1}$ (reais) tem-se o limite que define a carga crítica de FLUTTER. Acima deste valor do carregamento ω_i e ω_{i+1} tornam-se complexos conjugados.

Se a análise for linear ou fracamente não linear e a instabilidade se dá por flambagem ou divergência pode-se obter uma aproximação para a carga crítica solucionando para um nível de carga τ_R o problema de autovalor, (com $\tilde{K}_{NC} = 0$ se o carregamento é conservativo);

$$\left[\tilde{K}_L + \lambda \left(\tau \tilde{K}_{NL} - \tau \tilde{K}_{NC} \right) \right] \tilde{\Theta} = \omega^2 \tilde{M} \tilde{\Theta} \quad \text{V.24}$$

ou seja, fazendo $\omega^2 = 0$

$$\left[K_{NL} + \lambda \left(\tau_{K_{NL}} - \tau_{K_{NC}} \right) \right] \underline{\theta} = 0 \quad \text{V.25}$$

obtem-se de (V.25) λ , sendo a carga crítica (flambagem ou divergência)

$$R_{CRIT} = \lambda \tau_R \quad \text{V.26}$$

No caso de flutter pode também no caso de linearidade ou de não linearidade localizada ou fraca tentar como primeira aproximação resolver a equação (V.24) para alguns níveis de carga obtendo pares de valores ω_i^2 e ω_{i+1}^2 , $i = 1, 2, 3 \dots$, traçando-se o gráfico da figura V.4 para obtenção aproximada do parâmetro crítico.

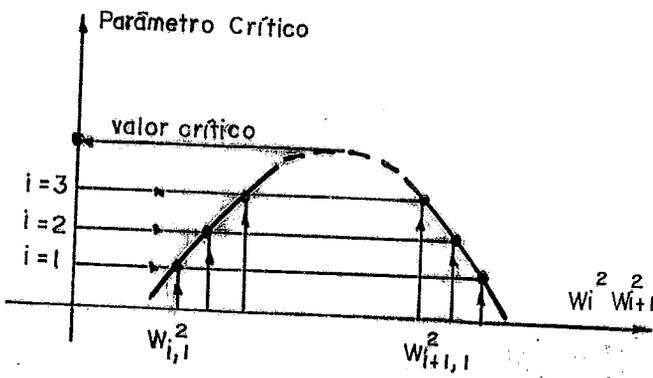


Figura V.4

V.2) PROBLEMAS DE AUTOVALORES E VETORES

Problemas envolvendo o cálculo de autovalores e

vetores, podem ser representados nas conhecidas formas standard ou generalizadas. Além disto as matrizes envolvidas podem ser simétricas ou não, contendo coeficientes reais ou complexos.

Problemas na forma standard, com matrizes simétricas reais, já são resolvidas com eficiência desde a década de 60, WILKINSON (1965), sendo que para os mesmos na forma generalizada e envolvendo milhares de equações, surgiram na década de 70 algumas técnicas bastante eficientes, BATHE (1982). Mais recentemente conforme sugerido por WILSON et alii (1982) e comprovados por outros autores como NOUR-OMID e CLOUGH (1984) e (1985), LIMA et alii (1985), COUTINHO et alii (1986) e (1987), MARQUES, COUTINHO e LANDAU (1986), consegue-se uma otimização, ou seja, através do algoritmo de LANCZOS pode-se transformar um problema envolvendo milhares de equações em outro reduzido contendo apenas algumas dezenas de equações, que resolvidas fornecem os autovalores podendo-se a seguir obter os autovetores, que dependendo de parâmetros iniciais poderão vir a ser o conjunto de pares de valores de maior representatividade, constituindo-se em algoritmos que em termos práticos são altamente satisfatórios. Em contraste é bem mais difícil obter-se algoritmos com igualdade de eficiência no caso não simétrico. Primeiro porque os autovalores de uma matriz não simétrica podem ser muito sensíveis a pequenas mudanças nos elementos da matriz. Segundo, a própria matriz pode ser defectiva, tal que não existe um conjunto completo de autovetores. As dificuldades citadas anteriormente são como propriedades de certas matrizes não simétricas e não há um procedimento numérico capaz de resolvê-lo. O melhor que se pode fazer é adotar procedimentos que não tornem ainda mais intenso tais problemas. Os erros de arredondamento, pioram ainda a situação. Ainda não há um algoritmo perfeitamente seguro para determinar se uma matriz é defectiva ou não. Em geral os métodos correntes, principalmente os de transformação tentam obter um conjunto completo de autovetores e deixam por conta do usuário da rotina a tarefa de inspecionar e selecionar os resultados.

O algoritmo de Lanczos, conforme já citado inclusive no capítulo IV, tem sido utilizado no caso de problemas não simétrico mais como forma de se obter as bases para fazer a superposição modal, sendo que os autovalores podem ser obtidos do problema reduzido e não se calculando em geral os autovetores do problema real, tal como CRAIG e KIM (1988), NOUR-OMID e REGELBRUGGE (1989). RAJAKAMUR (1990) apresenta o algoritmo de Lanczos, destacando-se um reortogonalização nos vetores de Lanczos afim de obter os primeiros autovetores do problema não simétrico, sendo que os mais altos destes primeiros autovalores e vetores já apresentam diferenças quando comparados com os teóricos e com o método do subespaço e não havendo nenhuma consideração caso algum autovetor seja complexo, ou seja, a convergência dos vetores de Lanczos diretamente para os autovetores a esquerda e a direita (uma vez que a obtenção do problema reduzido envolve sempre estes dois conjuntos de vetores ou autovetores), já é tarefa árdua e se forem complexos o algoritmo nada apresenta quanto a convergência.

Neste trabalho optou-se pela iteração em subespaço com maior ênfase no cálculo de autovalores, tendo em vista a pesquisa de parâmetros críticos. Despreza-se o amortecimento, uma vez que a consideração do mesmo na técnica do subespaço com matriz não simétrica de rigidez conduz a autovetores complexos. Isto pode ser evitado adotando-se o Algoritmo de Lanczos, ou seja, a parte as dificuldades inerentes ao cálculo de autovalores e vetores de problemas não simétricos, a aritmética complexa poder ser contornada uma vez que os vetores de Lanczos que constituem a base para transformar ou obter o problema reduzido, são sempre reais. Isto já não ocorre no caso do subespaço, com inclusão de amortecimento, pois trabalha-se sempre com aproximações dos autovetores do problema original. As equações reduzidas apresentam independente do algoritmo que se utilizou para chegar às mesmas, autovetores e valores que podem ser reais e complexos, mesmo sem amortecimento.

No algoritmo do subespaço ou em outro algoritmo tipo Lanczos, é de importância fundamental a solução do

problema reduzido de autovalores e vetores. As soluções deste problema envolvendo em geral algumas poucas dezenas de equações podem ser obtidas através de métodos puramente de transformação, iterativos ou de interpolações. No caso não simétrico as soluções adotadas desde a década de 70 e inclusive na de 80 para o desenvolvimento das rotinas constantes de manuais ou como parte de programas pertencentes a bibliotecas de sistemas computacionais, se caracterizam como métodos de transformação, pois calculam todos os autovalores e vetores, porém dentro de ciclos iterativos.

Basicamente as rotinas são na grande maioria desenvolvidas para o problema na forma standard, as quais fornecem resultados bem melhores, porém envolvendo a inversão de uma das matrizes o que nem sempre é possível. Estas rotinas são desenvolvidas em quatro etapas. A primeira é onde se faz um balanceamento da matriz, na segunda transforma-se a matriz para a forma de Hessenberg, na terceira calculam-se os autovalores utilizando o método QR e, finalmente, os autovetores através em geral da solução do sistema de equações ou por iteração inversa que é melhor no caso da matriz ser defectiva. É obvio que o problema na forma generalizada se torna bem mais complicado e tem-se que adaptar as transformações afim de se obter a matriz do lado esquerdo da equação na forma de Hessenberg e a do lado direito em uma triangular superior para poder aplicar com mais eficiência uma variante do método QR para o problema generalizado.

Para o problema na forma standard o balanceamento é o primeiro procedimento a ser executado, ou seja, é uma forma de reduzir a sensibilidade dos autovalores a erros de arredondamento durante a execução dos algoritmos envolvidos nas outras etapas. Os erros nos procedimentos numéricos para obtenção dos autovalores e vetores são em gerais proporcionais a norma Euclidiana da matriz, isto é, a raiz quadrada da soma dos quadrados dos elementos. A idéia de balancear é de usar transformações similares afim de que as linhas e colunas da matriz tenham normas parecidas, reduzindo a norma global da matriz e mantendo (devido a

utilização das transformações similares) invariáveis os autovalores. A matriz simétrica já se apresenta balanceada. Sendo o número de operações envolvidas muito pequeno quando comparado com todas as etapas, recomenda-se sempre balancear matrizes não simétricas, pois a precisão sempre aumenta quanto comparada com o cálculo efetuado sobre uma matriz não balanceada. Muitas vezes alguns autovalores já aparecem na diagonal da matriz quando desta etapa de balanceamento e podem ser detectados por inspeção, ou seja, se todos os elementos fora da diagonal de uma linha ou coluna são todos nulos, este é um autovalor e esta linha e correspondente coluna deve ser removida inclusive para prevenir caso este autovalor seja mal condicionado, ou seja, pequenas alterações nos elementos da matriz em etapas subseqüentes pode conduzir a obtenção deste autovalor pelos procedimentos seguintes com grande margem de erro.

As técnicas para realização das transformações similares variam, sendo que uma de fácil utilização é através de matrizes diagonais \tilde{D} , ou seja, obtém-se uma matriz balanceada \tilde{A}_{S+1} com relação a original \tilde{A}_S através da equação

$$\tilde{A}_{S+1} = \tilde{D}_S^{-1} \tilde{A}_S \tilde{D}_S \quad \text{V.27}$$

sendo que para se evitar a introdução de erros de arredondamento, os elementos de \tilde{D} restringem-se à potências exatas da base empregada na aritmética do ponto flutuante, em geral 2 para a maioria dos computadores.

A redução a forma de Hessenberg é uma estratégia utilizada para encontrar os autovalores de uma matriz de forma geral, semelhante ao que se utiliza no caso de matrizes simétricas. Uma matriz na forma de Hessenberg superior contém zeros em todas as posições abaixo da diagonal principal, exceto no primeiro elemento subdiagonal de cada linha, ou seja, os elementos satisfazem a equação

$$a_{ij} = 0 \text{ para } i > j+2$$

Uma das técnicas para se obter a matriz na forma superior de Hessenberg é através de uma seqüência de transformações de Householder, cada uma zerando os correspondentes elementos em uma coluna da matriz. Uma alternativa é um procedimento análogo a eliminação de Gauss com pivotamento, sendo o mesmo duas vezes mais eficiente que o método de Householder. Podem existir, mas são raras, matrizes para as quais a eliminação não é estável.

A eliminação direta de Gauss não é uma transformação similar e recomenda-se procedimentos de eliminação ligeiramente diferentes. Antes de uma etapa r , a matriz original $\tilde{A} \equiv \tilde{A}_1$, tornou-se \tilde{A}_r , a qual se encontra na forma superior de Hessenberg nas $r-1$ primeiras linhas e colunas. A etapa r consiste então das seguintes seqüências de operações:

- a) Encontrar o elemento de maior magnitude na coluna r abaixo da diagonal. Se for zero, salte os itens b e c, e a etapa está pronta. No caso contrário, suponha que o elemento máximo esteja na linha r' .
- b) Trocar linhas r' e $r+1$, sendo esta a operação de pivotagem. Para tornar esta permutação uma transformação similar, trocar também as colunas r' e $r+1$.
- c) Para $i=r+2, r+3, \dots, N$, calcular o multiplicador

$$n_{i', r+1} \equiv \frac{a_{i'r}}{a_{r+1, r}}$$

Subtrair da linha i a linha $r+1$ multiplicada por $n_{i', r}$. Para tornar a eliminação uma transformação similar, somar a coluna $r+1$ a coluna i multiplicada por $n_{i', r+1}$.

A última etapa no caso do problema na forma standard é a aplicação do método QR. As equações do processo com "SHIFTS" podem ser escritas em uma etapa s como;

$$Q_s \left(A_s - k_s I \right) = R_s$$

onde \underline{Q} é ortogonal e \underline{R} triangular superior. A equação anterior pode ser expressa também através de

$$\underline{A}_{S+1} = \underline{R}_S \underline{Q}_S^T + k_S \underline{I} \quad \text{V.29}$$

ou

$$\underline{A}_{S+1} = \underline{Q}_S \underline{A}_S \underline{Q}_S^T \quad \text{V.30}$$

A transformação QR preserva a forma de Hessenberg superior da matriz original $\underline{A} \equiv \underline{A}_1$, sendo que quando $s \rightarrow \infty$ \underline{A}_S converge para uma forma tal que os autovalores estão isolados na diagonal ou são os autovalores de uma submatriz de ordem 2×2 na diagonal.

Para uma rápida convergência é essencial a utilização de SHIFTS, sendo que para matrizes reais não simétricas, que podem ter autovalores complexos torna-se necessário um artifício para evitar a aritmética complexa. Isto é obtido, na prática, fazendo dois passos do algoritmo QR, cada um com dois shifts reais k_S e k_{S+1} ou com valores complexos conjugados k_S e $k_{S+1} \equiv \bar{k}_S$. Os valores numéricos destas mudanças com relação a origem em cada etapa são os autovalores da matriz 2×2 situada no canto inferior direito da matriz \underline{A}_S corrente, que definiria se serão reais ou complexos conjugados k_S e k_{S+1} . Estes dois passos resulta em uma matriz real \underline{A}_{S+2} onde

$$\underline{A}_{S+2} = \underline{Q}_{S+1} \underline{Q}_S \underline{A}_S \underline{Q}_S^T \underline{Q}_{S+1}^T \quad \text{V.31}$$

sendo os \underline{Q}'_S determinados por

$$\underline{A}_S - k_S \underline{I} = \underline{Q}_S^T \underline{R}_S \quad \text{V.32}$$

$$\underline{A}_{S+1} = \underline{Q}_S \underline{A}_S \underline{Q}_S^T \quad \text{V.33}$$

$$\underline{A}_{S+1} - k_{S+1} \underline{I} = \underline{Q}_{S+1}^T \underline{R}_{S+1} \quad \text{V.34}$$

utilizando (V.33) a equação (V.34) pode ser reescrita

$$\underline{A}_S - k_{S+1} \underline{I} = \underline{Q}_S^T \underline{Q}_{S+1}^T \underline{R}_{S+1} \underline{Q}_S \quad \text{V.35}$$

então, definindo-se

$$\underline{M} = \left[\underline{A}_S - k_{S+1} \underline{I} \right] \left[\underline{A}_S - k_S \underline{I} \right] \quad \text{V.36}$$

equação (V.32) e (V.35) fornece

$$\underline{R} = \underline{Q} \underline{M} \quad \text{V.37}$$

onde

$$\underline{Q} = \underline{Q}_{S+1} \underline{Q}_S \quad \text{V.38}$$

$$\underline{R} = \underline{R}_{S+1} \underline{R}_S \quad \text{V.39}$$

A equação (V.31) pode ser reescrita

$$\underline{A}_S \underline{Q}^T = \underline{Q}^T \underline{A}_{S+2} \quad \text{V.40}$$

Supondo que se possa achar uma matriz \underline{H} na forma

superior de Hessenberg, tal que

$$A_{\sim 5} \bar{Q}^T = \bar{Q}^T H \quad V.41$$

onde \bar{Q} é ortogonal. Se \bar{Q}^T tem a 1ª coluna igual a Q^T (isto é, \bar{Q} tem a 1ª linha igual a Q) então $\bar{Q} = Q$ e $A_{\sim 5+2} = H$.

A primeira linha de Q é obtida como segue. A equação (V.32) mostra que Q é uma matriz ortogonal que triangulariza a matriz real M . Qualquer matriz real pode ser triangularizada se pré-multiplicada por uma seqüência de matrizes de Householder $P_{\sim 1}$ (atuando na primeira coluna), $P_{\sim 2}$ (atuando na segunda coluna), ..., $P_{\sim n-1}$. Então

$$Q = P_{\sim n-1} \cdots P_{\sim 2} \cdot P_{\sim 1} \quad V.42$$

e a primeira linha de Q é a linha de $P_{\sim 1}$, desde que $P_{\sim i}$ no canto superior esquerdo é uma matriz identidade de ordem $(i-1)(i-1)$.

A matriz de Householder $P_{\sim 1}$ é determinada pela primeira coluna de M . Sendo $A_{\sim 5}$ na forma superior de Hessenberg, a equação (V.36) mostra que a primeira coluna de M tem a forma $[p_1, q_1, r_1, 0, \dots, 0]^T$ onde

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11}^2 - a_{11} \left(k_5 + k_{5+1} \right) + k_5 k_{5+1} + a_{12} a_{21} \\ q_1 &= a_{21} \left(a_{11} + a_{22} - k_5 - k_{5+1} \right) \\ r_1 &= a_{21} a_{32} \end{aligned} \quad V.43$$

então

$$P_{\sim 1} = I - 2\omega_1 \omega_1^T \quad V.44$$

tendo portanto ω_1 apenas os três primeiros elementos não

nulos.

Procedendo desta mesma forma até $P_{\tilde{n}-1}$, em cada etapa a matriz de Householder $P_{\tilde{r}}$ tem um vetor $\tilde{\omega}_r$ cujos elementos não nulos são apenas os r , $r+1$ e $r+2$. Estes elementos são determinados pelos elementos r , $r+1$ e $r+2$ na $(r-1)$ coluna da matriz corrente.

O resultado é

$$P_{\tilde{n}-1} \cdots P_{\tilde{2}} P_{\tilde{1}} A_{\tilde{5}} P_{\tilde{1}}^T P_{\tilde{2}}^T \cdots P_{\tilde{n}-1}^T = H \quad \text{V.45}$$

onde H é uma matriz na forma superior de Hessenberg. Então

$$\tilde{Q} = Q = P_{\tilde{n}-1} \cdots P_{\tilde{2}} P_{\tilde{1}} \quad \text{V.46}$$

e

$$A_{\tilde{5}+2} = H \quad \text{V.47}$$

que se constitui no algoritimo QR em dois passos.

O término da iteração para obtenção de um autovalor pode-se dar de duas maneiras. Primeiro se $a_{n,n-1}$ se torna desprezível, então $a_{n,n}$ é um autovalor. Pode-se então eliminar a enéssima linha e coluna e observar o próximo autovalor. Alternativamente $a_{n-1,n-2}$ pode tornar-se desprezível. Neste caso os autovalores da matriz de ordem 2×2 no canto inferior direito podem ser considerados como os autovalores. Eliminam-se as linhas e colunas n e $(n-1)$ da matriz e continua-se.

Em geral o teste de convergência para um autovalor é combinado com um teste de elementos subdiagonais desprezíveis que permite separar a matriz em submatrizes. Procura-se o maior valor de i tal que $a_{i,i-1}$ é desprezível. Caso i seja igual a n ou $n-1$ ter-se-á obtido um ou dois

autovalores. Se isto não ocorre continua-se a iteração na submatriz linha i a n , sendo i igual a 1 se nenhum elemento subdiagonal é pequeno.

Após determinar i , examina-se as submatrizes nas linhas i até n para ver se o produto de dois elementos subdiagonais consecutivos são bastante pequenos de forma que se possa trabalhar com uma submatriz ainda menor, começando por exemplo na linha m . Pode-se começar a partir de $m = n - 2$ e decrescer até $i + 1$, computando p , q e r de acordo com as equações (V.43) trocando 1 por m e 2 por $m + 1$. Supondo serem estes os elementos da primeira matriz "especial" de Householder em um QR com dois passos e como não se está fazendo um ciclo completo de multiplicações conforme a equação (V.45) aparecem elementos não nulos nas posições $(m + 1, m - 1)$, $(m + 2, m - 1)$ e $(m + 2, m)$, sendo que os dois primeiros devem ser pequenos comparados com os da diagonal localizados em $a_{m-1, m-1}$, $a_{m, m}$ e $a_{m+1, m+1}$. Um critério aproximado que satisfaz é

$$|a_{m, m-1}| (|q| + |r|) \ll |p| (|a_{m+1, m+1}| + |a_{m, m}| + |a_{m-1, m-1}|)$$

V.48

Rotinas em linguagem fortran envolvendo as três etapas anteriores, do balanceamento de uma matriz até a obtenção dos autovalores pelo método QR em dois passos são apresentados por PRESS et alii (1989).

Outro fator importante no cálculo de autovalores e vetores de problemas não simétricos é estimar de uma forma prática, um índice de performance ou a condição numérica do problema, seja para autovalor ou vetor isolado ou no caso de multiplicidade. Esta condição numérica representada por um número, mede a sensibilidade da solução com relação a pequenas variações nos elementos da matriz. Em geral se o número é grande o problema é mal condicionado. Para evitar "overflow", computa-se o recíproco da condição numérica.

A condição numérica mede as mudanças nos autovalores e vetores de uma matriz \tilde{A} quando uma perturbação \tilde{E} é adicionada a ela. Isto pode ser utilizado para estimar

erros na soluções. O trabalho de BAI, DEMMEL e MCKENNEY (1989) apresenta a teoria e o programa relacionado com a condição numérica.

Seja um simples autovalor λ de uma matriz A de ordem $n \times n$ com autovetores unitários a esquerda y e a direita x . Em outras palavras $Ax = \lambda x$, $y^T A = \lambda y^T$, e sendo $\|\cdot\|_2$ a norma Euclidiana $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$. Definindo-se o projetor espectral de λ , P como

$$P = (x y^T) / (y^T x) \quad V.49$$

sendo

$$\|P\|_2 = 1 / |y^T x| \quad V.50$$

a secante do ângulo entre x e y

Seja E uma perturbação em A e $\varepsilon_2 = \|E\|_2$. Seja também λ' o autovalor de $A + E$. WILKINSON (1965) estabelece como limites 2 e 3

$$|\lambda' - \lambda| \leq \varepsilon_2 \|P\|_2 \quad V.51$$

$$|\lambda' - \lambda| \leq \eta \varepsilon_2 \|P\|_2 \quad V.52$$

sendo ε_2 pequeno e η um coeficiente de evaporação.

Outros limites envolvendo outras condições podem ser observados nas duas referências anteriores, sendo as condições numéricas sempre funções de $\|P\|_2$. A rotina STRSNA apresentada por BAI, DEMMEL e MCKENNEY (1989) calcula por exemplo a condição numérica de um autovalor que retorna na variável correspondente a $1 / \|P\|_2$ para evitar "overflow" para autovalores mal condicionados.

As rotinas implementadas no programa são cons-

tantes do MANUAL DO IMSL (International Mathematical and Statisc Language) que fazem parte da biblioteca do Sistema Unisys.

A solução do problema na forma standard é resolvida pela rotina EIGRF que se propõe a obtenção de autovalores e vetores de uma matriz cheia, real. As técnicas e algoritimos utilizados são os descritos anteriormente e tendo como principal referência os trabalhos de SMITH et alii (1970) e SMITH et alii (1974).

A solução do problema na forma generalizada é uma proposição da rotina EIGZF, só que os algoritimos utilizados reúnem-se em um processo denominado QZ, trabalhos de MOLER e STEWART (1972) e (1973), sendo este processo não uma simples variante do método QR, mas sim envolvendo todas as operações desde a transformação das matrizes até a obtenção dos autovalores.

V.3) SUBESPAÇO FRONTAL NÃO-SIMÉTRICO

O método de iteração em subespaço já bastante utilizado na solução de problemas com matrizes simétricas, principalmente nos trabalhos de BATHE (1982), baseia-se em várias técnicas, principalmente a iteração inversa e a análise de Rayleigh-Ritz.

Para o problema não simétrico, o algoritimo implementado resume-se em:

- a) Obtenção da Matriz de Massa Concentrada Global M .
- b) Formação da Base E_k ou dos vetores de partida Y_k .
- c) Geração Frontal da rigidez K e opcionalmente da massa consistente \tilde{M} com solução/resolução da iteração inversa múltipla. Para $k= 1,2,\dots$ iterar de E_k a E_{k+1} :

$$c.1) \quad K \bar{X}_{k+1} = Y_k$$

$$c.2) \text{ Projecção das matrizes } K \text{ e } \tilde{M} \text{ em } E_{k+1}$$

$$\tilde{K}_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T K \bar{X}_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T Y_k$$

$$\bar{Y}_{k+1} = M \bar{X}_{k+1}$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1}$$

c.3) Solução do problema de autovalores e vetores

$$\tilde{K}_{k+1} Q_{k+1} = \Lambda_{k+1} M_{k+1} Q_{k+1}$$

c.4) Encontram-se as aproximações

$$\text{Autovalores} \longrightarrow \Lambda_{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} & \dots & \lambda_i^{k+1} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\text{Autovetores} \longrightarrow \bar{Q}_{k+1} = \bar{X}_{k+1} Q_{k+1}$$

c.5) Melhor aproximação dos vetores de iteração

$$Y_{k+1} = \bar{Y}_{k+1} Q_{k+1} = M \bar{X}_{k=1} Q_{k=1}$$

c.6) Verificação de convergência

$$\frac{|\lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k|}{\lambda_i^{k+1}} < \varepsilon \quad i = 1, 2 \dots i \dots$$

ε - tolerância especificada

No caso de se pretender realizar uma superposição modal, seria necessário calcular também os autovetores a esquerda. Para tanto, conforme apresentam VIANNA e LIMA (1988), como os autovetores de esquerda, não participam do processo iterativo, basta obter a solução da equação adjunta do item (c.3), ou seja

$$\tilde{K}_{k+1}^T Q_{k+1}^{esq} = \Lambda_{k+1} M_{k+1} Q_{k+1}^{esq}$$

sendo as aproximações dos autovetores a esquerda

$$\tilde{\psi}_{k+1} = \tilde{X}_{k+1} Q_{k+1}^{esq}$$

Com relação ao algoritmo acima, cujo objetivo principal é a obtenção de autovalores, no caso de se adotar a massa concentrada não há necessidade de armazenamentos e multiplicações frontais. No caso da massa consistente tais procedimentos já se tornam necessários. Outra simplificação no algoritmo é que na segunda ou demais iterações utiliza-se a técnica da resolução, eliminando-se apenas os vetores. O mesmo quando não se atualiza a rigidez.

Para a dimensão m do subespaço adota-se para caso não simétrico $m=2p$ (mínimo $m=10$) onde p é o número de autovalores desejados. Os vetores de iteração de partida devem ser linearmente independentes entre si e podem ser fixados de várias formas, BATHE (1982) e BATHE e RAMASWAMY (1980), incluindo nesta última referência os vetores de LANCZOS como partida. Uma forma garantida principalmente em problemas simétricos é adotar como primeira coluna de E_k simplesmente a diagonal da matriz de massa e para as outras colunas o número 1 na coordenada com menor valor de k_{ii}/m_{ii} .

O algoritmo encerra-se através da observação dos autovalores calculados, uma vez que o objetivo da implementação é a pesquisa de parâmetros críticos. Como primeiro passo são analisados os autovalores. Se qualquer um deles é complexo ou real negativo, para-se pois já foi ultrapassado o valor do parâmetro crítico. Caso contrário segue-se incrementando o carregamento e repetindo o algoritmo.

CAPÍTULO VI**ESTUDO DE CASOS****VI.1) INTRODUÇÃO**

Como já referido no Capítulo I, os casos analisados tem como objetivo testar as formulações desenvolvidas, bem como os procedimentos implementados, do que resolver problemas específicos de engenharia, pois os mesmos por mais simples demandam um enorme esforço computacional não compatível com o equipamento disponível, BURROUGHS 6900.

Através de um programa desenvolvido em linguagem FORTRAN, cujo manual de utilização encontra-se no Apêndice, procurou-se analisar o comportamento não linear de alguns sistemas estruturais não complexos, sob cargas não conservativas e compará-los com as soluções existentes na literatura, soluções estas bastante escassas quando se trata de análise não linear de placas e cascas.

VI.2) PROBLEMAS ONDE APENAS OCORREM GRANDES DESLOCAMENTOS

Analisa-se um pórtico com uma extremidade engastada e outra livre, sujeito a uma força concentrada não conservativa na extremidade livre, a qual mantém-se durante a deformação sempre normal ao eixo do pórtico.

Na figura VI.1 apresentam-se os dados bem como a malha adotada e na figura VI.2 o mesmo problema apenas substituindo a carga concentrada por uma distribuída em um pequeno elemento. Nos quadros VI.1 e VI.2 indicam-se os valores dos incrementos nas cargas concentrada e

distribuída respectivamente. Na figura VI.3 os deslocamentos e rotação da extremidade do balanço e na figura VI.4 representa-se a deformada do eixo do pórtico e a curva carga autovalor do primeiro modo na figura VI.5. No quadro VI.3, valores dos deslocamentos da extremidade do balanço para alguns níveis do carregamento.

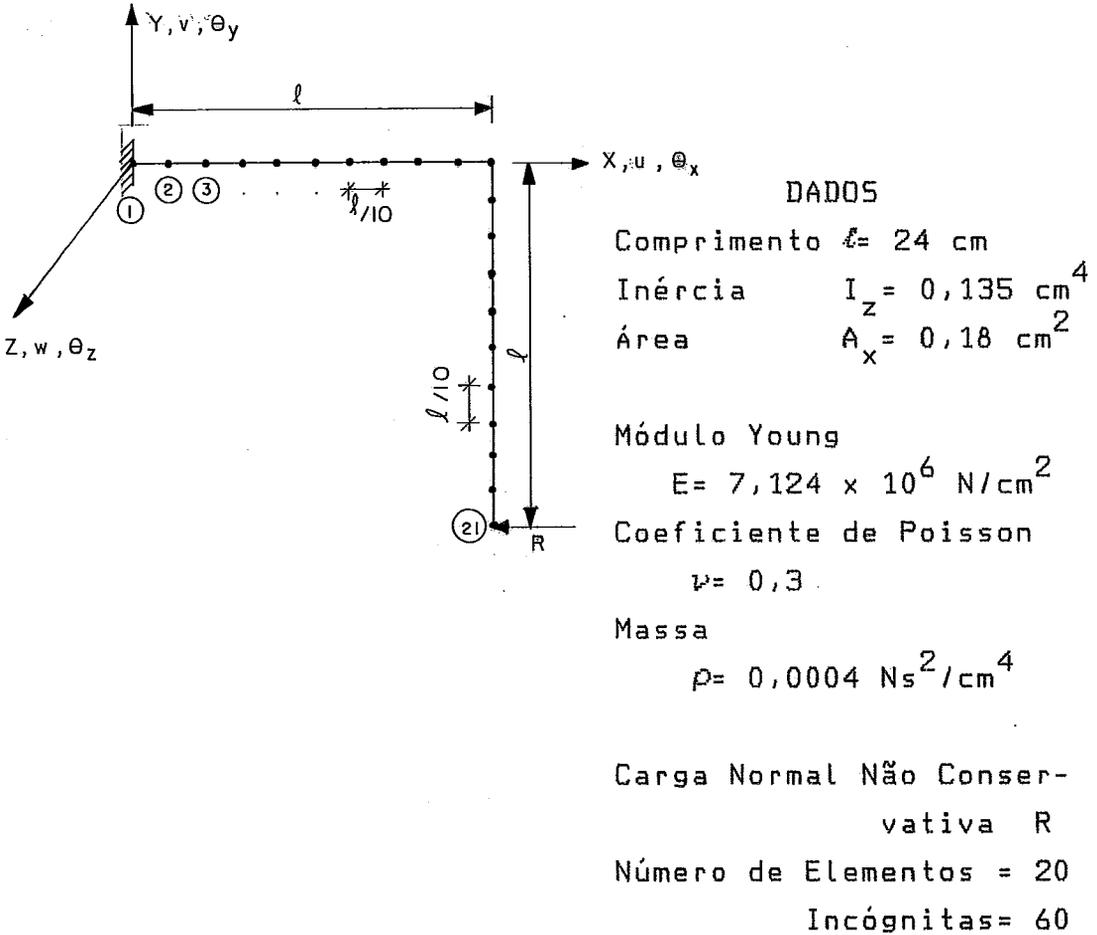


Figura VI.1

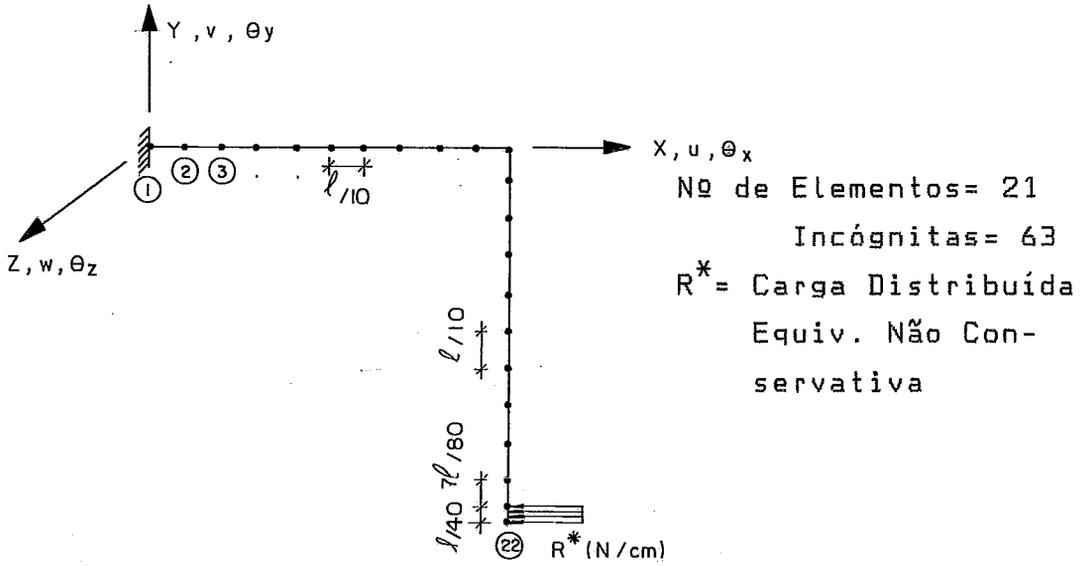


Figura VI.2

QUADRO VI.1

INCREMENTOS	
NÚMEROS	VALORES (N)
1 a 80	15,0

QUADRO VI.2

INCREMENTOS		
NÚMEROS	N/cm	N
1 a 70	25,0	15,0
71 a 85	16,67	10,0
86 a 165	8,34	5,0
166 a 173	333,34	200,0
174 a 175	833,34	500,0

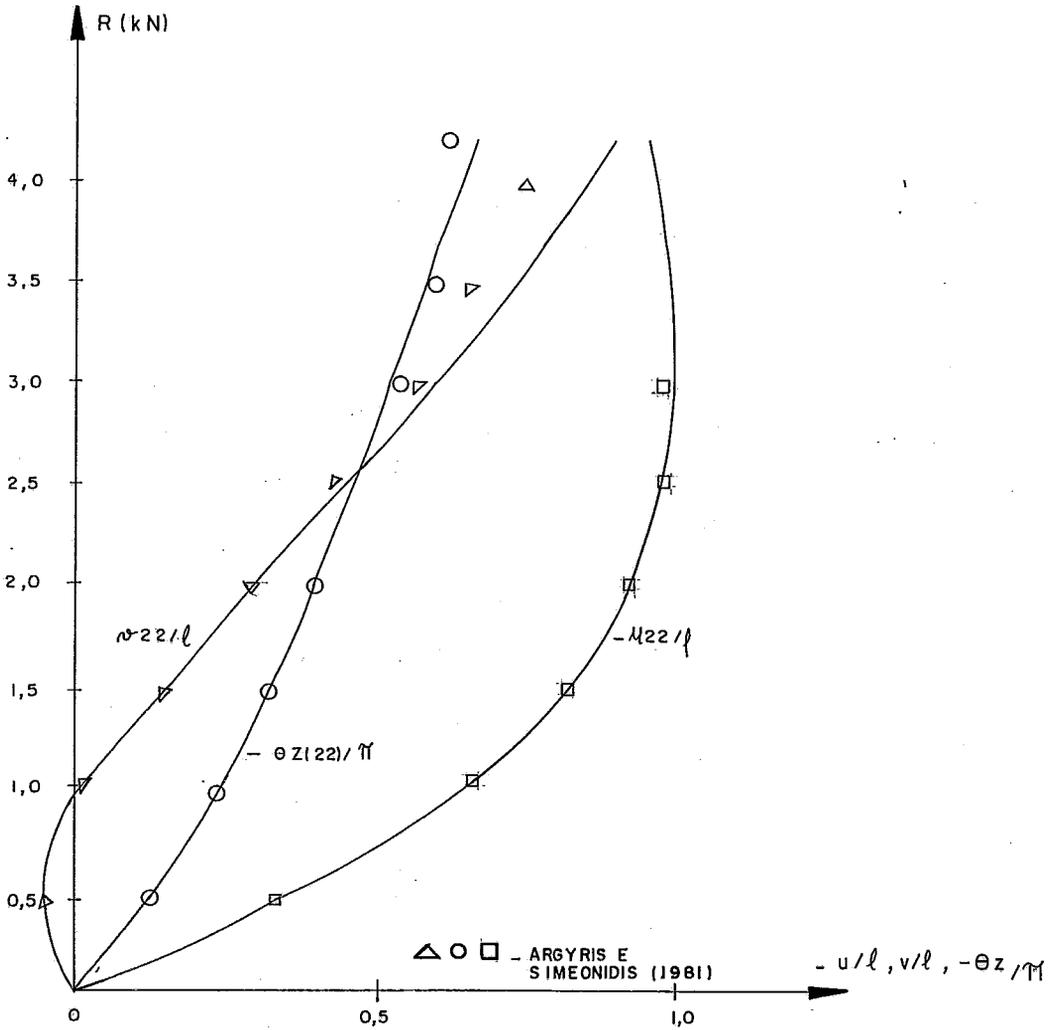


Figura VI.3

QUADRO VI.3

CARGA (N)	DESLOCAMENTOS DOS NÓS 21 OU 22		
	DIREÇÃO x-u (cm)	DIREÇÃO y-v (cm)	ROTAÇÃO z- θ_z (rd)
450,0	-8,085	-1,348	-0,374
1050,0	-15,997	0,722	-0,786
1475,0	-19,642	3,442	-1,028
2000,0	-22,258	7,268	-1,278
2600,0	-23,751	11,705	-1,532
3000,0	-24,141	14,510	-1,687
3700,0	-23,942	18,998	-1,947
4200,0	-23,254	21,921	-2,142

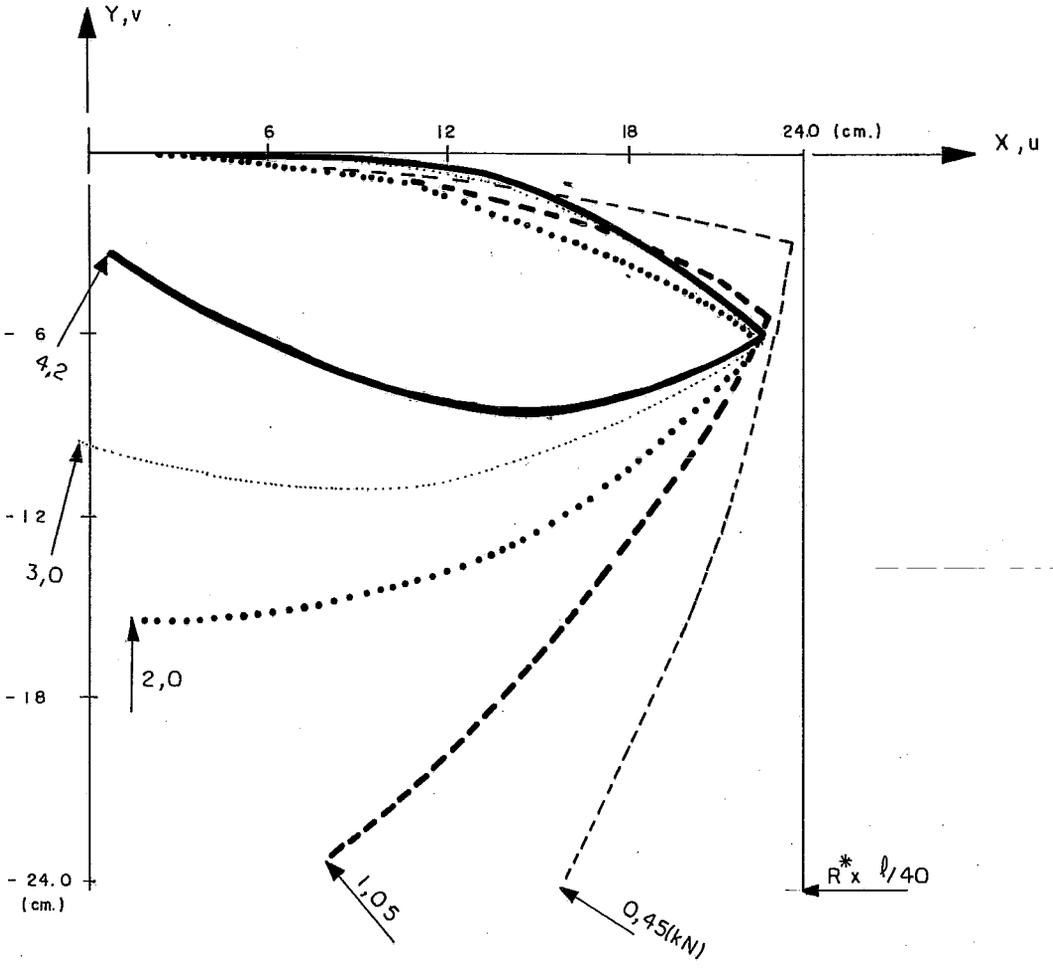


Figura VI.4

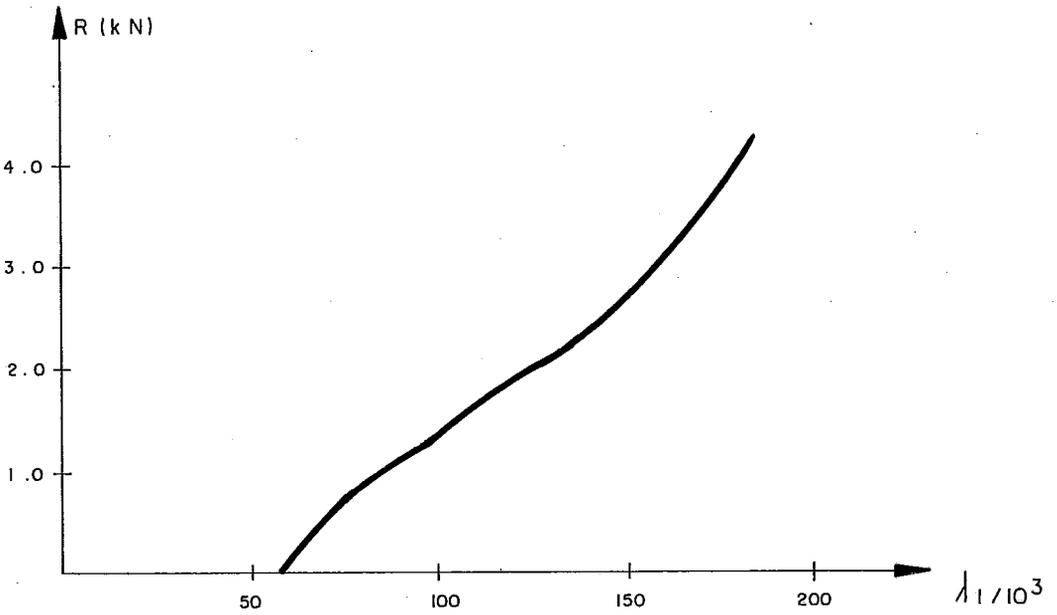


Figura VI.5

VI.3) PROBLEMAS ONDE A INSTABILIDADE OCORRE SOMENTE QUANDO OCORREM GRANDES DESLOCAMENTOS

VI.3.1) SISTEMA NÃO CONSERVATIVO DO TIPO DIVERGENTE

Investiga-se neste caso o comportamento de um pórtico bi-rotulado sujeito a uma força concentrada não conservativa, aplicada excentricamente, sendo que a mesma mantém-se sempre normal ao eixo deformado.

Na figura VI.6 apresentam-se os dados e a malha utilizada para a carga concentrada, e na figura VI.7 a malha para a consideração de uma carga distribuída uniforme não conservativa, equivalente a concentrada.

Neste sistema a perda da estabilidade se dá por divergência, sendo apresentados na figura VI.8 os deslocamentos do nó 25, ponto de aplicação da carga concentrada não conservativa e desta considerada como conservativa. Para a carga distribuída equivalente, adotou-se a média entre os deslocamentos dos nós 13 e 14. No quadro VI.4 estão indicados o número de incrementos e o valor dos mesmos. Na figura VI.9 as curvas dos autovalores correspondentes a flambagem e divergência, e os níveis das cargas quando a instabilidade ocorre. Na figura VI.10 a deformada do eixo do pórtico.

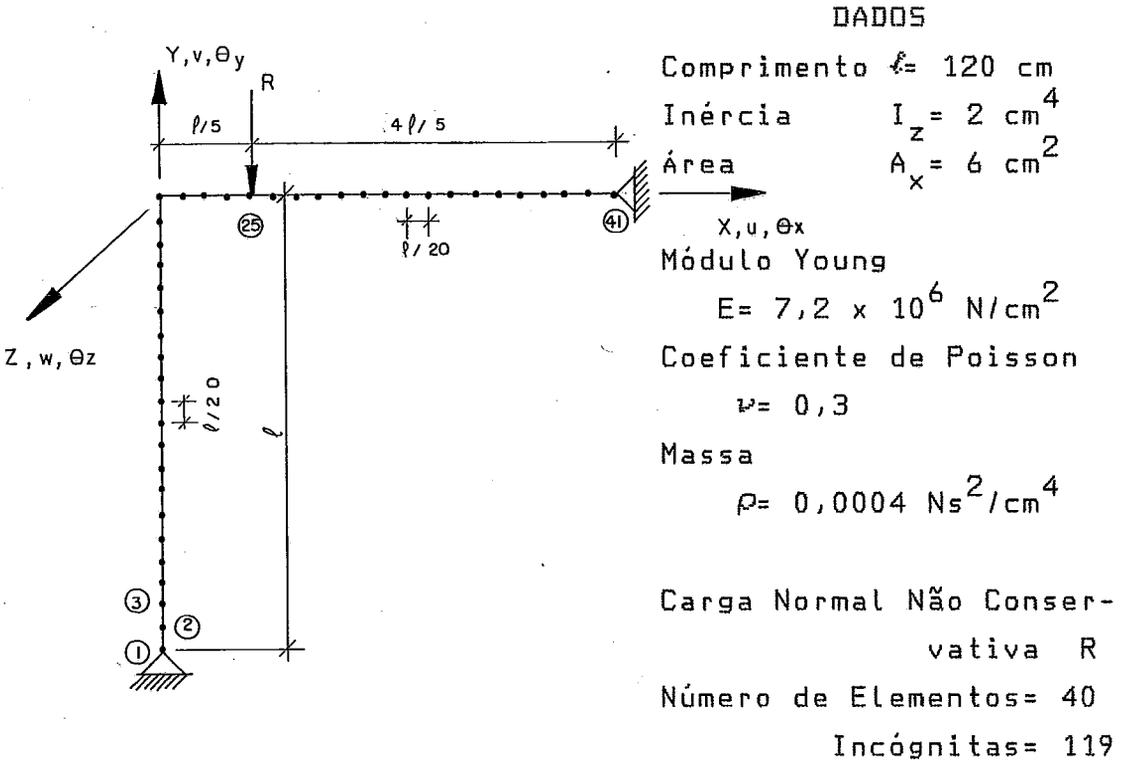


Figura VI.6

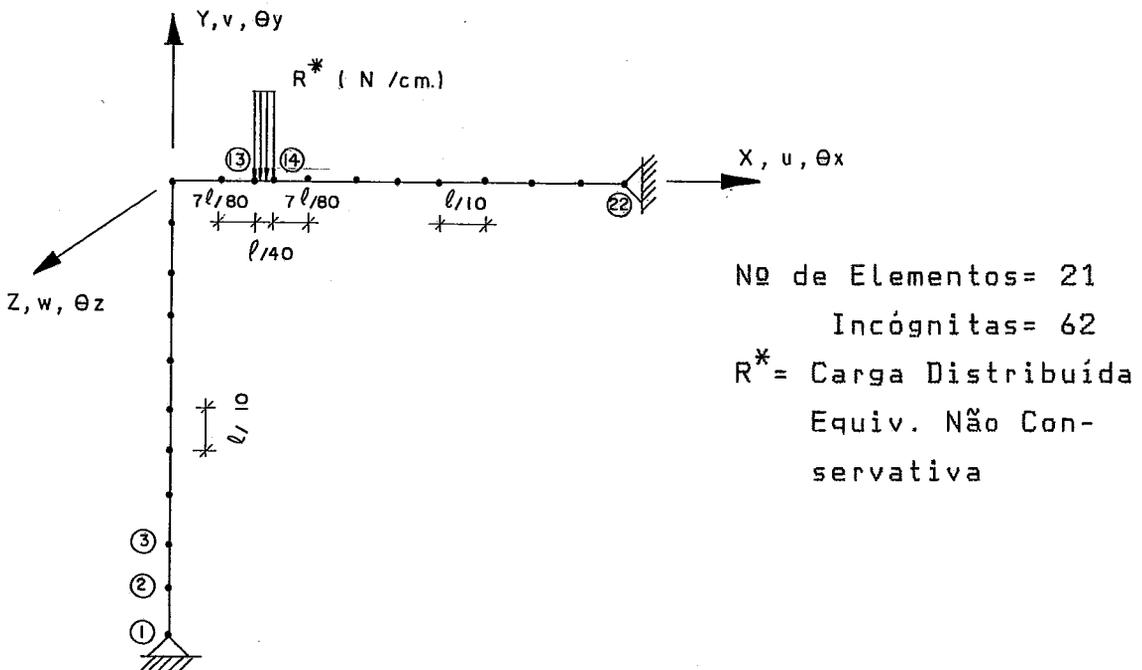


Figura VI.7

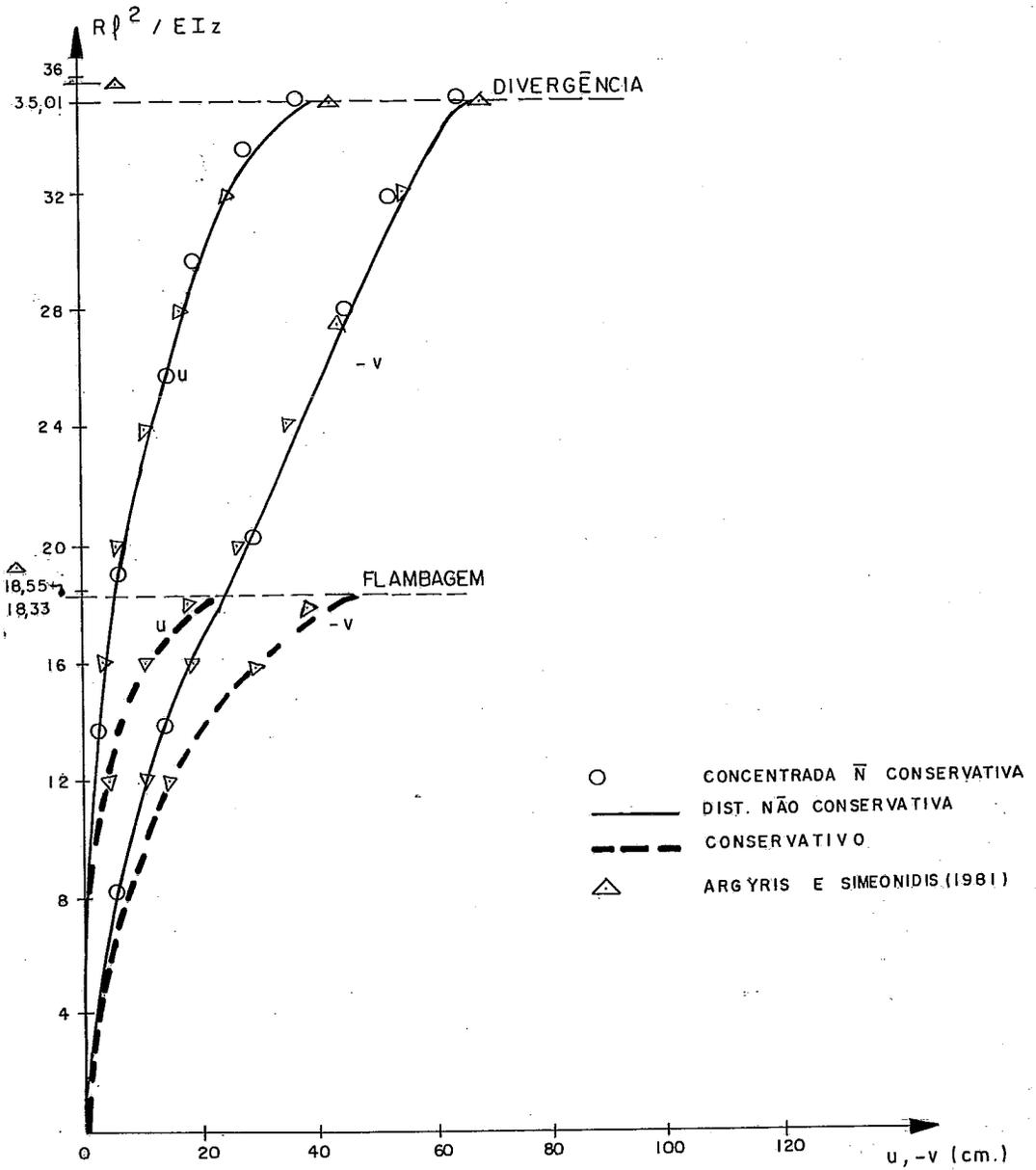


Figura VI.8

QUADRO VI.4

NÚMEROS	CONSERVATIVO (N)	NÃO CONSERVATIVO	
		CONCENTRADO (N)	DISTRIBUÍDO (N/cm)
1 a 45	360,0		
46 a 55	180,0		
55 a 85	30,0		
1 a 77		360,0	
78 a 90		120,0	
91 a 205		60,0	
1 a 95			120,0
96 a 99			40,0
100 a 125			10,0

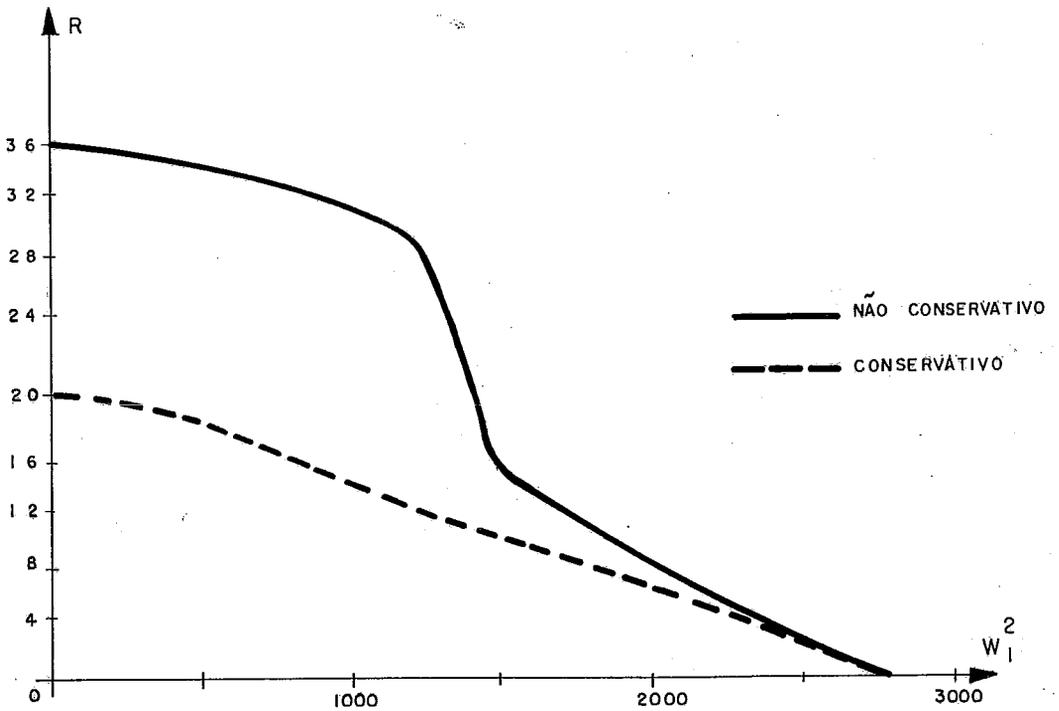


Figura VI.9

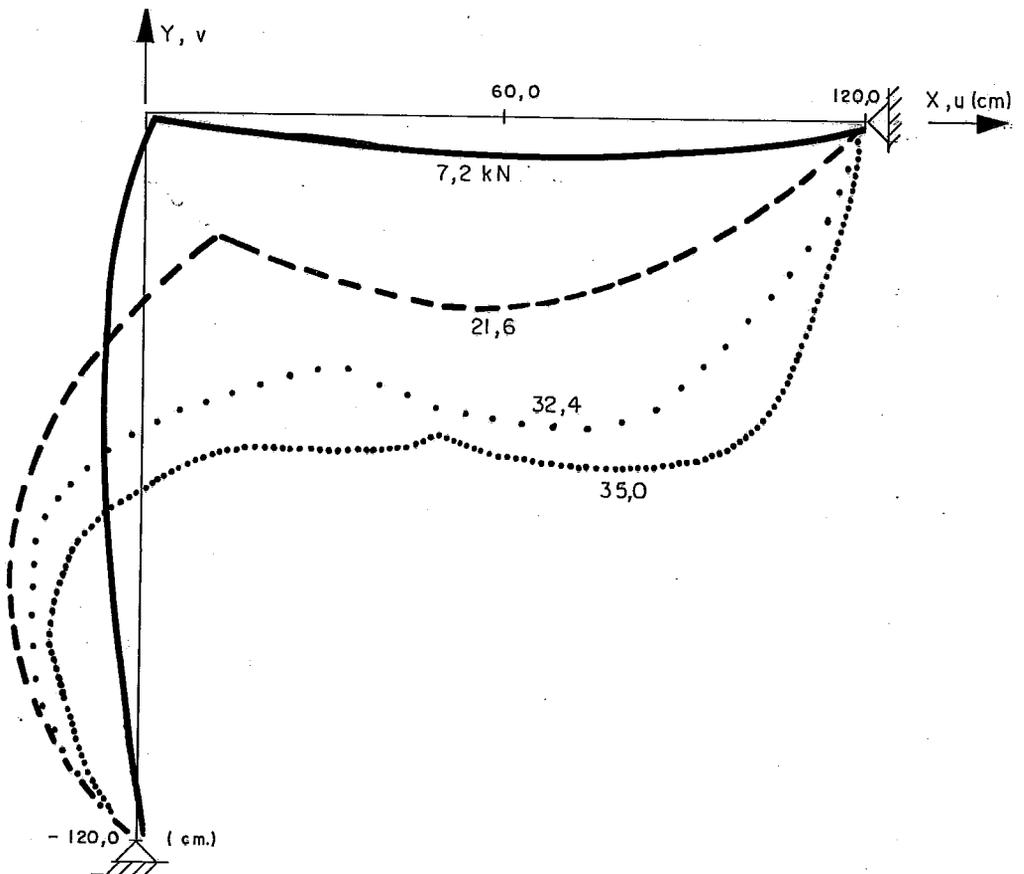
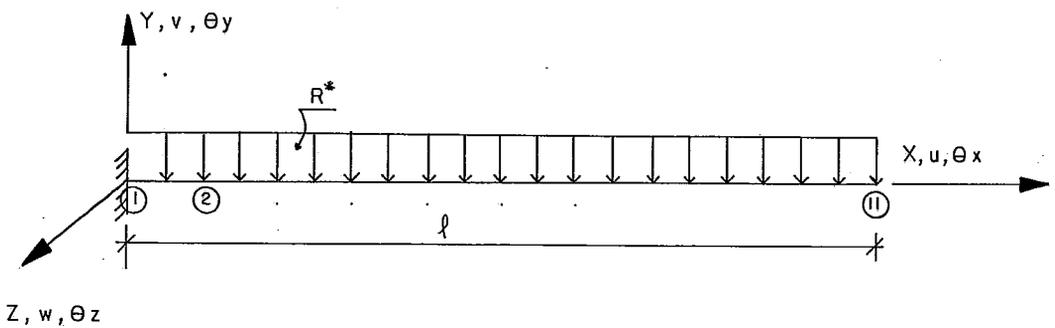


Figura VI.10

VI.3.2) SISTEMA NÃO CONSERVATIVO DO TIPO FLUTTER

Estuda-se a perda da estabilidade ocorrendo na forma de flutter, devido a atuação de uma carga distribuída uniforme não conservativa em uma viga em balanço, carga esta que se mantém sempre normal ao eixo deformado.

Na figura VI.11 apresentam-se os dados e na figura VI.12 os deslocamentos da extremidade do balanço, nó 11. Na figura VI.13 algumas deformadas e os níveis de carga correspondentes. No quadro VI.5 os valores dos incrementos na carga e na figura VI.14 o histórico dos autovalores.



DADOS

Comprimento $l = 100$ cm

Inércia $I_z = 1,666667$ cm⁴

Área $A_x = 20$ cm²

Módulo Young $E = 2,1 \times 10^7$ N/cm²

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$

Massa $\rho = 0,0008$ Ns²/cm⁴

R^* - Carga Distribuída Uniforme Não Conservativa

Número de Elementos = 10

Incógnitas = 30

Figura VI.11

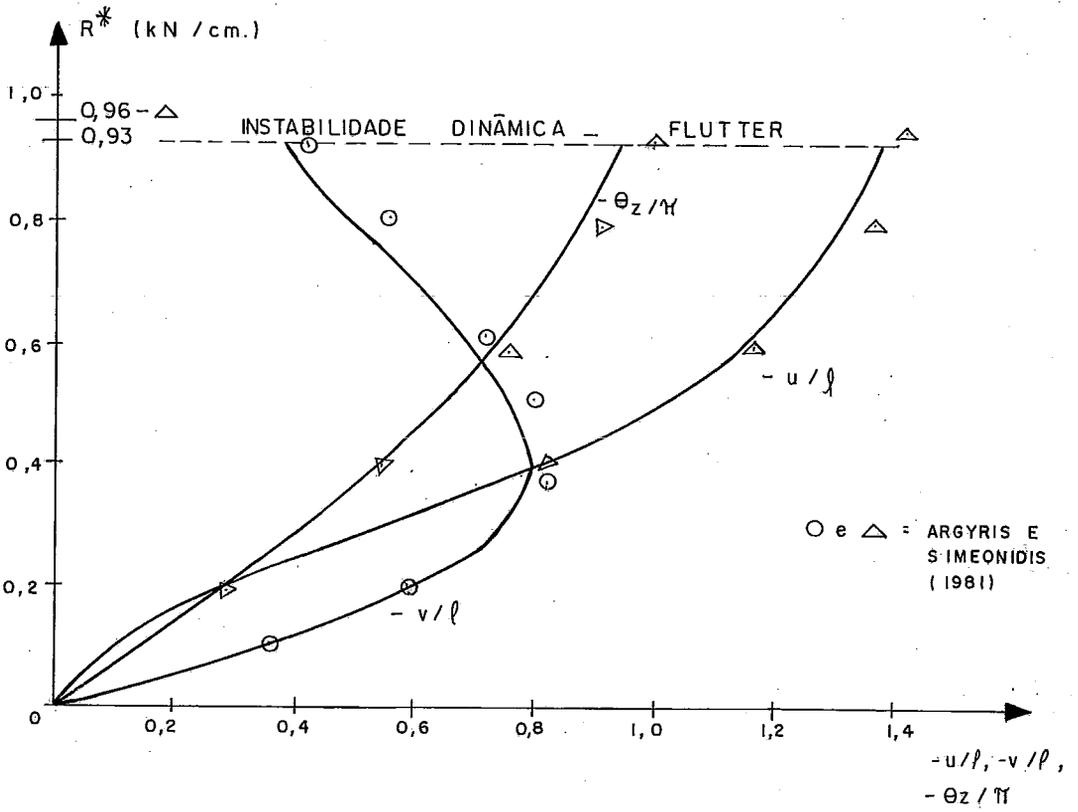


Figura VI.12

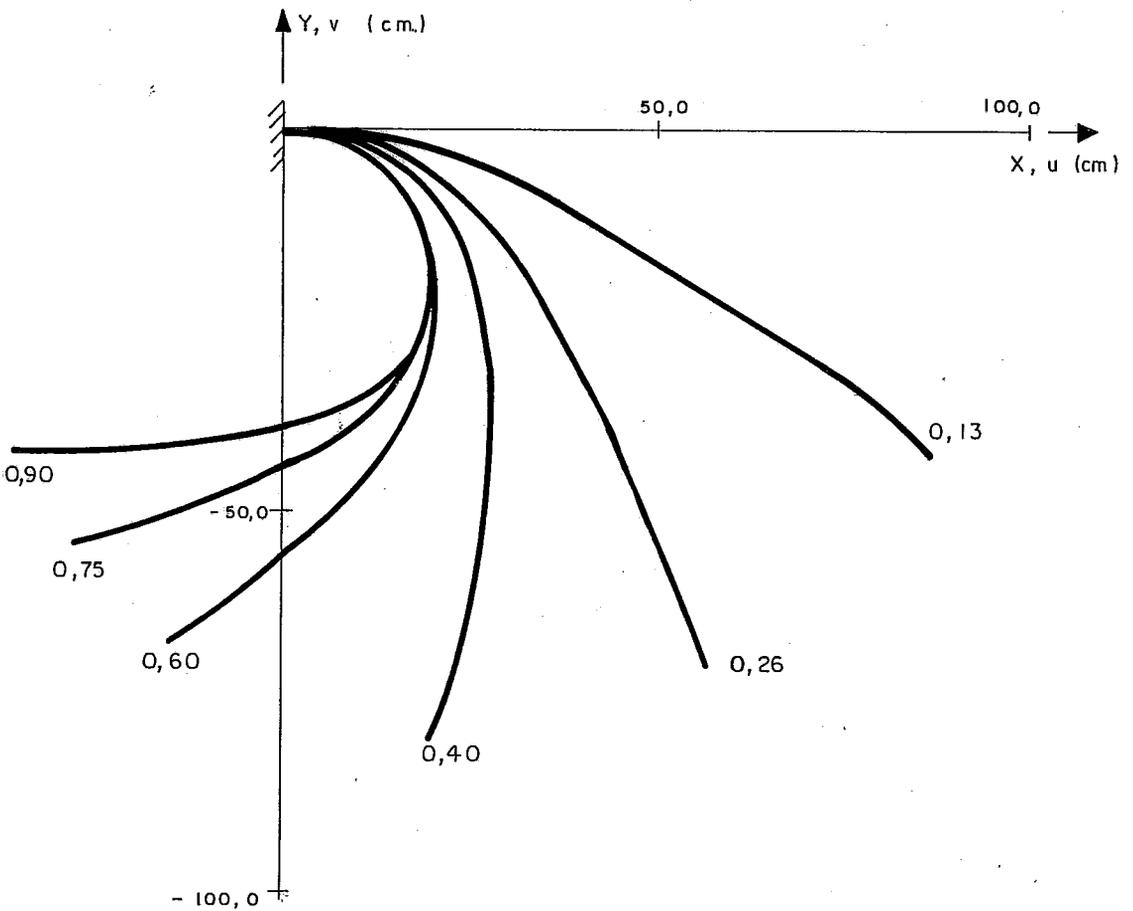


Figura VI.13

QUADRO VI.5

INCREMENTOS	
NÚMEROS	VALORES (N/cm)
1 a 12	26,0
13 a 88	5,0
89 a 110	26,0

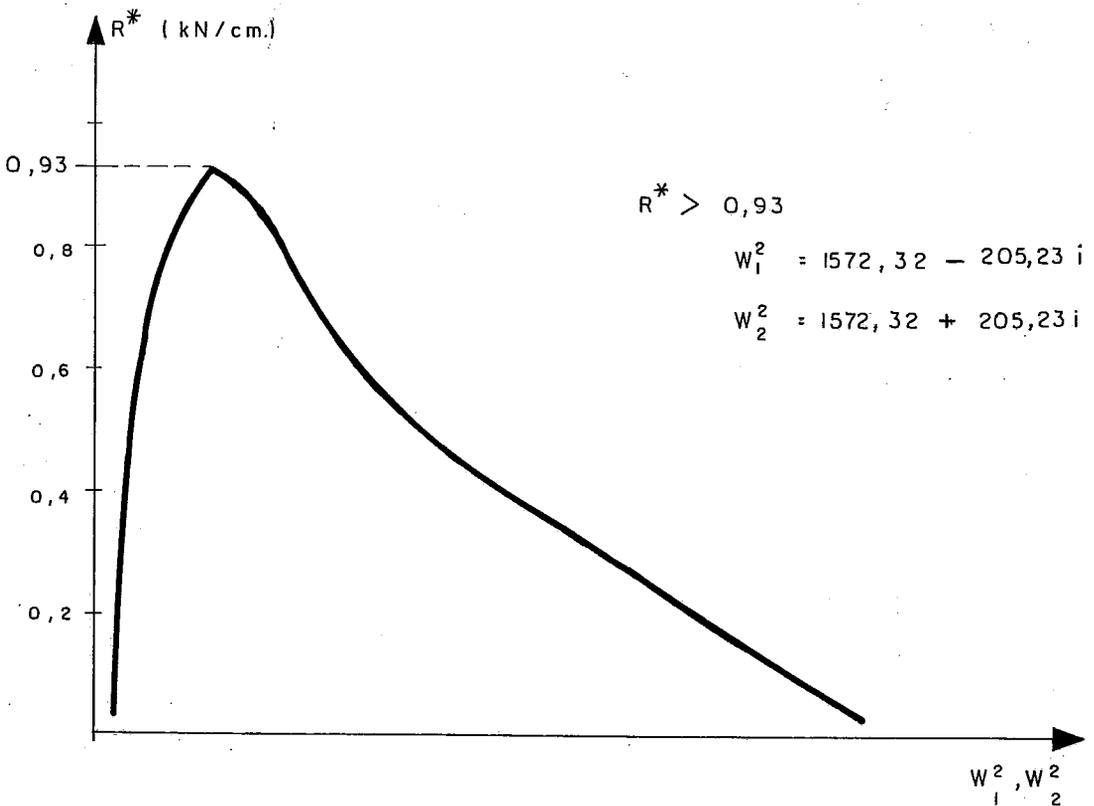
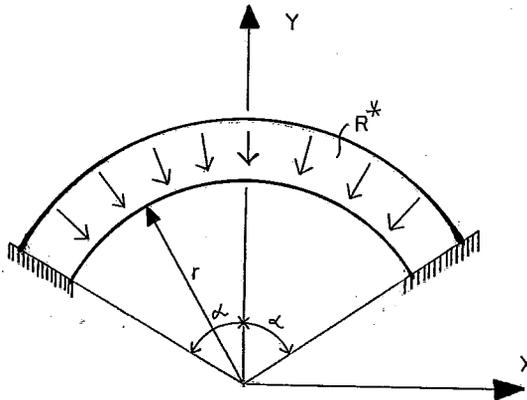


Figura VI.14

VI.4) INSTABILIDADE INICIAL

VI.4.1) SISTEMA NÃO CONSERVATIVO DO TIPO DIVERGENTE

Na figura VI.15 apresenta-se o arco analisado, bem como os dados correspondentes. Apesar de ser instabilidade inicial utilizou-se a formulação não linear para estudo do mesmo quando sujeito a uma carga distribuída uniforme não conservativa que mantém-se sempre normal ao eixo deformado. No quadro VI.6 estão os incrementos utilizados e na figura VI.16 a curva carga-autovalor.



DADOS

Raio $r = 254 \text{ cm}$
 Inércia $I_z = 13,1 \text{ cm}^4$
 Área $A_x = 4,05 \text{ cm}^2$
 Ângulo $\alpha = 60$

Módulo de Young $E = 7,040 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$

R^* - Carga Distribuída Uniforme Não Conservativa

Número de Elementos = 12

Incógnitas = 34
 (Simetria)

Figura VI.15

QUADRO VI.6

INCREMENTOS	
NÚMEROS	VALORES (N/cm)
1 a 10	15,00

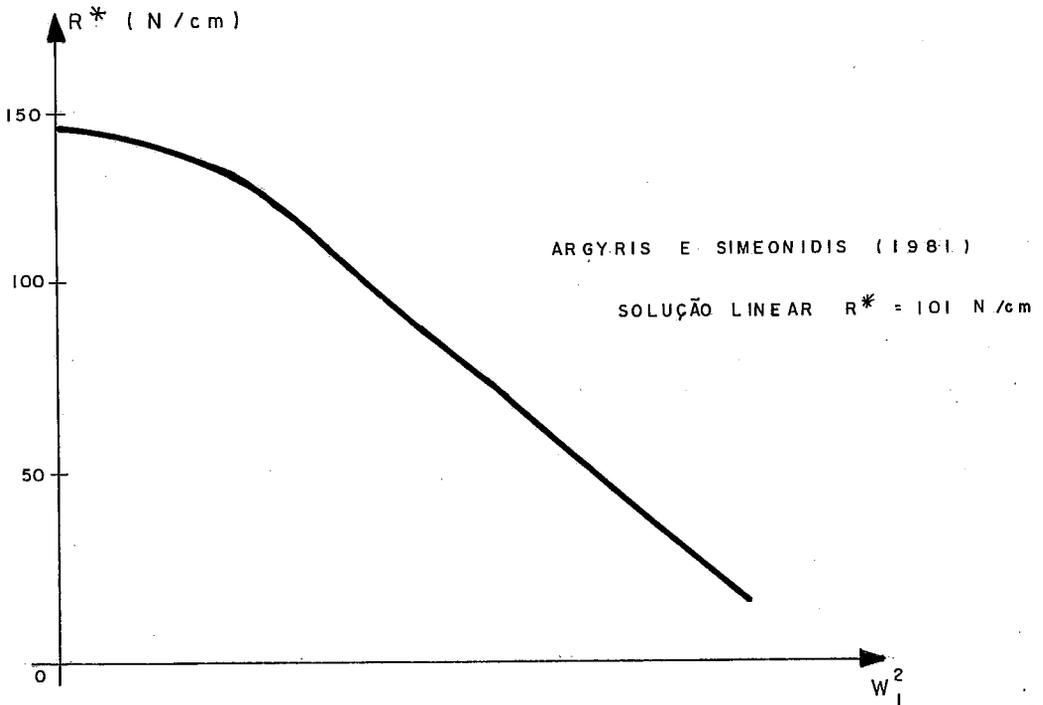
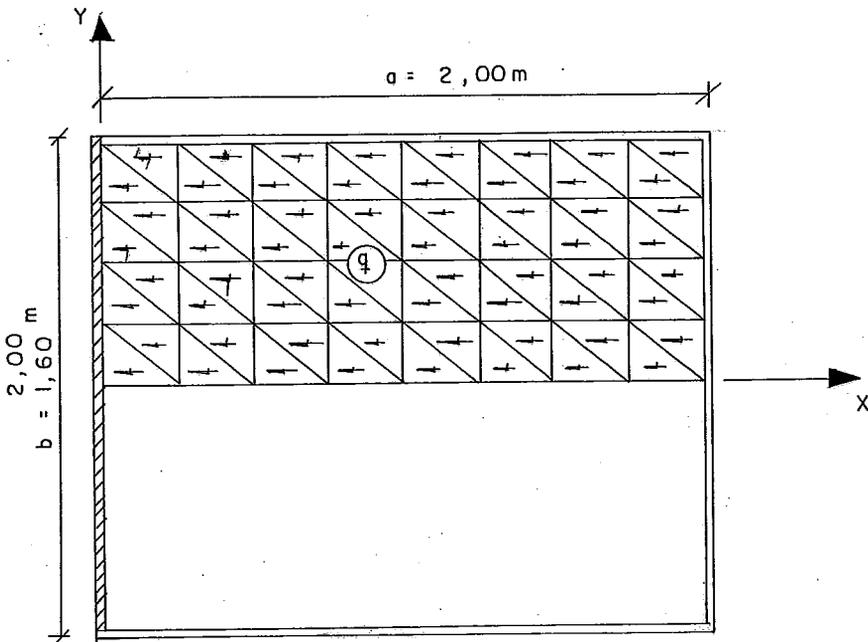


Figura VI.16

VI.4.2) SISTEMA NÃO CONSERVATIVO DO TIPO FLUTTER

A ocorrência de flutter como forma de instabilidade com pequenos deslocamentos, porém analisada não linearmente, é apresentada neste caso para o painel da figura VI.17, onde indicam-se as características materiais e geométricas, bem como as condições de contorno, a malha utilizada e a carga atuante q .



$$r = \frac{b}{a} = 0,8$$

Mód. Young $E = 6,0 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ $r = 0,8$
 $E = 3,0 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ $r = 1,0$

Espessura $h = 0,06 \text{ m}$

Número de Elementos = 64

C. Poisson $\nu = 0,2$

Números de Nós = 45

Bordos

— — — — — Simplesmente apoiado
 // // // // // Engastado

Figura VI.17

QUADRO VI.8

NÚMERO DOS INCREMENTOS	CARGA (t/m^2)	
	HORIZONTAL NÃO CONSERVATIVO	VERTICAL CONSERVATIVO
1 a 10	220,0	10,0 $r = 0,8$
	120,0	0,2 $r = 1,0$
PARÂMETRO CRÍTICO DE FLUTTER	$r = \frac{qa^3}{D} =$	93,86 $r = 0,8$ 102,4 $r = 1,0$
D = $Et^3/12(1-\nu^2)$ - Rigidez a flexão		

A carga uniformemente distribuída q , não conservativa atuando na superfície média do painel mantém-se sempre tangencial a esta superfície.

No quadro VI.8 estão relacionados os incrementos bem como os utilizados para uma carga vertical conservativa para obtenção do parâmetro crítico indicado.

LEIPHOLZ e PFENDT (1982) em um estudo linear de placas totalmente apoiadas no contorno e sujeitas a carga distribuída uniforme tangencial a superfície média, determinam as formas de instabilidade das mesmas. Neste estudo utilizam funções denominadas funções próprias de vigas em vibração. As formas de instabilidade são determinadas por uma interpretação geométrica do problema ou por um caminho puramente numérico. Na primeira via chegam a parâmetros críticos que correspondem a cargas de flutter que nunca se materializam, o que chamam de modo misto, ocorrência de divergência e posteriormente flutter. No caminho numérico, concluem que para uma placa com carregamento e condições de contorno análogas a da figura VI.17 que dependendo da relação entre os lados existem a formas de instabilidade

$0 < r < 0,58$ Divergência

$0,58 < r < 0,95$ Flutter

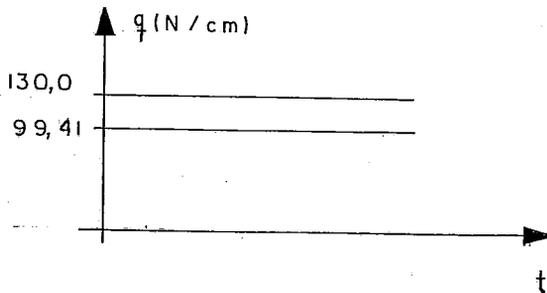
$0,95 < r$ Divergência

No exemplo da figura VI.17 e quadro VI.8, obteve-se flutter o que está de acordo com o estudo dos autores citados, o que não ocorre quando $r = 1,0$.

VI.5) SISTEMA SOB CARGA DINÂMICA, NÃO CONSERVATIVA

A viga da figura VI.11 é analisada para os carregamentos não conservativos, uniformemente distribuído, cuja variação com o tempo é indicada na figura VI.18. Nesta mesma figura, são apresentadas também as características tipo período fundamental e valores dos incrementos utilizados.

Na figura VI.19 são apresentados os resultados, ou seja, o deslocamento vertical da extremidade do balanço, não só para a análise dinâmica não linear não conservativa como também para a conservativa, incluindo a estática não linear conservativa. Os resultados são comparados com BATHE (1979), sendo que nesse trabalho o autor inclui amortecimento.



Período Fundamental $T_f = 0,1208$

Incrementos no tempo $\Delta t = T_f / 100 = 0,0012 \text{ s}$

Figura VI.18

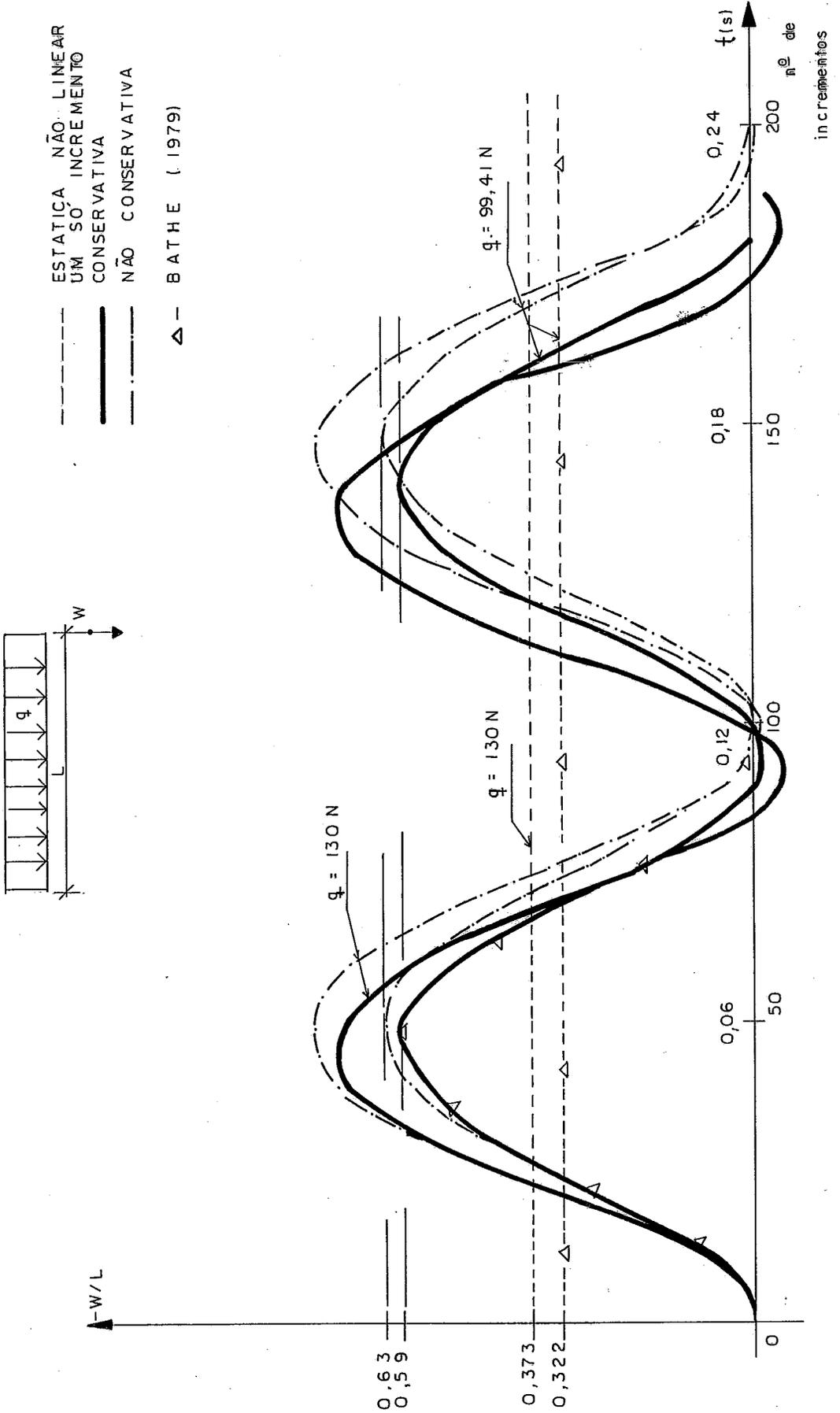


Figura VI.19

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Como primeira e talvez uma das mais marcantes observações é o contraste existente nos exemplos dos itens (VI.2) e (VI.3.1) quando são comparadas as performances dos carregamentos concentrado e distribuído equivalente. Só para citar alguns valores numéricos, o exemplo do item (VI.3.1) quando adota-se uma malha com dez elementos e solicitado pela carga concentrada apresenta resultados que comparados com a distribuída equivalente ou com o da referência citada junto aos gráficos, valores que chegam a diferir próximo a divergência em até 30%. Refinando-se a malha para quinze elementos por barra este valor cai para aproximadamente 22%, sendo necessário vinte elementos e mesmo assim com uma tolerância para se obter a convergência de 1/500. A formulação da carga concentrada é mais aproximada quando passamos da diferencial para a aproximação incremental, para problemas com grandes não-linearidades. Para contornar estas questões recomenda-se adotar as soluções, sempre através da carga distribuída. Considerando ainda a carga concentrada em termos espaciais, quando sujeita a grandes rotações, ressalva-se que a formulação apresentada no item (II.5) é uma aproximação, merecendo por parte dos estudiosos uma pesquisa mais elaborada.

Conforme os exemplos apresentados no capítulo VI, não consta nenhum de instabilidade inicial, ou linear, que dependa da aplicação de uma perturbação, quando se utiliza a formulação não linear, para obter-se o ponto crítico e não cair em problemas de grandes deslocamentos. Isto exige um esforço computacional, sendo que tais problemas são facilmente resolvidos introduzindo-se a rigidez geométrica, ou seja, resolvendo-os como realmente o são, linearmente.

No exemplo do item (VI.3.1), na ocorrência da divergência o primeiro autovalor torna-se nulo e depois para um pequeno incremento na carga negativo. Continuando a incrementar a carga, os autovalores, inclusive o primeiro, quando calculados apresentam-se com valores enormes, ou

seja, não se consegue uma segunda carga de divergência, como na análise linear. A estrutura deforma-se muito para um pequeno acréscimo na carga e talvez a pesquisa de autovalores na pós flambagem ou divergência, ocorrendo com grandes deslocamentos, deveria ser associada a técnica de controle de deslocamentos.

No pós-flutter, assim que um par de autovalores tornam-se complexo conjugados, o programa para e não chegou-se a pesquisar os mesmos após esta fase, pois isto implicaria em uma aritmética complexa ou criação de algum novo artifício na programação.

Os resultados apresentados são sempre comparados na maioria das vezes com os obtidos de gráficos, através de leituras em escala, o que pode levar a algumas distorções. Nestes resultados procurou-se incluir o maior número de dados possíveis a fim de facilitar os interessados no assunto, uma vez que na maioria das referências utilizadas, foi grande muitas vezes o esforço de investigação e dedução para interpretar os dados e resultados, fatos estes que restringem ainda mais o número de exemplos.

No subespaço frontal não-simétrico, conforme já relatado no texto, utiliza-se no cálculo dos autovalores e vetores do sistema de equações reduzidas a rotina EIGRF, que resolve o problema na forma standard. Esta apresenta resultados excelentes o que já não ocorre com a rotina para problemas na forma generalizada, EIGRF, a qual mal resolve problemas lineares de vibração livre. Apesar de se trabalhar na forma standard, não houve nenhum problema quando da inversão da matriz de rigidez projetada no subespaço, mesmo com grandes não linearidades.

Para os vetores de partida no subespaço não simétrico, adotou-se o mesmo critério do problema simétrico, alterando-se ou aumentando-se o número dos autovalores calculados em função dos desejados, parâmetro este que varia e deve ser pesquisado em função do problema analisado. Apenas o que se ressalta é que se for calcular os autovalores correspondente a um incremento qualquer, devem ser calculados os autovalores em alguns incrementos anteriores, principalmente nos primeiros onde o problema é pratica-

mente linear e aproximadamente simétrico. Adotando-se estes critérios, obtém-se os autovalores, praticamente na primeira iteração, sendo que as demais apenas aprimoram os valores obtidos.

A análise dinâmica, cujo interesse seria o cálculo nos pós-flutter, apesar de ser uma integração numérica do sistema total, convergiu na maioria das vezes com apenas duas iterações no exemplo do item (VI.5).

A programação elaborada, conforme apresentado no manual, são várias as opções mas nem todas foram testadas, por exemplo a massa consistente. Este programa permite, desde que se disponha de um computador de porte, analisar por exemplo efeitos de vento (como carregamento não conservativo) em edifícios altos, cascos de navios sob pressões oriundas do empuxo da água, efeitos do vento em tabuleiros de pontes de grandes vãos e vários outros problemas. De imediato algumas adaptações e implementações tornam-se necessárias, em termos de uma primeira otimização, citando entre elas a superposição dos modos de Lanczos, para substituir a integração numérica.

Em suma tentou-se criar uma infra-estrutura (Programa ANER), da qual podem-se erguer vários outros trabalhos na área não conservativa. Estes futuros trabalhos ou pesquisas devem envolver otimizações das formulações atuais, principalmente em se tratando do programa elaborado que a princípio pode ser aprimorado e posteriormente introduzidas novas rotinas, desde as relativas a novos elementos, não linearidade física, passando pela solução do sistema de equações até a obtenção dos esforços para os mais variados tipos de agentes externos. Espera-se que haja um interesse dos atuais e novos pesquisadores com relação a este tema de grande aplicação nos mais variados ramos da Engenharia, tendo-se ainda em conta que se o carregamento é não conservativo, adotá-lo como conservativo é uma simplificação que conduz a soluções na maioria das vezes anti-econômicas.

BIBLIOGRAFIA

- BOLOTIN, V.V., (1963). **Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability.** Pergamon Press, New York.
- NIKOLAI, E.L., (1928). "On the Stability of the Rectilinear Form of Equilibrium of a Bar in Compression and Torsion". *IZV. Leningr. Politekhn.* 31.
- NIKOLAI, E.L., (1930). "Über der Einflub der Torsion auf die Stabilität Rotierender Wellen". *Proc. of. the 3rd Congr. Appl. Mech., Stockholm.*
- MORRIS, J., (1951). "Torque and the Flexural Stability of a Cantilever". *Aircraft Eng.* 23, no 274.
- PFLÜGER, A., (1950). **Stabilitätsprobleme der Elastostatik.** pp 217. Springer-Verlag, Berlin.
- BECK, M., (1952). "Die Knicklast des Einseitig Eingespannter Tangential Gedrückten Stabes". *Z. Angew. Math. Phys.* 3, no 3.
- PFLÜGER, A., (1955). "Zur Stabilität des Tangential Gedrückten Stabes". *Z. Angew. Math. Mech.* 35, no 5.
- ZIEGLER, H., (1952). "Die stabilitätskriterien der Elastomechanik". *Ing.-Arch.* 20, no 1.
- ZIEGLER, H., (1966). **Principles of Structural Stability.** Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 2^a ed. 1977.
- HERMANN, G. e BUNGAY, R.W., (1964). "On the Stability of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces". *Journal Applied Mech.,* vol. 31, pp 435-440.
- LEIPHOLZ, H., (1970). **Stability Theory.** Academic Press, New York.

- LEIPHOLZ, H.H.E. e PFENDT, F., (1982). "On the Stability of Rectangular, Completely Supported Plates with Uncoupling Boundary Conditions Subjected to Uniformly Distributed Follower Forces". Computer Meth. in Applied Mech. and Eng., 30, pp 19-52.
- BURGESS, I.W., (1975). "A Note on the Directional Stability of Driven Piles". Geotechnique 25, no 2, pp 413-416.
- BURGESS, I.W., (1976). "The Stability of Slender Piles During Driving". Geotechnique 26, no 2, pp 281-292.
- BURGESS, I.W., (1979). "Analytical Studies of Pile Wandering During Installation". Int. Journal for Num. and Anal. Meth. in Geomech., vol. 3, pp 49-62.
- SMITH T.E. e HERMANN, G., (1972). "Stability of a Beam on an Elastic Foundation Subjected to a Follower Force". Journal of Appl. Mech., 39, pp 628-629, Transactions of ASME.
- ALTMAN, W. e OLIVEIRA, A.M., (1982). "On the Use of the Quadratic Functional and its Derived Principles in Structural Mechanics". Computers & Structures, vol. 15, no 3, pp 291-297.
- ALTMAN, W. e OLIVEIRA, A.M., (1984a). "Application of the Quadratic Functional to Nonconservative Problems of Elastic Stability". Computers & Structures, vol. 18, no 1, pp 141-145.
- ALTMAN, W. e OLIVEIRA, A.M., (1984b). "The Quadratic Functional as an Indicator of the Convergence of Approximate Methods". Computers & Structures, vol. 19, no 4, pp 689-692.
- BAILEY, C.D. e HAINES, J.L. (1981). "Vibration and Stability of Non-Conservative Follower Force Systems".

Comp. Meth. in Appl. Mech. And Eng., 26. pp 1-31.

- BATOZ, J.L., (1979). "Curved Finite Elements and Shell Theories with Particular Reference to the Buckling of a Circular Arch". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 13, pp 774-779.
- HIBBITT, H.D., (1979). "Some Follower Forces and Load Stiffness". Int Journal for Num. Meth. in Engng. 14, pp 937-941.
- LOGANATHAN, K., CHANG, S.C., GALLAGHER, R.H. e ABEL, J.F., (1979). "Finite Element Representation and Pressure Stiffness in Shell Stability Analysis". Int. Journal for Num. Meth. en Engng., 14, pp 1413-1425.
- SMITH, I.M., (1979). "Discret Element Analysis of Pile Instability". Int. Journal for Num. and Anal. Meth. in Geomech, 3, pp 205-211.
- MANG, H.A. e GALLAGHER, R.H., (1981). "Finite Element Analysis of Thin Shells of general form for displacement dependent loads". in Non-linear Finite Element Analysis of Plates and Shells Conference, Washington Proc. ASME AMD 48.
- JUNG, M.P. (1985)., "Instabilidade de Estacas, sob Carregamentos Conservativos e Não Conservativos, pelo M.E.F.". Revista Brasileira de Engenharia, caderno Eng. Estrutural, vol. 3, nº 2, pp 79-99.
- ARGYRIS, J.H. e SYMEONIDIS, Sp., (1981). "Nonlinear Finite Element Analysis of Elastic Systems under Nonconservative Loading - Natural Formulation. Part I. Quasistatic Problems". Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng., 26, pp 75-123.
- ARGYRIS, J.H., STRAUB, K. e SYMEONIDIS, Sp., (1981). Non-linear Finite Element Analysis of Elastic Systems under

- Nonconservative Loading - Natural Formulation Part II. DYNAMIC PROBLEMS".** Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng., 28, pp 241-258.
- SCHWEIZERHOF, K. e RAMM, E., (1984) **"Displacement Dependent Pressure Loads in Nonlinear Finite Element Analysis".** Computers & Structures, pp 1099-1114.
- BOLOTIN, V.V., (1964). **The Dynamic Stability of Elastic Systems.** Holden-Day Inc.
- EBECKEN, N.F.F., (1982). **"Análise da Estabilidade Dinâmica de Sistemas Estruturais, pelo Método dos Elementos Finitos".** Reuniões em Matemática Aplicada e Computação Científica, III Escola de Matemática Aplic., Conferências. Rio de Janeiro, pp 1-34.
- EBECKEN, N.F.F., JACOB, B.P. e JUNG, M.P., (1988). **"Análise de Diafragmas Metálicos, sob acentuadas pressões, pelo Método dos Elementos Finitos".** 5º Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, 1º Simpósio Latinoamericano sobre Tuberias y Recipientes de Pression, SIBRAT-ABCM.
- OLSON, M.D., (1967). **"Finite Elements Applied to Panel Flutter".** AIAA Journal, vol. 5, nº 12, pp 2267-2270.
- SANDER, G., BON, C. e GERADIN, M., (1973). **"Finite Element Analysis of Supersonic Panel Flutter".** Int. Journal for Num. Meth in Engng., vol. 7, pp 379-394.
- LIN, K.-J., LU, P.-J. e TARN, J.-Q. (1989)., **"Flutter Analysis of Composite Panels Using High-Precision Finite Elements".** Computers & Structures, vol. 33, nº 2, pp 561-574.
- AGAR, T.J.A., (1988). **"The Analysis of Aerodynamic Flutter of Suspension Bridges".** Computers & Structures, vol. 30, nº 3, pp 593-600.

- AGAR, T.J.A., (1989). "Aerodynamic Flutter Analysis of Suspension Bridges by a Modal Technique". Eng. Structural, vol. 11, pp 75-82.
- LEIPHOLZ, H.H.E. (1979)., "Variational Principles for Non-Conservative Problems, a Foundation for a Finite Element Approach". Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng., 17/18, pp 609-617.
- ARGYRIS, J.H., DUNNE, P.C. e SCHARPF, D.W., (1978). "On Large Displacement-Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom". Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng., 14, pp 401-451.
- ARGYRIS, J.H., DUNNE, P.C., SCHARPF, D.W. e MALEJANNAKIS, G.A., (1978). "On Large Displacement-Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom". Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng., 15, pp 99-135.
- ARGYRIS, J.H., BALMER, H., DOLTSINIS, J. S^t., DUNNE, P.C., HAASE, M., KLEIBER, M., MALEJANNAKIS, G.A., MLEJNEK, H. P., MÜLLER, M. e SCHARPF, D.W., (1979). "Finite Element Method - The Natural Approach". Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng., 17/18, pp 1-106.
- ARGYRIS, J.H., DUNNE, P.C., MALEJANNAKIS, G. e SCHELKLE, E. (1977). "A Simple Triangular Facet Shell Element with Applications to Linear and Non-Linear Equilibrium and Elastic Stability Problems". Comp. Meth in Appl Mech. and Engng., 10, pp 371-403 e 11, pp 97-131.
- ARGYRIS, J.H. e KLEIBER, M., (1977). "Incremental Formulation in Nonlinear Mechanics and Large Strain Elastoplasticity-Natural Approach. Part 1". Comp. Meth. in Appl. Mech and Engng., 11, pp 215-247.
- ARGYRIS, J.H., HAASE, M. e MLEJNEK, H.P., (1980). "On an Unconventional but Natural formation of a Stiffness

Matrix". *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, 22, pp 1-22.

BENJAMIN, A.C., (1982). "Análise Não-Linear Geométrica de Pórticos Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos". Tese de Mestrado, Coppe-UFRJ, Rio, Brasil.

CHUEIRI, L.H.M., (1985). "Um Modelo Simples para a Representação do Comportamento Não-Linear de Estruturas de Superfície". Tese de Mestrado, Coppe-UFRJ, Rio, Brasil.

ZIENKIEWICZ, O.C., (1971). "The Finite Element Method in Engineering Science". McGraw-Hill, London.

VENÂNCIO, F.F., (1971) *Método dos Elementos Finitos, (Elementos de Ordem Superior, Análise Dinâmica e Estabilidade)*. Notas de Aulas do Curso de Mecânica das Estruturas III, Coppe-UFRJ, Rio, Brasil.

LIMA, S.R.F.F., (1972). "O Método dos Elementos Finitos Aplicado a Problemas de Cascas e Estruturas Laminares Utilizando-se Elementos Triangulares Planos". Tese de Mestrado, Coppe-UFRJ, Rio, Brasil.

ARGYIRIS, J.H., (1982) "An Excursion into Large Rotations". *Comp. Meth. in Engng.*, 32, pp 85-155.

GERE, J.M. e WEAVER Jr., W., (1970). *Análisis de Estruturas Reticulares*. Companhia Ed. Continental, México-España.

HAMMER, P.C., MARLOWE, O.P. e STROUD, A.H., (1956). "Numerical Integration Over Simplexes and Cones". *Math. Tables Aids Comp.*, 10, pp 130-137.

PRZEMIENIECKI, J.S., (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York.

BATHE, K.J., (1982). *Finite Elements Procedures in En-*

gineering Analysis. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

BATHE, K.J. e WILSON, E.L., (1976). **Numerical Methods in Finite Element Analysis.** Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

IRONS, B.M., (1970). "A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 2, nº 1, pp 5-32.

HINTON, E. e OWEN, D.R.J., (1977). **Finite Element Programming.** Academic Press.

IRONS, B.M. e AHMAD, S., (1980). **Techniques of Finite Elements.** Ellis Horwood Lim., England.

HINTON, E. e OWEN, D.R.J., (1980). **Finite Element in Plasticity.** Pineridge Press Lim., Swansea, U.K.

GREENE, B.E., STROME, D.R. e WEIKEL, R.C., (1961). "Applications of the Stiffness Method to the Analysis of Shell Structures". Proc. Aviation Conf. Amer. Soc. Mech. Eng., Los Angeles.

KEY, J.E., (1973). "Computer Program for Solution of Large Sparse, Unsymmetric Systems of Linear Equations". Int. Journal for Num. Meth. em Engng., 6, pp 497-509.

GUPTA, S.K. e TANJI, K.K., (1977). "Computer Program for Solution of Large, Sparse, Unsymmetric Systems of Linear Equations". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 11, pp 1251-1259.

CROTTY, J.M., (1982). "A Block Equation Solver for Large Unsymmetric Matrices Arising in the Boundary Integral Equation Method". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 18, pp 997-1017.

- GOPALAKRISHNAN, T.C. e PALANIAPPA, A.B., (1982). "Band Algorithm for Unsymmetric Matrices in Finite Element and Semi-Discrete Methods". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 18, pp 1197-1211.
- TAYLOR, R.L., WILSON, E.L. e SACKETT, (1980). Direct Solution of Equations by Frontal and Variable Band, Active Column Methods". Non-Linear Fin. Elem. Anal. Struc. Mech. Procee. of Europe-U.S. Workshop Ruhr-Universität. Bochum-Germany. Ed. W. Wunderlich, E. Stein e K.J. Bathe, Spring-Verlag Berlin 1981.
- RAZZAQUE, A., (1980). "Automatic Reduction of Frontwidth for Finite Element Analysis". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 15, pp 1315-1324.
- PINA, H.L.G., (1981). "An Algorithm for Frontwidth Reduction". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 17, pp 1539-1546.
- SLOAN, S.W. e RANFOLPH, M.F., (1983). "Automatic Element Reordering for Finite Element Analysis with Frontal Solution Schemes". Int Journal for Num. Meth. in Engng., 19(8), pp 1153-1181.
- SADEK, E.A., (1981). "A Scheme for the Automatic Generation of Triangular Finite Elements". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 15(12), pp 1813-1822.
- BEER, G. e HASS, W., (1982). "A Partitioned Frontal Solver for Finite Element Analysis". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 18(11), pp 1623-1654.
- ABBAS, S.F., (1980). "Some Novel Applications of the Frontal Concept". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 15.
- CEDOLIN, L. e GALLAGHER, R., (1978). "A Frontal-Based Solver for Frequency Analysis". Int. Journal for Num.

Meth in Engng., 12, pp 1659-1666.

AGRAWAL, A.B., MUFTI, A.A. e JAEGER, L.G., (1980). "Band-Schemes vs. Frontal-Routines in Nonlinear Structural Analysis". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 15, pp 753-766.

BRUSSINO, G. e SONNAD, V., (1989). "A Comparison of Direct and Preconditioned Iterative Techniques for Sparse, Unsymmetric Systems of Linear Equations". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 28, pp 801-815.

HOWARD, D., CONNOLEY, W.M. e ROLLET, J.S., (1989). "Solution of Finite Element Fluid Matrix Systems by Unsymmetric Conjugate Gradient and Direct Methods on the Cray-XMP and Cray-2". Num. An. Group, Oxford Uni. Comp. Laboratory, Oxford, First Int. Conference-Applications of Supercomputers in Engng.

TAYLOR, C. e HUGHES, T.G., (1981). Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations. Pineridge Press Lim.

HOOD, P., (1976). "Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices". Int. Journal Num. Meth. in Engng., 10, pp 379-399.

HOOD, P., (1977a) e (1977b). "Note on Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., vol. 11, n° 6, pp 1055 e vol. 11, n° 8, pp 1202.

LANCZOS, C., (1950). "An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators". J. Research Natl. Bur. Standards, vol. 45, pp 255-282.

WILSON, E.L, YWAN, M. e DICKENS, J.M., (1982). "Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors". J.

Earthquake Engng., Struct. Dynamic, 10, pp 813-821.

WILSON, E.L., (1985). "A New Method of Dynamic Analysis for Linear and Nonlinear Systems". Finite Element Analysis Des., 1, pp 21-23.

NOUR-OMID, B. e CLOUGH, R.W., (1984). "Dynamic Analysis of Structures Using Lanczos Coordinates". J. Earthquake Engng. Struct. Dynamic, 12, pp 565-577.

NOUR-OMID, B. e CLOUGH, R.W., (1985). "Block Lanczos Method for Dynamic Analysis of Structures". J. Earthquake Engng. Struct. Dynamic, 13, pp 271-275.

LIMA, E.C.P., LANDAU, L. EBECKEN, N.F.F. e ELLWANGER, G.B. (1985). "Nonlinear Dynamic Analysis of a Jacket-Type Platform by Ritz Mode Superposition Method". in 17th Annual Offshore Technology Conference, Houston-Texas.

COUTINHO, A.L.G.A., ALVES, J.L.D., LANDAU, L., LIMA, E.C.P. e EBECKEN, N.N.F., (1986). "Análise Sísmica de Estruturas de Centrais Nucleares pelo Método de Superposição dos Modos Lanczos", nos Anais do 4º Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão. SIBRAT.

COUTINHO, A.L.G.A., LANDAU, L., LIMA, E.C.P., EBECKEN, N. F.F., (1987). "The Application of the Lanczos Mode Superposition Method in Dynamic Analysis of Offshore Structures". Computers e Structures, 25, pp 615-625.

CHEN, H.C. e TAYLOR, R.L., (1988). "Solution of Viscously Damped Linear Systems Using a Set of Load-Dependent Vectors". J. Earthquake Engng., Struct. Dynamic,

CRAIG Jr., R.R. e KIM, H.M., (1988). "Structural Dynamic Analysis Using an Unsymmetric Block Lanczos Algorithm". Int. Journal for Num. Meth. in Engng., 26, pp 2305-2318.

- NOUR-OMID, B. e REGELBRUGGE, M.E., (1989). "Lanczos Method for Dynamic Analysis of Damped Structural Systems". Earthquake Engng. and Struct. Dynamic, 18, pp 1091-1104.
- NEWMARK, N.M., (1959). "A Method of Computation for Structural Dynamics". ASCE, Journal of Engng. Mech. Division, 85, pp 67-94.
- BATHE, K.J., (1979). "Finite Element Formulation, Modeling, and Solution of Nonlinear Dynamic Problems", in Numerical Methods for PDEs, Academic Press Inc.
- CLOUGH, R.W. e PENZIEN, J., (1975). Dynamic Of Structures. McGraw-Hill, New York.
- WILKINSON, J.H., (1965). The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press, Oxford.
- MARQUES, A.O., COUTINHO, A.L.G.A., LANDAU, L., (1986). "Um Estudo de Algoritmos para a Solução de Grandes Problemas de Autovalor". 6º Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais na Engenharia, São Carlos, SP.
- RAJAKUMAR, C., (1990). "The Lanczos Two-Sided Recursions for the Unsymmetric Generalized Eigenvalue Problem". 2nd World Congress of Computational Mechanics, Stuttgart, Germany.
- PRESS, W.H., FLANNERY, B.P., TEUKOLSKY, S.A. e VETTERLING, W.T., (1989). Numerical Recipes, "The Art of Scientific Computing". Cambridge University Press.
- BAI, Z., DEMMEL, J. e MCKENNEY, A., (1989). "On the Condition of the Nonsymmetric Eigenproblem: Theory and Software". Computer Science Depart., Courant Institute, U. Tennessee, LAPACK Working Note 13.
- SMITH, B.T., BOYLE, J.M., GARBOW, B.S., IKEBE, Y., KLENA,

- V.C. e MOLER, C.B., (1974). **Matrix Eigensystem Routines**. Springer-Verlag.
- SMITH, B.T., BOYLE, J.M., YKEBE, Y., KLEMA, V.C. e MOLER, C.B., (1970). **Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide**. 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- MOLER, C.B. e STEWART, G.W., (1972). "The QZ Algorithm for $Ax = \lambda Bx$ ". SIAM J. NUMER. ANAL., 9, pp 669-686.
- MOLER, C.B. e STEWART, G.W., (1973). "An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems". SIAM JOUR, NUMER. ANAL, 10, pp 241-256.
- PETERS, G. e WILKINSON, J.H., (1970). " $Ax = \lambda Bx$ and the Generalized Eigenproblem". SIAM J. NUMER. ANAL., vol. 7, 4, pp 479-491.
- FIX, G. e HEIBERGER, R., (1972). "An Algorithm for the Ill-Conditioned Generalized Eigenvalue Problem". SIAM J. NUMER. ANAL., vol. 9, nº 1, pp 78-88.
- STEWART, G.W., (1972). "On the sensitivity of the Eigenvalue Problem $Ax = \lambda Bx$ ". SIAM J. NUMER. ANAL., vol 9, nº 4, pp 669-686.
- VIANNA, M.A.M. e LIMA, E.C.P., (1978). "Análise de Frequências Naturais de Grandes Sistemas Estruturais com Amortecimento". Anais do Congresso Brasileiro de Energia, paper nº B-24, pp 616-624.
- BATHE, K.J. e RAMASWAMY, S., (1980). "An Accelerated Subspace Iteration Method". Journal Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng., 23, pp 313-331.

Apêndice

**MANUAL DOS PROCEDIMENTOS
IMPLEMENTADOS**

Programa ANER

BLOCO	VARIÁVEIS	Nº LINHAS FORMATO
1	TÍTULO - Qualquer Caractere	1 (16A5)
2	IDELT, NDELТ, IMAS, ICORK, IDANA, IDRED, IDADO, IXECT, NIMPD, NIMPT, NAUTO, MDELТ, IPE	1 (F10.0,12I5)
	IDELT - Valor do incremento Δt no tempo na Análise Dinâmica ou do multiplicador constante de uma carga ou incremento na Análise Estática. Em outros casos, adotar zero.	
	NDELТ - Número de incrementos no tempo ($n \cdot \Delta t$) ou no carregamento. (Máximo atual 2500).	
	IMAS - Igual a zero - massa concentrada. Igual a um - massa consistente. Igual a dois - não considera a massa.	
	ICORK - Igual a zero - não corrige a rigidez. Igual a um - corrige sempre a rigidez em qualquer incremento de carga e iteração. Igual a dois - corrige a rigidez só na 1ª iteração de cada incremento.	
	IDANA - Igual a zero - Análise não linear. Igual a um - Análise linear. (Implementação atual, Conservativa).	
	IDRED - Igual a zero - Análise estática, autovalores (opcional - veja NAUTO).	

BLOCO

VARIÁVEIS

Nº LINHAS
FORMATO

- Igual a um - Análise dinâmica, autovalores (opcional).
(Dinâmica atual só massa concentrada).
- IDADO - Igual a um - Análise Estática ou Dinâmica e autovalores (opcional).
Igual a três - frequências naturais.
- IXECT - Igual a zero - lê e imprime dados.
Igual a um - lê, imprime dados e executa a solução.
- NIMPD - Número de incrementos onde imprime deslocamentos.
- NIMPT - Atual, sempre igual a zero.
- NAUTO - Número de incrementos, nos quais calcula e imprime os autovalores.
- MDELT - Igual a zero - o valor da carga em um incremento é obtido multiplicando por IDELT, o valor no incremento anterior. (Análise Estática apenas).
Igual a um - somando a carga do incremento anterior o valor lido dos incrementos.
- IPE - Igual a zero - Pórtico Espacial ou casca.
Igual a um - Pórtico Plano ou placa, diretamente sem introduzir condições de contorno.

BLOCO	VARIÁVEIS	Nº LINHAS FORMATO
	N - Número de Incrementos. IMPD(N) - Igual a um, imprime deslocamento no incremento N.	
4	N, IAUTO(N)	NAUTO/7 (14I5)
	N - Número do incremento IAUTO(N) - Igual a um - calcula autovaleores pelo SUBESPAÇO. Igual a dois - pela matriz cheia, direto pelas rotinas do IMSL.	
5	NPOIN, NELEM, NELTR, NBCON, NMAT, NGEO, 1 NELTE, NDESP, MODFM, NELAA, IRIGG, NNOSR	(12I5)
	NPOIN - Número de nós da estrutura. NELEM - Número total de elementos. NELTR - Número total de elementos triangulares. NBCON - Número de variáveis especificadas, condições de contorno (apoio, pontos de simetria). NMAT - Número de propriedades materiais diferentes. NGEO - Número de propriedades geométricas diferentes. NELTE - Atual, sempre igual a zero. NDESP - Número de deslocamentos prescritos. MODFM - Número de nós com graus de liberdade diferentes de seis. (Atual, somente se IPE=1, todos os nós). NELAA - Número de elementos para os quais calcula-se ângulo α de o-	

BLOCO

VARIÁVEIS

Nº LINHAS
FORMATO

orientação do elemento de pórtico espacial.

IRIGG - Análise linear - atual sempre zero.

Análise não linear - atual sempre 1.

NNOSR - Número de nós para os quais são especificadas e não prescritas as variáveis. São os nós restritos, apoios, pontos de simetria, etc.)

6 N, PRDMA(N,J) J=1,4

NMAT

(I5,4F10.0)

N - Número da propriedade material

J=1 - Módulo de Elasticidade longitudinal

J=2 - Coeficiente de Poisson

J=3 - Massa específica do material

J=4 - t, espessura do elemento triangular. Se pórtico t=0

7 N, PROGE(N,J) J=1,4

NGEO

(Só para elemento de pórtico)

(I5,4F10.0)

N - Número da propriedade geometria

J=1 - A_x , área da seção no plano perpendicular ao eixo x.

J=2 - I_x , constante de torção.

J=3 - I_y , momento de inércia com relação ao eixo y.

J=4 - I_z , momento de inércia com relação ao eixo z.

8 N, X(N), Y(N), Z(N)

NPOIN

(I5,3F10.0)

N - Número do nó.

X(N) - Coordenada X, do nó N em relação

BLOCO

VARIÁVEIS

Nº LINHAS
FORMATO

ao eixo global.

Y(N) - Coordenada Y do nó N.

Z(N) - Coordenada Z do nó N.

9 N, IMAT(N), LNODS(N,J) J=1,3 NELEM
ITIPO(N), IGEO(N), ALFA(N) (7I5,F10.0)

N - Número do elemento.

LNODS(N,1) - Número do nó JJ do elemento de pórtico ou do nó 1 do triângulo.

LNODS(N,2) - Número do nó JK do elemento de pórtico ou do nó 2 do triângulo.

LNODS(N,3) - Zero para pórtico ou número do nó 3 do elemento triangular.

Se houver carga concentrada não conservativa, a mesma deve ser considerada como na extremidade de um só elemento, fornecendo-se o número do nó do elemento através de;

Se pórtico LNODS(N,3)=1

Se triângulo IGEO(N)=1

Se TRIAG=0.0 ou TRIAG=2.0, (veja bloco 33), o elemento triangular de ser retângulo e as incidências dos nós dados conforme as figuras II.19 e II.21 respectivamente.

Se for carga distribuída não conservativa no plano do elemento, as incidências devem ser dadas de forma que a carga fique paralela aos eixos ox ou oy locais. (Veja figuras II.19 e II.21).

ITIPO(N) - igual a um, elemento triangu-

BLOCO	VARIÁVEIS	Nº LINHAS FORMATO
	lar e igual a zero, elemento de pórtico.	
	IGED(N) - Número da propriedade geométrica, se elemento de pórtico.	
	ALFA(N) - Número da propriedade do ângulo α de orientação para o elemento de pórtico. Se for triângulo zero.	
10	N, LBOUD(6*N-5), LBOUD(6*N-4) LBOUD(6*N) (Para IPE=0), ou N,LBOUD(3*N-2), LBOUD(3*N-1) LBOUD(3*N) (Para IPE=1)	NNOSR (7I5) NNOSR (4I5)
	Sendo;	
	N - Número do nó restrito.	
	LBOUD() - igual a um - restrito. igual a zero - livre.	
	Para IPE=0, pode-se também fornecer LBOUD()=1 para passar de casca para estado plano ou flexão ou se pórtico para grelha, etc.	
11	N, BOUDV(N)	NDESP (I5,F10.0)
	N - Número global da variável prescrita BOUDV(N) - valor prescrito	
12	N, NODFM(N)	MODFM/7 (14I5)
	N - Número do nó com graus de liberdade diferente de seis.	
	NODFM(N) - número de graus de liberdade do nó N. (Atual, se houver,	

BLOCO	VARIÁVEIS	Nº LINHAS FORMATO
	sempre igual a 3)	
13	N, XP(N), YP(N), ZP(N)	NELAA (I5,3F10.0)
	<p>N - Número da propriedade da coordenada em correspondência com ALFA(N). XP(N), YP(N), ZP(N), coordenadas do ponto P, para cálculo do ângulo α para o caso N. (Veja GERE e WEAVER (1970)).</p>	
14	NNOSNQ - Número de nós não planares. (Para pórticos sempre zero).	1 (I5)
15	J, NQ(J)	NNOSNQ/7 (I4I5)
	<p>J - Número do nó não planar NQ(J) - igual a um para o nó não planar.</p>	

CARREGAMENTOS

16	NNOCC, NNOCN, NPPDC, NPPDN, NPTDC, NPTDN NEPDC, NEPDN, NETDC, NETDN (Configuração atual até 10 cargas diferentes)	1 (I0I5)
	<p>NNOCC - Número de nós, com carga concentrada conservativa.</p>	
	<p>NNOCN - Número de nós, com carga concentrada não conservativa.</p>	
	<p>NPPDC - Número de cargas distribuídas conservativas diferentes atuando nos elementos de pórtico. Cada elemento só pode ter uma carga distribuída.</p>	
	<p>NPPDN - Número de cargas distribuídas não conservativas diferentes a-</p>	

BLOCO

VARIÁVEIS

Nº LINHAS
FORMATO

	tuando nos elementos de pórtico.	
NPTDC	- Número de cargas distribuídas conservativas diferentes atuando nos elementos triangulares.	
NPTDN	- Número de cargas distribuídas não conservativas diferentes atuando nos elementos triangulares.	
NEPDC	- Número de elementos de pórtico com carga distribuída conservativa.	
NEPDN	- Número de elementos de pórtico com carga distribuída não conservativa.	
NETDC	- Número de elementos triangulares com cargas distribuídas conservativas.	
NETDN	- Número de elementos triangulares com cargas distribuídas não conservativas	
17	NVICC, NVICN, NIPDC, NIPDN, NITDC, NITDN, (Configuração atual até 10 incrementos diferentes)	1 (6I5)
NIVCC	- Número de incrementos diferentes para a carga concentrada conservativa.	
NVICN	- Número de incrementos diferentes para a carga concentrada não conservativa.	
NIPDC, NIPDN	- Número de incrementos diferentes para a carga distribuída conservativa e não conservativa, elemento de pórtico.	
NITDC, NITDN	- Número de incrementos di-	

BLOCO

VARIÁVEIS

Nº LINHAS
FORMATO

ferentes para a carga distribuída conservativa e não conservativa, para o elemento triangular.

- 18 N, PRODC(N,J), J=1 a 6 NPPDC
(Configuração atual máximo N=10) (I5,6F10.0)
N - Número da carga distribuída conservativa, atuando no elemento pórtico.
PRODC(N,J) - Para J=1 até 6 são as componentes PXJ, P XK, PYJ, PYK e PZI, PZK na direção dos eixos locais. Configuração atual, apenas cargas uniformes (PXJ=P XK, etc.). Havendo mais de uma carga diferente, intercalar com o bloco 19, ou seja, para esta carga ou para os outros tipos que vem a seguir, ler para N=1, a carga PRODC(1,J) e depois os incrementos, N=2, a carga e os incrementos...
- 19 DEPC1(N,I), DEPC2(N,I), DEPC3(N,I) NIPDC/3
(Configuração atual, máximo I=10) (9F8.0)
DEPC1(N,I), DEPC2(N,I), DEPC3(N,I) são os incrementos na carga distribuída conservativa PRODC(N,J), respectivamente na direção x, y e z.
- 20 N, PRODN(N,J), J=1 a 6 NPPDN
(I5,6F10.0)
Análogo ao bloco 18, sendo a carga não conservativa.

BLOCO	VARIÁVEIS	Nº LINHAS FORMATO
21	DEPN1(N,I), DEPN2(N,I), DEPN3(N,I)	NIPDN/3 (9F8.0)
	Incrementos na carga do bloco 20. Análogo ao bloco 19.	
22	N, PRTDC(N,J) J=1 a 6	NPTDC (I5,6F10.0)
	Análogo ao 18, sendo a diferença que a carga atua no elemento triangular.	
23	DETC1(N,I), DETC2(N,I), DETC3(N,I)	NITDC/3 (9F8,0)
	Incrementos na carga do bloco 22. Análogo ao bloco 19.	
24	N, PRTDN(N,J) J=1 a 6	NPTDN (I5,6F10.0)
	Análogo ao 22, sendo a carga distribuída não conservativa.	
25	DETN1(N,I), DETN2(N,I), DETN3(N,I)	NITDN/3 (9F8.0)
	Incrementos na carga do bloco 24. Análogo ao 19.	
26	AC(I,J), J=1 a 7 (Configuração atual máxima I=10)	NNOCN (7F10.0)
	AC(I,1) - Número do nó (elemento de pórtico ou triangular) onde atua a carga concentrada conservativa.	
	Em EIXOS GLOBAIS são lidas as componentes de forças (J=2 a 4) e momentos (J=5 a 7), na direção X, Y e Z, respectivamente. Antes de se ler os va-	

BLOCO	VARIÁVEIS	Nº LINHAS FORMATO
	lores de uma nova carga, deve-se ler os incrementos através do bloco 27. Intercalar sempre o bloco 26 com 27.	
27	DELC2(N,I), DELC3(N,I), DELC4(N,I) (Configuração atual máxima, I=10) Incrementos nas cargas do item 26.	NVICC/3 (9F8.0)
28	ACN(I,J) J=1 a 4 ACN(I,1) - Número do nó (elemento de pórtico ou triangular), onde atua a carga concentrada não conservativa.	NNOCN (4F10.0)
29	DELN2(N,I), DELN4(N,I), DELN4(N,I) Incrementos na carga do bloco 28. Como todas as cargas, ler sempre intercalando, uma carga do bloco 28 com os incrementos do 29 e assim sucessivamente.	NVICN/3 (9F8.0)
30	N, IEPDC(N)	NEPDC/7 (14I5)
31	N, IEPDN(N)	NEPDN/7 (14I5)
32	N, IETDC(N)	NETDC/7 (14I5)
33	N, IETDN(N)	NETDN/7 (14I5)

Nos blocos 30 a 33, N representa o número do elemento e IEPDC(N) a IETDN(N) o número da carga distribuída que atua no elemento lida nos blocos 18, 20, 22 e

BLOCO

VARIÁVEIS

Nº LINHAS
FORMATO

24, respectivamente.

34 N, M, NINDI NVICC
 Em 34 são lidas as propriedades ou NVICN
 número do incremento correspondente a um NIPDC
 determinado valor no intervalo (N,M), ou NIPDN
 seja, para cada carga lida em 26, 28, NITDC
 18, 20, 22 e 24, lê-se N, número do in- NITDN
 cremento inicial e do incremento M para (315)
 os quais vale a propriedade NINDI em
 correspondência com os valores lidos em
 27, 29, 19, 21, 23 e 25.

Para todas as cargas de um mesmo gru-
 po, os valores dos incrementos podem ser
 diferentes, porém os intervalos de va-
 riações devem ser os mesmos.

CARREGAMENTOS DINÂMICOS - SE IDRED=1

35 ITC, NCD 1
 (215)

ITC - Igual a um, carga aplicada em um
 instante t, mantém-se constante ou
 crescente linearmente.

- igual a dois, carga senosoidal.

NCD - Número de cargas dinâmicas dife-
 rentes (máximo=10).

36 W(I) I=1,NCD NCD/7
 (7F10.0)

Para ITC=2, lê-se as freqüências das
 cargas senosoidais na ordem de ocorrên-
 cia e da sua incrementação. Primeiro das
 concentradas conservativas e não conser-
 vativas, depois as distribuídas de pór-

BLOCO

VARIÁVEIS

Nº LINHAS
FORMATO

tico e finalmente as do triângulo.

37 IROT, PORT, TRIAG, TOL, TOLAUT

1

(I5,4F10.0)

Se não utilizar alguma das variáveis anteriores, deixar o campo em branco ou nulo.

IROT - Igual a um, utiliza na solução do problema de autovalores a rotina generalizada.

Igual a zero, a rotina que resolve o cálculo de autovalores na forma standard.

PORT - Igual a zero, considera que a carga concentrada não conservativa acompanha a rotação no plano. Igual a um, acompanha todas as rotações do seu ponto de aplicação.

TRIAG - Igual a zero, carga concentrada não conservativa acompanha rotação em torno do eixo x local, do elemento triangular.

Igual a dois, em torno do y local, do elemento triangular.

Igual a zero, todas as rotações.

TOL - tolerância nos deslocamentos nas iterações do processo Newton-Raphson.

TOLAUT - tolerância no cálculo dos autovalores através do subespaço.

38 NEF (Somente se NAUTO diferente de zero)

1

(I5)

Número de autovalores a serem calculadas pelo subespaço frontal não simétrico.

BLOCO

VARIÁVEIS

Nº LINHAS
FORMATO

(Configuração atual máxima, NEF=10).

39 I1(NEF)

1

(10I5)

Posição dos valores +1 nos vetores iniciais do subespaço. Se for cálculo pela matriz cheia, fornecer qualquer valor inteiro diferente de zero no bloco 38 e 39. Para I1(1), qualquer valor inteiro, independente se for subespaço ou matriz cheia.

ALGUMAS DIMENSÕES DA CONFIGURAÇÃO ATUAL

Número de elementos	250
Pórticos	100
Triangulares	150
Número de Variáveis	726
Números de nós	121
Propriedades	
Materiais	10
Geométricas	10
Número de Incrementos	2500
Número de Cargas diferentes	
em cada tipo	10
Largura do Front	110