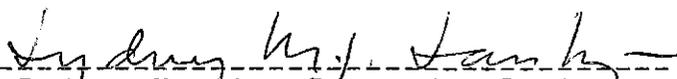


HASTES CURTAS DE PAREDES DELGADAS

Marsílio de Alencar Sá Leitão

Tese submetida ao Corpo Docente da Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências em Engenharia Civil.

Aprovada por :



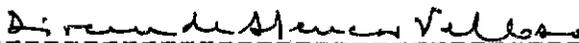
Prof. Sydney Martins Gomes dos Santos
(presidente) - Prof. Emérito



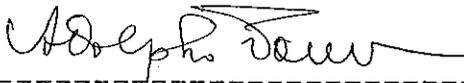
Prof. Fernando L. L. Barbosa Carneiro
Dr. Honoris Causa



Prof. Paulo Alcântara Gomes D. Sc.



Prof. Dirceu de Alencar Velloso
Livre Docente



Prof. Adolpho Polillo - Livre Docente

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

março de 1991

LEITÃO, MARSÍLIO DE ALENCAR SÁ

Hastes Curtas de Paredes Delgadas [Rio de Janeiro]
1991

XII, 146 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia
Civil, 1991)

Tese -Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Hastes Curtas de Paredes Delgadas

2. Seção Transversal Deformável

3. Tensões Normais

I. COPPE/UFRJ

II. Título(série)

Dedico este trabalho

A Luiza, minha esposa, que provocou em mim o ressurgimento da vontade e da coragem para realiza-lo.

Agradecimentos

Ao Prof. Sydney M.G. dos Santos pela orientação segura,
objetiva e simplificadora.

A minha esposa pelo incentivo.

A minha mãe pela eterna confiança.

Aos meus filhos pela paciência.

Ao amigo José Luciano Menezes pelo enorme apoio ofere-
cido nos momentos difíceis.

Aos colegas professores do Depto. de Mecânica Técnica
da UFRJ, pela acolhida e pela amizade.

À Universidade Federal de Pernambuco pelo investi-
mento nesta oportunidade de progresso.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

Hastes Curtas de Paredes Delgadas

Marsílio de Alencar Sá Leitão

Março de 1991

Orientador : Sydney Martins Gomes dos Santos

Programa : Engenharia Civil / Estruturas

Este estudo tem o objetivo de pesquisar o desenvolvimento e caracterizar a importância das Tensões Normais em Hastes Curtas de Paredes Delgadas (Hastes-Cascas) com perfil aberto, causadas pela mudança de forma da seção no plano transversal. A análise foi feita utilizando-se o Método dos Deslocamentos e o resultado, em sua forma mais geral, representa o conjunto das Superfícies de Influência daquela tensão normal para os pontos nodais do perfil adotado, geradas trabalhando-se por faixas longitudinais. Visando o aspecto prático, a formulação é aplicada às Pontes Curtas, tratando-as como Hastes-Cascas, o que permite oferecer uma contribuição para seu projeto, na forma das conclusões e sugestões apresentadas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

Short Thinwalled Bars

Marsílio de Alencar Sá Leitão

March of 1991

Thesis Supervisor : Sydney Martins Gomes dos Santos

Department : Civil Engineering / Structures

This work intends to investigate the development and to characterize the significance of the normal stresses, in Short Thinwalled Bars with open profile, arising from the change of form of the section in the cross plane. The analysis uses the Displacement Method, and the result in its most general form represents the conjunct of Influence Surfaces to those stresses for the nodal points of the profile, generated working with longitudinal bands. Having in view the practical aspect the formulation is applied to the bridges that can be treated like Short Thinwalled Bars. This allows to offer a contribution to its project, through the presented conclusions and suggestions.

Zusammenfassung von die These, daß als Anteil von die Forderungen um den Wissenschaftliche dokortitel (D.Sc.) zu erhalten, aufs COPPE/UFRJ vorgeschlagen worden ist.

Kurzdünnwandige Stäbe

Marsílio de Alencar Sá Leitão

März von 1991

Orientierungslehrer : Sydney Martins Gomes dos Santos

Departement : Bauingenieurwissenschaft / Struktur

Diese Arbeit hat als Absicht die Entwicklung zu untersuchen und die Wichtigkeit zu kennzeichnen von die Normalspannungen, daß in die Kurzdünnwandige Stäbe mit offenem Profil, durch die Formänderung des Querschnittes in seiner Ebene verursachen werden. Die Analyse ist durch die Verschiebungsmethode gebracht worden und das Ergebnis, auf seiner allgemeinste Weise, stellt die Gesamtheit von die Einflußoberfläche für diese Normalspannung zu den Knotenpunkte von der Profilmittellinie dar, die mit der Benutzung von longitudinalen Schärpe erzeugen werden. Als praktische Fall, wird die Untersuchung zu den kurzen Brücke angewendt, was einen Beitrag für seine Projekt zu anbieten erlaubt, durch Abschlüsse und Anratungen.

Índice do Texto

I - Introdução	1
Caracterização.....	3
O Método.....	4
Os Resultados Finais.....	5
II - Desenvolvimento Teórico	6
Hipóteses Simplificadoras Iniciais.....	8
Deformações e Tensões.....	12
Equações Diferenciais da Haste-Casca.....	27
Condições de Extremidade.....	35
Solução Teórica do Problema.....	41
Simplificações	47
Desprezando o Momento Fletor m_z	48
Reduzindo o Sistema.....	52
Desprezando o Momento de Torção m_{z_s}	63
III- O Problema Prático.....	67
IV - Resultados e Conclusões.....	93
V - Bibliografia.....	114
VI - Anexos	116
Anexo A : O Programa Automático.....	116
Anexo B : Coeficientes das Equações (II.44a,b).....	142
Anexo C : Expressões para A_{i0} e B_{k0}	144

Índice de Figuras e Tabelas

Figuras (1) e (2).....	6
Figuras (3), (4) e (5).....	12
Figuras (6) e (7).....	15
Figuras (8) e (9).....	18
Figuras (10) e (11).....	27
Figuras (12).....	35
Figuras (13), (14) e (15).....	68
Figuras (16), (17) e (18).....	71
Figuras (19), (20) e (21).....	73
Figuras (22) e (23).....	78
Figuras (24), (25) e (26).....	81
Figuras (27), (28) e (29).....	83
Figura (29a).....	87
Figura (30).....	96
Figura (31).....	99
Figura (32).....	100
Figura (33).....	102
Figura (34).....	103
Figura (35).....	107
Figura (36).....	108
Figura (37).....	109
Figura (38).....	110
Figura (39).....	111
Figura (40).....	112

Figura (41).....	113
Figura (42).....	118
Tabela (1).....	95
Tabela (2).....	97
Tabela (3).....	98

Nomeclatura

b	Comprimento de uma barra da LMP.
d	Dimensão característica da seção transversal
e	Distância normal de um ponto da haste à SM.
h	Distância entre a tangente à LMP num ponto e o polo.
h_n	Distância entre a normal à LMP num ponto e o polo.
l	Comprimento da haste.
m_s, m_z	Momentos fletores nas placas.
m_{zs}	Momento torsor nas placas.
n_s, n_z	Esforços normais nas placas.
n_{zs}	Esforço de cisalhamento nas placas.
n_{zn}, n_{sn}	Esforços cortantes nas placas.
n	Número de placas que compõem a haste.
\vec{n}	Vetor unitário na direção normal à SM.
p	Carregamento linear equivalente.
$\vec{p}(p_n, p_s, p_z)$	Vetor de cargas lineares.
$\vec{\bar{p}}(\bar{p}_n, \bar{p}_s, \bar{p}_z)$	Vetor de cargas superficiais.
q	Carregamento distribuído.
s	Coordenada medida ao longo da LMP.
t	Espessura das placas.
u, u_*, u_*^*	Deslocamentos na direção normal à SM.
$\vec{u}(u, v, w)$	Vetor dos deslocamentos dos pontos da SM.
$\vec{u}_*(u_*, v_*, w_*)$	Vetor dos deslocamentos de um ponto qualquer, fora da SM.

$\vec{u}_*^*(u_*^*, v_*^*, w_*^*)$	Vetor dos deslocamentos de um ponto qualquer, fora da SM, em uma seção extrema.
$\vec{u}_*(\bar{u}_*, \bar{v}_*, \bar{w}_*)$	Vetor dos deslocamentos virtuais de um ponto qualquer, fora da SM.
v, v_*, v_*^*	Deslocamentos na direção tangente à SM.
w, w_*, w_*^*	Deslocamentos na direção longitudinal.
x, y	Coordenadas Cartesianas dos pontos da LMP.
z	Coordenada longitudinal.
$ A $	Vetor A.
$[A]$	Matriz A.
C	Centro de gravidade.
D	Centro de cisalhamento.
E	Módulo de elasticidade.
E'	$E/(1-\nu^2)$
F	Superfície da seção transversal.
I	Grau de liberdade de um mecanismo.
K	Número de nós da LMP.
LMP	Linha média do perfil.
O	Origem da coordenada "s" ao longo da LMP.
P	Polo de referência
R	Numero de barras da LMP que se conectam num mesmo nó.
SM	Superfície média da haste.
U	Trabalho virtual dos esforços internos.
U, V, W	Parâmetros de deslocamento.
V	Parâmetros virtuais de deslocamento.

V^*, W^*	Parâmetros de deslocamento para uma seção extrema.
\bar{W}	Trabalho virtual dos esforços externos.
α	Ângulo entre a LMP e o eixo y em um ponto.
	Deslocamento normal de um nó, no movimento de um mecanismo.
$\left. \begin{array}{l} \gamma_{zs}, \gamma_{zs*} \\ \gamma_{zn}, \gamma_{zn*} \\ \gamma_{sn}, \gamma_{sn*} \end{array} \right\}$	Deformações angulares.
$\left. \begin{array}{l} \epsilon_s, \epsilon_{s*} \\ \epsilon_n, \epsilon_{n*} \\ \epsilon_z, \epsilon_{z*} \end{array} \right\}$	Deformações lineares.
η, η_*	Deslocamento na direção do eixo y.
ν	Coefficiente de Poisson.
ξ, ξ_*	Deslocamento na direção do eixo x.
$\left. \begin{array}{l} \sigma_s, \sigma_n, \sigma_z \\ \sigma_x, \sigma_y \end{array} \right\}$	Tensões normais.
$\left. \begin{array}{l} \tau_{zs}, \tau_{zn}, \tau_{sn} \\ \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{xy} \end{array} \right\}$	Tensões de Cisalhamento.
φ	Rotação da seção transversal da haste.
ω	Coordenada setorial.
Θ	Parâmetro generalizado de deslocamento.
ϕ	Rotação de nó.
ϕ	Rotação virtual de nó.

I - Introdução

Ao longo do tempo, no estudo das pontes, o cálculo das tensões tem seguido sempre a teoria clássica, só eventualmente levando em conta o empenamento das seções.

A intenção deste trabalho é pesquisar a natureza, o desenvolvimento e a magnitude das tensões normais que surgem a partir da consideração das mudanças na forma da seção transversal, devidas a um carregamento aplicado sobre a ponte.

Procurando abordar apenas os casos em que essas deformações podem ser realmente significativas é que se restringe o campo de investigação às pontes curtas e com elementos estruturais suficientemente esbeltos. Tal tipo de estrutura corresponde à definição de uma "Faltwerk" [17], que se traduz como Haste Curta de Paredes Delgadas, ou Haste-Casca, podendo ser analisada como tal.

Assim trata-se na realidade de desenvolver uma formulação geral para análise de Hastes Curtas de Paredes Delgadas, da qual o resultado pretendido seja uma aplicação. Daí o título adotado para a tese.

A essa altura é possível salientar os seguintes pontos de relativa originalidade, característicos de uma tese de doutorado.

1 - A análise das Peças Curtas de Paredes Delgadas.

- 2 - A recomendação do uso dessa teoria no estudo de pontes que se enquadrem nessas condições (pontes curtas).
- 3 - A abordagem, possivelmente pela primeira vez no nosso meio técnico, do problema das tensões normais geradas pelas deformações das seções transversais das pontes curtas em seu próprio plano.

Ao longo do trabalho serão vistos ainda outros pontos que podem ser enquadrados nesse conjunto.

- 4 - A utilização da solução geral da equação (II.131), a qual não figura nas publicações correntes.
- 5 - A apresentação de resultados na forma de superfícies de influência, obtidas via discretização do tabuleiro em faixas longitudinais, permitindo o estudo direto em pontos pré-fixados.
- 6.- Recomendação do uso de armaduras locais em pontos de tração no concreto não cobertos pelas armaduras usuais, por não serem detectados na análise convencional.
- 7 - Apresentação de recomendações práticas a serem levadas em conta em projetos de pontes curtas.

Caracterização

A análise de uma Haste-Casca, para ser desenvolvida e levada até os resultados numéricos finais, exige a definição do tipo e da forma da seção da mesma. Assim será adotado desde o início o perfil escolhido para o problema prático posterior, o qual é do tipo aberto e tem a forma mostrada na figura (1). Entretanto o desenvolvimento teórico será genérico para seções abertas.

Considera-se a haste formada por um conjunto de placas rigidamente ligadas entre si ao longo das arestas. Sendo "t" a espessura da placa mais grossa, "l" o comprimento da haste e "d" uma dimensão característica da seção transversal, tem-se caracterizada uma haste-casca, segundo Vlassov [15], quando simultâneamente forem satisfeitas as condições:

$$t/d \leq 0.1 \quad \text{e} \quad d/l > 0.1$$

Alguns pesquisadores preferem adotar outros critérios, como por exemplo Kòscia [13], que substitui a primeira condição geométrica por outra de natureza física, dada por $k \leq 0.02 \text{ cm}^{-1}$, sendo k visto na Equação da Torção de Empenamento

$$\varphi''' - k^2 \varphi'' = f(z) \quad , \quad \text{onde}$$

$$k^2 = \frac{GK}{E'J_{\omega\omega}}$$

O Método

O problema das Hastes-Casca tem sido abordado por um método misto, onde as incógnitas básicas são o momento fletor m_s ao longo da linha dos nós e os deslocamentos das placas nas direções tangentes àquela linha. Depois da eliminação dos deslocamentos o problema se reduz a um sistema de equações diferenciais lineares com a incógnita m_s . A característica principal deste método é a análise das placas isoladamente e o estabelecimento das condições de compatibilidade ao longo da linha dos nós.

Aqui, porém, a solução será obtida pelo Método dos Deslocamentos, tornando-se mais geral e também mais didática. Inicialmente será gerada uma solução completa para o problema das Hastes-Cascas, seguindo-se uma sequência de simplificações que, na realidade, têm como objetivo desacoplar do sistema de equações aquelas referentes aos Esforços Normais, às Flexões e à Torção de Empenamento, permitindo o estudo isolado do efeito da deformação da seção transversal em seu próprio plano.

Os Resultados Finais

Os resultados numéricos apresentados na forma de tabelas e gráficos são obtidos via um programa automático desenvolvido em Turbo-Pascal para ser executado em Micro-Computadores compatíveis com o IBM-PC, que disponham de um microprocessador 8087. O refinamento da análise poderá exigir também o uso de um disco rígido.

Infelizmente não há na literatura outros estudos que ofereçam apoio na forma de comparação de resultados do problema prático. Entretanto essa condição contribui favoravelmente às considerações feitas na Introdução, no que se refere à originalidade. Com base na análise desses resultados foi possível encontrar uma justificativa para o segundo limite geométrico citado na Caracterização, a qual não consta na bibliografia corrente. Também foi possível apresentar recomendações de ordem prática para utilização em projeto.

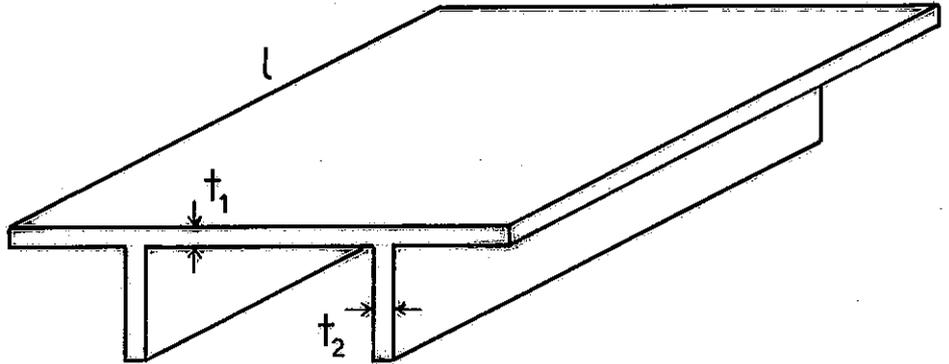


Fig. 1

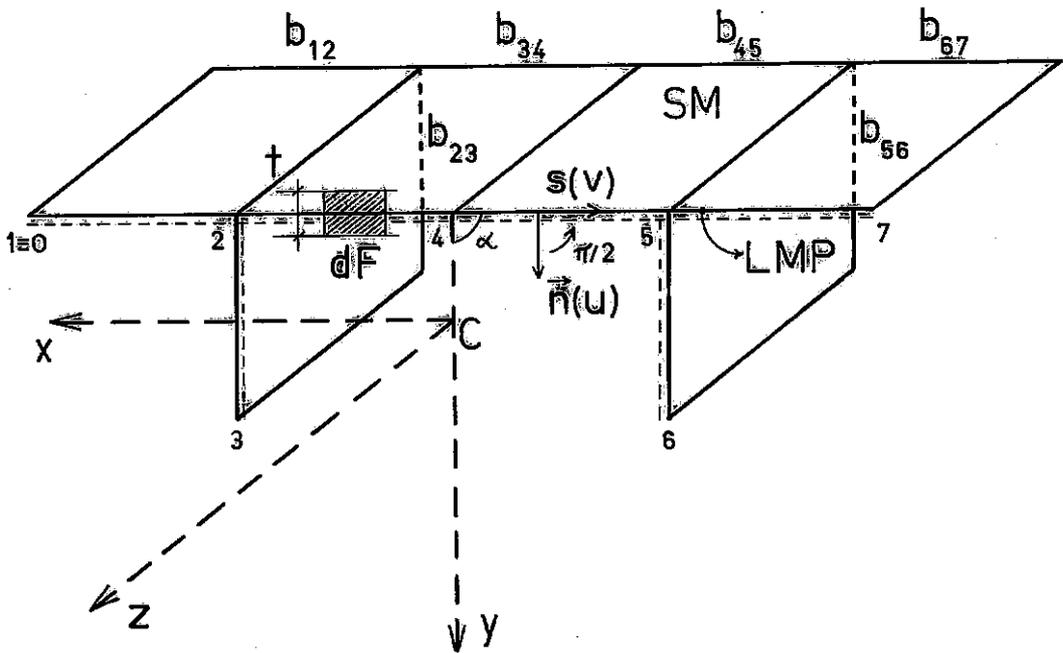


Fig. 2

II - Desenvolvimento Teórico

Considera-se a haste reduzida à sua superfície média (SM), de modo que uma seção transversal qualquer passa a ser a chamada Linha dos Nós, ou Linha Média do Perfil (LMP).

A posição de um ponto genérico da SM é determinada pelas coordenadas ortogonais "s" e "z". A distância do ponto, medida ao longo da LMP, a uma origem "O" fixada sobre a mesma, ou o que é o mesmo, a uma geratriz pré-escolhida da SM, é fornecida pela coordenada "s". A coordenada "z" dá a distância, medida na direção do eixo da haste, a uma determinada seção transversal. A distância de um ponto qualquer da haste à SM, medida na direção da normal à LMP, é o afastamento "e".

A determinação da normal interna n e do lado interno do perfil, representado pela linha tracejada na figura (2), é feita de modo que, para uma seção cuja normal é o eixo "z" positivo, n venha a apontar no sentido positivo dos "s", através de uma rotação de $\pi/2$ no sentido anti-horário.

Além desse, utiliza-se também um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z , onde por simplicidade os eixos x e y são escolhidos Eixos Principais de Inércia.

Um ponto qualquer da LMP tem, portanto, um deslocamento tangente "v", e outro normal "u", além de deslocamentos ξ, η e w , respectivamente nas direções x, y e z , sendo que ξ e η relacionam-se com u e v , nessa ordem,

através do ângulo α . Todos os deslocamentos são considerados positivos quando ocorrem no sentido positivo das coordenadas correspondentes.

As derivadas com relação a "s" e a "z" serão indicadas respectivamente por pontos acima da variável e por linhas em posição superior à sua direita.

Hipóteses Simplificadoras Iniciais

De modo geral atuam em cada ponto da SM as seis componentes de tensão $\sigma_s, \sigma_n, \sigma_z, \tau_{zs}, \tau_{zn}$ e τ_{sn} , estando a elas associadas as componentes de deformação $\varepsilon_s, \varepsilon_n, \varepsilon_z, \gamma_{zs}, \gamma_{zn}$ e γ_{sn} . Quando se tratar de pontos fora da SM, faz-se o acréscimo de um asterisco a nível de índice ou sub-índice, conforme o caso.

O desenvolvimento analítico vai se basear nas hipóteses simplificadoras descritas a seguir :

- a) A deformação por cisalhamento γ_{zs} na SM é desprezível.

Isto traz como consequência a relação (II.1) abaixo.

$$\gamma_{zs} = \alpha + \beta = \frac{dw}{ds} + \frac{dv}{dz} = \dot{w} + v' \quad [\text{figura (3)}]$$

Pondo $\gamma_{zs} = 0$, vem $\dot{w} = -v'$, ou melhor,

$$\dot{w}(z, s) = -v'(z, s) \quad (\text{II.1})$$

- b) A seção média de uma placa qualquer componente da haste não sofre deformação linear na direção transversal. Isto significa $\varepsilon_s = 0$.

- c) Consideram-se também negligenciáveis as deformações [8], citadas abaixo.

ε_{n*} - deformação linear na seção transversal, na direção normal à SM.

γ_{zn*} - distorção num elemento de superfície normal à SM e paralelo a "z".

γ_{sn_*} - distorção num elemento de superfície da seção transversal.

Essas simplificações levam respectivamente a :

$$1) u_*(s, z, e) = u(s, z) + \varepsilon_{n_*} \cdot e$$

$$\text{mas com } \varepsilon_{n_*} = 0,$$

$$u_*(s, z, e) = u(s, z) \quad (\text{II.2})$$

$$2) w(s, z, e) = w(s, z) + \left[\gamma_{zn_*} - u'(s, z) \right] \cdot e$$

$$\text{mas com } \gamma_{zn_*} = 0,$$

$$w(s, z, e) = w(s, z) - u'(s, z) e \quad (\text{II.3})$$

$$3) v_*(s, z, e) = v(s, z) + \left[\gamma_{sn_*} - \dot{u}(s, z) \right] \cdot e$$

$$\text{mas com } \gamma_{sn_*} = 0,$$

$$v_*(s, z, e) = v(s, z) - \dot{u}(s, z) e \quad (\text{II.4})$$

- d) O deslocamento "u" normal à SM, causado pelos deslocamentos e rotações na LMP, é considerado aproximadamente determinado, entre cada dois nós, através de um polinômio do terceiro grau.
- e) As placas que formam a haste se comportam, com respeito aos deslocamentos fora de seu plano, exatamente como as placas isoladas sob um esforço de flexão.
- f) As hastes são sempre consideradas como homogêneas.
- g) A haste é sempre suposta formada de placas retangulares. No caso geral substitui-se a LMP de forma qualquer por uma poligonal cujos lados terão os comprimentos ajustados de acordo com a precisão requerida.

- h) As placas são consideradas rigidamente ligadas ao longo das arestas longitudinais.
- i) A espessura de cada placa é considerada constante.
- j) O elemento infinitesimal de superfície da seção transversal, $dF = t.ds$, é imaginado concentrado ao longo da LMP.

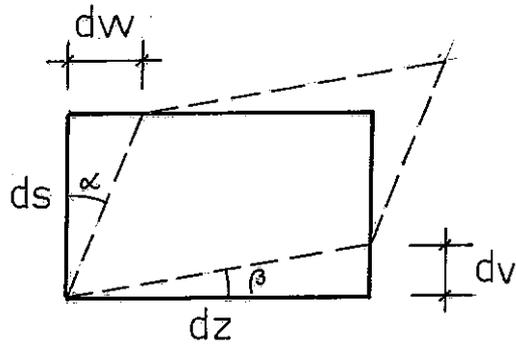


Fig. 3

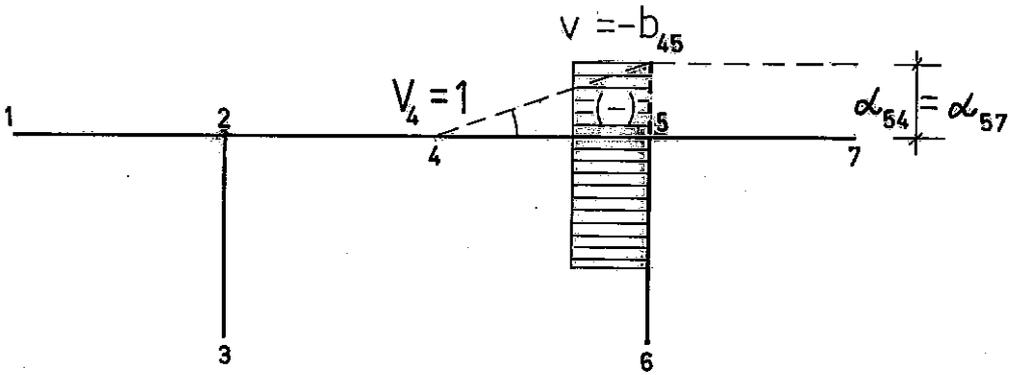


Fig. 4

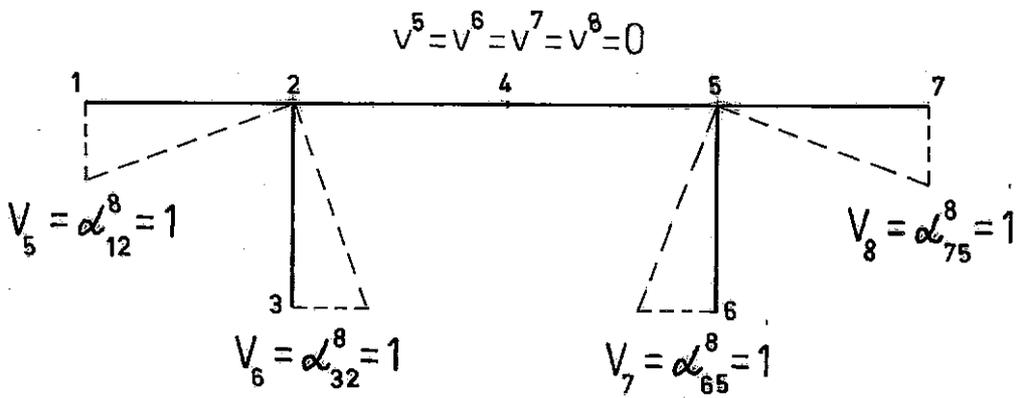


Fig. 5

Deformações e Tensões

A aplicação do método escolhido subentende a escolha de um elenco de deslocamentos genéricos e coerentes a serem impostos à estrutura, e a obtenção da resposta desta aos mesmos, de início isoladamente e com valores unitários, depois com seus valores reais, e por fim em conjunto pela aplicação do princípio da superposição.

Da letra "b" das Hipóteses Simplificadoras Iniciais pode-se concluir que os deslocamentos dos nós da LMP nos planos das seções transversais, são iguais aos correspondentes deslocamentos de um mecanismo, cujos membros, articulados nos nós, têm eixos coincidentes com a LMP. O número de deslocamentos independentes é portanto igual ao grau de liberdade do mecanismo. Sendo I esse grau e $V_i(z)$, $i=1,2,\dots,I$, o conjunto de deslocamentos, resta escolhê-los convenientemente. O mais intuitivo é associar-se V_1 , V_2 e V_3 respectivamente aos deslocamentos da seção transversal como um corpo rígido nas direções principais x e y e sua rotação em torno de um ponto qualquer "P" de seu plano.

$$V_1 = \xi_P \quad ; \quad V_2 = \eta_P \quad ; \quad V_3 = \varphi_P$$

A rotação φ_P será positiva quando a seção, olhada contra o sentido positivo dos "z", rotacionar no sentido anti-horário.

Os restantes (I-3) deslocamentos descrevem a deformação da seção transversal em seu plano, no caso em

que se supõe rigidez total das placas neste plano e sua ligação articulada nos nós. Os deslocamentos $V_i(z)$, $i=1,2,\dots,I$, determinam integralmente os deslocamentos dos pontos nodais. Entretanto, cada uma das placas sofrerá ainda as deformações causadas pela flexão, em virtude das ligações reais rígidas entre elas, bem como de carregamentos que atuem sobre as mesmas.

Tomando a seção da figura (2), vem

$I = 2k - n = 8$, sendo :

($k = 7$) - número de nós da LMP, e

($n = 6$) - número de barras da LMP.

Os diagramas de deslocamentos do mecanismo devidos aos deslocamentos unitários V_4, V_5, \dots, V_8 , são mostrados nas figuras (4) e (5). V_4 é a rotação da barra 4-5 em torno do ponto 4, enquanto V_5, \dots, V_8 são os deslocamentos dos pontos extremos 1, 3, 6 e 7, correspondentes às rotações das barras extremas em torno dos pontos 2 e 5.

Representando por $v^i(s)$ o deslocamento de um ponto qualquer da LMP na direção tangente, causado por $V_i = 1$, pode-se expressar o deslocamento de um ponto qualquer da SM na direção tangente à LMP, na forma

$$v(s, z) = \sum_{i=1}^I V_i(z) \cdot v^i(s) \quad (\text{II.5})$$

As expressões genéricas de v^1, v^2 e v^3 podem ser facilmente obtidas observando-se a figura (6), onde se representa um trecho de LMP em situação qualquer.

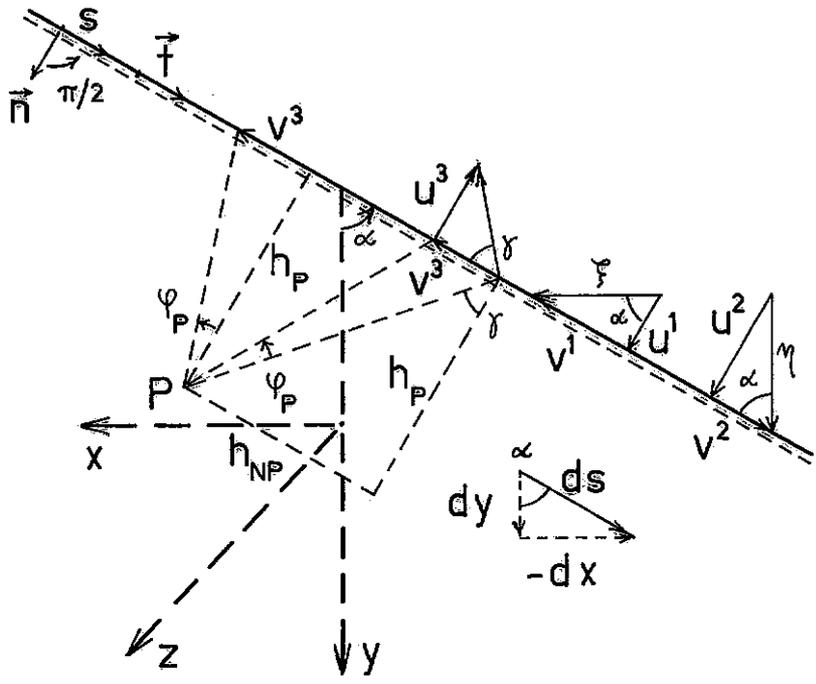


Fig. 6

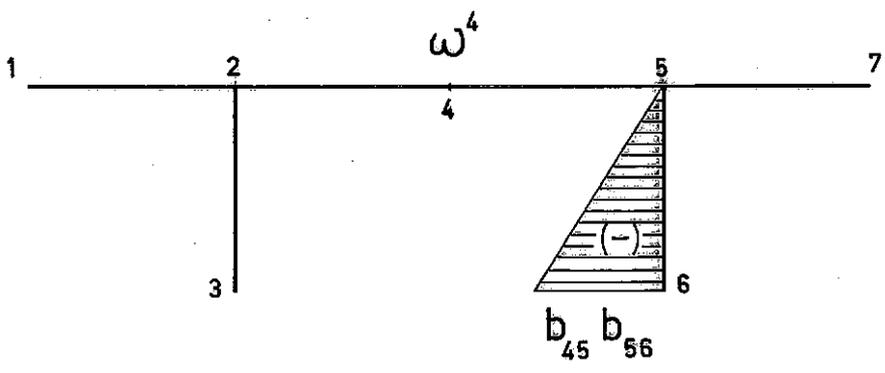


Fig. 7

$$v^1 = -\xi \cdot \text{sen } \alpha = -\text{sen } \alpha \quad (V_1 = \xi = 1)$$

$$v^2 = \eta \cdot \text{cos } \alpha = \text{cos } \alpha \quad (V_2 = \eta = 1)$$

$$v^3 = -\left[\varphi_p \cdot (-h_p) \right] = h_p \quad (V_3 = \varphi_p = 1) \quad (\text{II.6 a, c})$$

Representa-se por h_p a distância do polo de rotação à tangente à LMP no ponto considerado. Esta será considerada positiva, para uma seção cuja normal é o eixo "z" positivo, quando o vetor tangente t , orientado no sentido positivo dos "s", sugerir uma rotação em torno do polo P no sentido anti-horário.

Tomando a expressão (II.1) e fazendo a integração em "s", tem-se:

$$w(s, z) = -\int_0^s v'(s, z) ds + W_0(z) ,$$

onde se interpreta W_0 como a parcela desse deslocamento associada a um esforço axial.

Introduzindo a relação (II.5), vem :

$$\begin{aligned} w(s, z) &= -\int_0^s \sum_{i=1}^I V'_i(z) \cdot v^i(s) ds + W_0(z) = \\ &= -\sum_{i=1}^I V'_i(z) \int_0^s v^i(s) ds + W_0(z) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Fazendo

$$\omega^i = \int_0^s v^i(s) ds \quad (\text{II.8})$$

e supondo que

$$\begin{aligned} W_0(z) &= -V'_0(z) \quad e \\ \omega^0 &= 1 , \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

chega-se à forma

$$w(s, z) = - \sum_{i=0}^I V'_i(z) \cdot \omega^i(s) , \quad (\text{II.10})$$

que fornece o deslocamento de um ponto qualquer da LMP na direção do eixo da haste.

Usando as expressões (II.6) e (II.8), com dx e dy definidos em função de α como se pode ver na figura (6), obtem-se:

$$\omega^1 = x ,$$

$$\omega^2 = y \quad \text{e}$$

$$\omega^3 = \int_0^s h_p \cdot ds = \omega_p , \quad (\text{II.11 a,c})$$

onde ω_p é a coordenada setorial relativa ao polo escolhido [11].

Quanto a ω_4 , com base na figura (4), se chega ao diagrama da figura (7). Os restantes ω^i , $i = 5, \dots, 8$, são identicamente nulos como os correspondentes v^i .

O deslocamento de um ponto qualquer da LMP na direção normal à SM também pode ser obtido a partir dos $V_i(z)$, considerando cada barra em seu estado real de deformação. Seja u_{kr} o deslocamento normal de um ponto qualquer de uma barra genérica k-r da LMP, mostrada na figura (8). Influenciarão em u_{kr} :

- 1 - Os deslocamentos nodais normais gerados pelos deslocamentos e deformações da seção devidos aos $V_i(z)$, levando em conta as ligações rígidas da barra nos extremos, mas sem rotação dos mesmos. Eles fornecem os dois primeiros termos de u_{kr} .

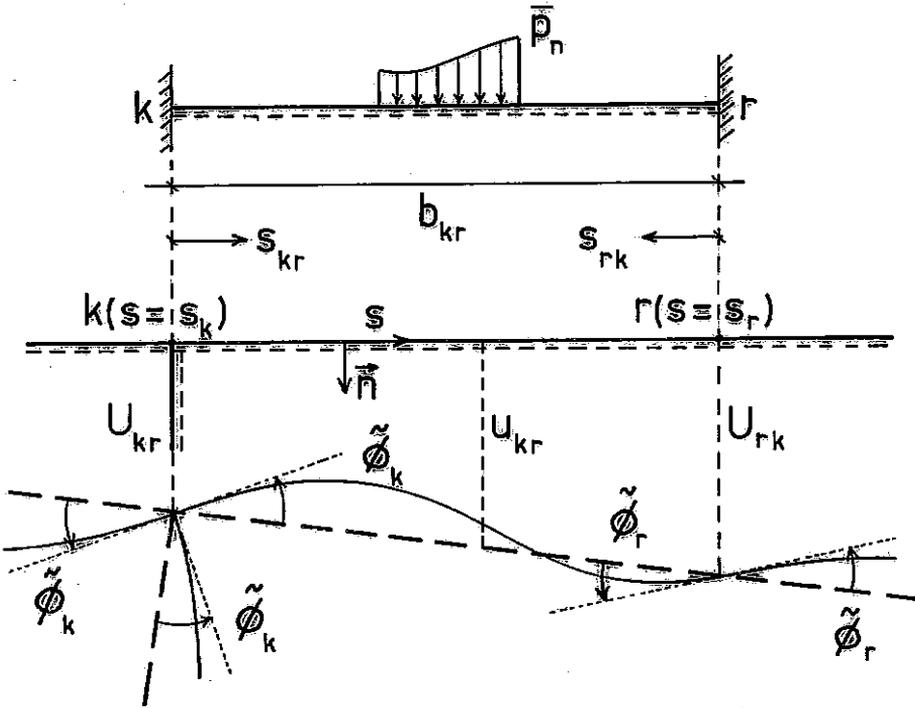


Fig. 8

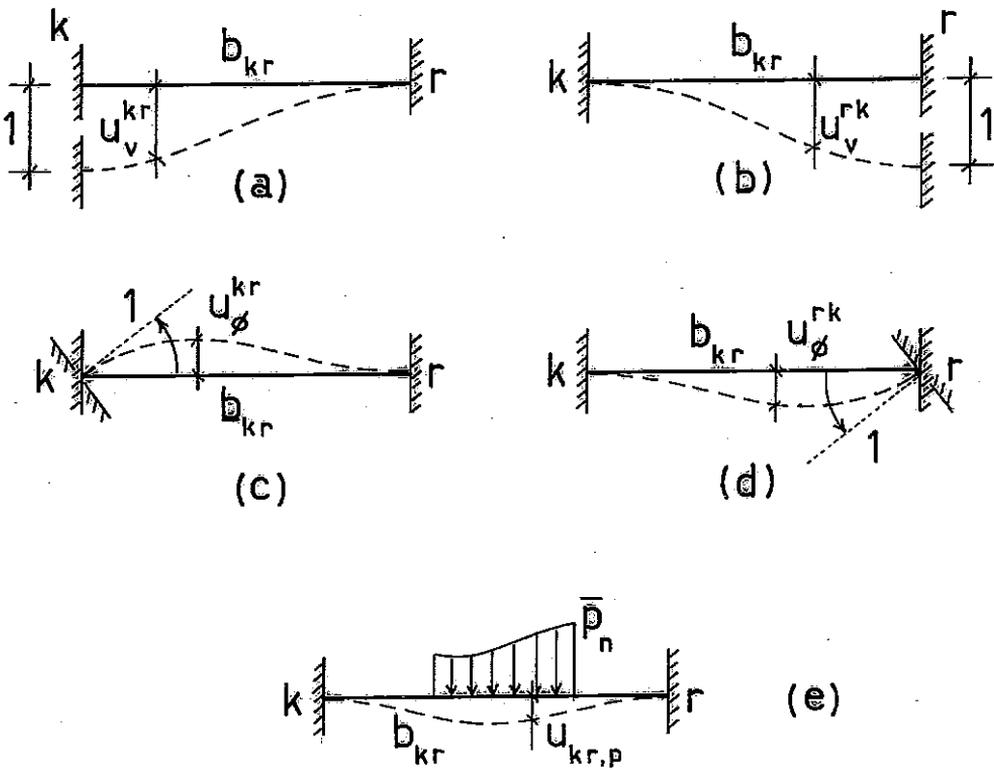


Fig. 9

- 2 - As rotações dos nós que, pela rigidez das ligações, provocam rotações de mesma amplitude nos extremos das barras que a eles se conectam. Elas geram os terceiro e quarto termos de u_{kr} .
- 3 - Os carregamentos externos aplicados na direção normal à superfície média. Eles originam o quinto termo de u_{kr} .

Desse modo tem-se:

$$u_{kr}(s, z) = U_{kr} u_v^{kr} + U_{rk} u_v^{rk} + \tilde{\phi}_k u_{\phi}^{kr} + \tilde{\phi}_r u_{\phi}^{rk} + u_{kr,p} \quad (\text{II.12})$$

Na expressão (II.12) constam

U_{kr} e U_{rk} - Deslocamentos nodais normais

u_v^{kr} e u_v^{rk} - Deslocamentos normais de um ponto qualquer de uma barra k-r, bi-engastada, para deslocamentos nodais unitários forçados respectivamente nos nós extremos k e r, vistos nas figuras (9a) e (9b).

$$u_v^{kr} = \frac{s_{kr}}{b_{kr}} \left[1 - \frac{s_{kr}(b_{kr} - s_{rk})}{b_{kr}^2} \right]$$

$$u_v^{rk} = \frac{s_{kr}}{b_{kr}} \left[1 - \frac{s_{rk}(b_{rk} - s_{kr})}{b_{kr}^2} \right] \quad (\text{II.13 a,b})$$

$\tilde{\phi}_k$ e $\tilde{\phi}_r$ - Rotações nos nós

A rotação em um nó será positiva quando, olhando-se o nó contra o sentido positivo do eixo "z", ele rotacionar no sentido anti-horário.

u_{φ}^{kr} e u_{φ}^{rk} - Deslocamentos normais de um ponto qualquer de uma barra k-r bi-engastada, para rotações unitárias forçadas respectivamente nos nós extremos k e r, mostrados nas figuras (9c) e (9d).

$$u_{\varphi}^{kr} = \mp \frac{s_{kr} \cdot s_{rk}^2}{b_{kr}^2}$$

$$u_{\varphi}^{rk} = \pm \frac{s_{rk} \cdot s_{kr}^2}{b_{kr}^2} \quad (\text{II.14 a,b})$$

Nas expressões (II.14) vale o sinal superior quando a normal interna n , no ponto, ao rotacionar para o nó "r", o fizer no sentido anti-horário.

$u_{kr,p}$ - Deslocamento normal em cada ponto, dado pela solução do problema de uma placa retangular perfeitamente engastada ao longo das arestas $s_{kr} = 0$ e $s_{rk} = 0$, e com condições de bordo quaisquer nos extremos da haste, para um carregamento \bar{p}_n , normal à SM, como se vê na figura (9e). Como cada placa tem dimensão transversal pequena em comparação ao comprimento da haste, pode-se utilizar a solução para placas infinitas.

Percorrendo-se todos os "K" nós da LMP na sequência pre-escolhida e superpondo as parcelas de mesma natureza que compõem u_{kr} , chega-se à expressão (II.15), onde o primeiro e o segundo termos agrupam respectivamente os primeiro e segundo termos e os terceiro e quarto termos

da expressão (II.12).

$$u_{kr}(s, z) = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R U_{kr} u_v^{kr} + \sum_{k=1}^K \phi_k u_\phi^k + u_p, \quad (\text{II.15})$$

sendo

$$u_\phi^k = \sum_{r=1}^R u_\phi^{kr} \quad (\text{II.16})$$

$$u_p = \sum_{kr=1}^n u_{kr,p} \quad (\text{II.17})$$

R - Número de barras da LMP que se ligam no nó k.

n - Número total de barras da LMP.

Os deslocamentos U_{kr} podem ser descritos em função dos parâmetros V_i , através de

$$U_{kr} = \sum_{i=1}^I V_i \alpha_{kr}^i, \quad (\text{II.18})$$

onde α_{kr}^i representa o deslocamento normal no nó k, para $V_i=1$, ou seja

$$\alpha_{kr}^i = u^i$$

Com a ajuda da figura (6) facilmente se pode concluir que

$$u^1 = \cos \alpha$$

$$u^2 = \sin \alpha$$

$$u^3 = h_{np} \quad (\text{II.19 a, c})$$

A distância do polo de rotação à normal à LMP no ponto considerado é representada por h_{np} . Para uma seção cuja normal é o eixo "z" positivo h_{np} será positiva quando, no ponto considerado, a normal interna \vec{n} sugerir um giro em torno do polo no sentido anti-horário.

Para $i=4, \dots, I$, os α_{kr}^i são obtidos dos diagramas dos v^i , como projeções dos vetores deslocamento dos nós isolados, na direção normal à SM.

Com isso,

$$u_{kr}(z, s) = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R \sum_{i=1}^I V_i \alpha_{ki}^i u_v^{kr} + \sum_{k=1}^K \tilde{\phi}_k u_\varphi^k + u_p, \text{ ou}$$

$$u_{kr}(z, s) = \sum_{i=1}^I V_i \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R \alpha_{ki}^i u_v^{kr} + \sum_{k=1}^K \tilde{\phi}_k u_\varphi^k + u_p \quad (\text{II.20})$$

O termo $\sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R \alpha_{kr}^i u_v^{kr}$ estabelece a variação dos deslocamentos normais ao longo da LMP para $V_i = 1$, sem a consideração das rotações dos nós e do efeito do carregamento aplicado. Sua expressão é uma função conhecida de "s" e pode ser obtida dos diagramas de deslocamentos para $V_i=1$, e das expressões (II.13). Representando por \tilde{u}_v^i o termo em questão, vem :

$$u_{kr}(z, s) = \sum_{i=1}^I V_i \tilde{u}_v^i + \sum_{k=1}^K \tilde{\phi}_k u_\varphi^k + u_p \quad (\text{II.21})$$

Desde que $\tilde{\phi}_k$ representa a rotação total do nó k, pode-se escrever :

$$\tilde{\phi}_k = \phi_k + \varphi_p, \text{ onde significam}$$

$\tilde{\phi}_k$ - a rotação devida às deformações, e

φ_p - uma rotação igual à da seção como um corpo rígido.

A parcela φ_p não gera fatores u_φ^{kr} e consequentemente u_φ^k , de modo que o segundo termo de (II.21) pode ser reescrito como $\sum_{k=1}^K \phi_k u_\varphi^k$. A contribuição de φ_p é gerada no primeiro termo, já que $\varphi_p = V_3$.

Os deslocamentos V_i , $i=1,2,3$, contribuem para $u_{kr}(s,z)$, mas não geram fatores do tipo u_v^{kr} , de modo que a grandeza \tilde{u}_v^i será substituída por outra, u_v^i , assim definida:

$$u_v^i = u^i, \text{ para } i=1,2,3$$

$$u_v^i = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R \alpha_{kr}^i u_v^{kr}, \text{ para } i=4, \dots, I \quad (\text{II.22 a,b})$$

Finalmente

$$u_{kr}(s,z) = \sum_{i=1}^I V_i(z) u_v^i(s) + \sum_{k=1}^K \phi_k(z) u_\phi^k(s) + u_p(s,z) \quad (\text{II.23})$$

Para os pontos fora da SM os deslocamentos são u_* , v_* e w_* , que podem ser obtidos pelas expressões (II.2), (II.3) e (II.4), vistas na letra "c" das Hipóteses Simplificadoras Iniciais.

Partindo daquelas expressões e usando (II.5), (II.10) e (II.23), chega-se a :

$$u_* = \sum_{i=0}^I V_i u_v^i + \sum_{k=1}^K \phi_k u_\phi^k + u_p$$

$$v_* = \sum_{i=0}^I V_i (v^i - \dot{u}_v^i e) - \sum_{k=1}^K \phi_k \dot{u}_\phi^k e - u_p e$$

$$w_* = -\sum_{i=0}^I V_i' (\omega^i + u_v^i e) - \sum_{k=1}^K \phi_k' u_\phi^k e - u_p' e \quad (\text{II.24 a,c})$$

Para obter uniformização, os somatórios em "i" são definidos a partir de $i=0$ em todas as expressões, devendo-se ressaltar que

$$\alpha_{kr}^0 = 0, \quad u_v^0 = 0 \quad \text{e} \quad v^0 = 0 \quad (\text{II.25})$$

Para os pontos da SM só resta uma componente não nula do estado de deformações

$$\varepsilon_z = w' = -\sum_{i=0}^I V''_i \omega^i \quad (\text{II.26})$$

Entretanto para um ponto qualquer três componentes não nulas podem ser obtidas :

$$\varepsilon_{z_*} = w'_*$$

$$\varepsilon_{z_*} = -\sum_{i=0}^I V''_i (\omega^i + u^i_v e) - \sum_{k=1}^K \phi''_k u^k_\phi e - u''_p e$$

$$\varepsilon_{s_*} = \dot{v}'_*$$

$$\varepsilon_{s_*} = -\sum_{i=0}^I V_i \ddot{u}^i_v e - \sum_{k=1}^K \phi_k \ddot{u}^k_\phi e - \ddot{u}_p e$$

$$\gamma_{zs_*} = \dot{w}'_* + v'_*$$

$$\gamma_{zs_*} = -2 \left(\sum_{i=0}^I V'_i \dot{u}^i_v e + \sum_{k=1}^K \phi'_k \dot{u}^k_\phi e + \dot{u}'_p e \right) \quad (\text{II.27 a,c})$$

Foram úteis nesta passagem as condições

$$\dot{v}^i = 0 \quad e \quad \dot{\omega}^i = v^i$$

As relações tensão-deformação regidas pela Lei de Hooke estabelecem [8], já com simplificações, que :

$$\sigma_z = E' (\varepsilon_{z_*} + \nu \varepsilon_{s_*})$$

$$\tau_{zs} = \frac{E' (1-\nu)}{2} \gamma_{zs_*}$$

$$\sigma_s = E' (\varepsilon_{s_*} + \nu \varepsilon_{z_*}) \quad , \quad \text{onde} \quad (\text{II.28 a,c})$$

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

Com o uso de(II.27), as expressões (II.28) tomam a forma abaixo.

$$\sigma_z = E' \left[-\sum_{i=0}^I V''_i (\omega^i + u^i_v e) - \sum_{k=1}^K \phi''_k u^k_\phi e - u''_p e + \right.$$

$$\nu \left(-\sum_{i=0}^I V_i \ddot{u}_v^i e - \sum_{k=1}^K \phi_k \ddot{u}_\varphi^k e - \ddot{u}_p e \right)$$

$$\tau_{zs} = -E' (1-\nu) \left(\sum_{i=0}^I V'_i \dot{u}_v^i e + \sum_{k=1}^K \phi'_k \dot{u}_\varphi^k e + \dot{u}'_p e \right)$$

$$\sigma_s = E' \left\{ -\sum_{i=0}^I V_i \ddot{u}_v^i e - \sum_{k=1}^K \phi_k \ddot{u}_\varphi^k e - \ddot{u}_p e + \right.$$

$$\left. \nu \left[-\sum_{i=0}^I V''_i (\omega^i + u_v^i e) - \sum_{k=1}^K \phi''_k u_\varphi^k e - u''_p e \right] \right\} \quad (\text{II.29 a, c})$$

Os esforços seccionais inerentes ao problema em estudo são definidos, para cada placa isolada na forma seguinte :

$$n_z = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z de \quad - \text{Esforço normal na direção longitudinal.}$$

$$n_{zs} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zs} de \quad - \text{Esforço de cisalhamento num plano paralelo à SM.}$$

$$n_s = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_s de \quad - \text{Esforço normal transversal (na direção da LMP).}$$

$$n_{zn} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zn} de \quad - \text{Esforço de cisalhamento num plano normal à SM e paralelo ao eixo "z".}$$

$$n_{sn} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{sn} de \quad - \text{Esforço de cisalhamento no plano da seção transversal.}$$

$$m_z = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z ede \quad - \text{Momento Fletor de vetor paralelo à tangente à LMP.}$$

$$m_s = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_s ede \quad - \text{Momento Fletor de vetor paralelo ao eixo "z".}$$

$$m_{zs} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zs} ede \quad - \text{Momento de Torção em torno do eixo "z".}$$

Alguns deles podem ser obtidos de imediato como funções dos $V_i(z)$ e apresentam as expressões :

$$n_z = -E' t \sum_{i=0}^I V_i'' \omega^i$$

$$m_z = -\frac{E' \cdot t^3}{12} \left[\sum_{i=0}^I (V_i'' u_v^i + \nu V_i \ddot{u}_v^i) + \sum_{k=1}^K (\phi_k'' u_\phi^k + \nu \phi_k \ddot{u}_\phi^k) \right] + m_{z,p}$$

$$m_{zs} = -\frac{E' \cdot t^3}{12} (1-\nu) \left(\sum_{i=0}^I V_i' \dot{u}_v^i + \sum_{k=1}^K \phi_k' \dot{u}_\phi^k \right) + m_{zs,p}$$

$$m_s = -\frac{E' \cdot t^3}{12} \left[\sum_{i=0}^I (V_i \ddot{u}_v^i + \nu V_i'' u_v^i) + \sum_{k=1}^K (\phi_k \ddot{u}_\phi^k + \nu \phi_k'' u_\phi^k) \right] + m_{s,p}$$

(II.30 a,d)

onde

$$m_{z,p} = -\frac{E' \cdot t^3}{12} \left(u_p'' + \nu \ddot{u}_p \right)$$

$$m_{zs,p} = -\frac{E' \cdot t^3}{12} (1-\nu) \dot{u}_p'$$

$$m_{s,p} = -\frac{E' \cdot t^3}{12} \left(\ddot{u}_p + \nu u_p'' \right)$$

(II.31 a,c)

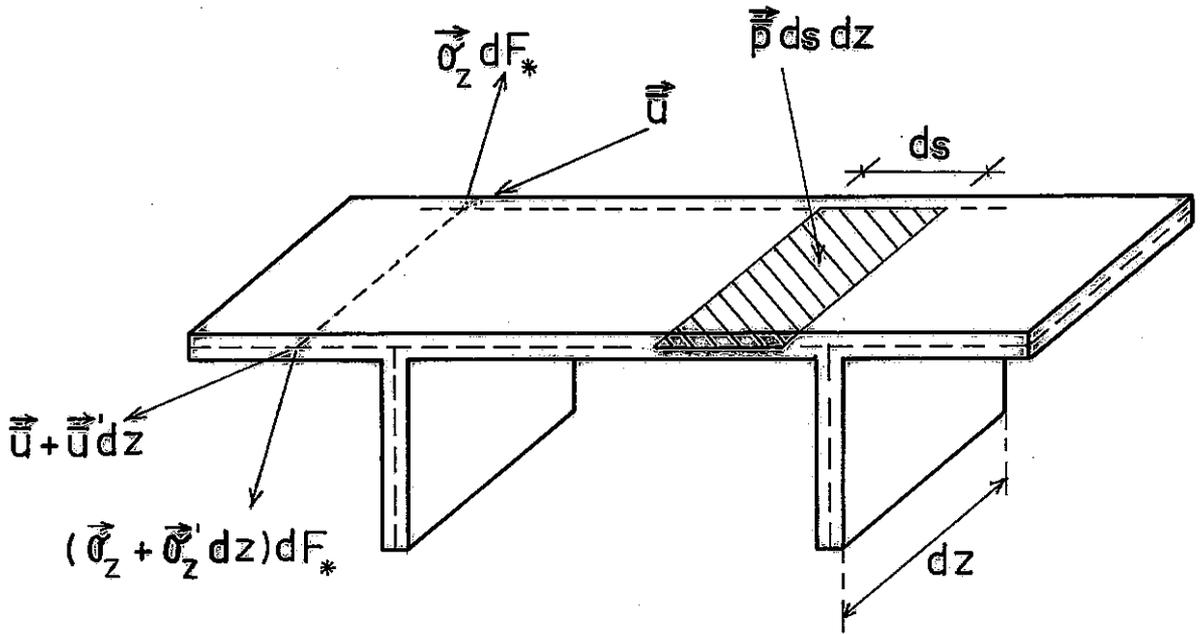


Fig.10

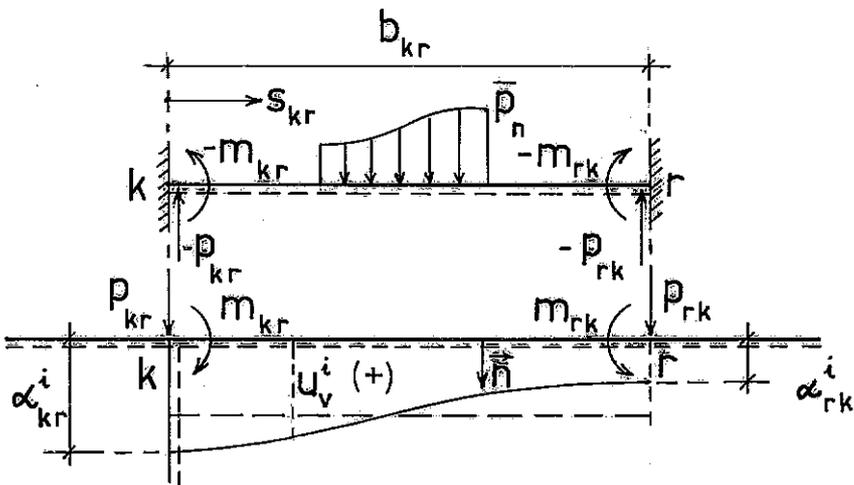


Fig.11

Equações Diferenciais da Haste-Casca

Seja uma fatia de Haste-Casca definida entre as seções z_0 e z_0+dz e sofrendo a ação dos esforços solicitantes. Num ponto qualquer da seção $z=z_0$ atua um vetor tensão σ_z com as componentes σ_z , τ_{zs} e τ_{zn} , enquanto no ponto correspondente da seção $z=z_0+dz$ atua o vetor $\sigma_z+\sigma'_z dz$, como se pode ver na figura (10). Um carregamento distribuído externo qualquer \bar{p} , de componentes \bar{p}_z , \bar{p}_s e \bar{p}_n atua nos pontos da SM.

As condições de equilíbrio são estabelecidas através do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Um vetor de deslocamentos virtuais \bar{u} , com componentes \bar{u}_* , \bar{u}_* e \bar{w}_* é aplicado num ponto da seção $z=z_0$, tendo-se portanto no ponto correspondente da seção $z=z_0+dz$ um vetor $\bar{u} + \bar{u}' dz$. O vetor \bar{u} é uma função contínua das coordenadas, a qual não só deve preencher as condições de extremidade referentes aos deslocamentos, como também estar de acordo com as suposições até agora feitas. Assim, adotam-se as expressões :

$$\begin{aligned} \bar{u}_* &= \bar{u} = \sum_{i=0}^I \bar{V}_i u_v^i + \sum_{k=1}^K \bar{\phi}_k u_\varphi^k \\ \bar{v}_* &= \sum_{i=0}^I \bar{V}_i (v^i - \dot{u}_v^i e) - \sum_{k=1}^K \phi_k \dot{u}_\varphi^k e \\ \bar{w}_* &= -\sum_{i=0}^I \bar{V}_i (\omega^i + u_v^i e) - \sum_{k=1}^K \bar{\phi}'_k u_\varphi^k e \end{aligned} \quad (II.32 a, c)$$

o que corresponde à consideração de deslocamentos virtuais $\bar{V}_i(z)$, $i=1,2,\dots,I$, com as correspondentes rotações

virtuais $\bar{\phi}_k(z)$, $k=1,2,\dots,K$, que gerem as componentes do vetor \bar{u} .

Representando-se por \bar{W} o trabalho externo total, e por \bar{U} o correspondente trabalho interno total, o Princípio dos Trabalhos Virtuais toma a forma

$$\bar{W} + \bar{U} = 0 \quad (\text{II.33})$$

Para uma unidade de comprimento da haste a expressão de \bar{W} , já com as devidas simplificações, é

$$\bar{W} = \int_F (\sigma'_z \bar{u} + \sigma_z \bar{u}') dF_* + \int_s \bar{p} \bar{u} ds ,$$

onde $dF_* = ds$.

Desenvolvendo os produtos internos, tem-se :

$$\begin{aligned} \bar{W} = \int \left[(\tau'_{zn} \bar{u} + \tau'_{zs} \bar{v}_* + \sigma'_z \bar{w}_*) + (\tau_{zn} \bar{u}' + \tau_{zs} \bar{v}'_* + \sigma_z \bar{w}'_*) \right] dF_* + \\ \int_s (\bar{p}_n \bar{u} + \bar{p}_s \bar{v} + \bar{p}_z \bar{w}) ds , \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

onde

$$\bar{v} = \bar{v}_*(s, z, e=0) \quad e$$

$$\bar{w} = \bar{w}_*(s, z, e=0) , \quad (\text{II.35})$$

em virtude de o vetor \bar{p} atuar na SM.

Para \bar{U} , a expressão obtida é

$$\bar{U} = - \int_F (\sigma_z \bar{\epsilon}_{z_*} + \tau_{zs} \bar{\gamma}_{zs_*} + \sigma_s \bar{\epsilon}_{s_*}) dF_* ,$$

ou seja :

$$\bar{U} = - \int_s \left[\sigma_z \bar{w}'_* + \tau_{zs} (\bar{v}'_* + \dot{\bar{w}}_*) + \sigma_s \dot{\bar{v}}_* \right] dF_* \quad (\text{II.36})$$

Introduzidos em (II.33), \bar{W} e \bar{U} dão-lhe a forma

$$\int_F (\tau'_{zn} \bar{u} + \tau'_{zs} \bar{v}_* + \sigma'_* \bar{w}_* + \tau_{zn} \bar{u}' - \sigma_s \dot{\bar{v}}_* - \tau_{zs} \dot{\bar{w}}_*) dF_* + \int_s (\bar{p}_n \bar{u} + \bar{p}_s \bar{v} + \bar{p}_z \bar{w}) ds = 0 \quad (\text{II.37})$$

Substituindo em (II.37) as expressões (II.32a,c), agrupando convenientemente os termos e igualando a zero os coeficientes de $\bar{V}_i, \bar{V}'_i, \bar{\phi}_k$ e $\bar{\phi}'_k$, que são grandezas quaisquer e em geral não nulas, vem

$$\int_F \left[\tau'_{zn} u_v^i + \tau'_{zs} (v^i - \dot{u}_v^i e) + \sigma_s \ddot{u}_v^i e \right] dF_* + \int_s (\bar{p}_s v^i + \bar{p}_n u_v^i) ds = 0 \quad e$$

$$\int_F \left[-\sigma'_z (\omega^i + u_v^i e) + \tau_{zn} u_v^i + \tau_{zs} (\dot{\omega}^i + \dot{u}_v^i e) \right] dF_* - \int_s \bar{p}_z \omega^i ds = 0 \quad ,$$

com $i = 0, 1, \dots, I$ (II.38 a,b)

$$\int_F (\tau'_{zn} u_\varphi^k - \tau'_{zs} \dot{u}_\varphi^k e + \sigma_s \ddot{u}_\varphi^k e) dF_* + \int_s \bar{p}_n u_\varphi^k ds = 0 \quad e$$

$$\int_F (-\sigma'_z u_\varphi^k e + \tau_{zs} \dot{u}_\varphi^k e + \tau_{zn} u_\varphi^k) dF_* = 0 \quad ,$$

com $k = 1, 2, \dots, K$ (II.39 a,b)

Efetuada as integrais em "e", trocam-se as tensões pelos correspondentes esforços seccionais, e os sistemas passam a ser

$$\int_s (n'_{zn} u_v^i + n'_{zs} v^i - m'_{zs} \dot{u}_v^i + m_s \ddot{u}_v^i) ds + \int_s (\bar{p}_s v^i + \bar{p}_n u_v^i) ds = 0$$

$$\int_s (-n'_z \omega^i - m'_z u_v^i + n_{zn} u_v^i + n_{zs} \dot{\omega}^i + m_{zs} \dot{u}_v^i) ds - \int_s \bar{p}_z \omega^i ds = 0 \quad ,$$

com $i = 0, 1, \dots, I$ (II.40 a,b)

$$\int_s (n'_{zn} u_\varphi^k - m'_{zs} \dot{u}_\varphi^k + m_s \ddot{u}_\varphi^k) ds + \int_s \bar{p}_n u_\varphi^k ds = 0$$

$$\int_s (-m'_z u_\varphi^k + m_{zs} \dot{u}_\varphi^k + n_{zn} u_\varphi^k) ds = 0 \quad ,$$

com $k = 1, 2, \dots, K$ (II.41 a,b)

Os esforços n_{zn} e n_{zs} , de expressões ainda não determinadas, podem ser facilmente eliminados, obtendo-se ao mesmo tempo a redução dos quatro sistemas anteriores aos dois que se seguem

$$\int_s (n''_z \omega^i + m''_z u_v^i - 2m'_{zs} \dot{u}_v^i + m_s \ddot{u}_v^i) ds + \int_s (\bar{p}_n u_v^i + \bar{p}_s v^i + \bar{p}'_z \omega^i) ds = 0 \quad ,$$

com $i = 0, 1, \dots, I$

$$\int_s (m''_z u_\varphi^k - 2m'_{zs} \dot{u}_\varphi^k + m_s \ddot{u}_\varphi^k) ds + \int_s \bar{p}_n u_\varphi^k ds = 0 \quad ,$$

com $k = 1, 2, \dots, K$ (II.42 a,b)

A partir de (II.30) as expressões necessárias são obtidas na forma abaixo

$$n''_z = -E't \sum_{i=0}^I V_i'''' \omega^i$$

$$m''_z = -\frac{E't^3}{12} \left[\sum_{i=0}^I (V_i'''' u_v^i + \nu V_i'' \ddot{u}_v^i) + \sum_{k=1}^K (\phi_k'''' u_\varphi^k + \nu \phi_k'' \ddot{u}_\varphi^k) \right] + m''_{z,p}$$

$$m'_{zs} = -\frac{E't^3}{12} (1-\nu) \left[\sum_{i=0}^I V_i'' \dot{u}_v^i + \sum_{k=1}^K \phi_k''' \dot{u}_\varphi^k \right] + m''_{zs,p} \quad (II.43 a,c)$$

Na continuação efetua-se a seqüência de operações :

1 - Reescrevem-se as expressões (II.30d) e (II.43 a,c), trocando-se os índices "i" e "k" respectivamente por "j" e "l".

- 2 - Faz-se a substituição dessas expressões nas equações (II.42 a,b).
- 3 - Dividem-se as expressões resultantes por $-E'$.
- 4 - Desenvolvem-se as equações reagrupando-as em três grandes integrais. A primeira conterà os termos em V_j e suas derivadas, a segunda os termos em ϕ_1 e suas derivadas, e a terceira os termos de carga.
- 5 - Grupam-se os termos com a mesma ordem de derivação de V_j e ϕ_1 , evidenciando-se essas grandezas.
- 6 - Como V_j e ϕ_1 não variam com "s", fazem-se as mudanças
- $$\int_s \sum_{j=0}^I V_j^g(\dots) = \sum_{j=0}^I \int_s V_j^g(\dots)$$
- $$\int_s \sum_{k=1}^K \phi_1^g(\dots) = \sum_{k=1}^K \int_s \phi_1^g(\dots) \quad ,$$
- onde "g" representa o grau de derivação em "z".
- 7 - Para simplificação representam-se por símbolos as integrais que resultam dentro dos somatórios, bem como os termos de carga.

Finalmente o resultado obtido tem a forma

$$\sum_{j=0}^I \left[(a_{ij} + b_{ij}) V_j''' - b_{ij}^* V_j'' + \dot{b}_{ij} V_j \right] + \sum_{i=1}^K \left[c_{i1} \phi_1''' - c_{i1}^* \phi_1'' + \dot{c}_{i1} \phi_1 \right]$$

$$= \frac{1}{E'} A_{i0} \quad , \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, I$$

$$\sum_{j=0}^I \left[c_{kj} V_j''' - c_{kj}^* V_j'' + \dot{c}_{kj} V_j \right] + \sum_{i=1}^K \left[d_{k1} \phi_1''' - 2\dot{d}_{k1} \phi_1'' + \ddot{d}_{k1} \phi_1 \right] = \frac{1}{E'} B_{k0} \quad ,$$

com $k = 1, 2, \dots, K$, (II.44 a,b)

e as expressões dos coeficientes a_{ij}, b_{ij}, c_{i1} , etc, estão no Anexo B.

Os termos de carga A_{i0} e B_{i0} são dados por :

$$A_{i0} = \int_s (m''_{z,p} u_v^i - 2m'_{zs,p} \dot{u}_v^i + m_{s,p} \ddot{u}_v^i) ds + \int_s (\bar{p}_n u_v^i + \bar{p}_s v^i + \bar{p}'_z \omega^i) ds$$

$$B_{k0} = \int_s (m''_{z,p} u_\varphi^k - 2m'_{zs,p} \dot{u}_\varphi^k + m_{s,p} \ddot{u}_\varphi^k) ds + \int_s \bar{p}_n u_\varphi^k ds \quad (\text{II.45 a,b})$$

A obtenção dos termos A_{i0} para $i = 1, 2, 3$, se faz usando (II.19) e se chega a :

Para $i = 1, 2$, com $\dot{u}_v^i = \ddot{u}_v^i = 0$,

$$A_{i0} = \int_s (m''_{z,p} + \bar{p}_n) u_v^i ds + \int_s (\bar{p}_s v^i + \bar{p}'_z \omega^i) ds \quad (\text{II.46})$$

Para $i = 3$, com $\dot{u}_v^i = -1$ e $\ddot{u}_v^i = 0$,

$$A_{i0} = \int_s (m''_{z,p} + \bar{p}_n) u_v^i ds + \int_s (2m'_{zs,p} + \bar{p}_s v^i + \bar{p}'_z \omega^i) ds \quad (\text{II.47})$$

Quando $i > 3$, os valores de A_{i0} provêm da aplicação da expressão :

$$A_{i0} = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R p_{kr} \alpha_{kr}^i + \int_s (\bar{p}_s v^i + \bar{p}'_z \omega^i) ds, \quad (\text{II.48})$$

onde p_{kr} representa a ação da barra k-r no nó "k" na direção normal àquela, sendo positiva quando seu sentido coincidir com o da normal interna n. Vejam-se as figuras (10) e (11).

Já no que se refere aos termos B_{i0} , tem-se uma expressão única para todos os $k = 1, 2, \dots, K$,

$$B_{k0} = \sum_{r=1}^R m_{kr} = m_k, \quad (\text{II.49})$$

onde m_{kr} é o momento aplicado pela barra k-r no nó "k" ao qual se conecta, sendo positivo quando indicar um giro no sentido anti-horário. As figuras (11) e (12) mostram os esquemas.

Para a seção transversal adotada, os esforços p_{kr} e m_{kr} são vistos na figura (12), com os sentidos correspondentes a um carregamento \bar{p}_n que atua no sentido positivo da normal interna em cada barra.

Os passos seguidos para a obtenção de (II.48) e (II.49) encontram-se no Anexo C.

Uma vez inteiramente definido o sistema de equações dado por (II.44 a,b), o primeiro passo para simplificá-lo é extrair dêle o esforço axial. Isto se consegue usando uma mudança de variáveis que substitui ω^i por $\bar{\omega}^i$, sendo :

$$\bar{\omega}^0 = \omega^0 = 1$$

$$\bar{\omega}^i = \omega^i + \beta_{i0} \omega^0, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (II.50)$$

com a condição

$$\int_F \bar{\omega}^i \omega^0 dF = 0, \quad (II.51)$$

de onde, por simplificação se obtém

$$\beta_{i0} = - \frac{\int_F \omega^i dF}{F} \quad (II.52)$$

A primeira das equações (II.44) se transforma em

$$E' F W_0''' = -p_z, \quad (II.53)$$

$$\text{com } p_z = \int_s \bar{p}_z ds,$$

e as demais perdem todos os índices zero de seus membros esquerdos, de modo que o sistema passa a ter a forma :

$$\sum_{j=1}^I \left[(a_{ij} + b_{ij}) v_j'''' - b_{ij}^* v_j'' + b_{ij} \dot{v}_j \right] + \sum_{l=1}^K (c_{il} \phi_l'''' - c_{il}^* \phi_l'' + c_{il} \dot{\phi}_l) =$$

$$= \frac{1}{E'} A_{i0}, \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, I.$$

$$\sum_{j=1}^I (c_{kj} v_j'''' - c_{kj}^* v_j'' + c_{kj} \dot{v}_j) + \sum_{l=1}^K (d_{kl} \phi_l'''' - 2d_{kl} \phi_l'' + d_{kl} \dot{\phi}_l) = \frac{1}{E'} B_{ko},$$

$$\text{com } k = 1, 2, \dots, K, \quad (\text{II.54 a, b})$$

sendo agora

$$a_{ij} = \int_s t \omega^{-i} \bar{\omega}^{-j} ds \quad (\text{II.55})$$

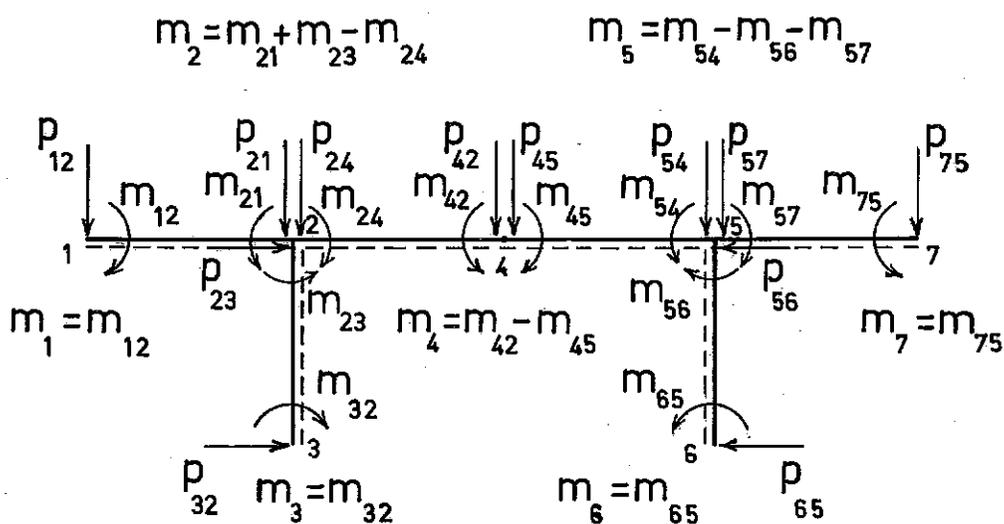


Fig.12

Condições de Extremidade

Sejam u_*^* , v_*^* e w_*^* os deslocamentos de um ponto qualquer de uma seção extrema da haste. Como êles devem obedecer a todas as condições até agora colocadas com relação aos deslocamentos, tem-se :

$$\begin{aligned}
 u_*^* &= \sum_{i=1}^I v_i^* u_v^i + \sum_{k=1}^K \phi_k^* u_\phi^k + u_p^* \\
 v_*^* &= \sum_{i=1}^I v_i^* (v^i + \dot{u}_v^i e) - \sum_{k=1}^K \phi_k^* \dot{u}_\phi^k e - \dot{u}_p^* e \\
 w_*^* &= -\sum_{i=1}^I v_i^{*'} (\bar{\omega}^i + u_v^i e) - \sum_{k=1}^K \phi_k^{*'} u_\phi^k e + u_p^{*'} e + W_0^* , \quad (\text{II.56 a,c})
 \end{aligned}$$

onde v_i^* são os parâmetros de deslocamento, ϕ_k^* são as rotações dos nós e u_p^* , \dot{u}_p^* e $u_p^{*'}$ descrevem os deslocamentos dos pontos quando v_i^* , $v_i^{*'}$, ϕ_k^* e $\phi_k^{*'}$ são nulos, tudo isso com relação à seção extrema.

As condições de extremidade em função dos deslocamentos são :

$$\begin{aligned}
 u_* &= u_*^* \\
 v_* &= v_*^* \\
 w_* &= w_*^* , \quad (\text{II.57 a,c})
 \end{aligned}$$

sendo u_* , v_* e w_* expressos por meio de (II.24 a,c), entretanto usando a mudança (II.50), fazendo $i = 1, 2, \dots, I$, e acrescentando o termo W_0 a w_* .

A partir daí, se tem :

$$\begin{aligned}
 v_i &= v_i^* \quad \text{e} \quad v_i' = v_i^{*'} \quad , \text{com } i = 1, 2, \dots, I , \\
 \phi_k &= \phi_k^* \quad \text{e} \quad \phi_k' = \phi_k^{*'} \quad , \text{com } k = 1, 2, \dots, K ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_0 &= W_0^* , \\
 u_p &= u_p^* , \\
 \dot{u}_p &= \dot{u}_p^* \quad e \\
 u'_p &= u'^*_p \quad (II.58 \text{ a, f})
 \end{aligned}$$

A condição (II.58 c) relaciona-se com a equação (II.53), enquanto que (II.58 d, f) em geral não podem ser satisfeitas em virtude de se tomar como aproximação para u_p , em cada trecho da LMP, a solução para uma placa estreita infinitamente longa. Resultam, portanto das condições (II.57), 2.(I+K) equações para cada extremo da haste.

As condições de extremidade em função dos esforços são formuladas na forma abaixo, usando o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

$$\int_F (\sigma_z - \bar{p}_z) \bar{u}_* dF = 0 \quad (II.59)$$

Os vetores dessa expressão são :

\bar{u}_* (\bar{u}_* , \bar{v}_* , \bar{w}_*) , vetor dos deslocamentos virtuais, com

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_* &= \sum_{i=1}^I \bar{V}_i u_v^i + \sum_{k=1}^K \bar{\phi}_k u_\varphi^k \\
 \bar{v}_* &= \sum_{i=1}^I \bar{V}_i (v^i + \dot{u}_v^i e) - \sum_{k=1}^K \bar{\phi}_k \dot{u}_\varphi^k e \\
 \bar{w}_* &= -\sum_{i=1}^I \bar{V}'_i (\bar{\omega}^i + u_v^i e) - \sum_{k=1}^K \bar{\phi}'_k u_\varphi^k e + \bar{W}_0 \quad (II.60 \text{ a, c})
 \end{aligned}$$

σ_z (σ_z , τ_{zn} , τ_{zs}) , vetor das tensões internas na seção transversal extrema

\bar{p}_z (\bar{p}_{zz} , \bar{p}_{zn} , \bar{p}_{zs}) , vetor das cargas de superfície, atuando na seção transversal extrema

Desenvolvendo os produtos internos e reescrevendo, vem :

$$\int_s (\tau_{zn} \bar{u}_* + \tau_{zs} \bar{v}_* + \sigma_z \bar{w}_*) dF = \int_F (\bar{p}_{zn} \bar{u}_* + \bar{p}_{zs} \bar{v}_* + \bar{p}_{zz} \bar{w}_*) dF \quad (\text{II.61})$$

Feitas as substituições, o desenvolvimento dos termos e seu reagrupamento conveniente, além das integrações ao longo da espessura das placas, o membro esquerdo de (II.61) toma a forma :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I \bar{V}_i \int_s (n_{zn} u_v^i + n_{zs} v_{zs}^i - m_{zs} \dot{u}_v^i) ds - \sum_{i=1}^I \bar{V}'_i \int_s (n_z \bar{\omega}^i + m_z u_v^i) ds + \\ & \sum_{k=1}^K \bar{\phi}_k \int_s (n_{zn} u_\varphi^k - m_{zs} \dot{u}_\varphi^k) ds + \sum_{k=1}^K \bar{\phi}'_k \int_s m_z u_\varphi^k ds + \bar{W}_0 \int_s n_z ds \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

O membro direito desenvolvido toma uma forma inteiramente análoga, de modo que a equação (II.61) se transforma no sistema de equações seguinte :

$$\begin{aligned} \int_s (n_{zn} u_v^i + n_{zs} v_{zs}^i - m_{zs} \dot{u}_v^i) ds &= \int_s (n_{zn}^* u_v^i + n_{zs}^* v_{zs}^i - m_{zs}^* \dot{u}_v^i) ds \\ \int_s (n_z \bar{\omega}^i + m_z u_v^i) ds &= \int_s (n_z^{*-i} + m_z^* u_v^i) ds \end{aligned} \quad (\text{II.63 a,b})$$

com $i = 1, 2, \dots, I$

$$\begin{aligned} \int_s (n_{zn} u_\varphi^k - m_{zs} \dot{u}_\varphi^k) ds &= \int_s (n_{zn}^* u_\varphi^k - m_{zs}^* \dot{u}_\varphi^k) ds \\ \int_s m_z u_\varphi^k ds &= \int_s m_z^* u_\varphi^k ds \end{aligned} \quad (\text{II.64 a,b})$$

com $k = 1, 2, \dots, K$

$$\int_s n_z ds = \int_s n_z^* ds \quad (\text{II.65})$$

onde

$$\begin{aligned}
 n_{zn}^* &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_{zn} \, ds, & m_z^* &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_{zz} \, ds, & n_{zs}^* &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_{zs} \, ds \\
 m_{zs}^* &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_{zs} \, ds, & n_z^* &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_{zz} \, ds
 \end{aligned} \tag{II.66 a,e}$$

Para eliminar n_{zn}^* e n_{zs}^* tomam-se (II.40 b) e (II.41 b), reescrevendo-as, nessa ordem, como se segue

$$\begin{aligned}
 \int_s (n_{zn}^i u_v^i + n_{zs}^i v_v^i - m_{zs}^i \dot{u}_v^i) \, ds &= \int_s (n_z^i \bar{\omega}^i + m_z^i u_v^i - 2m_{zs}^i \dot{u}_v^i) \, ds + \int_s \bar{p}_z^i \bar{\omega}^i \, ds \\
 \int_s (n_{zn}^k u_\varphi^k - m_{zs}^k \dot{u}_\varphi^k) \, ds &= \int_s (m_z^k u_\varphi^k - 2m_{zs}^k \dot{u}_\varphi^k) \, ds,
 \end{aligned} \tag{II.67 a,b}$$

e substituindo-as respectivamente em (II.63a) e (II.64a), de modo que o conjunto de equações (II.63) e (II.64) tome a forma :

$$\begin{aligned}
 \int_s (n_z^i \bar{\omega}^i + m_z^i u_v^i - 2m_{zs}^i \dot{u}_v^i) \, ds &= Q_v^{*i} \\
 \int_s (n_z^i \bar{\omega}^i + m_z^i u_v^i) \, ds &= M_v^{*i},
 \end{aligned} \tag{II.68 a,b}$$

com $i = 1, 2, \dots, I$

$$\begin{aligned}
 \int_s (m_z^k u_\varphi^k - 2m_{zs}^k \dot{u}_\varphi^k) \, ds &= Q_\varphi^{*k} \\
 \int_s m_z^k u_\varphi^k \, ds &= M_\varphi^{*k},
 \end{aligned} \tag{II.69 a,b}$$

com $k = 1, 2, \dots, K$,

onde

$$Q_v^{*i} = \int_s (n_{zn}^i u_v^i + n_{zs}^i v_v^i - m_{zs}^i \dot{u}_v^i) \, ds - \int_s \bar{p}_z^i \bar{\omega}^i \, ds$$

$$M_v^{*i} = \int_s (n_z^{*-i} + m_z^* u_v^i) ds$$

$$Q_\varphi^{*i} = \int_s (n_{zn}^* u_\varphi^k - m_{zs}^* \dot{u}_\varphi^k) ds$$

$$M_\varphi^{*i} = \int_s m_z^* u_\varphi^k ds \quad (\text{II.70 a,d})$$

Entrando com as expressões (II.30) e/ou suas derivadas, com os índices "i" e "k" trocados respectivamente por "j" e "1", desenvolvendo, grupando os termos e lembrando das definições do Anexo A e de (II.55), obtém-se :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^I \left\{ (a_{ij} + b_{ij}) V_j''' - [2(1-\nu) \dot{b}_{ij} - \nu \bar{b}_{ij}] V_j' \right\} + \\ & \sum_{1=1}^K \left\{ c_{i1} \phi_1''' - [2(1-\nu) \dot{c}_{i1} - \nu \bar{c}_{i1}] \phi_1' \right\} = - \frac{1}{E'} (Q_v^{*i} - Q_v^{oi}) \\ & \sum_{j=1}^I \left[(a_{ij} + b_{ij}) V_j'' + \nu \bar{b}_{ij} V_j' \right] + \sum_{1=1}^K (c_{i1} \phi_1'' + \nu \bar{c}_{i1} \phi_1') = - \frac{1}{E'} (M_v^{*i} - M_v^{oi}) \end{aligned}$$

$$\text{com } i = 1, 2, \dots, I \quad (\text{II.71 a,b})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^I \left[c_{kj} V_j''' - (2-\nu) \dot{c}_{kj} V_j' \right] + \sum_{1=1}^K \left[d_{k1} \phi_1''' - (2-\nu) \dot{d}_{k1} \phi_1' \right] = \\ & - \frac{1}{E'} (Q_\varphi^{*k} - Q_\varphi^{ok}) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^I (c_{kj} V_j'' - \nu \dot{c}_{kj} V_j') + \sum_{1=1}^K (d_{k1} \phi_1'' - \nu \dot{d}_{k1} \phi_1') = - \frac{1}{E'} (M_\varphi^{*k} - M_\varphi^{ok}) ,$$

$$\text{com } k = 1, 2, \dots, K , \quad (\text{II.72 a,b})$$

onde

$$Q_v^{oi} = \int_s \bar{n}_{zn,p} u_v^i ds , \quad M_v^{oi} = \int_s m_{z,p} u_v^i ds$$

$$Q_{\varphi}^{0k} = \int_S \bar{n}_{zn,p} u_{\varphi}^k ds \quad , \quad M_{\varphi}^{0k} = \int_S m_{z,p} u_{\varphi}^k ds \quad , \quad (\text{II.73 a,d})$$

sendo

$$\bar{n}_{zn,p} = m'_{z,p} + 2\dot{m}_{zs,p} \quad , \quad (\text{II.74})$$

o esforço cortante em cada ponto, na seção transversal da placa.

As expressões (II.73 a e c) provêm respectivamente das integrais

$$\int_S (m'_{z,p} u_v^i - 2m_{zs,p} \dot{u}_v^i) ds \quad e$$

$$\int_S (m'_{z,p} u_{\varphi}^k - 2m_{zs,p} \dot{u}_{\varphi}^k) ds \quad ,$$

fazendo-se a integração por partes do segundo termo de cada uma [3 e 4] e lembrando que $m_{zs,p} = 0$ para $s_{kr} = 0$ e $s_{rk} = 0$, como se pode verificar em (II.31b).

Escolhendo-se uma solução u_p que, além das condições de extremidade já vistas, satisfaça as condições de extremidade homogêneas

$$\bar{n}_{zn,p} = 0 \quad e$$

$$m_{z,p} = 0 \quad , \quad (\text{II.75 a,b})$$

as integrais (II.73) se anulam, simplificando as equações (II.71) e (II.72).

Solução Teórica do Problema

As equações básicas para a solução do problema são :

- 1 - Equações Diferenciais do Equilíbrio (II.54 a,b).
- 2 - Equações das Condições de Extremidade (II.58 a,b), (II.71 a,b) e (II.72 a,b).

Essas equações devem agora ser escritas sob a forma matricial, usando os vetores e matrizes definidos a seguir

As grandezas V_i e ϕ_k formam os vetores

$$|V| = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_I \end{vmatrix} \quad e \quad |\phi| = \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_K \end{vmatrix}$$

Os coeficientes a_{ij} , b_{ij} , \dot{b}_{ij} , \ddot{b}_{ij} , \bar{b}_{ij} e b_{ij}^* compõem as matrizes quadradas de ordem I :

$$[A], [B], [\dot{B}], [\ddot{B}], [\bar{B}] \text{ e } [B]^*$$

Os coeficientes d_{kl} , \dot{d}_{kl} e \ddot{d}_{kl} , geram as matrizes quadradas de ordem K :

$$[D], [\dot{D}] \text{ e } [\ddot{D}]$$

Os coeficientes c_{il} , \dot{c}_{il} , \ddot{c}_{il} , \bar{c}_{il} e c_{il}^* são os elementos das matrizes retangulares de I linhas e K colunas :

$$[C], [\dot{C}], [\ddot{C}], [\bar{C}] \text{ e } [C]^*$$

Os coeficientes c_{kj} , \dot{c}_{kj} , \ddot{c}_{kj} e c_{kj}^* formam as matrizes retangulares de K linhas e I colunas :

$$[\tilde{C}], [\dot{\tilde{C}}], [\ddot{\tilde{C}}] \text{ e } [\tilde{C}]^* ,$$

que são respectivamente as matrizes transpostas daquelas

geradas por c_{i1} , \dot{c}_{i1} , \ddot{c}_{i1} e c_{i1}^* , como se pode ver da definição dos coeficientes (Anexo A).

Os termos A_{i0} e B_{k0} fornecem os elementos dos vetores

$$|A_0| = \begin{vmatrix} A_{10} \\ A_{20} \\ \vdots \\ A_{i0} \end{vmatrix} \quad e \quad |B_0| = \begin{vmatrix} B_{10} \\ B_{20} \\ \vdots \\ B_{k0} \end{vmatrix}$$

As grandezas Q_v^{*i} , Q_φ^{*k} , M_v^{*i} e M_φ^{*k} compõem os vetores :

$$|Q_v^*| = \begin{vmatrix} Q_v^{*1} \\ Q_v^{*2} \\ \vdots \\ Q_v^{*I} \end{vmatrix} \quad , \quad |Q_\varphi^*| = \begin{vmatrix} Q_\varphi^{*1} \\ Q_\varphi^{*2} \\ \vdots \\ Q_\varphi^{*K} \end{vmatrix}$$

$$|M_v^*| = \begin{vmatrix} M_v^{*1} \\ M_v^{*2} \\ \vdots \\ M_v^{*I} \end{vmatrix} \quad e \quad |M_\varphi^*| = \begin{vmatrix} M_\varphi^{*1} \\ M_\varphi^{*2} \\ \vdots \\ M_\varphi^{*K} \end{vmatrix} .$$

Finalmente, dos valores Q_v^{0i} , Q_φ^{0k} , M_v^{0i} e M_φ^{0k} são formados os vetores :

$$|Q_v^0| = \begin{vmatrix} Q_v^{01} \\ Q_v^{02} \\ \vdots \\ Q_v^{0I} \end{vmatrix} \quad , \quad |Q_\varphi^0| = \begin{vmatrix} Q_\varphi^{01} \\ Q_\varphi^{02} \\ \vdots \\ Q_\varphi^{0K} \end{vmatrix}$$

$$|M_v^0| = \begin{vmatrix} M_v^{01} \\ M_v^{02} \\ \vdots \\ M_v^{0I} \end{vmatrix} \quad e \quad |M_\varphi^0| = \begin{vmatrix} M_\varphi^{01} \\ M_\varphi^{02} \\ \vdots \\ M_\varphi^{0K} \end{vmatrix} .$$

As equações (II.54) agora são dadas por :

$$\left[[A]+[B] \right] |V|''' - [B]^* |V|'' + [\dot{B}] |V| + [C] |\phi|''' - [C]^* |\phi|'' + [\dot{C}] |\phi| = \frac{1}{E'} |A_0|.$$

$$[\tilde{C}] |V|''' - [\tilde{C}]^* |V|'' + [\tilde{C}] |V| + [D] |\phi|''' - 2[\dot{D}] |\phi|'' + [\dot{D}] |\phi| = \frac{1}{E'} |B_0|$$

(II.76 a,b)

Introduzindo agora os vetores e as matrizes definidos a seguir

$$|\psi| = \begin{vmatrix} |V| \\ |\phi| \end{vmatrix}, \quad |K_0| = \begin{vmatrix} |A_0| \\ |B_0| \end{vmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [A]+[B] & [C] \\ [\tilde{C}] & [D] \end{bmatrix}, \quad [\dot{K}] = \begin{bmatrix} [B]^* & [C]^* \\ [\tilde{C}]^* & 2[\dot{D}] \end{bmatrix} \text{ e } [\ddot{K}] = \begin{bmatrix} [\dot{B}] & [\dot{C}] \\ [C] & [D] \end{bmatrix},$$

chega-se à forma compacta final :

$$[K] |\psi|''' - [\dot{K}] |\psi|'' + [\ddot{K}] |\psi| = \frac{1}{E'} |K_0| \quad (\text{II.77})$$

Em se tratando de condições de extremidade automaticamente ficam definidos os vetores $|V^*|, |\phi^*|, |\psi^*|$ e suas derivadas, de modo inteiramente análogo aos respectivos vetores $|V|, |\phi|, |\psi|$ e suas derivadas. Assim, na forma matricial, as equações (II.58 a,b) são escritas

$$\begin{aligned} |V| &= |V^*| & \text{e} & \quad |V|' = |V^*|' \\ |\phi| &= |\phi^*| & \text{e} & \quad |\phi|' = |\phi^*|', \end{aligned}$$

ou acopladamente ,

$$|\psi| = |\psi^*| \quad \text{e} \quad |\psi|' = |\psi^*|' \quad (\text{II.78})$$

Em seguida são apresentadas em sequência, na forma matricial, as equações (II.71a), (II.72a), (II.71b) e (II.72b).

$$\left[[A]+[B] \right] |V|''' - \left[2(1-\nu)[\dot{B}] - \nu[\ddot{B}] \right] |V|' + [C] |\phi|''' +$$

$$\begin{aligned}
- [2(1-\nu) [\dot{C}] - \nu [\bar{C}]] |\phi|' &= - \frac{1}{E'} \left| |Q_v^*| - |Q_v^0| \right| \\
[\tilde{C}] |V|'' - (2-\nu) [\tilde{C}] |V|' + [D] |\phi|'' - (2-\nu) [\dot{D}] |\phi|' &= - \frac{1}{E'} \left| |Q_\phi^*| - |Q_\phi^0| \right| \\
[[A]+[B]] |V|'' + \nu [\bar{B}] |V| + [C] |\phi|'' + \nu [\bar{C}] |\phi| &= - \frac{1}{E'} \left| |M_v^*| - |M_v^0| \right| \\
[C] |V|'' - \nu [\tilde{C}] |V| + [\dot{D}] |\phi|'' - \nu [D] |\phi| &= - \frac{1}{E'} \left| |M_\phi^*| - |M_\phi^0| \right|
\end{aligned}$$

(II.79 a, d)

Para se chegar a uma forma mais compacta, definem-se as matrizes e os vetores

$$\begin{aligned}
|Q^*| &= \begin{bmatrix} |Q_v^*| \\ |Q_\phi^*| \end{bmatrix}, & |M^*| &= \begin{bmatrix} |M_v^*| \\ |M_\phi^*| \end{bmatrix}, \\
|Q^0| &= \begin{bmatrix} |Q_v^0| \\ |Q_\phi^0| \end{bmatrix}, & |M^0| &= \begin{bmatrix} |M_v^0| \\ |M_\phi^0| \end{bmatrix}, \\
[K_1] &= \begin{bmatrix} 2(1-\nu) [\dot{B}] - \nu [\bar{B}] & 2(1-\nu) [\dot{C}] - \nu [\bar{C}] \\ (2-\nu) [\tilde{C}] & (2-\nu) [\dot{D}] \end{bmatrix} \quad e \\
[K_2] &= \begin{bmatrix} [\bar{B}] & [C] \\ -[\tilde{C}] & -[\dot{D}] \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

e obtêm-se finalmente

$$\begin{aligned}
[K] |\psi|'' - [K_1] |\psi|' &= - \frac{1}{E'} \left| |Q^*| - |Q^0| \right| \\
[K] |\psi|'' + \nu [K_2] |\psi| &= - \frac{1}{E'} \left| |M^*| - |M^0| \right| \quad \text{(II.80 a, b)}
\end{aligned}$$

No caso de Condições de Extremidade mistas, obtêm-se as $2(I+K)$ equações referentes ao extremo considerado, compondo convenientemente as condições (II.78) e (II.80).

Para um extremo perfeitamente engastado,

as condições de extremidade são dadas em função dos deslocamentos na forma :

$$\begin{aligned} |\psi| &= 0 \quad \text{e} \\ |\psi|' &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.81 a,b})$$

Para um extremo simplesmente apoiado já se têm condições mistas, sendo as primeiras (I+K) equações obtidas da primeira condição (II.78), e as demais da segunda condição (II.80). Tem-se então :

$$\begin{aligned} |\psi| &= 0 \\ [K]|\psi|'' - \frac{1}{E'} |M^0| &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.82 a,b})$$

Tratando-se de um extremo livre todas as equações são tiradas de (II.80), chegando-se a :

$$\begin{aligned} [K]|\psi|''' - [K_1]|\psi|' - \frac{1}{E'} |Q^0| &= 0 \\ [K]|\psi|'' + \nu[K_2]|\psi| - \frac{1}{E'} |M^0| &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.83 a,b})$$

Se for o caso das condições (II.75) serem atendidas, os vetores $|Q^0|$ e $|M^0|$ serão nulos.

Simplificações

O conjunto das equações que compõem a solução encontrada para o problema das Hastes-Cascas, apesar da forma matricial aparentemente simples, é de aplicabilidade e resolução extremamente complexas, mesmo em se tratando de hastes com perfil não muito complicado e sujeitas a carregamentos usuais. Além disso aborda o problema global, não dando ênfase especial ao objetivo da pesquisa.

Porisso se procura, além das Hipóteses Simplificadoras Iniciais, introduzir considerações que possibilitem reduzir o número de equações, diminuir o número de incógnitas e desacoplar do sistema as equações referentes às Flexões e à Torção de Empenamento.

O conjunto restante de equações modificadas representa a solução teórica geral do problema em estudo.

Desprezando o Momento Fletor m_z

A tensão normal σ_z causada pelo momento fletor m_z pode, muito frequentemente, ser desprezada em comparação com aquela devida a n_z .

A maior parcela do momento m_z é gerada por carregamentos que têm características locais, bem como por cargas concentradas. Além disso esse momento é importante para hastes nas quais a relação entre a dimensão característica da seção transversal e o comprimento total ultrapassa a fração um quinto [17]. Em tais casos, entretanto, as próprias suposições que serviram de base para o desenvolvimento feito, levariam a consideráveis imprecisões.

O momento fletor m_z tem também significado quando a espessura das paredes não é suficientemente pequena em comparação com as demais dimensões da seção transversal.

Quando se desconsidera o momento fletor m_z nas condições de equilíbrio, deixa-se também de levar em conta a influência da curvatura na direção longitudinal, ou seja desprezam-se os termos $\nu V_j'' u_v^j$ e $\nu \phi_1'' u_\phi^1$ que aparecem na expressão de m_s (II.30d), de modo que as equações (II.54) tomam a forma

$$\sum_{j=1}^I (a_{ij} V_j'''' - 4xb_{ij} V_j'' + b_{ij} \dot{V}_j) + \sum_{l=1}^K (-4xc_{il} \phi_l'' + c_{il} \dot{\phi}_l) = \frac{1}{E'} A_{i0}$$

com $i = 1, 2, \dots, I$

$$\sum_{j=1}^I (-4x\dot{c}_{kj} V_j'' + \ddot{c}_{kj} V_j) + \sum_{k=1}^K (-4x\dot{d}_{k1} \phi_1'' + \ddot{d}_{k1} \phi_1) = \frac{1}{E'} B_{k0}$$

com $k = 1, 2, \dots, K$, (II.84 a,b)

onde, das expressões para A_{i0} e B_{k0} , o momento fletor $m_{z,p}$ e o termo $\nu u_p''$ também são excluídos.

Em lugar das equações (II.76), tem-se

$$[A] |V|'''' - 4x[\dot{B}] |V|'' + [\ddot{B}] |V| - 4x[\dot{C}] |\phi|'' + [\ddot{C}] |\phi| = \frac{1}{E'} |A_0|$$

$$-4x[\dot{\tilde{C}}] |V|'' + [\ddot{\tilde{C}}] |V| - 4x[\dot{D}] |\phi|'' + [\ddot{D}] |\phi| = \frac{1}{E'} |B_0| ,$$

com $x = G/E'$ (II.85 a,b)

A equação (II.77) se transforma em

$$[\bar{K}] |\psi|'''' - [\dot{K}] |\psi|'' + [\ddot{K}] |\psi| = \frac{1}{E'} |K_0| , \quad (II.86)$$

sendo

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad [\dot{K}] = \begin{bmatrix} [\dot{B}] & [\dot{C}] \\ [\dot{\tilde{C}}] & [\dot{D}] \end{bmatrix} \quad (II.87 a,b)$$

As Condições de Extremidade em função dos deslocamentos permanecem invariáveis, entretanto aquelas em função dos esforços recebem simplificações.

Considerando-se a carga superficial \bar{p}_{zz} uniformemente distribuída sobre a espessura da parede, segue-se que :

$$m_z^* = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{p}_{zz} \, ede = 0 ,$$

as equações (II.68), (II.69) e (II.70) se simplificam e chega-se ao sistema

$$\sum_{j=1}^I (a_{ij} V_j'' - 4x b_{ij} V_j') - \sum_{l=1}^K 4x \dot{c}_{il} \phi_l' + \frac{1}{E'} \int_s 2m_{zs,p} \dot{u}_v^i ds = - \frac{1}{E'} \bar{Q}_v^{*i}$$

$$\sum_{j=1}^I a_{ij} V_j'' = - \frac{1}{E'} \bar{M}_v^{*i} ,$$

com $i = 1, 2, \dots, I$

$$-\sum_{j=1}^I 4x \dot{c}_{kj} V_j' - \sum_{l=1}^K 4x \dot{d}_{kl} \phi_l' + \frac{1}{E'} \int_s 2m_{zs,p} \dot{u}_\varphi^k ds = - \frac{1}{E'} \bar{Q}_\varphi^{*k}$$

com $k = 1, 2, \dots, K$,

(II.88 a,c)

onde os termos \bar{Q}_v^{*i} , \bar{M}_v^{*i} e \bar{Q}_φ^{*k} são definidos como em (II.70 a,c), com as eventuais simplificações.

Fazendo

$$\bar{Q}_v^{0i} = - \int_s 2m_{zs,p} \dot{u}_v^i ds \quad e$$

$$\bar{Q}_\varphi^{0k} = - \int_s 2m_{zs,p} \dot{u}_\varphi^k ds \quad , \quad (II.89 a,b)$$

e definindo

$$|\bar{Q}^*| = \begin{vmatrix} |\bar{Q}_v^{*i}| \\ |\bar{Q}_\varphi^{*k}| \end{vmatrix} , \quad |\bar{Q}^0| = \begin{vmatrix} |\bar{Q}_v^{0i}| \\ |\bar{Q}_\varphi^{0k}| \end{vmatrix} \quad e \quad |\bar{M}^*| = \begin{vmatrix} |\bar{M}_v^{*i}| \\ 0 \end{vmatrix} , \quad (II.90)$$

onde $|\bar{Q}_v^{*i}|$, $|\bar{Q}_\varphi^{*k}|$, $|\bar{Q}_v^{0i}|$, $|\bar{Q}_\varphi^{0k}|$ e $|\bar{M}_v^{*i}|$ são formados respectivamente pelos elementos \bar{Q}_v^{*i} , \bar{Q}_φ^{*k} , \bar{Q}_v^{0i} , \bar{Q}_φ^{0k} e \bar{M}_v^{*i} , tem-se finalmente em forma matricial

$$[A] |V|''' - 4x [\dot{B}] |V|' - 4x [\dot{C}] |\phi|' = - \frac{1}{E'} \left(|\bar{Q}_v^{*i}| - |\bar{Q}_v^{0i}| \right)$$

$$- 4x [\dot{C}] |V|' - 4x [\dot{D}] |\phi|' = - \frac{1}{E'} \left(|\bar{Q}_\varphi^{*k}| - |\bar{Q}_\varphi^{0k}| \right)$$

$$[A] |V|'' = - \frac{1}{E'} |\bar{M}_v^{*i}| ,$$

(II.91 a,c)

ou compactamente

$$[\bar{K}]|\psi\rangle''' - [\dot{K}]|\psi\rangle' = -\frac{1}{E'} \left(|\bar{Q}^*| - |\bar{Q}^0| \right)$$

$$[\bar{K}]|\psi\rangle'' = -\frac{1}{E'} |\bar{M}^*|$$

(II.92 a, b)

Reduzindo o Sistema

Do ponto de vista dos cálculos, as equações (II.85) e (II.86) não oferecem vantagem substancial em comparação com (II.76) ou (II.77). Uma simplificação complementar do problema pode ser alcançada através da hipótese de que o Momento Torsor m_{zs} , entre cada dois nós, seja constante e proporcional à rotação específica da corda que os liga. A rotação específica \dot{u}'_0 de uma corda qualquer é dada pela expressão

$$\dot{u}'_0 = \sum_{i=1}^I V'_i \dot{u}^i_{v_0} \quad , \quad (II.93)$$

onde $\dot{u}^i_{v_0}$ é a rotação da corda para o parâmetro de deslocamento $V_i=1$, dada por

$$\dot{u}^i_{v_0} = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R \alpha^i_{kr} \dot{u}^{kr}_{v_0} \quad , \quad (II.94)$$

com

$$\dot{u}^{kr}_{v_0} = \mp \frac{1}{b_{kr}} \quad , \quad (II.95)$$

usando-se o sinal negativo quando a orientação k-r coincide com o sentido positivo dos "s".

A expressão do momento de torção passa a ser

$$m_{zs} = - \frac{E' t^3}{12} (1-\nu) \sum_{i=1}^I V'_i \dot{u}^i_{v_0} \quad , \quad (II.96)$$

o que dá às equações (II.84) a nova forma

$$\sum_{j=1}^I (a_{ij} V'''_j - 4x b^0_{ij} V''_j + b_{ij} \dot{V}_j) + \sum_{l=1}^K \dot{c}_{il} \phi_l = \frac{1}{E'} A_{i0}$$

$$\sum_{j=1}^I \ddot{c}_{kj} v_j + \sum_{l=1}^K \ddot{d}_{kl} \phi_l = \frac{1}{E'} B_{ko} \quad , \quad (\text{II.97 a,b})$$

com $i = 1, 2, \dots, I$ e $k = 1, 2, \dots, K$,

onde

$$b_{ij}^0 = 1/12 \int_s t^3 \ddot{u}_{v_0}^i \ddot{u}_{v_0}^j ds \quad , \quad (\text{II.98})$$

$$A_{i0} = \int_s m_{s,p} \ddot{u}_v^i ds + \int_s (\bar{p}_n u_v^i + \bar{p}_s v^i + \bar{p}'_z \omega^i) ds \quad e$$

$$B_{k0} = \int_s m_{s,p} \ddot{u}_\phi^k ds + \int_s \bar{p}_n u_\phi^k ds \quad (\text{II.99 a,b})$$

A partir de (II.31) e com as simplificações já feitas,

$$m = - \frac{E' t^3}{12} \ddot{u}_p \quad , \quad (\text{II.100})$$

sendo u_p dado por (II.17), onde pode ser adotada a solução aproximada

$$u_{kr,p} = \int_{\tau=s_k}^{\tau=s_r} u_{kr}^\tau(s, \tau) \bar{p}_n(z, \tau) d\tau \quad (\text{II.101})$$

sendo $u_{kr}^\tau(s, \tau)$ a função de influência para os deslocamentos normais devidos à flexão, em uma viga perfeitamente engastada nos extremos k e r , com largura unitária, altura " t " e módulo de elasticidade E' .

Escrevendo (II.97) na forma matricial vem

$$[A] |V|''' - 4x [B^0] |V|'' + [B] |V| + [C] |\phi| = \frac{1}{E'} |A_0|$$

$$[\tilde{C}] |V| + [D] |\phi| = \frac{1}{E'} |B_0| \quad , \quad (\text{II.102 a,b})$$

onde a matriz $[B^0]$ é formada de modo análogo à matriz $[B]$, só que com os elementos b_{ij}^0 .

Explicitando $|\phi|$ em (II.102b) e substituindo

em (II.102a), chega-se à equação matricial

$$[A] |V|'''' - 4x[\dot{B}^0] |V|'' + \left[[\dot{B}] - [\dot{C}][\dot{D}]^{-1}[\dot{C}] \right] |V| = \frac{1}{E'} \left| |A_0| - [\dot{C}][\dot{D}]^{-1}|B_0| \right| \quad , \quad (II.103)$$

representando as Condições de Equilíbrio com K unidades a menos no número de equações escalares.

As condições de extremidade em função dos esforços são obtidas a partir de (II.68), (II.69) e (II.70) já com as simplificações do caso anterior, chegando-se às expressões

$$[A] |V|'''' - 4x[\dot{B}^0] |V|' = - \frac{1}{E'} |Q_v^*|$$

$$[A] |V|'' = - \frac{1}{E'} |M_v^*| \quad , \quad (II.104 \text{ a,b})$$

onde os elementos de $|Q_v^*|$ são definidos como em (II.70a), substituindo-se u_v^i por $u_{v_0}^i$, cuja definição vem de (II.94)

e (II.95) na forma

$$u_{v_0}^i = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R \alpha_{kr}^i u_{v_0}^{kr}$$

$$u_{v_0}^{kr} = \frac{S_{kr}}{b_{kr}} \quad (II.105 \text{ a,b})$$

Do sistema de equações (II.97) pode-se facilmente eliminar as incógnitas ϕ_1 que se referem aos nós extremos da LMP, e dessa maneira diminuir o número de incógnitas tipo rotação de nó, fazendo cair também as dimensões de algumas matrizes da equação (II.103). Representando-se com $k=1,2,\dots,K$ os nós não extremos da LMP, e com $g=K+1,K+2,\dots,K$ os nós extremos da mesma, e escolhendo-se uma placa extrema qualquer entre os nós "g" e "r", o desenvolvimento da expressão (II.97b), com $k=g$, é

da forma

$$\sum_{j=1}^I \ddot{c}_{gj} V_j + \ddot{d}_{gg} \phi_g + \ddot{d}_{gr} \phi_r = \frac{1}{E'} B_{g0}$$

de onde resulta imediatamente

$$\phi_g = - \sum_{j=1}^I \left[\ddot{c}_{gj} / \ddot{d}_{gg} \right] V_j - \left[\ddot{d}_{gr} / \ddot{d}_{gg} \right] \phi_r + B_{g0} / (E' \cdot \ddot{d}_{gg})$$

Pode-se mostrar que valem as relações

$$\ddot{c}_{gj} / \ddot{d}_{gg} = -3/2 (\alpha_{gr}^j - \alpha_{rg}^j) \quad e$$

$$\ddot{d}_{gr} / \ddot{d}_{gg} = 1/2 \quad ,$$

e sabe-se que B_{g0} dado por (II.49) é nulo. Assim vem :

$$\phi_g = \sum_{j=1}^I 3/2 (\alpha_{gr}^j - \alpha_{rg}^j) V_j - 1/2 \cdot \phi_r$$

Partindo de (II.23) com os nós grupados em extremos e não extremos, e usando os resultados acima, se chega à definição de $u_{kr}(s, z)$ na nova forma

$$u = \sum_{i=1}^I V_i \underline{u}_v^i + \sum_{k=1}^{\bar{K}} \phi_k \underline{u}_\varphi^k + \underline{u}_p \quad , \quad (II.106)$$

onde se tem

$$\underline{u}_v^i = \sum_{k=1}^{\bar{K}} \sum_{r=1}^R \alpha_{kr}^i \underline{u}_\varphi^{kr} + \sum_{g=1}^G (\alpha_{gr}^i \underline{u}_v^{gr} + \alpha_{rg}^i \underline{u}_v^{rg})$$

$$\underline{u}_\varphi^k = \sum_{r=1}^R \underline{u}_\varphi^{kr} + \sum_{g=1}^G \underline{u}_\varphi^{kg} \quad , \quad (II.107 \text{ a, b})$$

sendo G o número de placas extremas que se conectam ao nó k , e valendo as expressões

$$\underline{u}_v^{gr} = \underline{u}_v^{gr} + 3/2 \cdot \underline{u}_\varphi^{gr} = s_{rg} / b_{gr} \left[1 - \frac{s_{gr} (s_{gr} + 1/2 \cdot s_{rg})}{b_{gr}^2} \right]$$

$$\underline{u}_v^{rg} = \underline{u}_v^{rg} - 3/2 \cdot \underline{u}_\varphi^{rg} = s_{gr} / b_{gr} \left[1 - \frac{s_{rg} (s_{rg} + 1/2 \cdot s_{gr})}{b_{gr}^2} \right]$$

$$\underline{u}_{\varphi}^{kg} = u_{\varphi}^{kg} - 1/2 \cdot u_{\varphi}^{gk} = s_{kg} s_{gk} / b_{kg}^2 (s_{gk} + 1/2 \cdot s_{kg}) \quad (\text{II.108 a,c})$$

A definição de \underline{u}_p é feita conforme (II.101), mas quando se tratar de um ponto de uma barra extrema, a função de influência $u_{gr}^{\tau}(s, \tau)$ se referirá a uma barra perfeitamente engastada no extremo "r", tendo o extremo "g" completamente livre.

Fica claro que percorrendo todo o caminho dedutivo feito desde o início, e refazendo também as simplificações, o resultado encontrado será novamente o conjunto de equações (II.97), só que com "1" variando entre 1 e \bar{K} e os coeficientes $\ddot{c}_{i1}, \ddot{c}_{kj}$ e \ddot{d}_{kl} , além do termo independente B_{k0} sendo calculados com base em (II.107) e (II.108).

Essa é portanto a solução atual, valendo também as equações (II.102) e (II.103), onde agora a matriz [C] é retangular com I linhas e \bar{K} colunas, a matriz [D] é quadrada de ordem \bar{K} , o vetor $|\phi|$ só contém as rotações dos nós não extremos e o vetor $|B_0|$ se compõe dos B_{k0} , com $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$.

Em mais um passo simplificador, as equações de flexão da haste em torno dos eixos x e y podem ser separadas do sistema gerado pelas condições de equilíbrio, através da substituição das funções $\bar{\omega}^i$ pelas funções ortogonais ω_{\ominus}^i , $i=1, 2, \dots, I$, linearmente dependentes daquelas.

Para as duas primeiras funções se estabelece

$$\begin{aligned} \omega_{\ominus}^1 &= \bar{\omega}^1 = x \\ \omega_{\ominus}^2 &= \bar{\omega}^2 = y \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.109 a,b})$$

e para as demais

$$\omega_{\ominus}^i = \bar{\omega}^i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \omega_{\ominus}^j, \quad (\text{II.110})$$

com $i = 3, 4, \dots, I$.

Da condição de ortogonalidade

$$\int_s t \omega_{\ominus}^i \omega_{\ominus}^{\mu} ds = \int_s t \left[\bar{\omega}^i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \omega_{\ominus}^j \right] \omega_{\ominus}^{\mu} ds = 0, \quad \mu \neq i,$$

fazendo μ igual a um dos valores de j e lembrando que para os demais

$$\int_s t \omega_{\ominus}^j \omega_{\ominus}^{\mu} ds = 0,$$

se obtém a expressão

$$\beta_{ij} = \left(- \int_s t \bar{\omega}^i \omega_{\ominus}^j ds \right) / \left(\int_s t (\omega_{\ominus}^j)^2 ds \right) \quad (\text{II.111})$$

De modo semelhante aos ω_{\ominus}^i , tem-se as novas grandezas v_{\ominus}^i e u_{\ominus}^i , dadas por

$$\begin{aligned} v_{\ominus}^i &= v^i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} v_{\ominus}^j \\ u_{\ominus}^i &= u_v^i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} u_{\ominus}^j, \end{aligned} \quad (\text{II.112 a,b})$$

para $i = 3, 4, \dots, I$,

com os casos particulares

$$\begin{aligned} v_{\ominus}^1 &= v^1 = -\sin \alpha, & v_{\ominus}^2 &= v^2 = \cos \alpha \\ u_{\ominus}^1 &= u^1 = \cos \alpha, & u_{\ominus}^2 &= u^2 = \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{II.113 a,d})$$

Às funções ortogonais ω_{\ominus}^i correspondem os novos parâmetros generalizados de deslocamento \ominus_i , expressos na forma

$$\ominus_1 = V_1 - \sum_{i=3}^I V_i \beta_{i1}$$

$$\Theta_2 = V_2 - \sum_{i=2}^I V_i \beta_{i2}$$

$$\Theta_j = V_j - \sum_{i=j+1}^I V_i \beta_{ij} \quad , \quad j = 3, 4, \dots, I \quad (\text{II.114 a,c})$$

Lembrando de (II.11c), (II.50) e (II.52) e usando (II.111), estabelece-se que

$$\beta_{31} = - \int_F \omega_p x dF / \int_F x^2 dF = -I_{x\omega_p} / I_{xx} \quad e$$

$$\beta_{32} = - \int_F \omega_p y dF / \int_F y^2 dF = -I_{y\omega_p} / I_{yy} \quad ,$$

enquanto que (II.110), (II.112a) e (II.113) fornecem

$$\omega_\Theta^3 = \bar{\omega}^3 + \beta_{31} x + \beta_{32} y \quad e$$

$$v_\Theta^3 = h_p - \beta_{31} \text{sen } \alpha + \beta_{32} \text{cos } \alpha.$$

Sabendo-se que

$$h_p = (x - x_p) \text{cos } \alpha + (y - y_p) \text{sen } \alpha \quad ,$$

vem, como resultado :

$$v_\Theta^3 = (x - x_p + \beta_{32}) \text{cos } \alpha + (y - y_p - \beta_{31}) \text{sen } \alpha.$$

O membro direito dessa equação representa a distância de um ponto D, de coordenadas

$$x_D = x_p - \beta_{32}$$

$$y_D = y_p + \beta_{31} \quad ,$$

denominado Centro de Cisalhamento, à tangente à LMP no ponto considerado.

Os resultados anteriores permitem escrever que

$$v_\Theta^3 = h$$

$$u_\Theta^3 = h_n \quad , \quad (\text{II.115 a,b})$$

sendo h e h_n respectivamente as distâncias do ponto D à tangente e à normal à LMP no ponto considerado, e ainda que

$$\int_F \omega_{\ominus}^3 dF = 0 \quad ,$$

o que acarreta

$$\omega_{\ominus}^3 = \omega \quad ,$$

onde " ω " é a Coordenada Setorial Normalizada vista na Teoria da Torção de Empenamento.

Com a introdução das funções ortogonais ω_{\ominus}^i , duas equações se desacoplam do sistema (II.97), que passa a ser composto por

$$E' I_{xx} \omega_{\ominus}''' = p_x + m'_x$$

$$E' I_{yy} \omega_{\ominus}''' = p_y + m'_y \quad (II.117 \text{ a,b})$$

$$A_{ii} \omega_{\ominus}''' + \sum_{j=3}^I (-4x \dot{B}_{ij}^0 \omega_{\ominus}'' + \ddot{B}_{ij} \omega_{\ominus}) + \sum_{l=1}^{\bar{K}} \dot{c}_{il} \phi_l = \frac{1}{E'} A_{i0}^{\ominus}$$

$$\sum_{j=3}^I \ddot{c}_{kj} \omega_{\ominus} + \sum_{l=1}^{\bar{K}} \ddot{d}_{kl} \phi_l = \frac{1}{E'} B_{k0} \quad , \quad (II.118 \text{ a,b})$$

com $i = 1, 2, \dots, I$ e $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$, onde

$$p_x = \int_s (-\bar{p}_n \sin \alpha + \bar{p}_s \cos \alpha) ds$$

$$m'_x = \int_s \bar{p}'_z x ds$$

$$p_y = \int_s (\bar{p}_n \cos \alpha + \bar{p}_s \sin \alpha) ds$$

$$m'_y = \int_s \bar{p}'_z y ds$$

$$A_{ii} = \int_s t (\omega_{\ominus}^i)^2 ds$$

$$\dot{B}_{ij}^0 = 1/12 \int_s t^3 \dot{u}_{\ominus 0}^i \dot{u}_{\ominus 0}^j ds$$

$$\ddot{B}_{ij} = 1/12 \int_s t^3 \ddot{u}_\ominus^i \ddot{u}_\ominus^j ds$$

$$\ddot{C}_{i1} = 1/12 \int_s t^3 \ddot{u}_\ominus^i \ddot{u}_\ominus^1 ds$$

$$\ddot{C}_{kj} = 1/12 \int_s t^3 \ddot{u}_\ominus^k \ddot{u}_\ominus^j ds$$

$$\ddot{d}_{k1} = 1/12 \int_s t^3 \ddot{u}_\varphi^k \ddot{u}_\varphi^1 ds \quad (\text{II.120 a, f})$$

$$\dot{u}_{\ominus 0}^i = \dot{u}_{v_0}^i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \dot{u}_{\ominus 0}^j \quad (\text{II.121})$$

$$A_{i0}^\ominus = \int_{m_{s,p}} \ddot{u}_\ominus^i ds + \int_s (\bar{p}_n u_\ominus^i + \bar{p}_s v_\ominus^i + \bar{p}'_z \omega_\ominus^i) ds$$

$$B_{k0} = \int_{m_{s,p}} \ddot{u}_\varphi^k ds + \int_s \bar{p}_n \ddot{u}_\varphi^k ds, \quad (\text{II.122 a, b})$$

podendo ainda as equações (II.122) ser escritas como

$$A_{i0}^\ominus = A_{i0} + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} A_{j0}^\ominus$$

$$B_{k0} = m_k \quad (\text{II.123 a, b})$$

Matricialmente as equações (II.118) têm a forma

$$\begin{aligned} [A_\ominus] |\ominus|''' - 4x [B_\ominus^0] |\ominus|'' + [B_\ominus^{\ddot{}}] |\ominus| + [C_\ominus^{\ddot{}}] |\phi| &= \frac{1}{E'} |A_\ominus^0| \\ [\tilde{C}_\ominus^{\ddot{}}] |\ominus| + [D] |\phi| &= \frac{1}{E'} |B_\ominus|, \end{aligned} \quad (\text{II.124 a, b})$$

onde as matrizes envolvidas são :

$[A_\ominus]$ - Matriz diagonal de ordem I-2, com os elementos A_{ii} .

$[B_\ominus^0]$ e $[B_\ominus^{\ddot{}}]$ - Matrizes quadradas de ordem I-2, respectivamente com os elementos B_{ij}^0 e $B_{ij}^{\ddot{}}$.

$[C_\ominus^{\ddot{}}]$ - Matriz retangular com I-2 linhas e K colunas, com os elementos $C_{11}^{\ddot{}}$.

- $[\tilde{C}_\ominus]$ - Matriz transposta de $[\ddot{C}_\ominus]$.
- $[\dot{D}]$ - Matriz quadrada de ordem \bar{K} , com os elementos \dot{d}_{k1} .
- $|\ominus|$ e $|A_\ominus^\ominus|$ - Vetores coluna respectivamente com os elementos \ominus_i e A_{i0}^\ominus .
- $|\phi|$ e $|B_\ominus|$ - Vetores coluna respectivamente com os elementos ϕ_k e B_{k0} .

e de onde se pode obter equação semelhante à (II.103).

As Condições de Extremidade, quanto aos deslocamentos e quanto aos esforços, tomam o aspecto

$$\begin{aligned} |\ominus| &= |\ominus^*| \\ |\ominus|' &= |\ominus^*|' \end{aligned} \quad , \quad (II.124 \text{ a,b})$$

$$\begin{aligned} [A_\ominus] |\ominus|''' - 4x[\dot{B}_\ominus^0] |\ominus|' &= -\frac{1}{E'} |Q_\ominus^*| \\ [A_\ominus] |\ominus|'' &= -\frac{1}{E'} |M_\ominus^*| \end{aligned} \quad , \quad (II.125 \text{ a,b})$$

onde os elementos dos termos independentes são dados por

$$\begin{aligned} Q_{\ominus i}^* &= -\int_s \bar{p}_z \omega_\ominus^i ds + \int_s (n_{zn}^* u_{\ominus 0}^i + n_{zs}^* v_\ominus^i - m_{zs}^* \dot{u}_{\ominus 0}^i) ds \\ M_{\ominus i}^* &= \int_s n_z^* \omega_\ominus^i ds \end{aligned} \quad , \quad (II.126 \text{ a,b})$$

com $i = 3, 4, \dots, I$,

sendo os $u_{\ominus 0}^i$ determinados por

$$\begin{aligned} u_{\ominus 0}^1 &= u_\ominus^1 \quad , \\ u_{\ominus 0}^2 &= u_\ominus^2 \quad \text{e} \\ u_{\ominus 0}^i &= u_{v_0}^i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} u_{\ominus 0}^j . \end{aligned}$$

Os parâmetros ϑ_1, ϑ_2 e ϑ_3 constituem, de acordo com (II.113) e (II.115), os deslocamentos da seção transversal considerada como um corpo rígido, nas direções transversais x e y , e sua rotação em torno do Centro de Cisalhamento

$$\vartheta_1 = \xi_D, \quad \vartheta_2 = \eta_D \quad \text{e} \quad \vartheta_3 = \varphi_D = \varphi$$

Desprezando o Momento de Torção m_{zs}

A tensão τ_{zs} é composta de duas parcelas, uma anti-simétrica e outra constante, aqui designadas respectivamente por τ_s e τ_ω , de modo que

$$\tau_{zs} = \tau_s + \tau_\omega$$

Por outro lado, o momento de torção m_{zs} , para um trecho de comprimento unitário da LMP, vale

$$m_{zs} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{zs} e de ,$$

que se desmembra em

$$m_{zs} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_s e de + \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_\omega e de ,$$

e, já que a segunda integral se anula, fica reduzido à primeira, conhecida normalmente como parcela de S. Venant. Como τ_s é diretamente proporcional à espessura das placas e inversamente proporcional à constante de torção da seção, o momento m_{zs} , no caso em estudo, torna-se de pequena monta. A desconsideração do mesmo se baseia nesse raciocínio, bem como no fato de que o momento gerado por τ_s não contribui para o surgimento de tensões normais.

As equações do problema são as mesmas de (II.118), retirando-se os termos de e''_j que segundo (II.96) e (II.114) são aqueles gerados por m_{zs} . Na primeira daquelas equações (para $i = 3$), pode-se identificar a Equação Diferencial da Torção de Empenamento com $GK = 0$, ou seja desconsiderando-se a parcela de S. Venant no Momento de Torção.

Isto é possível pois

$$A_{33}^{\ominus} = \int_F (\omega_{\ominus}^3)^2 dF = \int_F \omega^2 dF = I_{\omega\omega} \quad ,$$

$$\ominus_3 = \varphi \quad e$$

$$A_{30}^{\ominus} = \int_s \bar{p}'_{\omega} ds + \int_s (\bar{p}'_n h_n + \bar{p}'_s h_s) ds = m'_{\omega} + m_D \quad ,$$

de modo que a referida equação se escreve

$$E' I_{\omega\omega} \ominus''' = m'_{\omega} + m_D \quad (II.127)$$

As demais equações formam o conjunto dado a seguir :

$$A_{ii} \ominus''' + \sum_{j=4}^I \ddot{B}_{ij} \ominus_j + \sum_{l=1}^{\bar{K}} \dot{C}_{il} \phi_l = \frac{1}{E'} A_{i0}^{\ominus}$$

$$\sum_{j=4}^I \ddot{C}_{kj} \ominus_j + \sum_{l=1}^{\bar{K}} \dot{d}_{kl} \phi_l = \frac{1}{E'} B_{k0} \quad , \quad (II.128 a,b)$$

com $i = 4, 5, \dots, I$ e $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$.

O último passo simplificador parte da renumeração dos parâmetros \ominus_j , de modo que aqueles referentes às rotações das barras extremas da LMP sejam os últimos do conjunto, ou seja : existindo " ν " deles, estes serão os \ominus_p , $p = (I - \nu + 1), \dots, I$.

Sendo g-r uma barra extrema como por exemplo a barra 1-2 da figura (5), onde g corresponde ao nó 1, é fácil concluir que u_{\ominus}^p e u_{ϕ}^r são funções lineares ou nulas e que não há deslocamentos na direção tangente devidos ao \ominus_p .

Assim, para $i=p$, as equações (II.128a) tornam-se identicamente nulas, o que reduz para $i=4, 5, \dots, I$

o intervalo de variação de "i", sendo $\bar{I} = I - \nu$, ou em outras palavras diminui em " ν " unidades o número de equações.

Ainda podem ser eliminadas de (II.128b) as equações correspondentes às rotações dos nós "f" das barras f-k, aos quais se conectem apenas barras extremas. Um exemplo é o nó 2 da barra 2-4 da figura (5), onde o nó 2 é do tipo do nó "f" citado. O processo é idêntico ao que foi adotado para eliminação das rotações dos nós extremos, sendo agora a barra f-k considerada simplesmente apoiada em "f" e engastada em "k". O termo B_{f_0} será igual à soma dos momentos aplicados em "f" pelas barras extremas sob a ação do carregamento \bar{p}_n , devendo ser considerada a influência daqueles sobre as ações nos nós, as quais figuram no cálculo de A_{i_0} segundo (II.48) e (II.123a). Assim, em (II.128b), fica restringida a variação de k ao intervalo $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$, ou seja eliminam-se $\bar{K} - \bar{K}$ equações.

Finalmente o sistema (II.128) se transforma em :

$$A_{ii} \ominus_i''' + \sum_{j=4}^{\bar{I}} B_{ij} \ominus_j + \sum_{1=1}^{\bar{K}} C_{i1} \phi_1 = \frac{1}{E'} A_{i_0} \ominus$$

$$\sum_{j=4}^{\bar{I}} \ddot{C}_{kj} \ominus_j + \sum_{k=1}^{\bar{K}} \ddot{d}_{k1} \phi_1 = \frac{1}{E'} B_{k_0} \quad , \quad (\text{II.129 a,b})$$

com $i = 4, 5, \dots, \bar{I}$ e $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$,

cuja forma matricial é

$$[A_{\ominus}] |\ominus|''' + [B_{\ominus}] |\ominus| + [C_{\ominus}] |\phi| = \frac{1}{E'} |A_{\ominus_0}|$$

$$[\ddot{C}_{\ominus}] |\ominus| + [D] |\phi| = \frac{1}{E'} |B_{\ominus_0}| \quad , \quad (\text{II.130 a,b})$$

com as matrizes e os vetores definidos como se segue :

- $[A_{\ominus}]$ - Matriz diagonal de ordem $\bar{I}-3$, cujos elementos são os A_{ii} , com $i=4,5,\dots,\bar{I}$.
- $[B_{\ominus}]$ - Matriz quadrada de ordem $\bar{I}-3$, cujos elementos são os B_{ij} , com $i,j=4,5,\dots,\bar{I}$.
- $[C_{\ominus}]$ - Matriz retangular com $\bar{I}-3$ linhas e \bar{K} colunas, cujos elementos são os C_{i1} , com $i=4,5,\dots,\bar{I}$ e $1=1,2,\dots,\bar{K}$.
- $[\tilde{C}_{\ominus}]$ - Matriz transposta de $[C_{\ominus}]$.
- $[D]$ - Matriz quadrada de ordem \bar{K} , cujos elementos são os d_{kl} , com $k,l=1,2,\dots,\bar{K}$.
- $|\ominus|$ e $|A_{\ominus}^{\ominus}|$ - Vetores coluna cujas componentes são respectivamente os \ominus_i e os A_{i0}^{\ominus} , com $i=4,5,\dots,\bar{I}$.
- $|\phi|$ e $|B_0|$ - Vetores coluna cujas componentes são respectivamente os ϕ_k e os B_{k0} , com $k=1,2,\dots,\bar{K}$.

Explicitando $|\phi|$ em (II.130b) e substituindo em (II.130a), chega-se à equação

$$[A_{\ominus}]|\ominus| + [H]|\ominus| = \frac{1}{E'} |H_0| \quad (\text{II.131})$$

sendo

$$[H] = [B_{\ominus}] - [C_{\ominus}][D]^{-1}[\tilde{C}_{\ominus}] \quad \text{e}$$

$$|H_0| = |A_{\ominus}^{\ominus}| - [C_{\ominus}][D]^{-1}|B_0| \quad (\text{II.132 a,b})$$

Para as Condições de Extremidade continuam valendo as equações (II.124), (II.125) e (II.126), apenas eliminando em (II.125a) o termo em $[\ominus]'$, em (II.126a) o termo em m_{zs}^* , e considerando os novos limites para "i".

III - O Problema Prático

Para uma haste do tipo mostrado na figura(1), a aplicação dos resultados obtidos na parte teórica vista no Capítulo II permite montar o membro esquerdo da equação (II.131), sendo o termo independente gerado a partir da definição do carregamento aplicado. É nessa fase que fica caracterizada a haste genérica como uma ponte curta de seção aberta.

Em seguida se pesquisa a solução geral daquele tipo de equação, fazem-se as considerações com respeito às condições de extremidade, e chega-se finalmente às expressões que permitem calcular as tensões normais. Essas tensões serão devidas às deformações da seção transversal em seu próprio plano uma vez que, conforme já foi visto ao longo do desenvolvimento, isolaram-se do problema as demais influências geradoras de tensões normais.

A seção transversal da ponte, inicialmente mostrada na figura (2), está definida de modo genérico na figura (13) em função da dimensão característica "a".

A análise do mecanismo já foi feita no item Deformações e Tensões do Capítulo II, e os diagramas estão mostrados nas figuras (4) e (5), restando apenas lembrar que na primeira se tem

$$b_{45} = k_1 a$$

$$\alpha_{54} = \alpha_{57} = -k_1 a$$

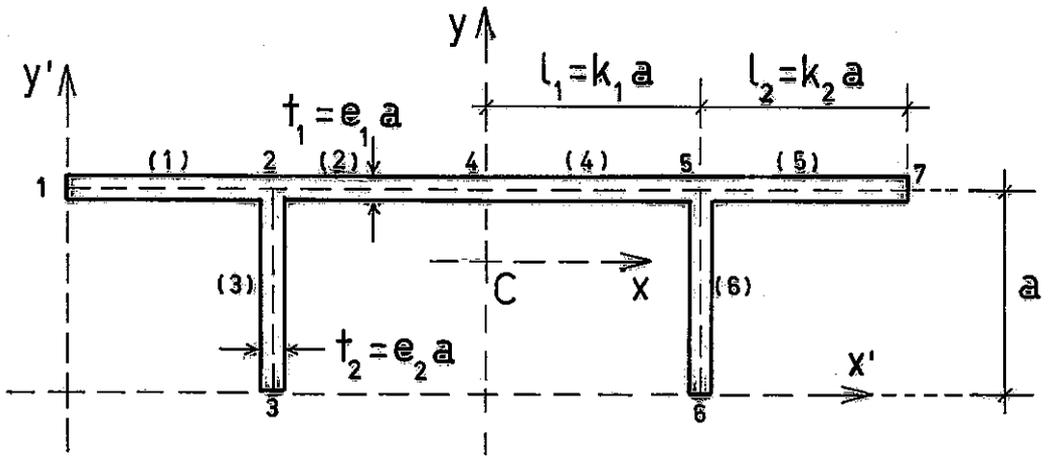


Fig. 13

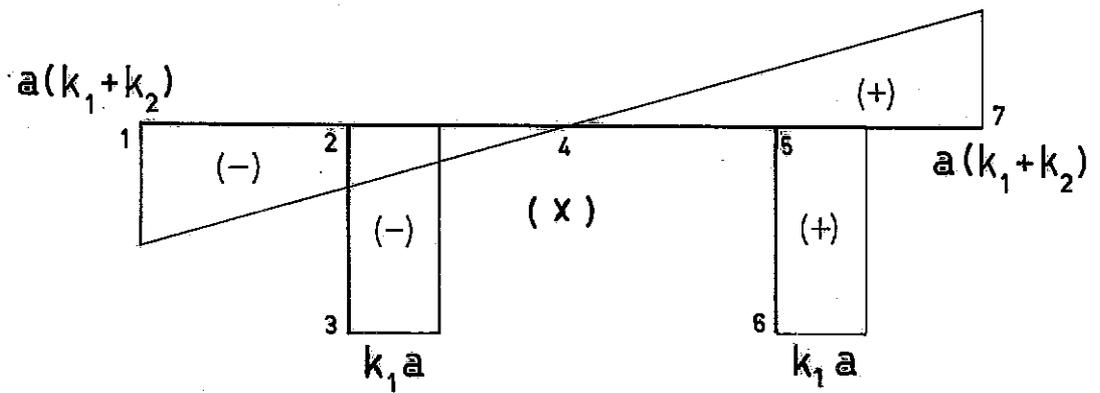


Fig. 14

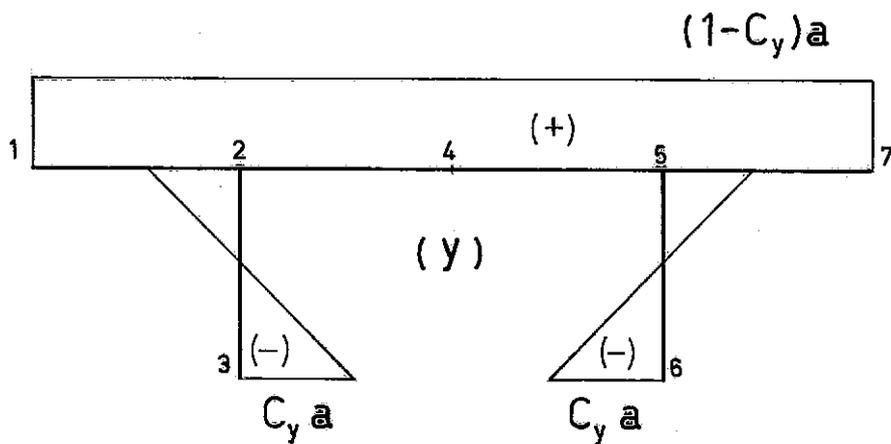


Fig. 15

Os elementos geométricos são obtidos da maneira que se segue :

1 - Área

$$F = k_F a^2$$

$$k_F = 2 \left[(k_1 + k_2) e_1 + \left(1 - \frac{e_1}{2} \right) e_2 \right] \quad (\text{III.1 a,b})$$

2 - Centro de Gravidade

Em relação ao sistema $x'y'$ da figura (13), as suas coordenadas são

$$x_c = (k_1 + k_2) a$$

$$y_c = C_y a$$

$$C_y = \frac{2(k_1 + k_2) e_1 + \left(1 - \frac{e_1}{2} \right)^2 e_2}{2 \left[(k_1 + k_2) e_1 + \left(1 - \frac{e_1}{2} \right) e_2 \right]} \quad (\text{III.2 a,c})$$

3 - Eixos Principais de Inércia

São os eixos x e y mostrados na figura (13)

4 - Momentos Principais de Inércia

$$I_{xx} = \int_s t x^2 ds$$

$$I_{yy} = \int_s t y^2 ds$$

Com os diagramas de x e y mostrados nas figuras (14) e (15) respectivamente, se tem

$$I_{xx} = x_I a^4$$

$$x_I = \left[\frac{2}{3} (k_1 + k_2)^3 e_1 + 2k_1^2 \left(1 - \frac{e_1}{2} \right) e_2 \right]$$

$$I_{yy} = Y_1 a^4$$

$$Y_1 = 2(k_1 + k_2)(1 - C_y)^2 e_1 + 1/6 \left(1 - \frac{e_1}{2}\right)^3 e_2 +$$

$$2e_2 \left(1 - \frac{e_1}{2}\right) \left[C_y - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e_1}{2}\right) \right]^2 \quad (\text{III.3 a,d})$$

5 - Centro de Cisalhamento

Escolhendo-se um polo "Q" coincidente com o ponto 4 da LMP e fazendo-se a origem "O" de contagem dos "s" recair também nesse ponto, o diagrama da coordenada setorial tem a forma da figura (16).

As coordenadas do Centro de Cisalhamento "D" em relação ao sistema xy da figura (13) são :

$$x_D = 0$$

$$y_D = Y_Q - \frac{I_{x\omega_Q}}{I_{xx}}$$

O cálculo de $I_{x\omega_Q}$ fornece

$$I_{x\omega_Q} = -k_1^2 e_2 a^5, \text{ donde}$$

$$y_D = D_y a, \text{ com}$$

$$D_y = \left(1 - C_y + k_1^2 e_2 / x_1\right) \quad (\text{III.4 a,b})$$

As figuras (17) e (18) mostram respectivamente a posição do ponto D e diagrama da coordenada setorial obtida com o polo nesse ponto.

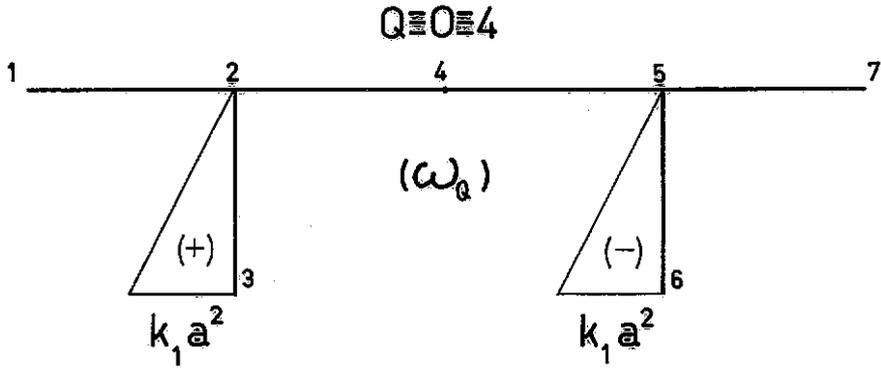


Fig. 16

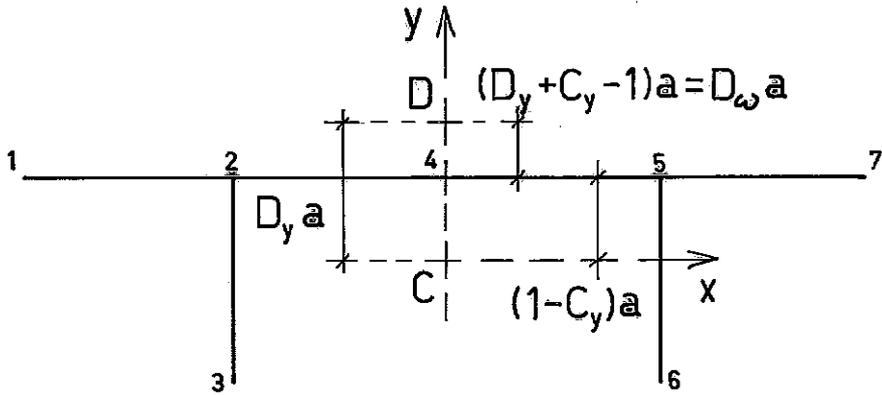


Fig. 17

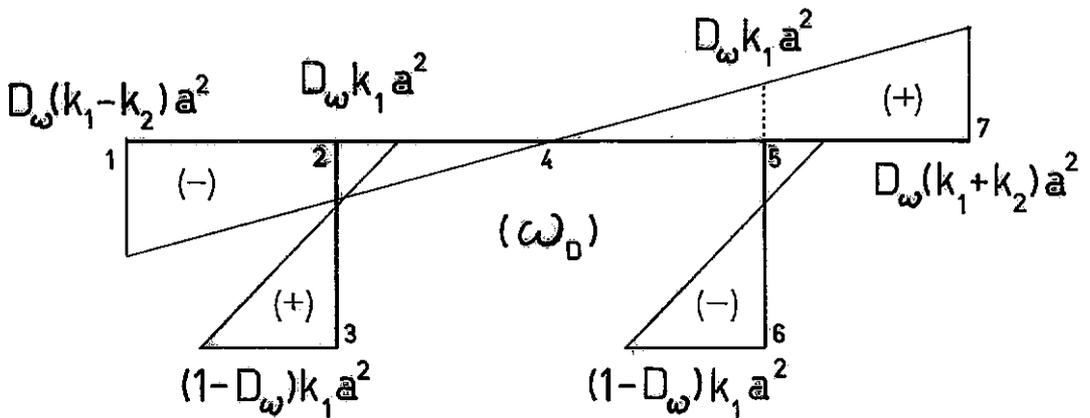


Fig. 18

6 - Momento de Inércia Setorial

$$I_{\omega\omega} = \omega_1 a^6$$

$$\omega_1 = 2/3 \left[e_1 (k_1 + k_2)^3 D_\omega^2 + e_2 k_1^2 (1 - 3D_\omega + 3D_\omega^2) \right] \quad , \text{com}$$

$$D_\omega = D_y + C_y - 1 \quad (\text{III.5 a,c})$$

Tomando o sistema simplificado (II.129) e verificando que no caso $\bar{I} = 4$ e $\bar{K} = 1$, restam as equações

$$A_{44} \ominus_{44}'''' + \ddot{B}_{44} \ominus_{44} + \ddot{C}_{41} \phi_1 = \frac{1}{E'} A_{40} \ominus$$

$$\ddot{C}_{14} \ominus_{44} + \ddot{d}_{11} \phi_1 = \frac{1}{E'} B_{10} \quad ,$$

que por substituição geram

$$A_{44} \ominus_{44}'''' + H_{44} \ominus_{44} = \frac{1}{E'} H_{40} \ominus \quad , \quad (\text{III.6})$$

onde

$$H_{44} = B_{44} - \frac{\ddot{C}_{41} \ddot{C}_{14}}{\ddot{d}_{11}} \quad e$$

$$H_{40} \ominus = A_{40} \ominus - \ddot{C}_{41} \frac{B_{10}}{\ddot{d}_{11}} \quad (\text{III.7 a,b})$$

Para obter os coeficientes que figuram em (III.7) é preciso determinar um conjunto de parâmetros ligados à geometria como se segue.

Já é conhecido da figura (7) o diagrama de ω^4 , só se precisando lembrar que

$$b_{45} \cdot b_{56} = k_1 a^2$$

Quanto aos deslocamentos normais ligados aos \ominus_i , tem-se

$$u_{\ominus}^i = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R \alpha_{kr}^i u_{\ominus}^{kr} \quad , \quad i=4, \text{ ou esja}$$

$$u_{\ominus}^4 = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R \alpha_{kr}^4 u_{\ominus}^{kr}$$

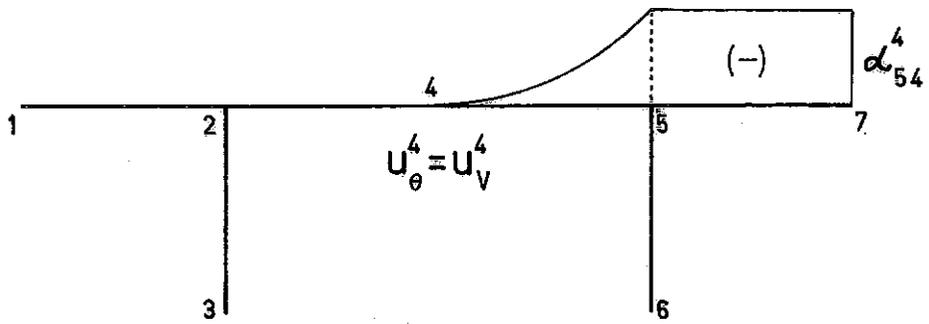


Fig. 19

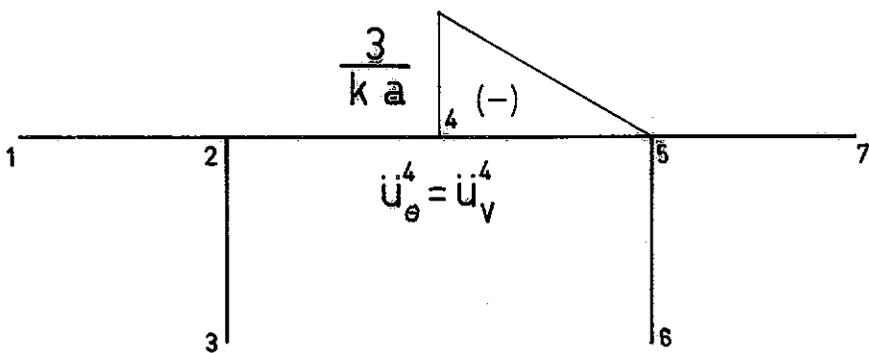


Fig. 20

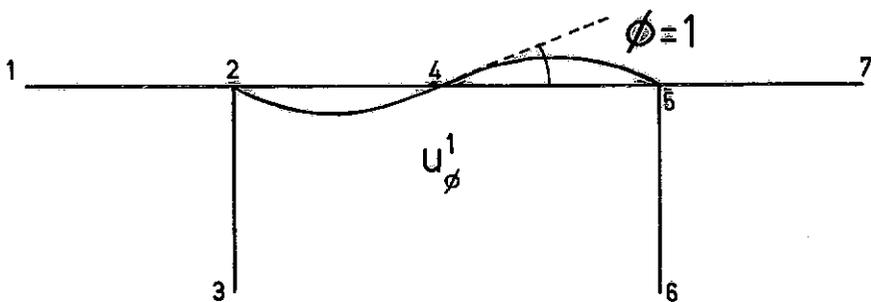


Fig. 21

Com a consideração de apenas um dos V_i ,
consequentemente valem

$$e_i = V_i ,$$

$$u_{\Theta}^{kr} = u_v^{kr} \quad e$$

$$u_{\Theta}^4 = u_v^4$$

Dai se escreve

$$u_{\Theta}^4 = \alpha_{54}^4 \cdot u_v^{54} \quad (\text{na barra 4-5}) ,$$

$$u_{\Theta}^4 = \alpha_{57}^4 \quad (\text{na barra 5-7}) \quad e$$

$$u_{\Theta}^4 = 0 \quad (\text{nas demais barras}).$$

Sabendo-se também que

$$\alpha_{54}^4 = \alpha_{57}^4 = -k_1 a ,$$

$$b_{45} = k_1 a ,$$

$$u_v^{54} = s_{45}/b_{45} \left[1 - \frac{s_{54}(s_{54} + 1/2 \cdot s_{45})}{b_{45}^2} \right] \quad e$$

$$\ddot{u}_v^{54} = 3/b_{45}^2 \left(1 - \frac{s_{45}}{b_{45}} \right) ,$$

montam-se as figuras (19) e (20).

No que se refere aos deslocamentos normais ligados aos ϕ_k , tem-se apenas u_{ϕ}^1 correspondente à rotação do nó 4, para o qual são geradas as figuras (21) e (22), com base nas considerações de que

$$u_{\phi}^{kr} = s_{kr} s_{rk}/b_{kr}^2 (s_{rk} + 1/2 \cdot s_{kr}) ,$$

$$\ddot{u}_{\phi}^{kr} = 3/b_{kr} (s_{kr}/b_{kr} - 1) \quad e$$

$$u_{\phi}^k = u_{\phi}^1 = \sum_{r=1}^R u_{\phi}^{kr} , \quad \text{o que acarreta}$$

$$u_{\phi}^1 = u_{\phi}^{42} \quad e \quad \ddot{u}_{\phi}^1 = \ddot{u}_{\phi}^{42} \quad (\text{na barra 2-4})$$

$$u_{\varphi}^1 = u_{\varphi}^{45} \quad e \quad \ddot{u}_{\varphi}^1 = \ddot{u}_{\varphi}^{45} \quad (\text{na barra 4-5})$$

$$u_{\varphi}^1 = \ddot{u}_{\varphi}^1 = 0 \quad (\text{nas demais barras})$$

Em correspondência aos parâmetros de deslocamento e_i , têm-se as funções ω_{\ominus}^i , das quais já são conhecidas

$$\omega_{\ominus}^1 = x \quad ,$$

$$\omega_{\ominus}^2 = y \quad e$$

$$\omega_{\ominus}^3 = \omega$$

No que se refere a ω_{\ominus}^4 , vem

$$\omega_{\ominus}^4 = \bar{\omega}^4 + \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} \omega_{\ominus}^j = \bar{\omega}^4 + \beta_{41}x + \beta_{42}y + \beta_{43}\omega \quad , \quad (\text{III.8})$$

com $\bar{\omega}^4 = \omega^4 + \beta_{40}\omega^0$, onde

$$\beta_{40} = -1/F \int_F \omega^4 dF \quad e \quad \omega^0 = 1 \quad , \quad e$$

$$\begin{aligned} \beta_{4j} &= - \left(\int_F \bar{\omega}^4 \omega_{\ominus}^j dF \right) / \left(\int_F (\omega_{\ominus}^j)^2 dF \right) = \\ &= - \left(\int_F \omega^4 \omega_{\ominus}^j dF \right) / \left(\int_F (\omega_{\ominus}^j)^2 dF \right) . \end{aligned}$$

A figura (7) e as expressões anteriores fornecem

$$\omega^4 = -k_1 a \quad (\text{na barra 5-6})$$

$$\omega^4 = 0 \quad (\text{nas demais barras}) \quad ,$$

$$\beta_{40} = k_{40}^{\beta} a^2 \quad , \text{ com}$$

$$k_{40}^{\beta} = e^2 k_1 / 2k_F \quad , \quad (\text{III.9})$$

sendo k_F obtido de (III.1b) ,

$$\beta_{41} = k_{41}^{\beta} a \quad , \text{ onde}$$

$$k_{41}^{\beta} = e_2 k_1^2 / 2x_I , \quad (\text{III.10})$$

com x_I dado por (III.3b) ,

$$\beta_{42} = k_{42}^{\beta} a , \text{ sendo}$$

$$k_{42}^{\beta} = e_2 k_1 / 6y_I (1 - 3C_y) , \quad (\text{III.11})$$

com y_I dado por (III.3d) e C_y por (III.2c), e

$$\beta_{43} = k_{43}^{\beta} , \text{ cuja expressão é}$$

$$k_{43}^{\beta} = e_2 k_1^2 / 6\omega_I (3D_{\omega} - 2) , \quad (\text{III.12})$$

usando respectivamente para ω_I e D_{ω} as expressões (III.5b,c), de modo que a equação (III.8) toma a forma

$$\omega_{\ominus}^4 = \omega^4 + k_{40}^{\beta} a^2 + k_{41}^{\beta} a x + k_{42}^{\beta} a y + k_{43}^{\beta} \omega \quad (\text{III.13})$$

Para os "q" nós da LMP, $q = 1, 2, \dots, 7$, a equação (III.13) fornece de modo genérico a expressão

$$\omega_{\ominus}^4(q) = k_{\omega}^q a^2 , \text{ sendo}$$

$$k_{\omega}^1 = k_{40}^{\beta} - k_{41}^{\beta} (k_1 + k_2) + k_{42}^{\beta} (1 - C_y) - k_{43}^{\beta} D_{\omega} (k_1 + k_2)$$

$$k_{\omega}^2 = k_{40}^{\beta} - k_1 k_{41}^{\beta} + k_{42}^{\beta} (1 - C_y) - k_{43}^{\beta} D_{\omega} k_1$$

$$k_{\omega}^3 = k_{40}^{\beta} - k_1 k_{41}^{\beta} - k_{42}^{\beta} C_y + k_{43}^{\beta} (1 - D_{\omega}) k_1$$

$$k_{\omega}^4 = k_{40}^{\beta} + k_{42}^{\beta} (1 - C_y)$$

$$k_{\omega}^5 = k_{40}^{\beta} + k_1 k_{41}^{\beta} + k_{42}^{\beta} (1 - C_y) + k_{43}^{\beta} D_{\omega} k_1$$

$$k_{\omega}^6 = -k_1 + k_{40}^{\beta} + k_1 k_{41}^{\beta} - k_{42}^{\beta} C_y - k_{43}^{\beta} (1 - D_{\omega}) k_1$$

$$k_{\omega}^7 = k_{40}^{\beta} + k_{41}^{\beta} (k_1 + k_2) + k_{42}^{\beta} (1 - C_y) + k_{43}^{\beta} D_{\omega} (k_1 + k_2) , \quad (\text{III.14a,g})$$

o que permite calcular o coeficiente A_{44} , por modo misto através de

$$A_{44} = \sum_{m=1}^6 A_{44}^m ,$$

visto que a LMP do caso tem seis barras, e sendo

$$A_{44}^m = \int_s t(\omega_{\ominus}^4)^2 ds$$

o coeficiente A_{44}^m calculado ao longo da barra "m".

Uma vez que ω_{\ominus}^4 tem diagrama linear ao longo de cada barra, as integrais podem ser obtidas por

$$A_{44}^m = b_{kr} t_{kr} / 6 \cdot \left[\bar{\eta}_k (2 \eta_k + \eta_r) + \bar{\eta}_r (2 \eta_r + \eta_k) \right] , \quad (\text{III.15})$$

onde k e r são os nós extremos da barra "m", η_k e $\bar{\eta}_k$ são o valor de ω_{\ominus}^4 no extremo k e η_r e $\bar{\eta}_r$ são o valor de ω_{\ominus}^4 no extremo r .

Com a numeração das barras conforme está indicado pelos números entre parêntesis na figura (13), os resultados seguem a forma geral

$$A_{44}^m = (KA)_{44}^m a^6 , m = 1, 2, \dots, 6 , \text{ sendo}$$

$$(KA)_{44}^1 = e_1 k_2 / 3 \cdot \left[(k_{\omega}^1)^2 + k_{\omega}^1 k_{\omega}^2 + (k_{\omega}^2)^2 \right]$$

$$(KA)_{44}^2 = e_1 k_1 / 3 \cdot \left[(k_{\omega}^2)^2 + k_{\omega}^2 k_{\omega}^4 + (k_{\omega}^4)^2 \right]$$

$$(KA)_{44}^3 = e_2 / 3 \cdot \left[(k_{\omega}^2)^2 + k_{\omega}^2 k_{\omega}^3 + (k_{\omega}^3)^2 \right]$$

$$(KA)_{44}^4 = e_1 k_1 / 3 \cdot \left[(k_{\omega}^4)^2 + k_{\omega}^4 k_{\omega}^5 + (k_{\omega}^5)^2 \right]$$

$$(KA)_{44}^5 = e_1 k_2 / 3 \cdot \left[(k_{\omega}^5)^2 + k_{\omega}^5 k_{\omega}^7 + (k_{\omega}^7)^2 \right]$$

$$(KA)_{44}^6 = e_2 / 3 \cdot \left[(k_{\omega}^5)^2 + k_{\omega}^5 k_{\omega}^6 + (k_{\omega}^6)^2 \right] , \quad (\text{III.16a, f})$$

de modo que

$$A_{44} = k_A^{44} a^6 , \text{ com}$$

$$k_A^{44} = \sum_{m=1}^6 (KA)_{44}^m \quad (\text{III.17a, b})$$

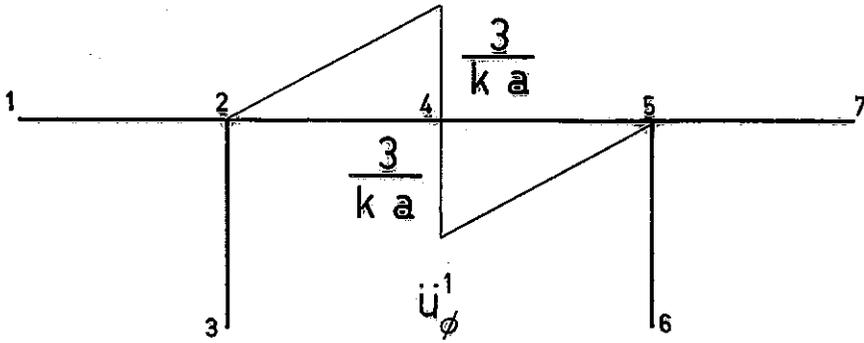


Fig. 22

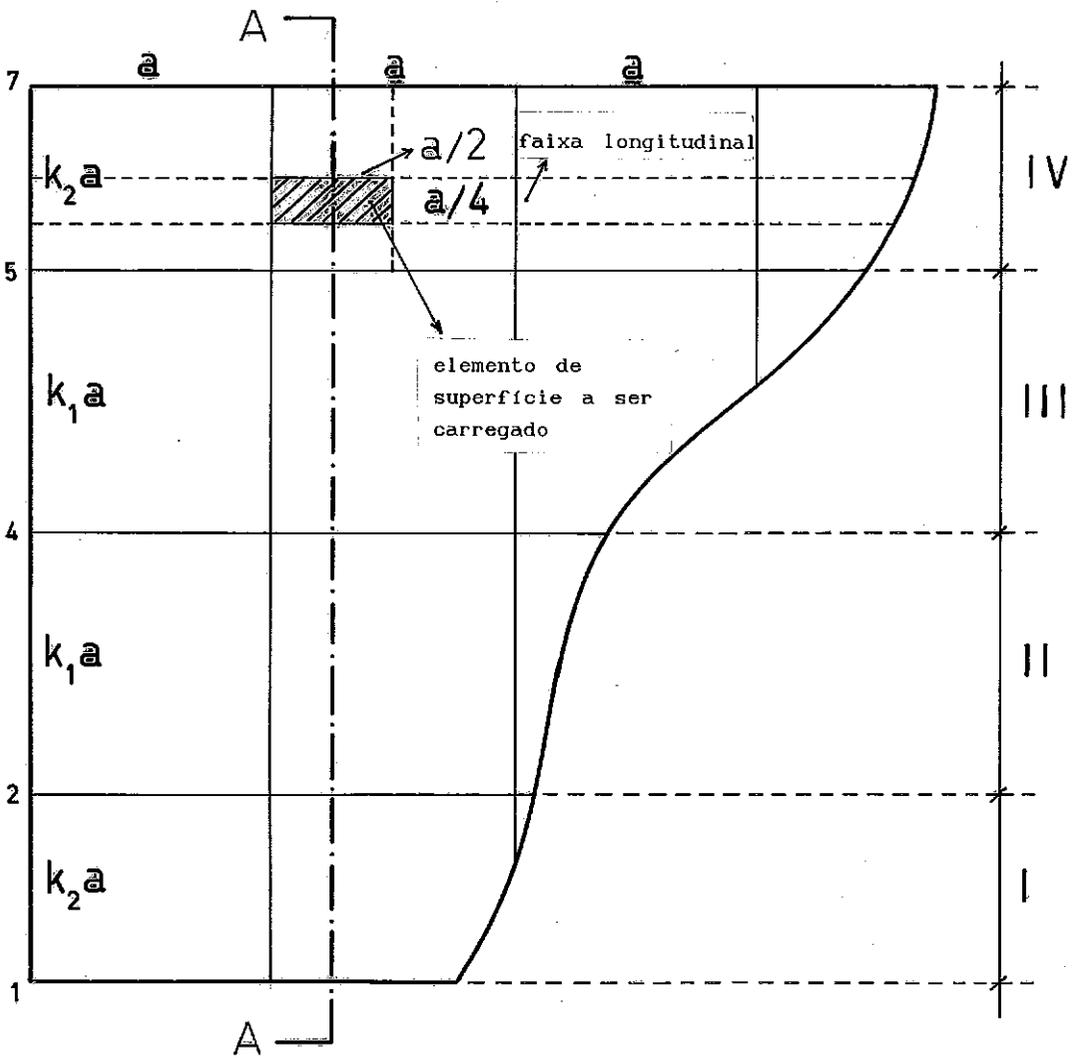


Fig. 23

PARTE DA MESA DO PERFIL, COM DEFINIÇÃO DAS REGIÕES

Partindo de (II.120c,e), usando os elementos das figuras (20) e (22) e tomando expressões do tipo (III.15), é fácil chegar a

$$\dot{B}_{44} = k_B^{44} a^2, \text{ onde}$$

$$k_B^{44} = e_1^3 / 4k_1, \quad (\text{III.18a,b})$$

$$\dot{C}_{41} = \dot{C}_{14} = k_C^{41} a^2, \text{ com}$$

$$k_C^{41} = -e_1^3 / 4k_1, \text{ e} \quad (\text{III.19a,b})$$

$$\dot{d}_{11} = k_D^{11} a^2, \text{ sendo}$$

$$k_D^{11} = e_1^3 / 2k_1, \quad (\text{III.20a,b})$$

resultados esses que permitem reescrever as equações (III.7) na forma abaixo

$$H_{44} = k_H^{44} a^2, \text{ com}$$

$$k_H^{44} = e_1^3 / 8k_1, \text{ e} \quad (\text{III.21a,b})$$

$$H_{40}^\ominus = A_{40}^\ominus + 0,5 B_{10} \quad (\text{III.22})$$

Para fechar a composição de (III.6), será necessário portanto o cálculo dos parâmetros ligados ao carregamento que fornecem A_{40}^\ominus e B_{10} . No caso em estudo será considerada uma carga distribuída $q = 10 \text{ KN/m}^2$, atuando sobre o elemento retangular de superfície definido na figura (23), e assumindo sucessivas posições de modo a percorrer toda a superfície por faixas longitudinais.

Em cada superfície elementar se transforma a carga "q" em sua equivalente linear distribuída linearmente na direção longitudinal, $p(z) = p$, como está na figura (24), e com esta se calculam os parâmetros para uma fatia unitária de haste localizada na região de atuação de $p(z)$. A figura (25) é a vista em corte da (23), já com o

artifício da (24).

Visando a simplificação do problema, evitando um refinamento excessivo da malha, define-se :

$$k_1 = II/4 \quad , \text{ donde } k_1 a = II.a/4 \quad , \text{ e}$$

$$k_2 = JJ/4 \quad , \text{ donde } k_2 a = JJ.a/4 \quad ,$$

sendo II e JJ números inteiros, o que significa que os comprimentos das barras devem ser múltiplos de 0.25a.

As expressões genéricas (II.123) que definem os termos A_{i0}^\ominus e B_{k0} , tomam a forma

$$A_{40}^\ominus = A_{40} + \beta_{41} p_x + \beta_{42} p_y + \beta_{43} m_D \quad , \text{ e}$$

$$B_{10} = m_{42} + m_{45} \quad , \quad (\text{III.23a,b})$$

onde de início se sabe que

$$p_x = 0 \quad \text{e}$$

$$p_y = -p$$

Além disso valem as expressões

$$A_{40} = p_{54} \alpha_{54}^4 \quad , \text{ e}$$

$$m_D = \pm p d \quad ,$$

sendo "d" positivo quando medido no sentido positivo do eixo "x", e m_D positivo quando sugerir um giro no sentido anti-horário.

Gerando-se um contador "f" de faixas longitudinais a ser incrementado no sentido do nó 1 para o nó 7, chega-se às expressões que se seguem, ambas já com o sinal embutido

$$d = 1/8.(2.f-MM)a \quad , \text{ e}$$

$$m_D = 1/8.(MM-2.f)pa \quad , \text{ onde}$$

$$MM = 2.LL+1 \quad , \text{ com}$$

$$LL = II+JJ$$

(III.24a,d)

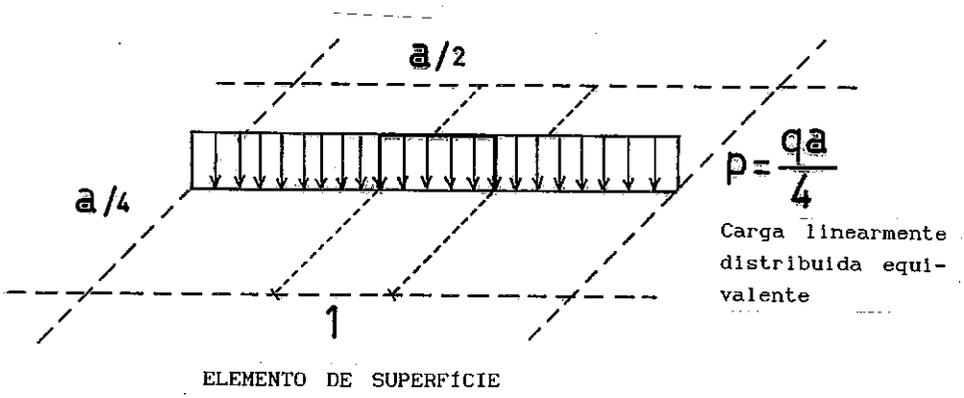


Fig. 24

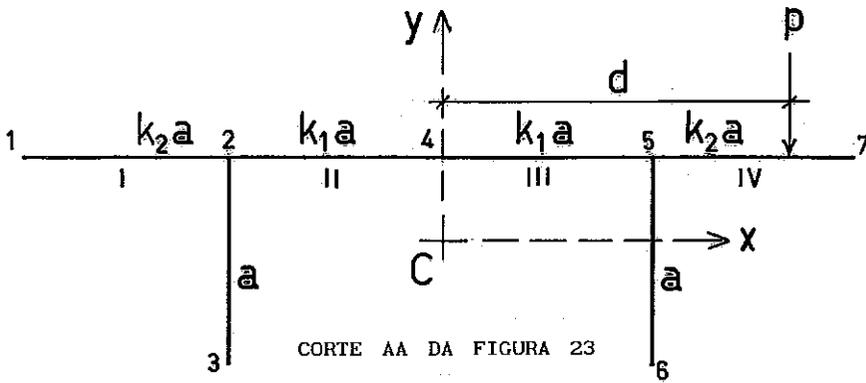
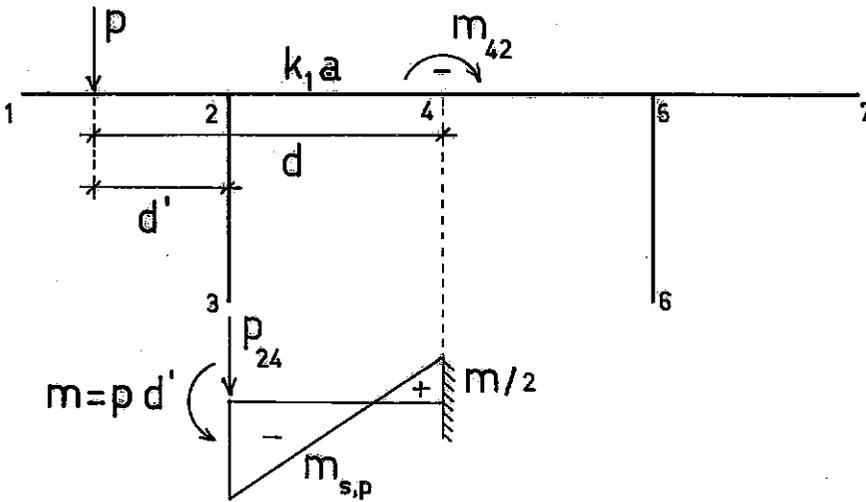


Fig. 25



ESQUEMA COM A CARGA NA REGIÃO I

Fig. 26

O contador "f" terá valores no intervalo

$$1 \leq f \leq 2.LL ,$$

varrendo as quatro regiões indicadas por algarismos romanos nas figuras (23) e (25) e permitindo a obtenção dos demais parâmetros necessários [2].

Região I , $1 \leq f \leq JJ$

A figura (26) mostra o esquema do caso, de onde se conclui que

$$A_{40} = p_{54} = 0 ,$$

e com a ajuda de (III.23) e (III.24) se pode escrever

$$A_{40}^{\ominus} = k_{40}^{\ominus} . pa = k_A . pa , \text{ onde}$$

$$k_A = -k_{42}^{\beta} + 1/8 . k_{43}^{\beta} (MM-2.f) , \text{ e}$$

$$B_{10} = k_B . pa , \text{ com}$$

$$k_B = 1/2 . \left[1/8 . (2.f-MM) + k_1 \right] , \quad (\text{III.25a,d})$$

de modo que (III.22) fornece

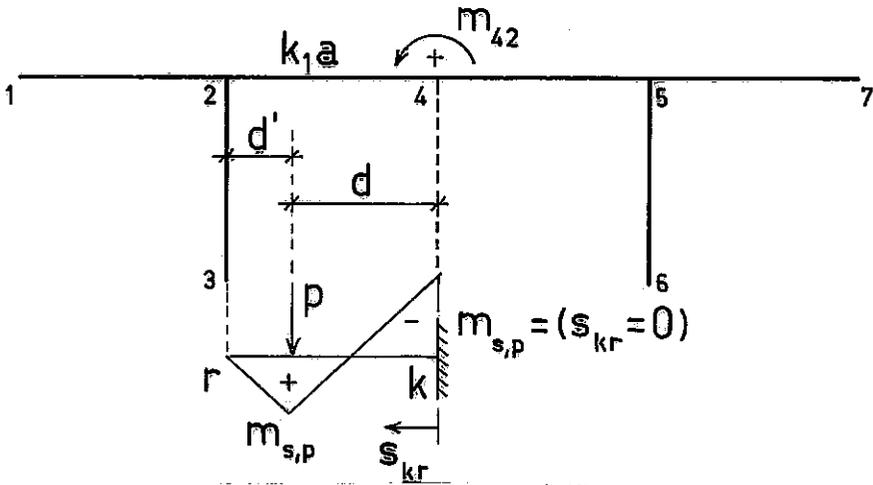
$$H_{40}^{\ominus} = C'_f . pa , \text{ sendo}$$

$$C'_f = k_{40}^{\ominus} + 0,5 . k_B \quad (\text{III.26a,b})$$

Região II , $(JJ+1) \leq f \leq LL$

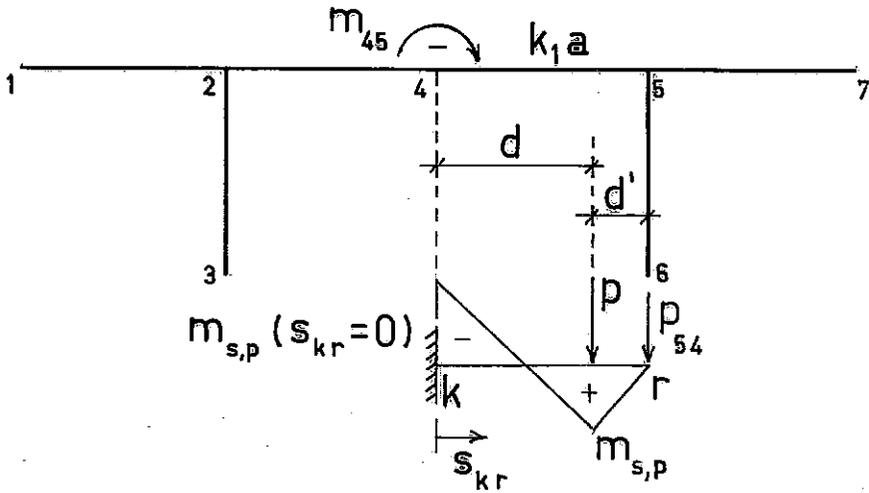
Tem-se agora o esquema da figura (27), mas a forma dos resultados é a mesma da Região anterior, apenas mudando a expressão do coeficiente k_B , que passa a ser

$$k_B = 0,9765 . 10^{-3} \left[8 + (2.f-MM)/k_1 \right] \left[16 + (2.f+MM)/k_1 \right] (MM-2.f) \quad (\text{III.27})$$



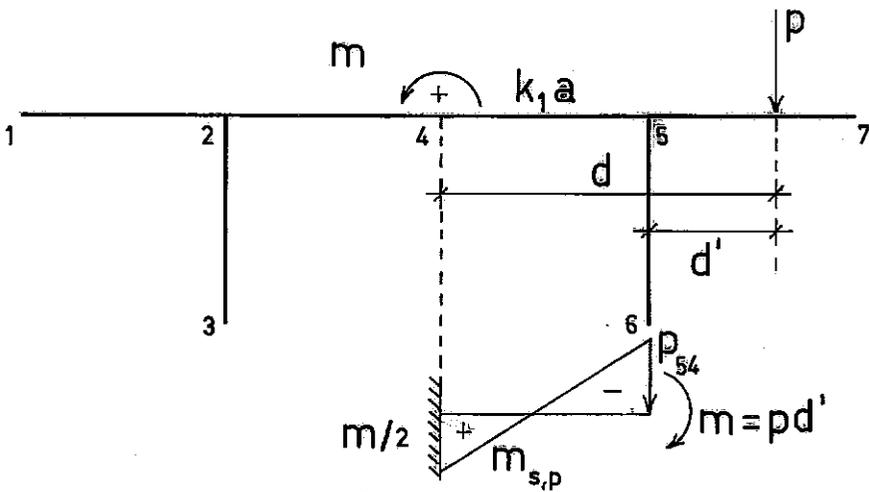
ESQUEMA COM A CARGA NA REGIÃO II

Fig.27



ESQUEMA COM A CARGA NA REGIÃO III

Fig.28



ESQUEMA COM A CARGA NA REGIÃO IV

Fig.29

Região III , $(LL+1) \leq f \leq (LL+II)$

Para essa região vale o esquema dado na figura (28), que permite escrever

$$A_{40}^{\ominus} = A_{40} + k_A \cdot pa \quad , \text{ com}$$

$$A_{40} = k_{40} \cdot pa \quad , \text{ onde}$$

$$k_{40} = -0,9765 \cdot 10^{-3} \left[(2 \cdot f - MM) / k_1 \right]^2 \left[24k_1 - (2 \cdot f - MM) \right] \quad (\text{III.28})$$

Assim vem

$$A_{40}^{\ominus} = k_{40}^{\ominus} \cdot pa \quad , \text{ com}$$

$$k_{40}^{\ominus} = k_{40} + k_A$$

Seguem-se as mesmas expressões das outras regiões, apenas com k_B assumindo a forma

$$k_B = 0,9765 \cdot 10^{-3} \left[8 - (2 \cdot f - MM) / k_1 \right] \left[16 - (2 \cdot f - MM) / k_1 \right] (MM - 2 \cdot f) \quad (\text{III.29})$$

Região IV , $(LL+II+1) \leq f \leq 2 \cdot LL$

De acordo com o esquema mostrado na figura (29), facilmente se chega às expressões

$$k_{40} = -k_1 \left[3(2 \cdot f - MM) / 16k_1 - 0,5 \right] \quad , \text{ e}$$

$$k_B = 0,5 \left[(2 \cdot f - MM) / 8 - k_1 \right] \quad , \quad (\text{III.30a,b})$$

seguinte-se a partir daí o mesmo caminho das regiões anteriores.

Uma vez definida a obtenção de todos os elementos que compoem (III.6), esta pode ser reescrita na forma

$$E' k_A^{44} a^5 \vartheta_4''' + E' k_H^{44} a \vartheta_4 = C'_f p(z) \quad , \quad \text{ donde resulta}$$

$$Y'''' + C.Y = h(z) \quad , \quad (\text{III.31})$$

com Y, C e $h(z)$ dados por

$$Y = E' \ominus_4 \quad ,$$

$$C = k_H^{44} / (k_A^{44} \cdot a^4) \quad , \quad e$$

$$h(z) = C_f \cdot p(z) \quad , \quad (\text{III.32a,c})$$

sendo C_f calculado como

$$C_f = C'_f / (k_A^{44} \cdot a^5) \quad (\text{III.33})$$

Seguindo o caminho convencional, procura-se expressar a solução geral da equação (III.31) na forma

$$Y = Y_H + Y_P \quad , \quad (\text{III.34})$$

sendo

Y_H a solução geral da equação homogênea associada, e

Y_P uma solução particular da não homogênea.

Dessa forma se chega a [7]

$$Y_H = A_1 \varphi_1(\lambda z) + A_2 \varphi_2(\lambda z) + A_3 \varphi_3(\lambda z) + A_4 \varphi_4(\lambda z) \quad , \quad \text{onde}$$

$$\lambda = \sqrt[4]{C/4} \quad , \quad (\text{III.35a,b})$$

e as funções $\varphi_i(\lambda z)$, $i = 1, 2, 3, 4$ são expressas por

$$\varphi_1(\lambda z) = \cosh(\lambda z) \cdot \cos(\lambda z)$$

$$\varphi_2(\lambda z) = 1/2 \left[\cosh(\lambda z) \cdot \sen(\lambda z) + \sinh(\lambda z) \cdot \cos(\lambda z) \right]$$

$$\varphi_3(\lambda z) = 1/2 \cdot \sinh(\lambda z) \cdot \sen(\lambda z)$$

$$\varphi_4(\lambda z) = 1/4 \left[\cosh(\lambda z) \cdot \sen(\lambda z) - \sinh(\lambda z) \cdot \cos(\lambda z) \right]$$

(III.36a,d)

Quanto à parcela Y_P de (III.34), sua determinação pode ser feita pelo Método da Variação dos Parâmetros [7], tendo a forma

$$Y_p = \int_0^z K(z, \zeta) h(\zeta) d\zeta \quad , \quad (\text{III.37})$$

onde $K(z, \zeta)$ é a Função de Green, ou seja :

$$K(z, \zeta) = \sum_{k=1}^4 (-1)^{4+k} \varphi_k(\lambda z) V_k(\lambda \zeta) / W[\varphi_1, \dots, \varphi_4] \quad , \quad (\text{III.38})$$

cujo numerador é a função que representa o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(\lambda \zeta) & \varphi_2(\lambda \zeta) & \varphi_3(\lambda \zeta) & \varphi_4(\lambda \zeta) \\ \varphi_1'(\lambda \zeta) & \varphi_2'(\lambda \zeta) & \varphi_3'(\lambda \zeta) & \varphi_4'(\lambda \zeta) \\ \varphi_1''(\lambda \zeta) & \varphi_2''(\lambda \zeta) & \varphi_3''(\lambda \zeta) & \varphi_4''(\lambda \zeta) \\ \varphi_1(\lambda z) & \varphi_2(\lambda z) & \varphi_3(\lambda z) & \varphi_4(\lambda z) \end{bmatrix}$$

obtido a partir dos elementos da quarta linha, e cujo denominador é o Wronskiano das funções (III.36), que fornece como resultado

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_4] = \lambda^6 \quad (\text{III.39})$$

A solução Y_p toma finalmente o aspecto

$$Y_p = 1/4 \lambda^3 \int_0^z h(\zeta) \left[\text{sen} \lambda(z-\zeta) \cosh \lambda(z-\zeta) - \text{senh} \lambda(z-\zeta) \cos \lambda(z-\zeta) \right] d\zeta \quad (\text{III.40})$$

Para a determinação dos coeficientes numéricos A_i , $i=1, \dots, 4$ da solução encontrada, utilizam-se as Condições de Extremidade que, para os tipos comuns de apoio, estão sempre dentro do conjunto composto de $Y=0$, $Y'=0$ e $Y''=0$ para as seções extremas. Neste trabalho a origem dos "z" foi tomada no ponto médio da haste de modo que, sendo "l" o seu comprimento, as seções extremas correspondem a $z=-1/2$ e $z=1/2$, como se pode ver na figura (29a).

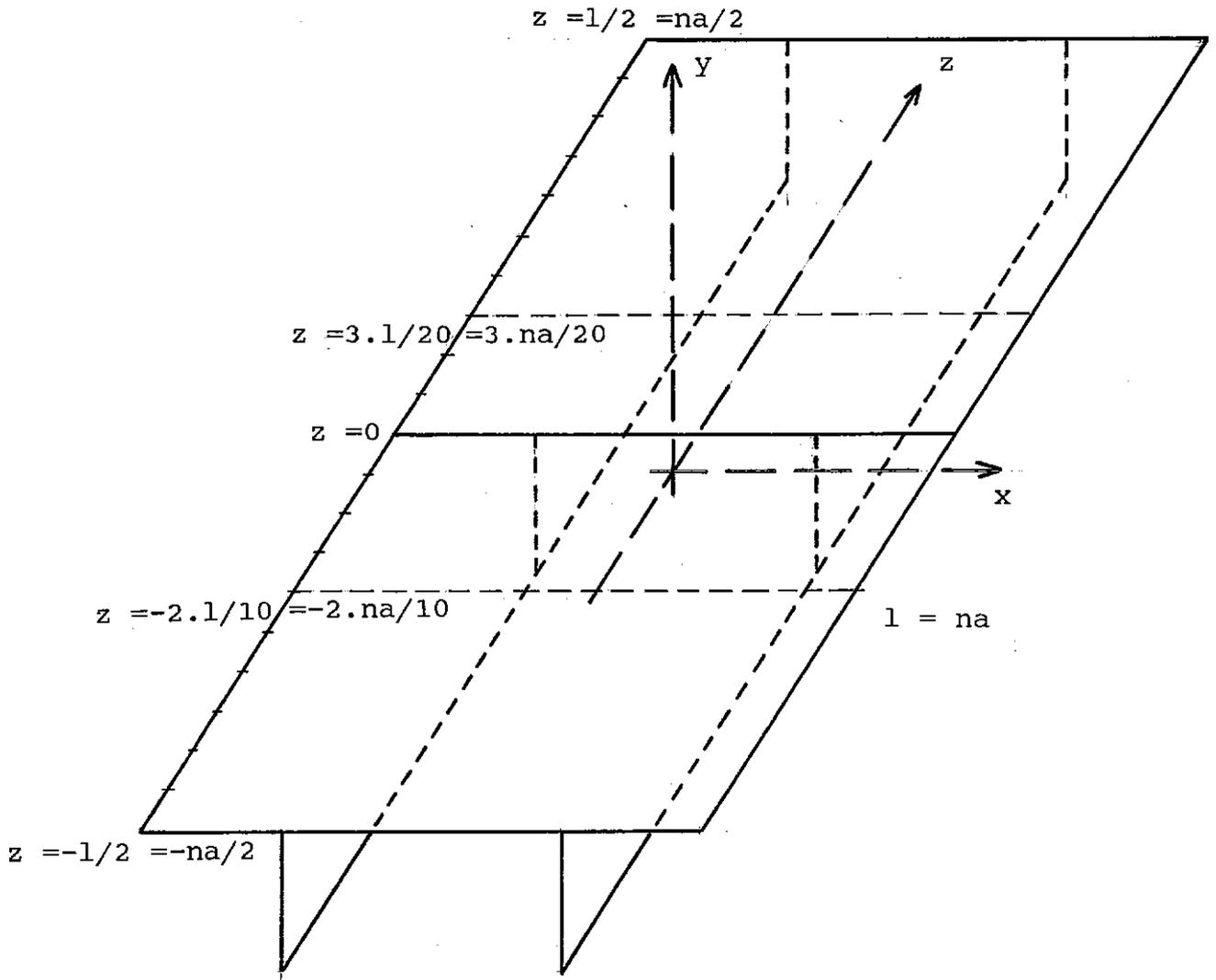


Fig. 29a

LOCALIZAÇÃO DO SISTEMA CARTESIANO E POSICIONAMENTO DAS SEÇÕES

A posição do elemento de superfície no qual em determinado instante está localizado o carregamento, é dada pelo número "f" e por duas coordenadas longitudinais a_1 e a_2 .

Fazendo

$$l = n \cdot a \quad ,$$

$$a_1 = n_1 \cdot a \quad , \quad e$$

$$a_2 = n_2 \cdot a \quad , \quad (III.41a,c)$$

e notando que de (III.32b) e (III.35b) se pode escrever

$$\lambda = k_\lambda / a \quad , \text{ com}$$

$$k_\lambda = \sqrt[4]{k_H^{44} / 4k_A^{44}} \quad , \quad (III.42a,b)$$

chega-se às expressões fornecidas isoladamente por cada uma das condições supra-citadas.

a) $Y = 0$, para $z = -1/2$

$$A_1 N_1^0 + A_2 N_2^0 + A_3 N_3^0 + A_4 N_4^0 + N_5^0 = 0 \quad , \quad (III.43)$$

onde os N_i^0 , $i = 1, \dots, 4$ são os valores das correspondentes funções φ_i para $z = -1/2$, enquanto que N_5^0 será nulo se o carregamento estiver na metade oposta da faixa, ou em caso contrário valerá

$$N_5^0 = C'_f \cdot (N_5^0)' / 4k_H^{44} \quad , \quad \text{com}$$

$$(N_5^0)' = \cosh k_\lambda (-n/2 - n_1) \cdot \cos k_\lambda (-n/2 - n_1) + \\ - \cosh k_\lambda (-n/2 - n_2) \cdot \cos k_\lambda (-n/2 - n_2) \quad (III.44a,b)$$

b) $Y = 0$, para $z = 1/2$

$$A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3 + A_4 N_4 + N_5 = 0 \quad , \quad (III.45)$$

onde os N_i , $i = 1, \dots, 4$ são os valores das correspondentes funções φ_i para $z = 1/2$, enquanto que N_5 será nulo se o carregamento estiver na metade oposta da

faixa, ou em caso contrário valerá

$$N_5 = C'_f \cdot N'_5 / 4k_H^{44}, \text{ com}$$

$$N'_5 = \cosh k_\lambda (n/2 - n_2) \cdot \cos k_\lambda (n/2 - n_2) + \\ - \cosh k_\lambda (n/2 - n_1) \cdot \cos k_\lambda (n/2 - n_1) \quad (\text{III.46a,b})$$

c) $Y' = 0$, para $z = -1/2$

$$A_1 M_1^0 + A_2 M_2^0 + A_3 M_3^0 + A_4 M_4^0 + M_5^0 = 0, \quad (\text{III.47})$$

onde os M_i^0 , $i = 1, \dots, 4$ são os valores das derivadas primeiras em "z" das correspondentes funções φ_i para $z = -1/2$, enquanto que M_5^0 será nulo se o carregamento estiver na metade oposta da faixa, ou em caso contrário valerá

$$M_5^0 = C'_f \cdot (M_5^0)' / 4k_H^{44}, \text{ com}$$

$$(M_5^0)' = \left[-\cosh k_\lambda (-n/2 - n_1) \cdot \text{sen } k_\lambda (-n/2 - n_1) + \right. \\ \left. \text{senh } k_\lambda (-n/2 - n_1) \cdot \cos k_\lambda (-n/2 - n_1) + \right. \\ \left. \cosh k_\lambda (-n/2 - n_2) \cdot \text{sen } k_\lambda (-n/2 - n_2) - \right. \\ \left. \text{senh } k_\lambda (-n/2 - n_2) \cdot \cos k_\lambda (-n/2 - n_2) \right] \quad (\text{III.48a,b})$$

d) $Y' = 0$, para $z = 1/2$

$$A_1 M_1 + A_2 M_2 + A_3 M_3 + A_4 M_4 + M_5 = 0, \quad (\text{III.49})$$

onde os M_i , $i = 1, \dots, 4$ são os valores das derivadas primeiras em "z", divididos por λ , das correspondentes funções φ_i para $z = 1/2$, enquanto que M_5 será nulo se o carregamento estiver na metade oposta da faixa, ou em caso contrário valerá

$$M_5 = C'_f \cdot M'_5 / 4k_H^{44}, \text{ com}$$

$$M'_5 = \left[-\cosh k_\lambda (n/2 - n_2) \cdot \text{sen } k_\lambda (n/2 - n_2) + \right.$$

$$\begin{aligned} & \sinh k_\lambda (n/2-n_2) \cdot \cos k_\lambda (n/2-n_2) + \\ & \cosh k_\lambda (n/2-n_1) \cdot \sin k_\lambda (n/2-n_1) - \\ & \sinh k_\lambda (n/2-n_1) \cdot \cos k_\lambda (n/2-n_1) \end{aligned} \quad \text{(III.50a,b)}$$

e) $Y'' = 0$, para $z = -1/2$

$$A_1 N_1^0 + A_2 N_2^0 + A_3 N_3^0 + A_4 N_4^0 + N_5^0 = 0 \quad , \quad \text{(III.51)}$$

onde os N_i^0 , $i = 1, \dots, 4$ são os valores das derivadas segundas em "z", divididos por λ ao quadrado, das correspondentes funções φ_i para $z = -1/2$, enquanto que N_5^0 será nulo se o carregamento estiver na metade oposta da faixa, ou em caso contrário valerá

$$N_5^0 = C'_f \cdot (N_5^0)' / 4k_H^{44} \quad , \quad \text{com}$$

$$\begin{aligned} (N_5^0)' = 2 \left[\sinh k_\lambda (-n/2-n_2) \cdot \sin k_\lambda (-n/2-n_2) - \right. \\ \left. \sinh k_\lambda (-n/2-n_1) \cdot \sin k_\lambda (-n/2-n_1) \right] \quad \text{(III.52a,b)} \end{aligned}$$

f) $Y'' = 0$, para $z = 1/2$

$$A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3 + A_4 N_4 + N_5 = 0 \quad , \quad \text{(III.53)}$$

onde os N_i , $i = 1, \dots, 4$ são os valores das derivadas segundas em "z", divididos por λ ao quadrado, das correspondentes funções φ_i para $z = 1/2$, enquanto que N_5 será nulo se o carregamento estiver na metade oposta da faixa, ou em caso contrário valerá

$$N_5 = C'_f \cdot N'_5 / 4k_H^{44} \quad , \quad \text{com}$$

$$\begin{aligned} N'_5 = 2 \left[\sinh k_\lambda (n/2-n_1) \cdot \sin k_\lambda (n/2-n_1) - \right. \\ \left. \sinh k_\lambda (n/2-n_2) \cdot \sin k_\lambda (n/2-n_2) \right] \quad \text{(III.54a,b)} \end{aligned}$$

Cada apoio extremo fornece duas condições, de modo que sempre se terá um sistema de quatro equações para

determinação dos quatro coeficientes [6]. Vejam-se os casos :

a) Bi-apoiada

$$\left. \begin{array}{l} Y = 0 \\ Y'' = 0 \end{array} \right\} \text{ para } z = -1/2 \text{ e } z = 1/2$$

b) Mono -engastada (engaste à direita)

$$\left. \begin{array}{l} Y = 0 \\ Y'' = 0 \end{array} \right\} \text{ para } z = -1/2 \text{ e } \left. \begin{array}{l} Y = 0 \\ Y' = 0 \end{array} \right\} \text{ para } z = 1/2$$

c) Mono-engastada (engaste à esquerda)

$$\left. \begin{array}{l} Y = 0 \\ Y' = 0 \end{array} \right\} \text{ para } z = -1/2 \text{ e } \left. \begin{array}{l} Y = 0 \\ Y'' = 0 \end{array} \right\} \text{ para } z = 1/2$$

d) Bi-engastada

$$\left. \begin{array}{l} Y = 0 \\ Y' = 0 \end{array} \right\} \text{ para } z = -1/2 \text{ e } z = 1/2$$

As tensões normais desejadas são fornecidas por

$$\sigma_z = n_z/t, \text{ onde}$$

$$n_z = -E' \cdot t \cdot \omega_4'' \cdot \omega_\ominus^4, \quad (\text{III.55a,b})$$

de onde se tem imediatamente

$$\sigma_z = -E' \cdot \omega_4'' \cdot \omega_\ominus^4 \quad (\text{III.56})$$

De (III.32a), por derivação, vem

$$Y'' = E' \cdot \omega_4'' ,$$

donde se conclui que

$$\sigma_z = -Y'' \cdot \omega_\ominus^4, \quad (\text{III.57})$$

Utilizando-se agora as expressões (III.14) determinam-se as tensões σ_z^i , $i = 1, 2, \dots, 7$, atuantes em

todos os pontos de uma seção de ordenada "z" qualquer, na forma

$$\sigma_z^i = -Y'' \cdot k_{\omega}^i \cdot a^2, \quad (\text{III.58})$$

sendo Y'' obtido de

$$Y'' = A_1 \varphi_1''(\lambda z) + A_2 \varphi_2''(\lambda z) + A_3 \varphi_3''(\lambda z) + A_4 \varphi_4''(\lambda z) + Y_P'', \quad (\text{III.59})$$

onde, de acordo com (III.36) e (III.40), se tem

$$\varphi_1''(\lambda z) = -2\lambda^2 \cdot \text{senh}(\lambda z) \cdot \text{sen}(\lambda z),$$

$$\varphi_2''(\lambda z) = \lambda^2 \left[-\text{cosh}(\lambda z) \cdot \text{sen}(\lambda z) + \cos(\lambda z) \cdot \text{senh}(\lambda z) \right],$$

$$\varphi_3''(\lambda z) = \lambda^2 \cdot \cos(\lambda z) \cdot \text{cosh}(\lambda z),$$

$$\varphi_4''(\lambda z) = 1/2 \cdot \lambda^2 \left[\text{senh}(\lambda z) \cdot \cos(\lambda z) + \text{sen}(\lambda z) \cdot \text{cosh}(\lambda z) \right], \quad e$$

$$Y_P'' = 1/2\lambda \int_0^z h(\zeta) \left[\text{sen}\lambda(z-\zeta) \cdot \text{cosh}\lambda(z-\zeta) + \text{senh}\lambda(z-\zeta) \cdot \cos\lambda(z-\zeta) \right] d\zeta \quad (\text{III.60a,e})$$

A integral de (III.60), quando for não nula, terá como resultado [1] a expressão

$$Y_P'' = k_y \left[\text{senh}\lambda(z-l_i) \cdot \text{sen}\lambda(z-l_i) - \text{senh}\lambda(z-l_f) \cdot \text{sen}\lambda(z-l_f) \right], \text{ com}$$

$$k_y = C_f' / (8a^2 \cdot k_{\lambda}^2 \cdot k_A^{44}), \quad (\text{III.61a,b})$$

sendo l_i e l_f respectivamente as ordenadas inicial e final do trecho carregado, definidas de acordo com o caso.

IV - Resultados e Conclusões

A seção transversal adotada, com a forma definida na figura (13), tem como dimensão característica a grandeza "a". Considerando-se "t" como a maior das duas espessuras, o critério para classificação da ponte como Haste-Casca estabelece que

$$t/a \leq 0,1 \quad \text{e} \quad a/l > 0,1$$

O caso tomado como ponto de partida para toda a investigação usa

$$a = 2m \quad ,$$

$$t/a = 0,05 \quad ,$$

$$l_1 = l_2 = a \quad , \text{e}$$

$$a/l = 0,1 \quad , \text{ou seja} \quad l = 20m,$$

considera uma espessura única para as placas, admite o avanço do carregamento nas faixas longitudinais em sua forma padrão definida na figura (24) e toma espaçamento "a" entre as seções consideradas. No programa automático (Anexo A) isto significa adotar para os parâmetros os valores

$$N = 10 \quad ,$$

$$k_1 = k_2 = 1 \quad ,$$

$$E_1 = E_2 = 20 \quad ,$$

$$\text{PASSO} = 2 \quad , \text{e}$$

$$I = 1$$

As combinações de Condições de Extremidade e o Modo de Operação desejado são selecionados respectivamente através dos valores de B e M.

As grandezas calculadas e apresentadas nas tabelas e gráficos são as tensões normais nos pontos escolhidos, causadas pela mudança de forma da seção transversal, expressas em MP e multiplicadas por um fator 10^2 . Na tabela (1) estão as tensões que compõem a superfície de influência para o ponto 7 da seção $z = -4\text{m}$, ou $-2.a/10$ na figura (29a), quando se considera a ponte bi-apoiada. Pode-se ter uma idéia da forma da superfície observando a figura (30), onde as coordenadas dos pontos no plano de base dão a localização do elemento de superfície carregado, pela faixa longitudinal considerada e sua posição na mesma. Os resultados que geraram a figura foram obtidos usando $\text{PASSO} = 4$ (Anexo A). A tabela (2) mostra o que ocorre no ponto 3 da mesma seção, enquanto a tabela (3) se refere ao ponto 6 da seção do engaste ($z = -10 \text{ m}$), quando se considera a ponte mono-engastada à esquerda.

Dos resultados anteriores se vê que as Linhas de Influência longitudinais são funções oscilantes amortecidas para ambos os lados da seção considerada, e analisando-as para todas as seções e pontos se constata que as mesmas se extinguem, ou apresentam picos inferiores a um por cento da ordenada máxima (ambos em valor absoluto), quando o elemento de superfície carregado se afasta além de $2,5a$ da seção. Como exemplo vejam-se a figura (31) referente ao ponto 1, seção $z = 3 \text{ m}$, faixa 10, no caso da ponte bi-apoiada, e a figura (32) que trata do mesmo ponto e da mesma faixa, mas na seção $z = 10 \text{ m}$ da ponte bi-engastada.

Superfície de Influência
cada faixa longitudinal percorrida gera um bloco de linhas

Ponto (XL = 8.00 ; YL = 2.00 ; Z = -4.00)

0.00	0.02	-0.16	-0.42	7.36	-6.80	-6.80
7.36	-0.42	-0.16	0.02	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.02	-0.11	-0.30	5.25	-4.86	-4.86
5.25	-0.30	-0.11	0.02	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.01	-0.07	-0.18	3.15	-2.91	-2.91
3.15	-0.18	-0.07	0.01	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.00	-0.02	-0.06	1.04	-0.96	-0.96
1.04	-0.06	-0.02	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
-0.00	-0.00	0.02	0.06	-1.06	0.98	0.98
-1.06	0.06	0.02	-0.00	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.01	0.06	0.17	-3.02	2.79	2.79
-3.02	0.17	0.06	-0.01	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.01	0.10	0.26	-4.58	4.24	4.24
-4.58	0.26	0.10	-0.01	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.02	0.12	0.31	-5.49	5.08	5.08
-5.49	0.31	0.12	-0.02	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
0.00	0.01	-0.07	-0.18	3.08	-2.85	-2.85
3.08	-0.18	-0.07	0.01	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.01	-0.05	-0.15	2.57	-2.38	-2.38
2.57	-0.15	-0.05	0.01	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.01	-0.04	-0.10	1.69	-1.56	-1.56
1.69	-0.10	-0.04	0.01	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.00	-0.01	-0.03	0.58	-0.54	-0.54
0.58	-0.03	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
-0.00	-0.00	0.01	0.03	-0.60	0.55	0.55
-0.60	0.03	0.01	-0.00	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.01	0.04	0.10	-1.78	1.65	1.65
-1.78	0.10	0.04	-0.01	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.01	0.06	0.17	-2.97	2.75	2.75
-2.97	0.17	0.06	-0.01	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.01	0.09	0.24	-4.15	3.84	3.84
-4.15	0.24	0.09	-0.01	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00

TABELA 1

(Tensões Normais no ponto 7, seção z = -4m)

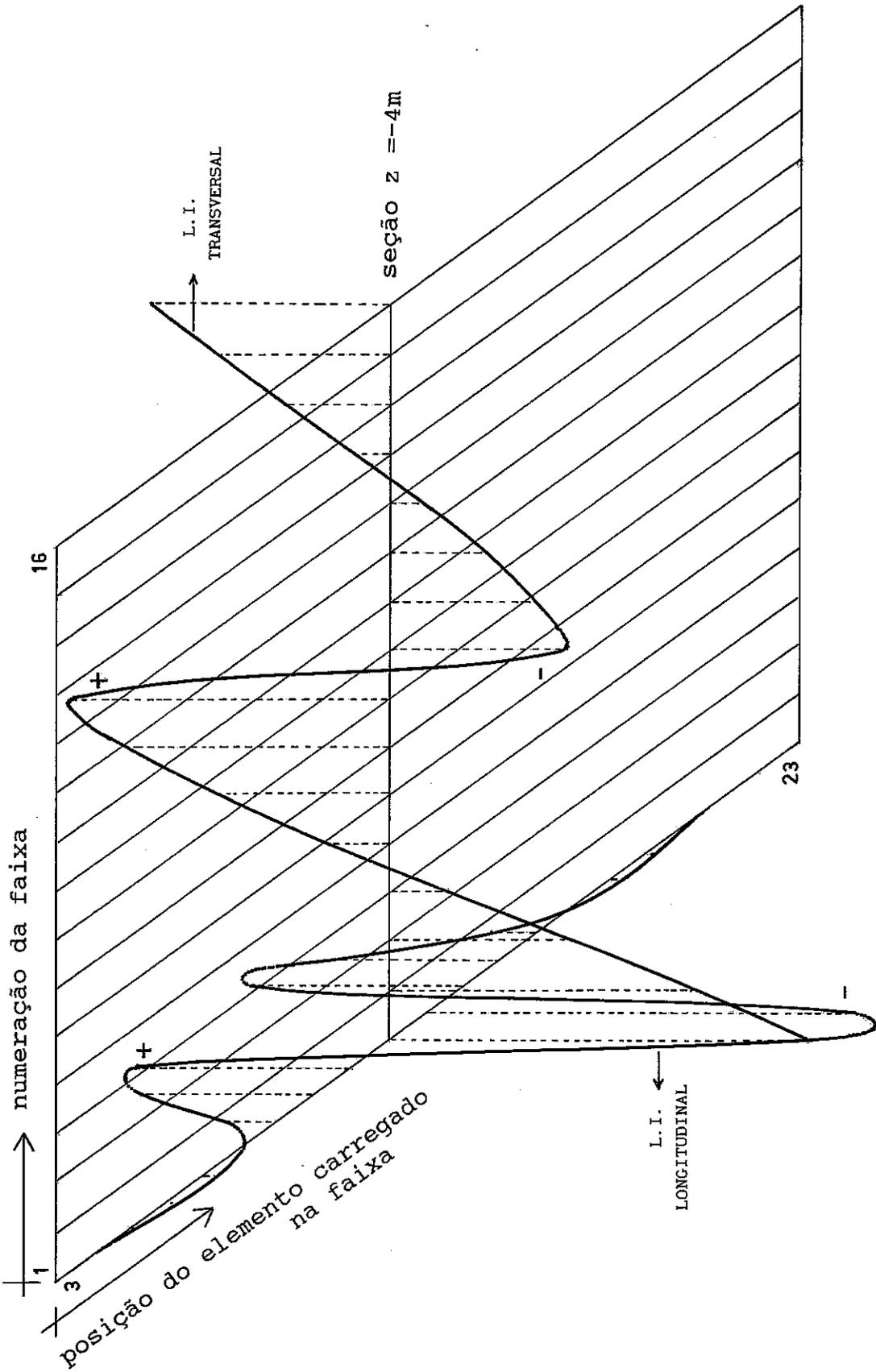


Fig. 30
SEÇÕES LONGITUDINAL E TRANSVERSAL DA SUPERFÍCIE DE INFLUÊNCIA
PONTO 7, SEÇÃO Z = -4M

Superfície de Influência
cada faixa longitudinal percorrida gera um bloco de linhas

Ponto (XL = 2.00 ; YL = 0.00 ; Z = -4.00)

0.01	0.06	-0.37	-1.00	17.43	-16.12	-16.12
17.43	-1.00	-0.37	0.06	0.01	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.04	-0.27	-0.71	12.44	-11.51	-11.51
12.44	-0.71	-0.27	0.04	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.02	-0.16	-0.43	7.46	-6.90	-6.90
7.46	-0.43	-0.16	0.02	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.01	-0.05	-0.14	2.47	-2.29	-2.29
2.47	-0.14	-0.05	0.01	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
-0.00	-0.01	0.05	0.14	-2.50	2.31	2.31
-2.50	0.14	0.05	-0.01	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.02	0.15	0.41	-7.15	6.61	6.61
-7.15	0.41	0.15	-0.02	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.03	0.23	0.62	-10.86	10.04	10.04
-10.86	0.62	0.23	-0.03	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.01	-0.04	0.28	0.74	-13.01	12.04	12.04
-13.01	0.74	0.28	-0.04	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
0.01	0.04	-0.30	-0.80	13.93	-12.89	-12.89
13.93	-0.80	-0.30	0.04	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.04	-0.25	-0.66	11.61	-10.74	-10.74
11.61	-0.66	-0.25	0.04	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.02	-0.16	-0.44	7.63	-7.05	-7.05
7.63	-0.44	-0.16	0.02	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.01	-0.06	-0.15	2.64	-2.44	-2.44
2.64	-0.15	-0.06	0.01	0.00	-0.00	0.00
0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
-0.00	-0.01	0.06	0.15	-2.70	2.50	2.50
-2.70	0.15	0.06	-0.01	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.03	0.17	0.46	-8.06	7.45	7.45
-8.06	0.46	0.17	-0.03	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.01	-0.04	0.29	0.77	-13.41	12.40	12.40
-13.41	0.77	0.29	-0.04	-0.00	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.01	-0.06	0.40	1.07	-18.76	17.36	17.36
-18.76	1.07	0.40	-0.06	-0.01	0.00	-0.00
-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00

TABELA 2

(Tensões Normais no ponto 3, seção z = -4m)

Superfície de Influência
cada faixa longitudinal percorrida gera um bloco de linhas

Ponto (XL = 6.00 ; YL = 0.00 ; Z = -10.00)

-195.84	-33.38	7.80	0.23	-0.22	0.01	0.01
-0.00	0.01	-0.02	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-139.82	-23.83	5.57	0.17	-0.16	0.01	0.00
-0.00	0.01	-0.02	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-83.79	-14.28	3.34	0.10	-0.09	0.01	0.00
-0.00	0.01	-0.01	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-27.77	-4.73	1.11	0.03	-0.03	0.00	0.00
-0.00	0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
28.10	4.79	-1.12	-0.03	0.03	-0.00	-0.00
0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00
0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00
80.32	13.69	-3.20	-0.10	0.09	-0.00	-0.00
0.00	-0.00	0.01	0.00	0.00	-0.00	-0.00
0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00
122.03	20.80	-4.86	-0.15	0.14	-0.01	-0.00
0.00	-0.01	0.01	0.00	0.00	-0.00	-0.00
0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00
146.21	24.92	-5.82	-0.18	0.17	-0.01	-0.00
0.00	-0.01	0.03	0.00	0.00	-0.00	-0.00
0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00
-136.44	-23.25	5.43	0.16	-0.15	0.01	0.00
-0.00	0.01	-0.02	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-113.74	-19.39	4.53	0.14	-0.13	0.01	0.00
-0.00	0.01	-0.01	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-74.69	-12.73	2.97	0.09	-0.08	0.00	0.00
-0.00	0.01	-0.01	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-25.82	-4.40	1.03	0.03	-0.03	0.00	0.00
-0.00	0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
-0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00
26.49	4.51	-1.05	-0.03	0.03	-0.00	-0.00
0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00
0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00
78.91	13.45	-3.14	-0.09	0.09	-0.00	-0.00
0.00	-0.01	0.01	0.00	0.00	-0.00	-0.00
0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00
131.33	22.38	-5.23	-0.16	0.15	-0.01	-0.00
0.00	-0.01	0.01	0.00	0.00	-0.00	-0.00
0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00
183.76	31.32	-7.31	-0.22	0.21	-0.01	-0.00
0.00	-0.01	0.01	0.00	0.00	-0.00	-0.00
0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00

TABELA 3

(Tensões Normais no ponto 6, seção z = -10m)

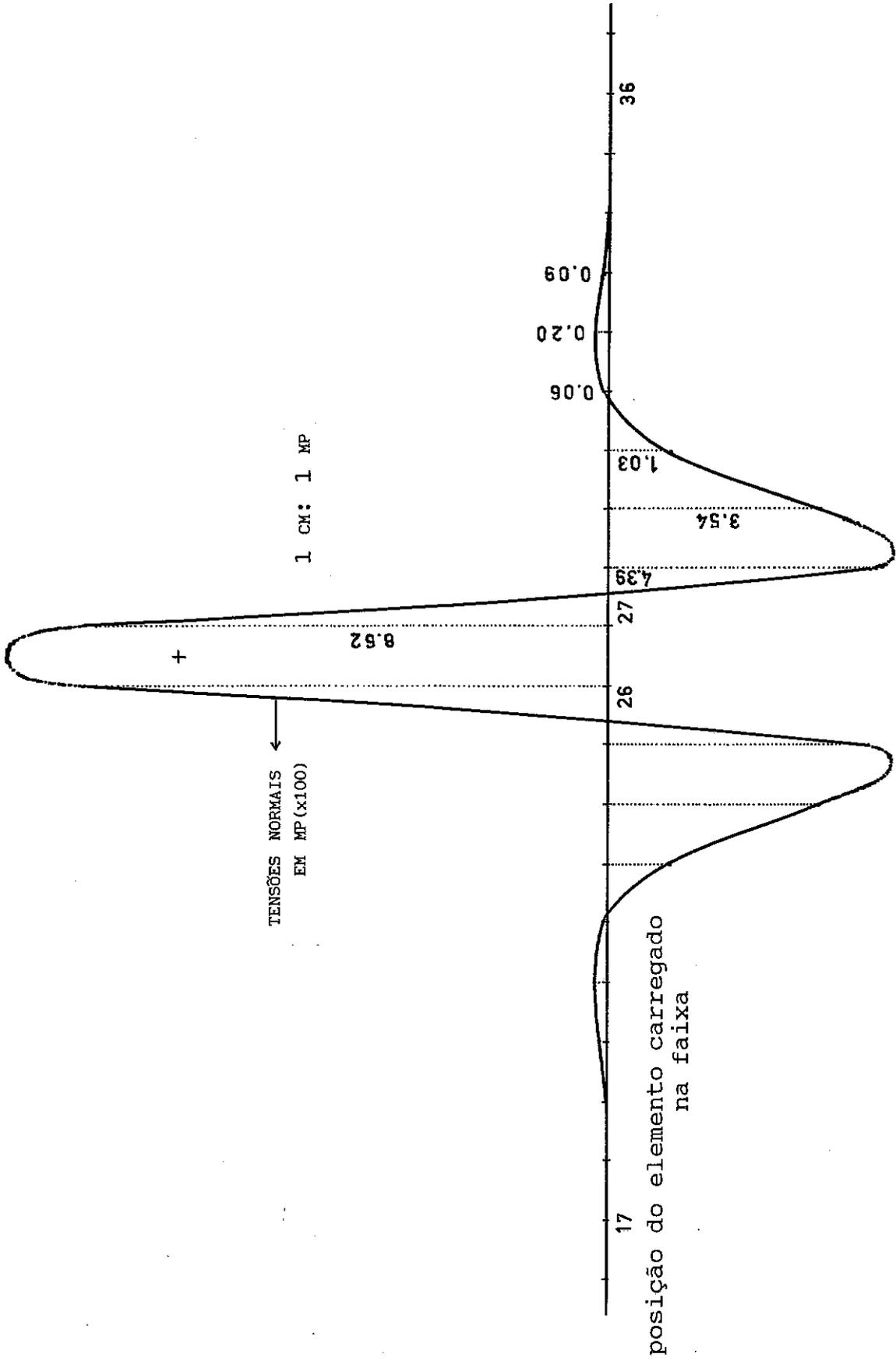


Fig. 31

L.I. longitudinal da faixa 10 bi-apoiada, ponto 1, seção z = 3m

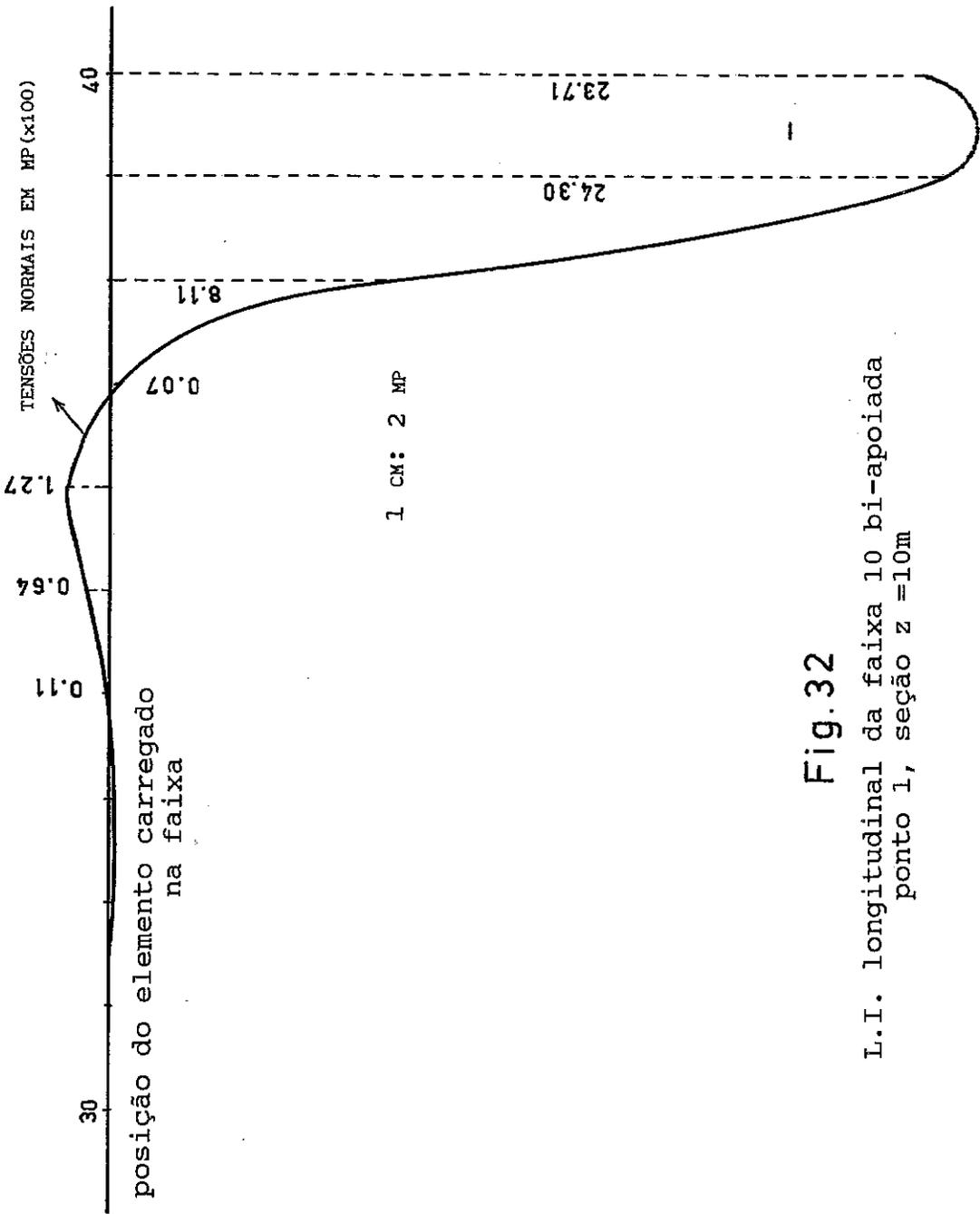


Fig. 32

L.I. longitudinal da faixa 10 bi-apoiada
ponto 1, seção z = 10m

Isto revela a característica localizada do fenômeno, mas em absoluto autoriza sua desconsideração. Em particular no caso de grandes cargas concentradas em pequenas superfícies, as tensões de tração que surgem em alguns pontos das seções próximas podem alcançar valores bem elevados, e eventualmente exigir o provimento de armaduras complementares ou adicionais, dependendo da região afetada. No caso da figura (31) por exemplo, se for imaginada uma carga de 100 KN aplicada na região vizinha à seção, na faixa 16, o valor da tensão de tração no ponto 1 será de aproximadamente 5,57 MP. O diagrama completo de tensões na seção tem a forma mostrada na figura (33), a partir da qual, considerando também o caso simétrico, é possível averiguar a necessidade de complementar as armaduras de tração nos trechos 5-6 e 2-3, e de verificar a possível ocorrência de inversões de sinal nas tensões calculadas pela teoria clássica, principalmente nas regiões 1-2 e 5-7, o que exigiria a adição de novas armaduras.

Com relação à interferência das condições de extremidade sobre a tensão em um ponto qualquer, verifica-se que ela se faz sentir apenas quando o mesmo está no trecho de comprimento $2,5a$ contado a partir do apoio, e que a parte alterada de sua linha de influência longitudinal tem comprimento máximo, contado a partir do apoio, igual a $2,5a$ menos sua distância ao mesmo.

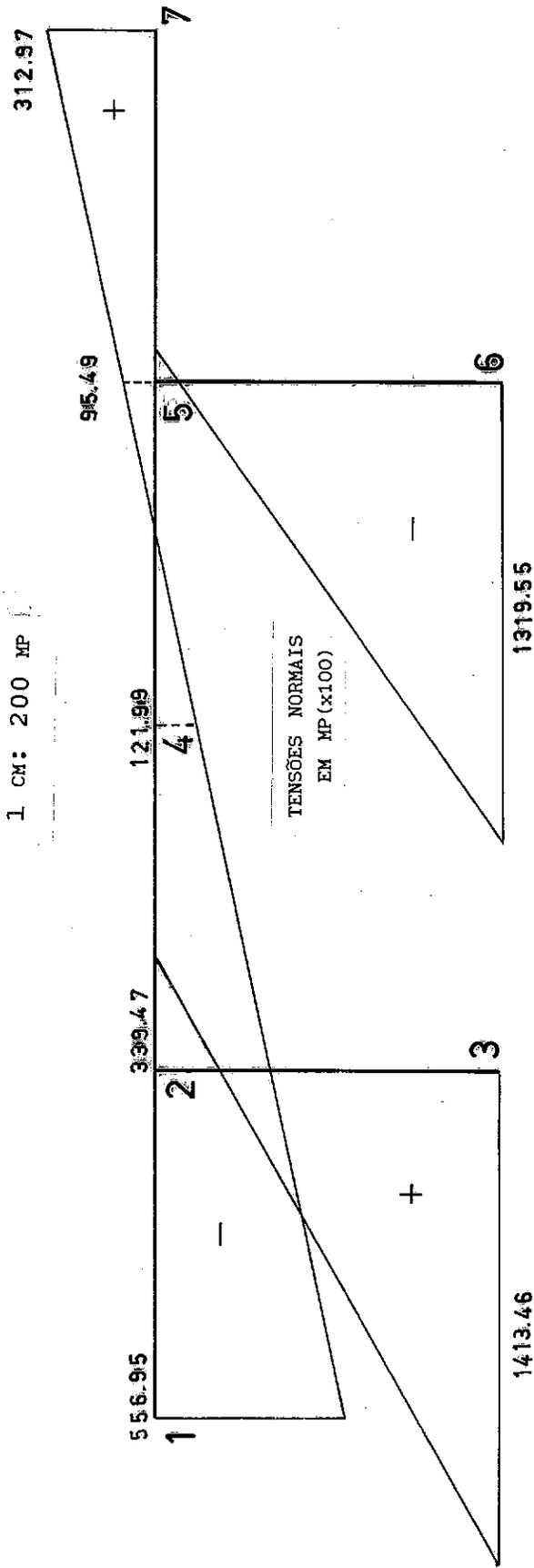


DIAGRAMA DA SEÇÃO Z=3M, PARA CARGA DE 100 KN NA FAIXA 16

Fig.33

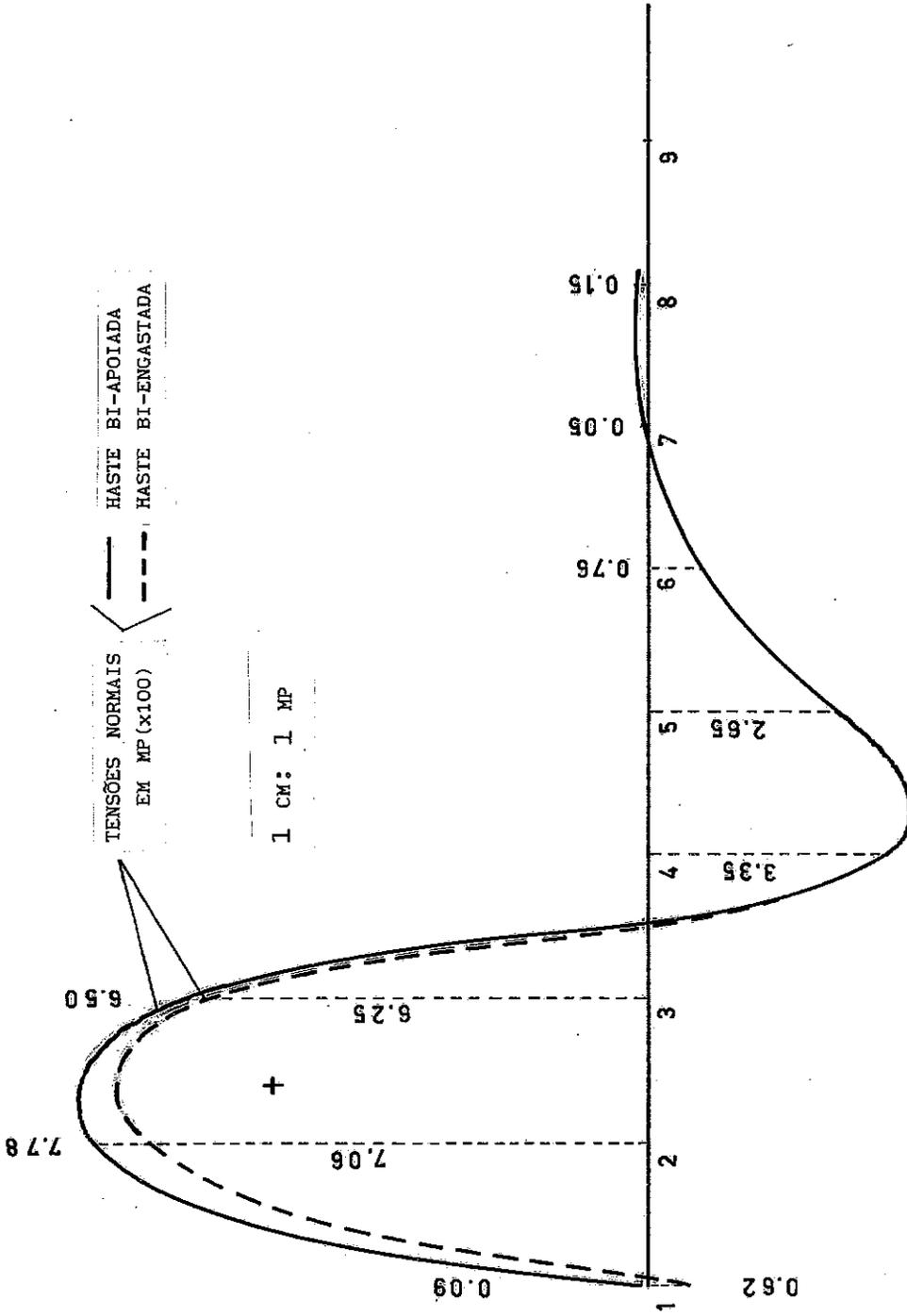


Fig. 34

L.I. LONGITUDINAIS DA FAIXA 9, PONTO 2, SEÇÃO Z=-9M

Na figura (34) se vê em traço cheio a linha de influência do ponto 2, seção $z = -9m$, faixa 9, para o caso bi-apoiada, e em tracejado o trecho alterado quando se muda para o caso bi-engastado. Para pontos de seções localizadas no intervalo definido por

$$2,5a \leq z \leq 7,5a \quad ,$$

as linhas de influência são simétricas em relação ao plano da seção, como já foi visto na figura (31), e independentes da combinação das condições de extremidade.

Um raciocínio simples permite chegar à segunda condição apresentada no Capítulo I para caracterizar uma Haste Curta de Paredes Delgadas, para a qual não é apresentada justificativa na literatura corrente. A idéia é, partindo de um valor grande de N e fazendo-o decrescer, considerar-se a haste como curta a partir do valor para o qual se iniciar a superposição entre os alcances da influência dos apoios e do carregamento elementar colocado em posição qualquer. Como para um apoio o alcance chega a $2,5a$ e para uma carga, considerando-se os dois lados perfaz $5a$, o limite procurado fica estabelecido em $N = 10$, que ocorre para uma haste bi-engastada. Também se constata a condição limite desse valor, procedendo ao estudo da influência de N na tensão gerada em um ponto qualquer escolhido, com posição relativa aos extremos fixada, mantendo-se forma e valor do carregamento, e fazendo-se a variação daquele parâmetro. Ao se tomar como exemplo o ponto 3 da seção $z = -4 / 10.N.a$, carregando-se

integralmente a faixa 1 com a carga padrão "q", obteve-se o diagrama da figura (35), onde o maior "valor máximo definido" ocorre para $N = 10$. A partir daí, para N crescente, a função é oscilante amortecida e tende a extinguir-se rapidamente, enquanto para N decrescente aparece um ramo de curva com característica diversa, que atesta a mudança no comportamento da haste. Para esse ramo, Kollbrunner [17] estabelece como limite de aplicação o valor $N = 5$, a partir do qual as simplificações feitas começam a acarretar erros comprometedores no cálculo das tensões.

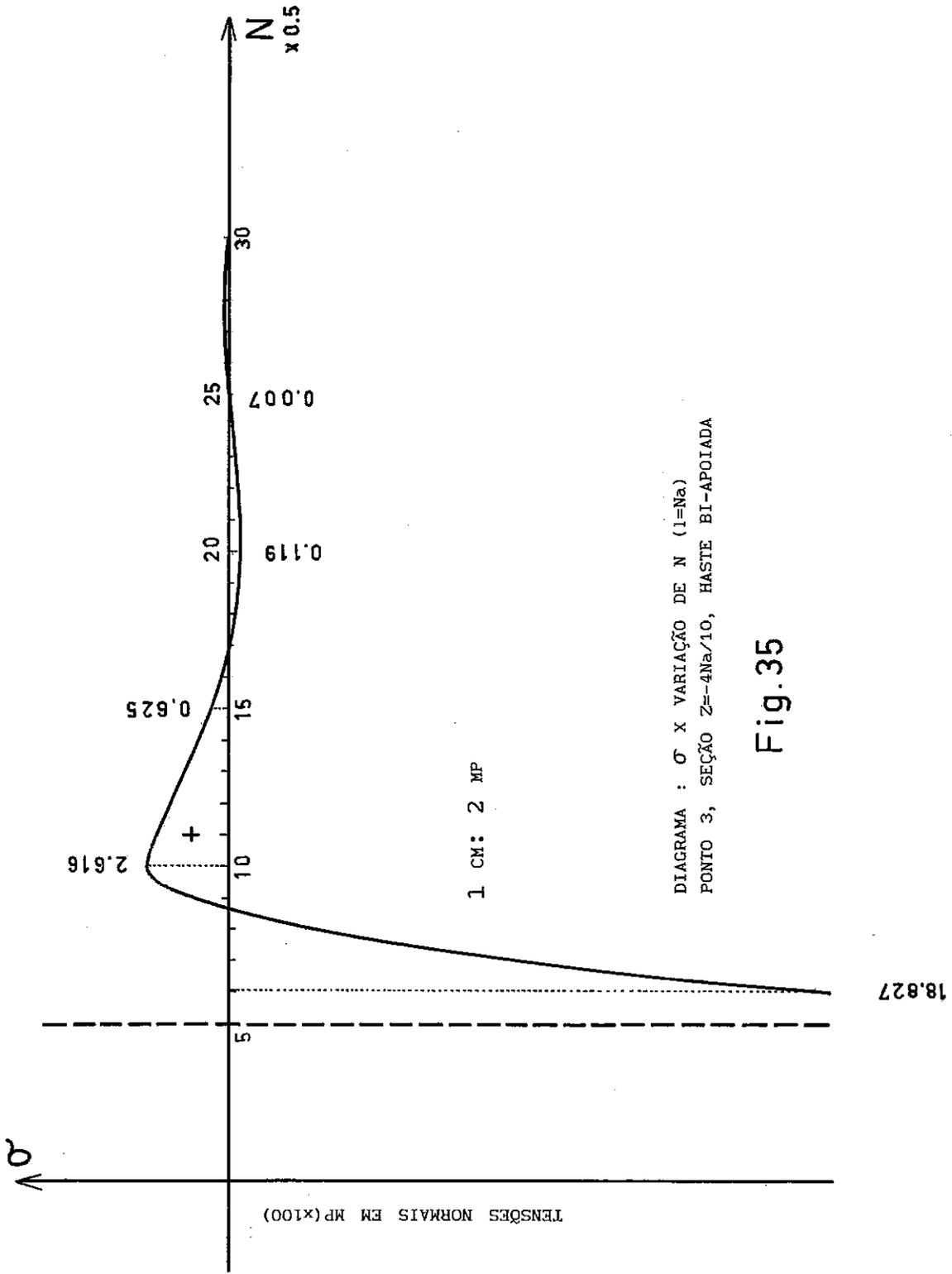
A relação entre as espessuras t_1 e t_2 vistas na figura (13), é dada na prática pelo quociente entre os parâmetros E_2 e E_1 , conforme a definição feita no Anexo A. O estudo da influência da variação desse número sobre a tensão normal calculada em um determinado ponto, é feito através da análise de gráficos como os que são vistos nas figuras (36) a (39), que se referem ao ponto 3 da seção $z = -8m$ da haste bi-apoiada, usando carregamento padrão em toda a faixa 1. Pode-se ver que a tensão tende a crescer exageradamente quando a relação E_2/E_1 sai de certos limites. Trabalhando com o conjunto de todos os resultados gerados, foi possível definir o intervalo

$$0,7 \leq E_2/E_1 \leq 1,6 \quad ,$$

como o mais recomendável para o caso, respeitada a condição de a haste caracterizar-se como de paredes delgadas. Assim, torna-se esse um item de importância, a

ser observado em projetos com seção transversal do tipo aqui considerado.

Outra averiguação feita referiu-se à variação das tensões em função da relação entre as dimensões l_2 e l_1 da figura (13), ou seja entre os coeficientes k_2 e k_1 . Como exemplo, partindo da haste básica bi-apoiada, adotando $E_1=E_2=10$, mantendo os demais parâmetros e carregando a faixa 1 com a carga padrão, obtiveram-se os gráficos das figuras (40) e (41) para o ponto 6 da seção $z = 8m$. No primeiro fixou-se $k_2 = 1$ e fez-se k_1 variar de 2,5 a 0,5 com decrementos de 0,25, de modo que k_2/k_1 ficou entre os limites 0,4 e 2,0. No segundo tomou-se $k_1 = 1$, enquanto k_2 ia de 0,25 a 2,0 com incrementos de 0,25, fazendo k_2/k_1 variar nesse mesmo intervalo. Estudando os diagramas desse tipo para as possíveis situações, se conclui que as tensões tendem a crescer rapidamente quando a relação k_2/k_1 toma valores inferiores a 0,85. Assim se faz a recomendação de que, para projetos em que isto ocorra, a ponte seja analisada como Haste Curta de Paredes Delgadas para obtenção das tensões normais ora pesquisadas, possibilitando a avaliação quanto à importância de sua consideração.



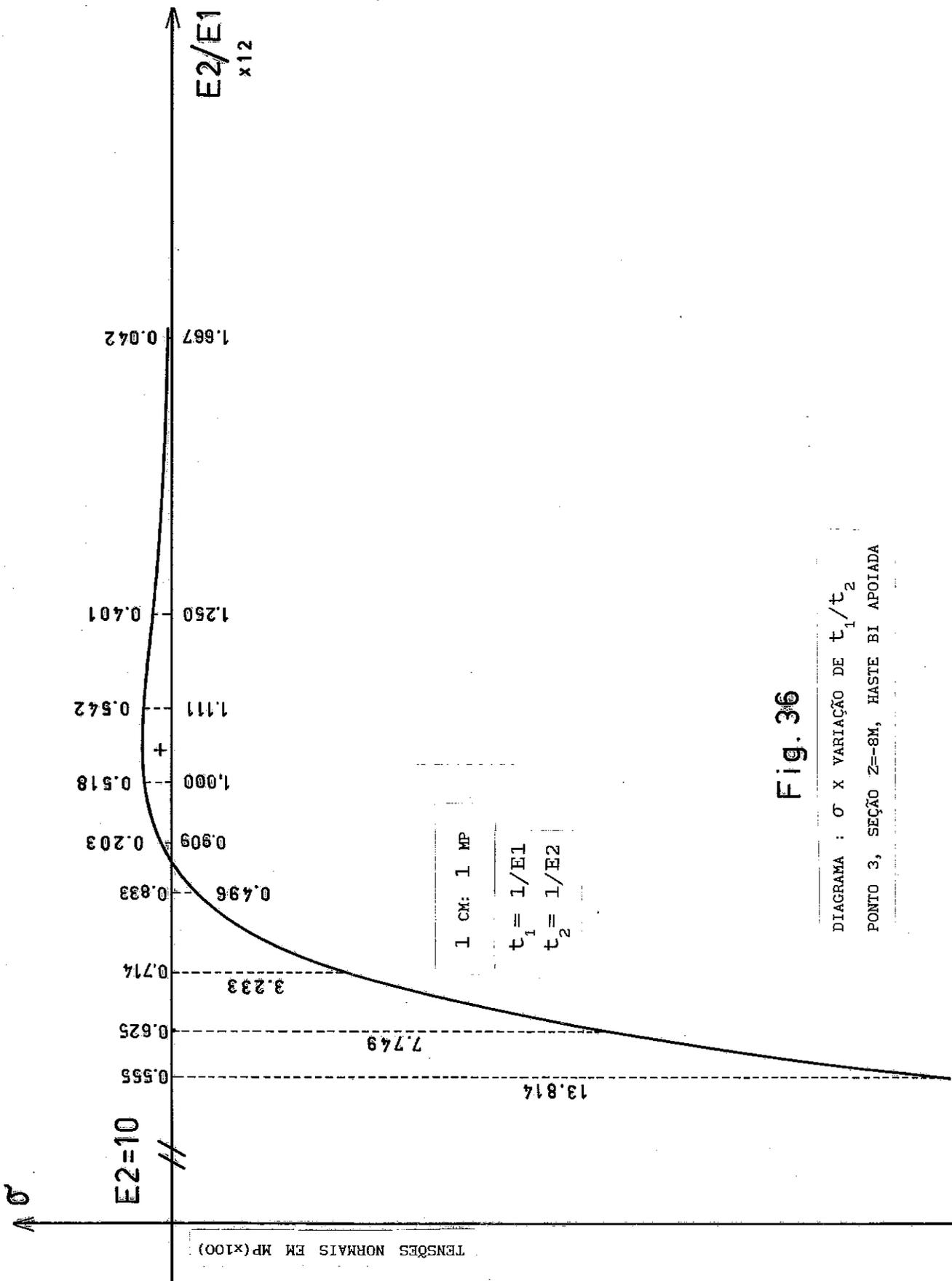


Fig. 36

DIAGRAMA : σ X VARIAÇÃO DE t_1/t_2
 PONTO 3, SEÇÃO 2--8M, HASTE BI APOIADA

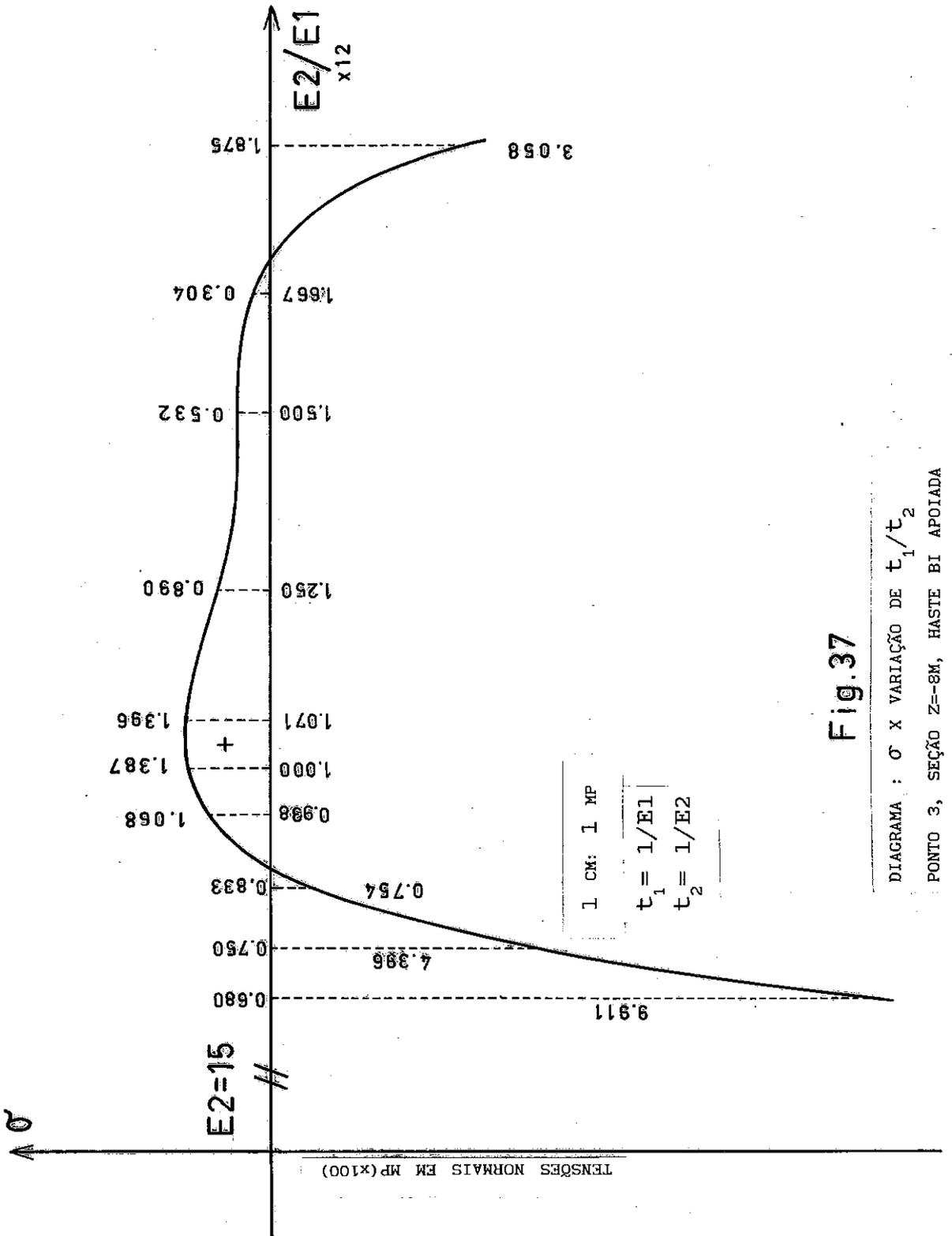


Fig.37

DIAGRAMA : σ X VARIAÇÃO DE t_1/t_2
 PONTO 3, SEÇÃO Z--8M, HASTE BI APOIADA

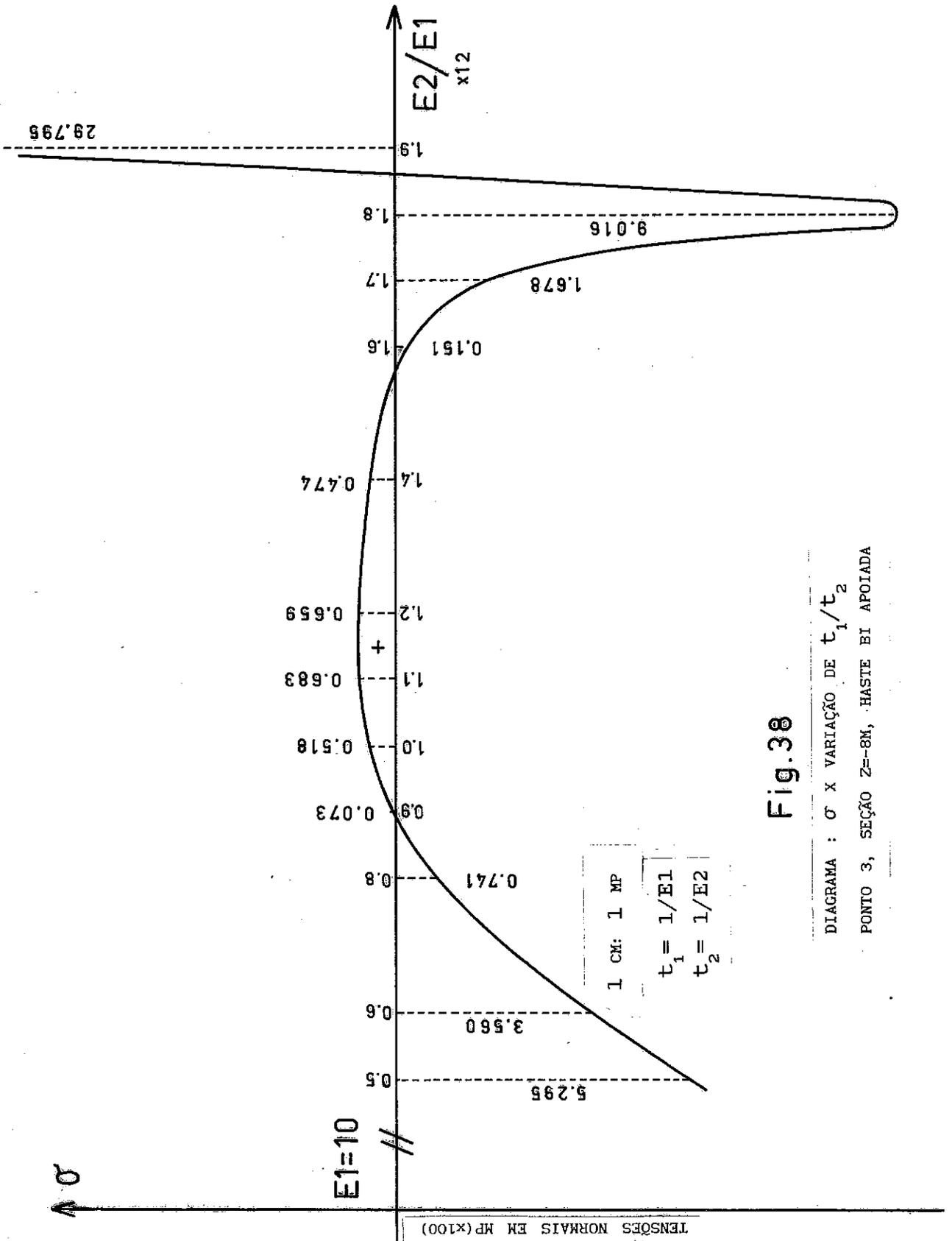
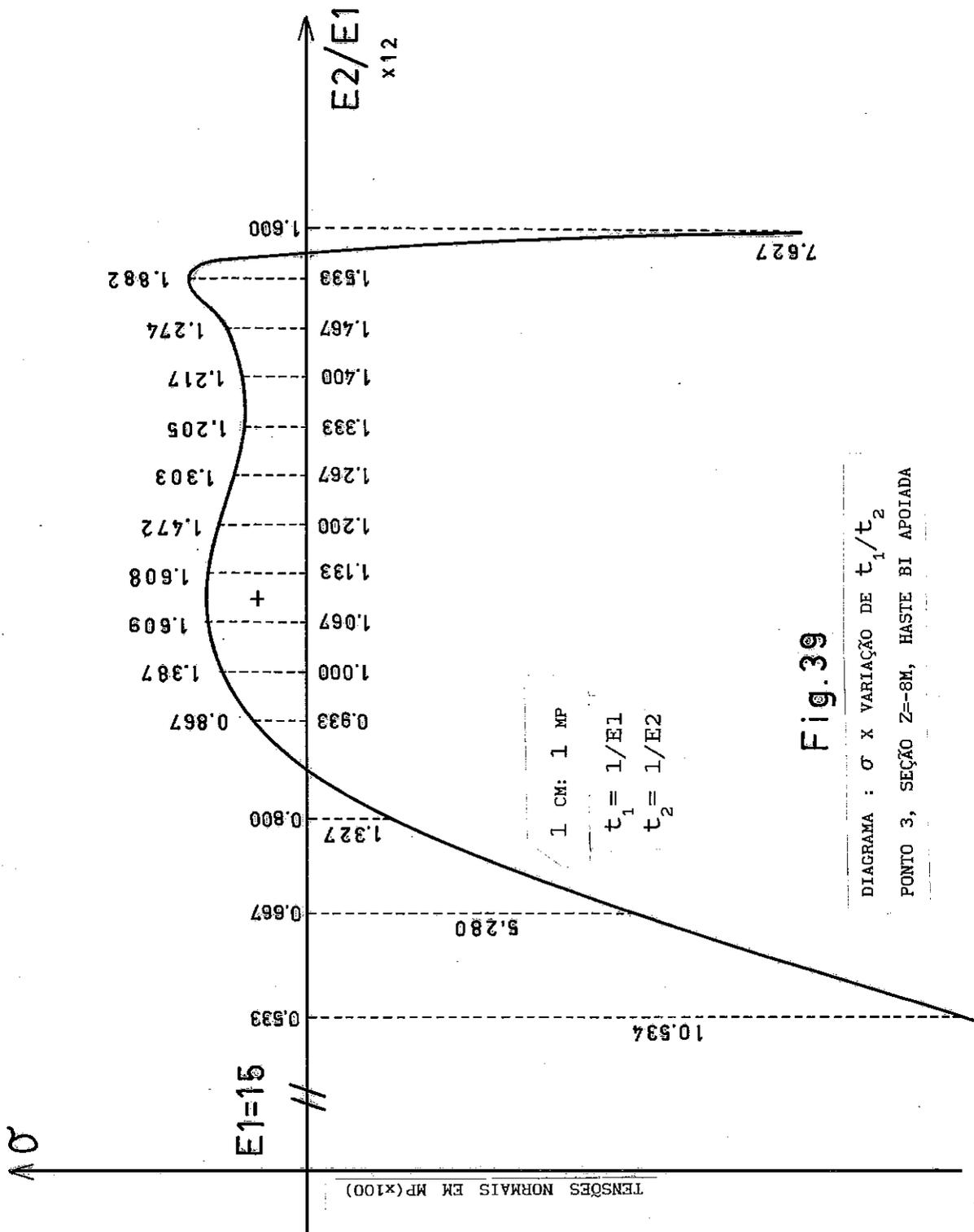


Fig. 38

DIAGRAMA : σ X VARIAÇÃO DE t_1/t_2
 PONTO 3, SEÇÃO Z=-8M, HASTE BI APOIADA



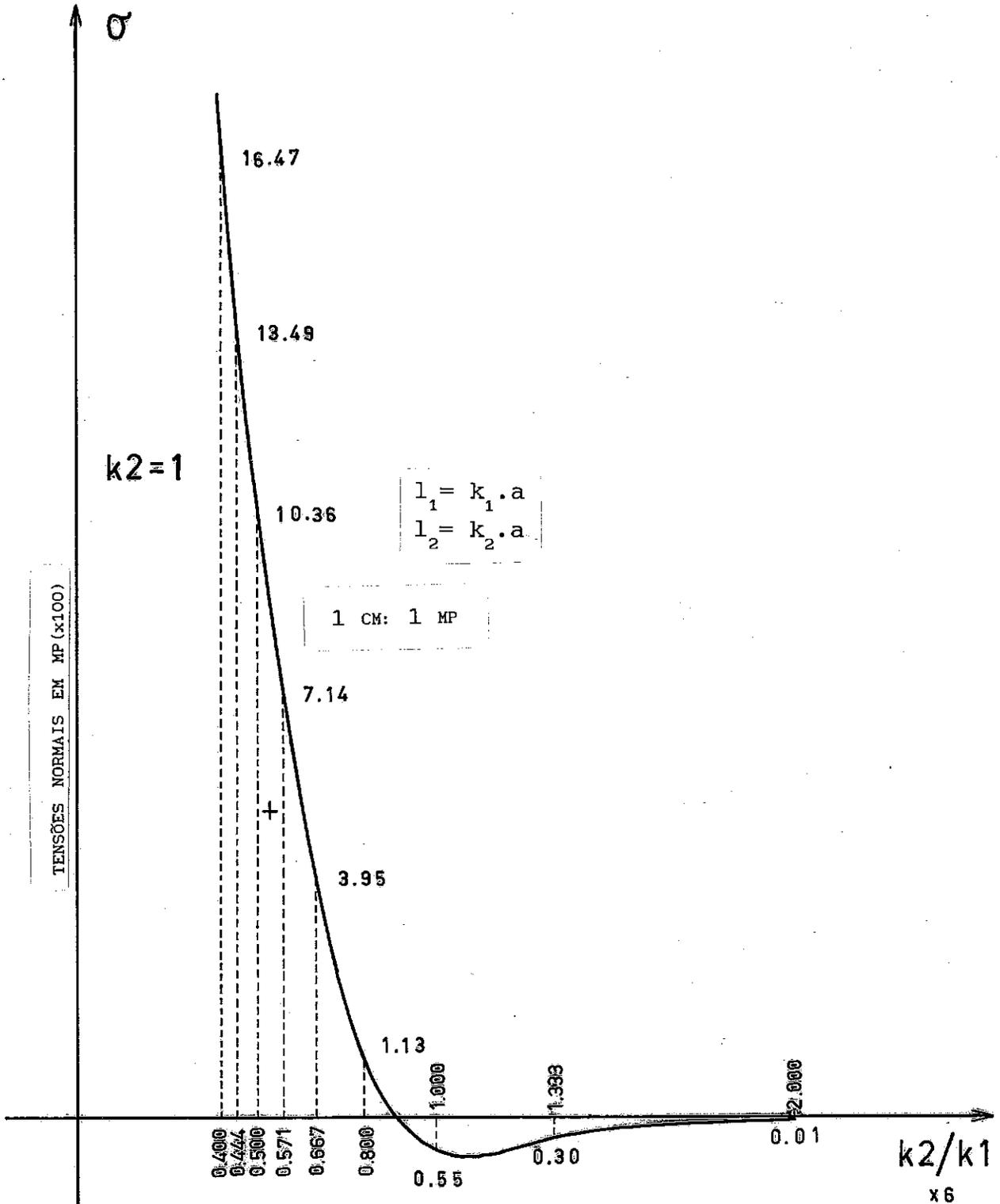


Fig.40

DIAGRAMA : σ X VARIAÇÃO DE l_2/l_1
 PONTO 6, SEÇÃO Z=8M, HASTE BI-APOIADA

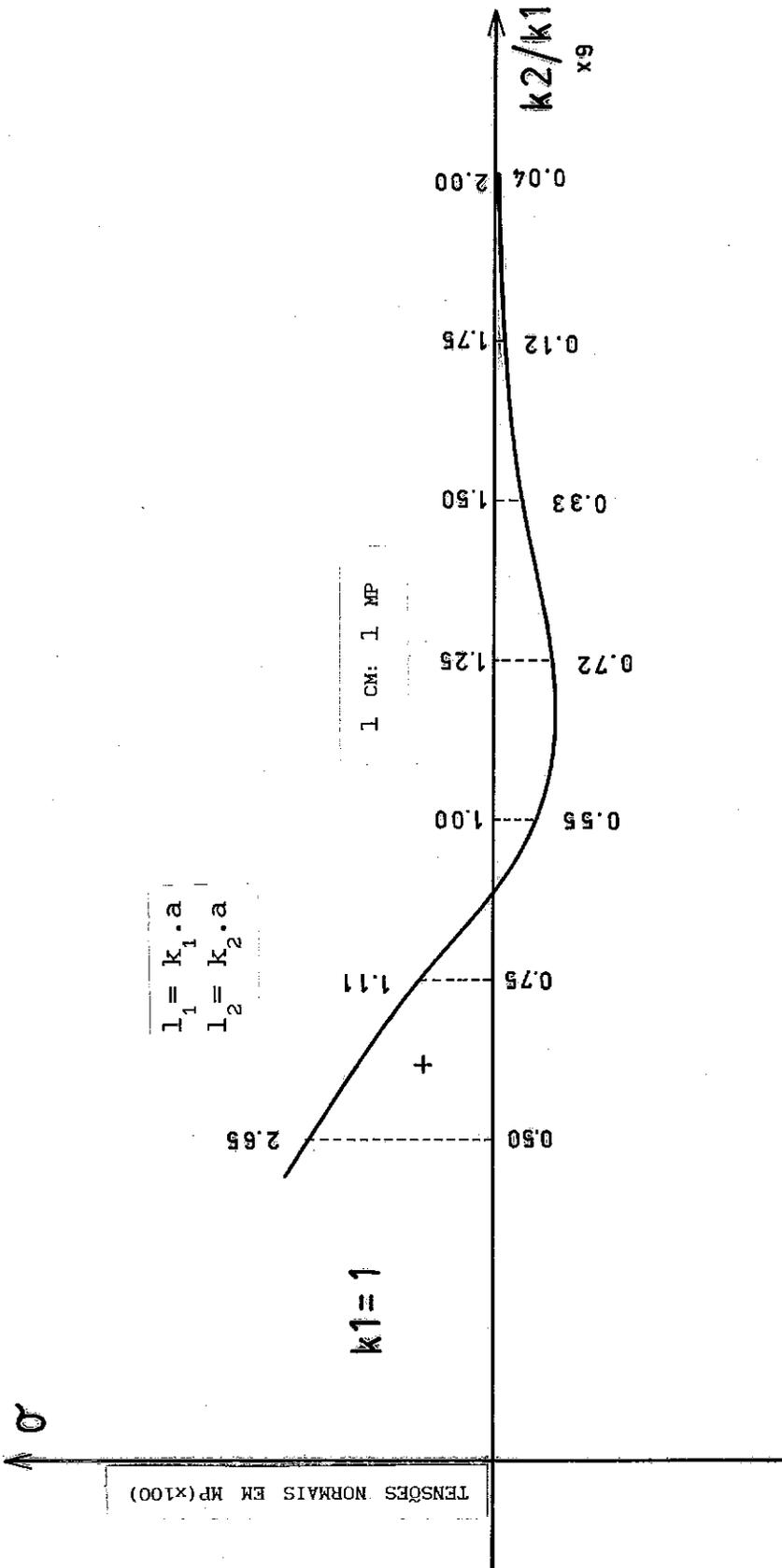


Fig. 41

DIAGRAMA : σ X VARIAÇÃO DE l_2/l_1
 PONTO 6, SEÇÃO Z=8M, HASTE BI-APOIADA

V - Bibliografia

- [1] SPIEGEL,M.R.,*Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*,
Mc Grow Hill do Brasil, 1973.
- [2] ROARK,R.J. and YOUNG,W.C., *Formulas for Stress and Strain*, Tokio, Mc Grow Hill Kogakusha LTDA, fifth edition, 1975.
- [3] SOKOLNIKOFF,I.S.,*Advanced Calculus*, New York, Mc Grow Hill Book Company Inc, 1939.
- [4] KAPLAN,W. and LEVIS,D.J.,*Calculus and Linear Algebra*, New York, John Wiley & Sons Inc, 1971.
- [5] DEMIDOVITCH,B. et MARON,I.,*Elements de Calcul Numerique*, Moscou, Traduction Française, Editions Mir, 1973.
- [6] STEPHENSON,G.,*Introdução a Matrizes, Conjuntos e Grupos*, São Paulo, Editora Edgard Blücher LTDA, 1975.
- [7] KREIDER,D.L., KÜLLER,R.G. and OSTBERG,D.R., *Equações Diferenciais*, São Paulo, Editora Edgard Blücher LTDA, 1972.
- [8] TIMOSHENKO,S.P. and GOODIER,J.N.,*Teoria da Elasticidade*,Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois,1980.
- [9] LOVE,A.E.H.,*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, New York, Dover, republicação da edição de 1944.
- [10] TIMOSHENKO,S.P. and WOINOWSKY, *Theory of Plates and Shells*, New York, Mc Grow Hill, 1959.

- [11] SANTOS, S.M.G., *Estudo das Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta*, Rio de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica, 1967.
- [12] MEGSON, T.H.G., *Linear Analysis of Thin Walled Elastic Structures*, Surrey University Press, 1974.
- [13] KOSCIA, K.Z., *Thin Walled Beams*, London, Crosby Lockwood & Son LTD, 1967.
- [14] DJURIC, M., *Theorie des Langen Prismatischen Falterwerks*, Beogradu, Zbornik Gradjevinskog Fakulteta, 1953.
- [15] VLASSOV, B.Z., *Pieces Longues en Voiles Minces*, Paris, Editions Eyrolles, 1962.
- [16] KOLLBRUNNER, C.F., *Dünnwandige Stäbe*, Berlin, Springer Verlag, 1972.
- [17] KOLLBRUNNER, C.F. und HAJDIN, N., *Dünnwandige Stäbe*, Berlin, Springer Verlag, band 1 und band 2, 1975.
- [18] KOLLBRUNNER, C.F., HAJDIN, N. und KRAJEINOVIC, D., *Matrix Analysis of Thinwalled Structures*, Zürich, Inst. für Bauwissenschaftliche Forschung, 1969.
- [19] GUIMARÃES, A.M. e LAGES, N.A.C., *Algoritmos e Estruturas de Dados*, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1985.
- [20] TURBO PASCAL, *Owner's Handbook*, U.S.A., Borland International, 1987.

VI - Anexos

Anexo A: O Programa Automático

O Programa Automático cuja listagem se encontra neste Anexo, tem como objetivo principal obter, para um ponto qualquer de uma seção escolhida em uma ponte curta do tipo em estudo, uma superfície de influência das tensões normais oriundas das deformações das seções transversais em seus próprios planos. Mediante opção êle pode gerar o conjunto de superfícies para todos os pontos de uma seção escolhida, bem como o conjunto global de superfícies para toda a ponte, adotando um espaçamento constante entre as seções.

Como extensão pode-se obter, fazendo uso das superfícies geradas, o valor da tensão em um ponto qualquer, ou o diagrama desta em uma seção escolhida, para um carregamento real atuante sobre o tabuleiro, constituído de cargas distribuídas e/ou concentradas.

O programa foi desenvolvido em linguagem Turbo Pascal, para uso em micro-computadores compatíveis com o IBM-PC que disponham de um coprocessador 8087. Não se trata de um programa para projeto, uma vez que objetivou uma análise específica em determinado tipo estrutural quando sujeito a um caso particular de solicitação.

Os dados de entrada, bem como as opções de operação, são por êle solicitados oportunamente, podendo

também serem emitidos pedidos de confirmação ou correção dos mesmos.

Dados e Opções :

A - Dimensão característica da seção (metros).

K1 - Define a semi-distância entre as nervuras, em função de A.

K2 - Define a largura das abas em função de A.

E1 - Define a espessura " t_1 " da mesa ($t_1=1/E1$).

E2 - Define a espessura " t_2 " das nervuras ($t_2=1/E2$).

N - Define o comprimento da haste como múltiplo de A.

B - Define as condições de extremidade da haste

B=1 → Bi-apoiada

B=2 → Mono-engastada (à direita)

B=3 → Mono-engastada (à esquerda)

B=4 → Bi-engastada

M - Modo de operação

M=1 → Calcular a tensão em pontos isolados, para um carregamento dado.

NP - Número de pontos

Z,X,Y - Coordenadas dos pontos

Definição do carregamento :

NC - Número de cargas concentradas

L,CO,CC - Linha, coluna (figura 42) e valor das cargas

NR - Número de regiões com carregamento distribuído

LI,LF - Linhas inicial e final de cada região (figura 42)

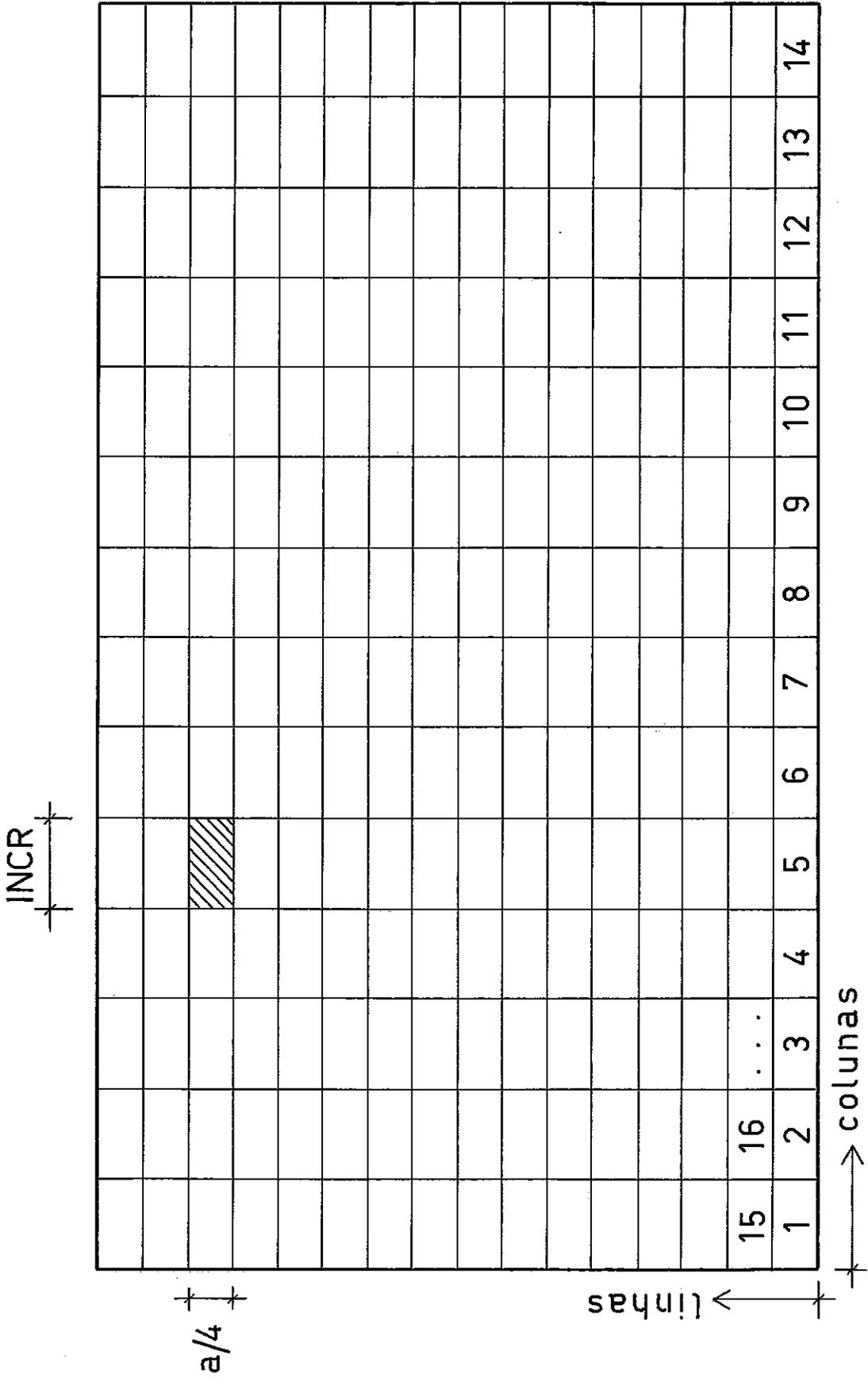


Fig.42

CI,CF - Colunas inicial e final de cada região
(figura 42)

NEL - Número de elementos não carregados na região.

EL1,...,ELN - Numeração dos mesmos (figura 42),
sem exigência de ordenação.

M=2 → Obter o diagrama de tensões em seções isoladas,
para um carregamento dado.

NS - Número de seções

Z - Coordenada longitudinal de cada uma.

O carregamento é definido como no caso anterior.

M=3 → Obter superfícies de influência para pontos
isolados

NP - Número de pontos

Z,X,Y - Coordenadas dos pontos

M=4 → Obter superfícies de influência para seções
isoladas

NS - Número de seções

Z - Coordenadas longitudinais das seções

M=5 → Obter superfícies de influência generalizadas

I - Indicador do intervalo (a/I) entre as seções.

INCR - Dimensão longitudinal do elemento de área a ser
utilizado na geração das superfícies de influência.

Não se desejando utilizar o INCR padrão, fornece-se
um valor inteiro para a variável PASSO, com o qual
é calculado

$INCR = a/PASSO.$

Segue-se a listagem do programa.

Program Doutor;

```
{ $S+ }
{ $I+ }
{ $N+ }
{ $M 65520,0,655360 }
```

Uses Crt;

Label

```
170,180,190,200,240,250,260,270,271,280,290,300,390,400,450,
455,460,464,465,470,475,480,481,482,483,484,485,486,487,488,
490,495,496,500,560,570,580,590,600,700,800;
```

Const

```
branco:string[4]='    ';
espaco:string[2]='  ';
```

Type

```
carreg = array[1..84]of real;
coef = array[1..5]of extended;
disco = file of extended;
```

Var

```
Op:integer;
Aux:char;
Arq:text;
Dsk:disco;
Dsk1:disco;
Vet,Veti,Vetf,Vetor:longint;
Caso:string;
A,k1,k2,k3,e1,e2:real
N,NN,b,m:integer;
Nr:real;
kf,f,cy,xi,yi,dy,dw,wi:real;
A54, kb40, kb41, kb42, kb43:real;
a441,a442,a443,a444,a445,a446:real;
k44a,k44b,k41c,k11d,k44h:real;
ii,jj,ll,mm:integer;
es,d,md:real;
k40,ka,k40t,kb,cfl:real;
i,icz,fx:integer;
nn1,nn2,nn3,incr:real;
kl,lb:extended;
a1,a2,a3,a4:extended;
cz,lbz,aa1,aa2:extended;
f111,f211,f311,f411,f511,ipl1:extended;
pti,ptf:integer;
lin,col,k4:integer;
ns,cs,np,cp,pt:integer;
xl,yl:real;
sz:extended;
cpr,dif:real;
sz1,sz2:extended;
vsc:array[1..31]of real;
```

```

vc:carreg;
vkw:array[1..7]of extended;
vkwaux:array[1..7]of extended;
vxl:array[1..7]of real;
msz:extended;
mszaux:extended;
szpt:array[1..35]of extended;
ele,eme,ene,elezero,emezero,enezero:coef;
150l,15l,m50l,m5l,n50l,n5l:extended;
Function hsin(x:extended):extended;
{calcula seno hiperbolico}
begin
  hsin:=(exp(x)-exp(-x))/2;
end;

function hcos(x:extended):extended;
{calcula cosseno hiperbolico}
begin
  hcos:=(exp(x)+exp(-x))/2;
end;

Procedure pa44(a,b:real;c,d:extended;var f:real);
{calcula coeficiente do termo com derivada quarta}
{na equacao diferencial}
begin
  f:=a*b/3*(c*c+c*d+d*d);
end;

Procedure pka(a,b:real;var f:real;c,d:integer);
{calcula grandeza integrante do termo independente}
{da equacao diferencial}
begin
  f:=-a+b*(c-2*d)/8;
end;

Procedure pn5l(a,b,c:real;d:extended;var f:extended);
{solucao particular para a condicao Y=0}
var
  arg1,arg2:extended;
begin
  arg1:=d*(a-b);
  arg2:=d*(a-c);
  f:=-hcos(arg2)*cos(arg2)-hcos(arg1)*cos(arg1);
end;

Procedure pm5l(a,b,c:real;d:extended;var f:extended);
{solucao particular para a condicao Y'=0}
var
  arg1,arg2:extended;
begin
  arg1:=d*(a-b);
  arg2:=d*(a-c);
  f:=-hcos(arg2)*sin(arg2)+hsin(arg2)*cos(arg2);
  f:=f+hcos(arg1)*sin(arg1)-hsin(arg1)*cos(arg1);
end;

```

```

Procedure pl51(a,b,c:real;d:extended;var f:extended);
{solucao particular para a condicao Y''=0}
var
  arg1,arg2:extended;
begin
  arg1:=d*(a-b);
  arg2:=d*(a-c);
  f:=2*(hsin(arg1)*sin(arg1)-hsin(arg2)*sin(arg2));
end;

```

```

Procedure plmn5(a:extended;b,c:real;var f:extended);
{solucao particular com coeficiente numerico}
begin
  f:=a*b/(4*c);
end;

```

```

Procedure pn1234(a:real;b:extended;var f:coef);
{termos da solucao geral para Y=0}
var
  arg:extended;
begin
  arg:=a*b;
  f[1]:=hcos(arg)*cos(arg);
  f[2:]=(hcos(arg)*sin(arg)+hsin(arg)*cos(arg))/2;
  f[3:]=(hsin(arg)*sin(arg))/2;
  f[4:]=(hcos(arg)*sin(arg)-hsin(arg)*cos(arg))/4;
end;

```

```

Procedure Pm1234(a:real;b:extended;var f:coef);
{termos da solucao geral para Y'=0}
var
  arg:extended;
begin
  arg:=a*b;
  f[1:]=(hsin(arg)*cos(arg)-hcos(arg)*sin(arg));
  f[2]:=hcos(arg)*cos(arg);
  f[3:]=(hsin(arg)*cos(arg)+sin(arg)*hcos(arg))/2;
  f[4:]=(hsin(arg)*sin(arg))/2;
end;

```

```

Procedure pl1234(a:real;b:extended;var f:coef);
{termos da solucao geral para Y''=0}
var
  arg:extended;
begin
  arg:=a*b;
  f[1]:=-2*hsin(arg)*sin(arg);
  f[2]:=-hcos(arg)*sin(arg)+cos(arg)*hsin(arg);
  f[3]:=cos(arg)*hcos(arg);
  f[4:]=(hsin(arg)*cos(arg)+sin(arg)*hcos(arg))/2;
end;

```

```

Procedure a1234(a,b,c,d:coef;var a1,a2,a3,a4:extended);
{calcula coeficientes da solucao completa}
{invertendo a matriz por particao}
var
  da11,dk:extended;
  ib:array[1..4,1..4]of extended;
  axa:array[1..4]of extended;
  ik:array[1..4]of extended;
  ia:array[1..4]of extended;
  aux1,aux2:array[1..4]of extended;
begin
  da11:=1.0/(a[1]*b[2]-b[1]*a[2]);
  ia[1]:=b[2];
  ia[2]:=-a[2];
  ia[3]:=-b[1];
  ia[4]:=a[1];
  axa[1]:=c[1]*b[2]-c[2]*b[1];
  axa[2]:=-c[1]*a[2]+c[2]*a[1];
  axa[3]:=d[1]*b[2]-d[2]*b[1];
  axa[4]:=-d[1]*a[2]+d[2]*a[1];
  aux1[1]:=axa[1]*a[3]+axa[2]*b[3];
  aux1[2]:=axa[1]*a[4]+axa[2]*b[4];
  aux1[3]:=axa[3]*a[3]+axa[4]*b[3];
  aux1[4]:=axa[3]*a[4]+axa[4]*b[4];
  aux2[1]:=c[3]-da11*aux1[1];
  aux2[2]:=c[4]-da11*aux1[2];
  aux2[3]:=d[3]-da11*aux1[3];
  aux2[4]:=d[4]-da11*aux1[4];
  dk:=1/(aux2[1]*aux2[4]-aux2[3]*aux2[2]);
  ik[1]:=-aux2[4];
  ik[2]:=-aux2[2];
  ik[3]:=-aux2[3];
  ik[4]:=aux2[1];
  aux1[1]:=b[2]*a[3]-a[2]*b[3];
  aux1[2]:=b[2]*a[4]-a[2]*b[4];
  aux1[3]:=-b[1]*a[3]+a[1]*b[3];
  aux1[4]:=-b[1]*a[4]+a[1]*b[4];
  aux2[1]:=aux1[1]*ik[1]+aux1[2]*ik[3];
  aux2[2]:=aux1[1]*ik[2]+aux1[2]*ik[4];
  aux2[3]:=aux1[3]*ik[1]+aux1[4]*ik[3];
  aux2[4]:=aux1[3]*ik[2]+aux1[4]*ik[4];
  ib[1,3]:=-aux2[1]*da11*dk;
  ib[1,4]:=-aux2[2]*da11*dk;
  ib[2,3]:=-aux2[3]*da11*dk;
  ib[2,4]:=-aux2[4]*da11*dk;
  aux1[1]:=aux2[1]*c[1]+aux2[2]*d[1];
  aux1[2]:=aux2[1]*c[2]+aux2[2]*d[2];
  aux1[3]:=aux2[3]*c[1]+aux2[4]*d[1];
  aux1[4]:=aux2[3]*c[2]+aux2[4]*d[2];
  aux2[1]:=aux1[1]*b[2]-aux1[2]*b[1];
  aux2[2]:=-aux1[1]*a[2]+aux1[2]*a[1];
  aux2[3]:=aux1[3]*b[2]-aux1[4]*b[1];

```

```

aux2[4]:=-aux1[3]*a[2]+aux1[4]*a[1];
ib[1,1]:=da11*b[2]+da11*da11*dk*aux2[1];
ib[1,2]:=-da11*a[2]+da11*da11*dk*aux2[2];
ib[2,1]:=-da11*b[1]+da11*da11*dk*aux2[3];
ib[2,2]:=da11*a[1]+da11*da11*dk*aux2[4];
ib[3,1]:=-dk*da11*(ik[1]*axa[1]+ik[2]*axa[3]);
ib[3,2]:=-dk*da11*(ik[1]*axa[2]+ik[2]*axa[4]);
ib[4,1]:=-dk*da11*(ik[3]*axa[1]+ik[4]*axa[3]);
ib[4,2]:=-dk*da11*(ik[3]*axa[2]+ik[4]*axa[4]);
ib[3,3]:=dk*ik[1];
ib[3,4]:=dk*ik[2];
ib[4,3]:=dk*ik[3];
ib[4,4]:=dk*ik[4];
a1:=- (ib[1,1]*a[5]+ib[1,2]*b[5]+ib[1,3]*c[5]+ib[1,4]*d[5]);
a2:=- (ib[2,1]*a[5]+ib[2,2]*b[5]+ib[2,3]*c[5]+ib[2,4]*d[5]);
a3:=- (ib[3,1]*a[5]+ib[3,2]*b[5]+ib[3,3]*c[5]+ib[3,4]*d[5]);
a4:=- (ib[4,1]*a[5]+ib[4,2]*b[5]+ib[4,3]*c[5]+ib[4,4]*d[5]);
end;

```

```

Procedure saida(var arq:text;var op:integer);
{endereca saida para equipamento desejado}
label
  10,20;
var
  aux:char;
begin
  writeln;
  writeln('Quer imprimir ? - S/N');
  aux:=readkey;
  if(upcase(aux)='S') then goto 20;
  op:=2;
  goto 10;
20: op:=1;
  repeat
    writeln;
    writeln('Quer imprimir (T)ela ou (I)mpressora ?');
    writeln('Aperte a tecla correspondente');
    aux:=readkey;
  until(upcase(aux)='T') or (upcase(aux)='I');
  case aux of
    'T','t':begin
      assign(arq,'con');
      rewrite(arq);
    end;
    'I','i':begin
      assign(arq,'prn');
      rewrite(arq);
    end;
  end;
end;
10: clrscr;
end;

```

```

Procedure Lct(var E:carreg);
{leitura do carregamento aplicado}
label
    5,9,10,20,25,30;
var
    a,b,c,d,f:integer;
    aux:char;
begin
    clrscr;
5:   writeln;
    writeln('Entre com os Dados do Carregamento Aplicado');
    writeln;
    writeln('Parte Concentrada');
    writeln('Numero de Cargas');
    a:=1;
    write('NC = ');
    readln(b);
    e[a]:=b;
    if b=0 then goto 9;
    writeln('Forneca L,CO,CC,nessa ordem,para cada carga');
    for c:=1 to b do
        begin
            write(' ');
            read(e[a+(c-1)*3+1]);
            write(' ');
            read(e[a+(c-1)*3+2]);
            write(' ');
            read(e[a+(c-1)*3+3]);
        end;
9:   writeln('Alguma Correcao a fazer ? - S/N');
    aux:=readkey;
    if(upcase(aux)='S')then goto 5;
10:  writeln;
    writeln('Parte Distribuida');
    writeln('Numero de Regioes');
    write('NR = ');
    readln(b);
    writeln;
    a:=2+trunc(e[1])*3;
    e[a]:=b;
    if b=0 then goto 25;
    writeln('Definicao das Regioes');
    for c:=1 to b do
        begin
            writeln('Informe pela ordem LI,LF,CI,CF,CD e NEL da
                    Regiao',c:3);
            write(' ');
            for d:=1 to 6 do
                begin
                    read(e[a+(c-1)*6+d]);
                    write(' ');
                end;
        end;

```

```

    d:=a+c*6;
    f:=trunc(e[d]);
    if f=0 then goto 20;
    writeln('Elementos Livres na Regiao');
    for d:=1 to f do
        begin
            write(' ');
            read(e[a+c*6+d]);
        end;
20:    a:=a+f;
        writeln;
    end;
25:    writeln('Alguma Correcao a fazer ? - S/N');
        aux:=readkey;
        if(upcase(aux)='S')then goto 10;
30:    clrscr;
    end;

```

```

Procedure Szp(var t:extended;v:carreg;var dk:disco;l,incr:real;
              p:integer);
{calculo da tensao normal total para o carregamento dado}
label
    10,20,30,40,50;
var
    a,b,c,d,e,g,i,j,k,n,x,xx,y:integer;
    f:real;
    tt:extended;
    m:extended;
    vetor:longint;
begin
    reset(dk);
    tt:=0;
    a:=1;
    b:=trunc(v[a]);
    if b=0 then goto 10;
    for c:=1 to b do
        begin
            d:=trunc(v[a+(c-1)*3+1]);
            e:=trunc(v[a+(c-1)*3+2]);
            f:=trunc(v[a+(c-1)*3+3]);
            vetor:=(d-1)*p+e-1;
            seek(dk,vetor);
            read(dk,m);
            f:=f/(0.25*incr*1*1);
            tt:=tt+f*m;
        end;
10:    a:=a+b*3+1;
        b:=trunc(v[a]);
        if b=0 then goto 50;
        for c:=1 to b do

```

```

begin
  d:=trunc(v[a+(c-1)*6+1]);
  e:=trunc(v[a+(c-1)*6+2]);
  d:=e-d+1;
  e:=trunc(v[a+(c-1)*6+3]);
  g:=trunc(v[a+(c-1)*6+4]);
  e:=g-e+1;
  g:=trunc(v[a+c*6]);
  xx:=0;
  for i:=1 to d do
    for j:=1 to e do
      begin
        k:=(i-1)*e+j;           {numeracao do elemento
                                na regioao}

        if g=0 then goto 20;
        for n:=1 to g do
          if k=trunc(v[a+c*6+n]) then xx:=1
            else xx:=xx;

        if xx<>0 then goto 30;
20:      f:=v[a+(c-1)*6+5];
        x:=trunc(v[a+(c-1)*6+3])+j-1;
        y:=trunc(v[a+(c-1)*6+1])+i-1;
        vetor:=(y-1)*p+x-1;
        seek(dk,vetor);
        read(dk,m);
        tt:=tt+f*m;
30:      xx:=0;
      end;
40:      a:=a+g;
      end;
50:      t:=tt;
      close(dk);
end;

```

```

{ Inicio do Programa Principal }

{ leitura dos dados genericos da secao }

begin
  assign(dsk,'B:superficies.sec');
    {O arquivo contera a cada passagem as superficies}
    {de influencia para todos os pontos de uma secao}
    {As tensoes nos sete pontos sao gravadas em
    {sequencia para cada posicao do carregamento}
  assign(dsk1,'B:cuperficie.pon');
    {O arquivo contera a cada vez a superficie de
    {influencia do ponto em estudo}
800:  clrscr;
      writeln;
      writeln;
      writeln('Entre com os dados gerais');
      writeln;
      write('A = ');
      readln(a);
      write('K1 = ');
      readln(k1);
      write('K2 = ');
      readln(k2);
      {Nao usar dizimas para valores de k1 e k2}
      write('E1 = ');
      readln(e1);
      write('E2 = ');
      readln(e2);
      write ('N = ');
      readln(n);
      Nr:=N/2;
700:  write('B = ');
      readln(b);
      if (b<1)or(b>4) then
        begin
          writeln('Codigo Condicao de Apoio Invalido - Informe
                  corretamente');

          writeln;
          goto 700;
        end;
      writeln;
      writeln('Alguma correcao a fazer ? - S/N');
      aux:=readkey;
      if(upcase(aux)='S')then goto 800;

      {Calculo dos Elementos Geometricos}

      e1:=1/e1;
      e2:=1/e2;
      kf:=2*((k1+k2)*e1+(1-e1/2)*e2);
      f:=kf*a*a;

```

```

cy:=(2*(k1+k2)*e1+e2*(1-e1/2)*(1-e1/2))/kf;
xi:=2/3*(k1+k2)*(k1+k2)*(k1+k2)*e1;
xi:=xi+2*k1*k1*e2*(1-e1/2);
yi:=2*(k1+k2)*e1*(1-cy)*(1-cy);
yi:=yi+e2/6*(1-e1/2)*(1-e1/2)*(1-e1/2);
yi:=yi+2*e2*(1-e1/2)*(cy-0.5*(1-e1/2))*(cy-0.5*(1-e1/2));
dy:=1-cy+k1*k1*e2/xi;
dw:=dy+cy-1;
wi:=e1*(k1+k2)*(k1+k2)*(k1+k2)*dw*dw;
wi:=wi+e2*k1*k1*(1-3*dw+3*dw*dw);
wi:=wi*2/3;

```

{Gera vetor das abscissas x(linha) dos pontos da secão}

```

pt:=0;
repeat
  pt:=pt+1;
  case pt of
    1:vx1[pt]:=0;
    2,3:vx1[pt]:=k2*a;
    4:vx1[pt]:=(k1+k2)*a;
    5,6:vx1[pt]:=(2*k1+k2)*a;
    7:vx1[pt]:=2*(k1+k2)*a;
  end;
until pt=7;

```

{Calculo dos parametros ligados a geometria}

```

a54:=-k1*a;
kb40:=e2*k1/(2*kf);
kb41:=e2*k1*k1/(2*xi);
kb42:=e2*k1*(1-3*cy)/(6*yi);
kb43:=e2*k1*k1*(3*dw-2)/(6*wi);
vkw[1]:=kb40-kb41*(k1+k2)+kb42*(1-cy)-kb43*dw*(k1+k2);
vkw[2]:=kb40-kb41*k1+kb42*(1-cy)-kb43*dw*k1;
vkw[3]:=kb40-kb41*k1-kb42*cy+kb43*(1-dw)*k1;
vkw[4]:=kb40+kb42*(1-cy);
vkw[5]:=kb40+kb41*k1+kb42*(1-cy)+kb43*dw*k1;
vkw[6]:=-k1+kb40+kb41*k1-kb42*cy-kb43*(1-dw)*k1;
vkw[7]:=kb40+kb41*(k1+k2)+kb42*(1-cy)+kb43*dw*(k1+k2);
vkwaux[1]:=vkw[1];
vkwaux[2]:=vkw[3];
vkwaux[3]:=vkw[2];
vkwaux[4]:=vkw[4];
vkwaux[5]:=vkw[6];
vkwaux[6]:=vkw[5];
vkwaux[7]:=vkw[7];
pa44(k2,e1,vkw[1],vkw[2],a441);
pa44(k1,e1,vkw[2],vkw[4],a442);
k3:=1;
pa44(k3,e2,vkw[2],vkw[3],a443);
pa44(k1,e1,vkw[4],vkw[5],a444);
pa44(k2,e1,vkw[5],vkw[7],a445);

```

```

pa44(k3,e2,vkw[5],vkw[6],a446);
k44a:=a441+a442+a443+a444+a445+a446;
k44b:=e1*e1*e1/(4*k1);
k41c:=-k44b;
k11d:=2*k44b;
k44h:=k44b/2;
ii:=round(4*k1);
jj:=round(4*k2);
ll:=ii+jj;
mm:=2*ll+1;

```

```
{Operacao de acordo com o modo informado}
```

```

600: writeln;
writeln('Informe o Modo de Operacao');
writeln;
590: write('M = ');
readln(M);
writeln;
writeln('Comfirma o Modo Informado ? - S/N');
aux:=readkey;
if(upcase(aux)<>'S') then goto 600;
writeln;
writeln('Passo Padrao nas Faixas ? - S/N');
aux:=readkey;
if(upcase(aux)='S') then goto 570;
580: writeln;
writeln('Informe Indicador do Passo Desejado');
                                {O Indicador sera um numero inteiro}
                                {O Passo ou Incremento(Incr) sera
                                1/Indicador}
write('Incr. = ');
readln(Incr);
Incr:=1.0/Incr;
writeln('Comfirma Passo Informado ? - S/N');
aux:=readkey;
if(upcase(aux)<>'S') then goto 580;
goto 560;
570: Incr:=0.5;
560: nn3:=-N/2;
NN:=trunc(n/Incr);
case m of
  1,3:goto 300;
  2,4:goto 400;
  5:goto 500;
else
  begin
    writeln;
    writeln('Modo de Operacao Invalido - Informe
                                Corretamente');
    goto 590;
  end;
end;

```

```

{Modo de Operacao = 5}
{Obtencao de Superficies de Influencia generalizadas}
500: writeln;
writeln('Informe o Indicador de Espacamento entre secoes');
      {O Indicador sera um numero inteiro}
      {O Espacamento sera A/Indicador}

writeln;
write('I = ');
readln(I);
writeln;
writeln;
writeln('Confirma o Indicador informado ? - S/N');
aux:=readkey;
if(upcase(aux)<>'S') then goto 500;
Es:=a/i;
Cz:=-n*a/2;
icz:=0;
496: kl:=sqrt(sqrt(k44h/(4*k44a)));
lb:=kl/a;
pl1234(nr,kl,ele);
pm1234(nr,kl,eme);
pn1234(nr,kl,ene);
pl1234(nn3,kl,elezero);
pm1234(nn3,kl,emezera);
pn1234(nn3,kl,enezera);
repeat      {incrementa coordenada longitudinal (Z)}
  rewrite(dsk);
  lbz:=lb*cz;
  f11l:=-2*lb*lb*hsin(lbz)*(sin(lbz));
  f21l:=lb*lb*(-hcos(lbz)*sin(lbz)+cos(lbz)*hsin(lbz));
  f31l:=lb*lb*cos(lbz)*hcos(lbz);
  f41l:=lb*lb*(hsin(lbz)*cos(lbz)+sin(lbz)*hcos(lbz))/2;
  fx:=1;
495: repeat      {incrementa contador de faixas}
  pka(kb42,kb43,ka,mm,fx);
  if fx<=jj then
    begin
      k40t:=ka;
      kb:=(2*fx-mm)/8+k1)/2;
      cfl:=k40t+0.5*kb;
      goto 490;
    end;
  if fx<=(ii+jj) then
    begin
      k40t:=ka;
      kb:=(8+(2*fx-mm)/k1)*(16+(2*fx-mm)/k1)*(mm-2*fx);
      kb:=kb*0.9765E-3;
      cfl:=k40t+0.5*kb;
      goto 490;
    end;
  if fx<=(jj+2*ii) then
    begin

```

```

k40:=((2*fx-mm)/k1)*((2*fx-mm)/k1)*(24*k1-(2*fx-mm));
k40:=-k40*0.9765E-3;
k40t:=k40+ka;
kb:=(8-(2*fx-mm)/k1)*(16-(2*fx-mm)/k1)*(2*fx-mm);
kb:=-kb*0.9765E-3;
cfl:=k40t+0.5*kb;
goto 490;
end;
if fx<=2*(ii+jj) then
begin
k40:=-k1*(3*(2*fx-mm)/(16*k1)-0.5);
k40t:=ka+k40;
kb:=(2*fx-mm)/8-k1)/2;
cfl:=k40t+0.5*kb;
goto 490;
end;
490: nn1:=-n/2;
nn2:=incr-n/2;
repeat {desloca carregamento na faixa}
case b of
1:begin
if nn1>=0 then
begin
enezero[5]:=0;
elezero[5]:=0;
goto 488;
end;
pn5l(nn3,nn2,nn1,k1,n501);
pl5l(nn3,nn2,nn1,k1,1501);
plmn5(n501,cfl,k44h,enezero[5]);
plmn5(1501,cfl,k44h,elezero[5]);
ene[5]:=0;
ele[5]:=0;
goto 487;
488: pn5l(nr,nn1,nn2,k1,n51);
pl5l(nr,nn1,nn2,k1,151);
plmn5(n51,cfl,k44h,ene[5]);
plmn5(151,cfl,k44h,ele[5]);
487: a1234(enezero,elezero,ene,ele,a1,a2,a3,a4);
goto 480;
end;
2:begin
if nn1>=0 then
begin
enezero[5]=0;
elezero[5]=0;
goto 486;
end;
pn5l(nn3,nn2,nn1,k1,n501);
pl5l(nn3,nn2,nn1,k1,1501);
plmn5(n501,cfl,k44h,enezero[5]);
plmn5(1501,cfl,k44h,elezero[5]);

```

```

ene[5]:=0;
eme[5]:=0;
goto 485;
486:   pn51(nr,nn1,nn2,kl,n51);
      pm51(nr,nn1,nn2,kl,m51);
      plmn5(n51,cfl,k44h,ene[5]);
      plmn5(m51,cfl,k44h,eme[5]);
485:   a1234(enezero,elezero,ene,eme,a1,a2,a3,a4);
      goto 480;
end;
3:begin
  if nn1>=0 then
    begin
      enezero[5]:=0;
      emezero[5]:=0;
      goto 484;
    end;
  pn51(nn3,nn2,nn1,kl,n501);
  pm51(nn3,nn2,nn1,kl,m501);
  plmn5(n501,cfl,k44h,enezero[5]);
  plmn5(m501,cfl,k44h,emezero[5]);
  ene[5]:=0;
  ele[5]:=0;
  goto 483;
484:   pn51(nr,nn1,nn2,kl,n51);
      pl51(nr,nn1,nn2,kl,l51);
      plmn5(n51,cfl,k44h,ene[5]);
      plmn5(l51,cfl,k44h,ele[5]);
483:   a1234(enezero,emezero,ene,ele,a1,a2,a3,a4);
      goto 480;
end;
4:begin
  if nn1>=0 then
    begin
      enezero[5]:=0;
      emezero[5]:=0;
      goto 482;
    end;
  pn51(nn3,nn2,nn1,kl,n501);
  pm51(nn3,nn2,nn1,kl,m501);
  plmn5(n501,cfl,k44h,enezero[5]);
  plmn5(m501,cfl,k44h,emezero[5]);
  ene[5]:=0;
  eme[5]:=0;
  goto 481;
482:   pn51(nr,nn1,nn2,kl,n51);
      pm51(nr,nn1,nn2,kl,m51);
      plmn5(n51,cfl,k44h,ene[5]);
      plmn5(m51,cfl,k44h,eme[5]);
481:   a1234(enezero,emezero,ene,eme,a1,a2,a3,a4);
      goto 480;
end;
end;

```

```

480:      if cz=0 then
          begin
            f511:=0;
            goto 470;
          end;
      if cz>0 then
          begin
            aa1:=nn1*a;
            aa2:=nn2*a;
            if nn2<=0 then
                begin
                  f511:=0;
                  goto 470;
                end;
            if aa1>=cz then
                begin
                  f511:=0;
                  goto 470;
                end;
            if aa2<=cz then goto 475;
            aa2:=cz;
            goto 475;
          end;
      aa1:=nn2*a;
      aa2:=nn1*a;
      if nn1>=0 then
          begin
            f511:=0;
            goto 470;
          end;
      if aa1<=cz then
          begin
            f511:=0;
            goto 470;
          end;
      if aa2>=cz then goto 475;
      aa2:=cz;
475:      f511:=hsin(lb*(cz-aa1))*sin(lb*(cz-aa1));
      f511:=f511-hsin(lb*(cz-aa2))*sin(lb*(cz-aa2));
      f511:=f511*cfl/(8*kl*kl*k44a*a*a);
470:      ip11:=a1*f111+a2*f211+a3*f311+a4*f411+f511;
      for pt:=1 to 7 do
          begin
            lin:=7-pt+1;
            if fx<=(ii+jj) then goto 465;
            msz:=-ip11*vkwaux[lin];
            goto 464;
465:            msz:=-ip11*vkw[pt];
464:            msz:=msz*a*a;
            write(dsk,msz);
          end;
      nn1:=nn2;

```

```

        nn2:=nn2+incr;
        until nn2>n/2;
        fx:=fx+1;
until fx>2*11;
close(dsk);
case m of
    1,3:goto 280;
    2:goto 190;
    4,5:goto 460;
end;

{Saida para o Modo M = 5}

460:   saida(arq,op);
       case op of
         1:goto455;
         2:goto 450;
       end;
455:   writeln(arq);
       writeln(arq,'Superficies de Influencia');
       writeln(arq,'cada posicao do carregamento gera uma
                                     linha');
       writeln(arq);
       writeln(arq,'Secao onde Z = ',cz:6:2);
       writeln(arq);
       write(arq,' , Pto 1      Pto 2      Pto 3      Pto 4
                                     Pto 5');
       writeln(arq,'      Pto 6      Pto 7');
       fx:=1;
       reset(dsk);
       repeat
         writeln(arq);
         writeln(arq,'Faixa ',fx:3);
         writeln(arq);
         for col:=1 to nn do
           begin
             for k4:=1 to 7 do
               begin
                 read(dsk,msz);
                 write(arq,msz:9:2);
               end;
             writeln(arq);
           end;
         fx:=fx+1;
       until fx>2*11;
       close(dsk);
       writeln;
       write('Resultados ja foram fornecidos via um dos
                                     equipamentos');
       writeln(' de saida');
       writeln('( Tela ou Impressora )');
       writeln('Verifique se deseja utilizar o outro e
                                     resposta:');
       close(arq);
       goto 460;

```

```

450:     if m=4 then goto 390;
        cz:=cz+es;
        icz:=icz+1;
        if frac(icz/i)=0 then
            cz:=-n*a/2+icz*a/i;
until icz>n*i;
goto 170;

{Modo de Operacao M = 4}
{Obtencao de Superficies de Influencia para secoes
isoladas}

400:     writeln;
        writeln('Informe o Numero de Secoes');
        writeln;
        write('ns = ');
        readln(ns);
        vsc[1]:=ns;
        writeln('Forneca Coordenadas Longitudinais');
        writeln;
        for cs:=1 to ns do
            begin
                write(branco);
                readln(vsc[cs+1]);
            end;
        if m=2 then goto 200;
        cs:=1;
        repeat
            cz:=vsc[cs+1];
            goto 496;
390:     cs:=cs+1;
        until cs>ns;
        goto 170;

{Modos de Operacao M = 3 ou M = 1}
{M = 3 : Obtencao de Superficies de Influencia para pontos
isolados}
{M = 1 : Calculo da Tensao Normal em pontos isolados}

300:     writeln;
        writeln('Informe o Numero de Pontos');
        writeln;
        write('NP = ');
        readln(np);
        vsc[1]:=np;
        writeln('Forneca Coordenadas dos Pontos na ordem
                Z,X,Y');
                {formato livre}
        {Relembre valores de A,k1 e k2 e forneca X e Y com
todas as decimais}
        for cp:=1 to np do
            begin
                write(branco);
                read(vsc[2+(cp-1)*3]);
                write(branco);
                read(vsc[3+(cp-1)*3]);
                write(branco);
            end;

```



```

        goto 271;
    end;
    caso:='br';
    pti:=pt;
    ptf:=pt+1;
    cpr:=a;
    dif:=a-y1;
    goto 271;
end;
4,7:begin
    if x1<vxl[pt] then
        begin
            caso:='br';
            pti:=pt-2;
            ptf:=pt;
            if pt=4 then
                begin
                    cpr:=k1*a;
                    dif:=x1-vxl[2];
                    goto 271;
                end;
            cpr:=k2*a;
            dif:=x1-vxl[5];
            goto 271;
        end;
        caso:='pt';
        pti:=pt;
        goto 271;
    end;
end;

{Rotina de Interpolacao para pontos intermediarios}
{Geracao de Superficie de Influencia do ponto}
271:  fx:=1;
    repeat
        vet:=(fx-1)*nn*7;
        veti:=vet+pti-1;
        for col:=1 to nn do
            begin
                vetor:=veti+(col-1)*7;
                seek(dsk,vetor);
                read(dsk,sz1);
                if caso:='pt' then goto 270;
                    { nao interpola, apenas resume um arquivo no
                                                                outro }

                vetf:=vet+ptf-1;
                    { o arquivo comeca na posicao zero }
                vetor:=vetf+(col-1)*7;
                seek(dsk,vetor);
                read(dsk,sz2);
                sz1:=sz1+(sz2-sz1)*dif/cpr;
                write(dsk1,sz1);
            end;
        fx:=fx+1;
    until fx=nn;
270:

```

```

    end;
    fx:=fx+1;
until fx>2*11;
if m=1 then
  begin
    szp(sz,vc,dsk1,a,incr,nn);
    szpt[cp]:=sz;
    goto 250;
  end;

{Impressao de saida para M = 3}

```

```

260:  saida(arq,op);
      if op=2 then goto 250;
      writeln(arq);
      writeln(arq,'Superficie de Influencia');
      write(arq,'cada faixa longitudinal percorrida gera um
                                                    bloco');
      writeln(arq,' de linhas');
      writeln(arq);
      write(arq,'Ponto (XL = ',xl:5:2,' ; YL = ',yl:5:2,' ;
                                                    Z = ');
      writeln(arq,cz:6:2,')');
      writeln(arq);
      fx:=1;
      pt:=trunc(n/incr/7);
      reset(dsk1);
      repeat
        vet:=(fx-1)*nn;
        col:=1;
        repeat      {para imprimir so sete valores por linha}
          ns:=1;
          repeat
            vetor:=vet+col-1;
            seek(dsk1,vetor);
            read(dsk1,msz);
            write(arq,msz:9:2);
            ns:=ns+1;
            col:=col+1;
          until ns>7;
          writeln(arq);
        until col>pt*7;
        repeat
          vetor:=vet+col-1;
          seek(dsk1,vetor);
          read(dsk1,msz);
          write(arq,msz:9:2);
          col:=col+1;
        until col>n/incr;
        writeln(arq);
        writeln(arq);
        fx:=fx+1;
      until fx>2*11;
      writeln;

```

```

write('Resultados ja foram fornecidos via um dos
                                     equipamentos');
writeln(' de saida');
writeln('( Tela ou Impressora )');
writeln('Verifique se deseja usar o outro e responda:');
close(arq);
close(dsk1);
goto 260;
250:  cp:=cp+1;
until cp>np;
if m=3 then goto 170;

{Impressao de saida para M = 1}

240:  saida(arq,op);
if op=2 then goto 170;
writeln(arq);
writeln(arq,'Tensoes calculadas com o Carregamento dado');
writeln(arq);
for cp:=1 to np do
  begin
    cz:=vsc[2+(cp-1)*3];
    xl:=vsc[3+(cp-1)*3];
    yl:=vsc[4+(cp-1)*3];
    write(arq,'Ponto (XL = ',xl:5:2,' ; YL = ',yl:5:2,' ;
                                     Z = ');
    writeln(arq,cz:6:2,') - Tensao = ',szpt[cp]:10:3);
  end;
  close(arq);
goto 240;

{Modo de Operacao M = 2}
{Obtencao do Diagrama de Tensoes Normais em secoes isoladas}
200:  lct(vc);
cs:=1;
rewrite(dsk1);
repeat
  cz:=vsc[1+cs];
  goto 496;
190:  for pt:=(cs-1)*7+1 to cs*7 do
    begin
      pti:=pt-(cs-1)*7;
      reset(dsk);
      reset(dsk1);
      fx:=1;
      repeat
        vet:=(fx-1)*nn*7;
        veti:=vet+pti-1;
        for col:=1 to nn do
          begin
            vetor:=veti+(col-1)*7;
            seek(dsk,vetor);

```

```

        read(dsk,sz1);
        write(dsk1,sz1);
    end;
    fx:=fx+1;
    until fx>2*11;
    close(dsk);
    szp(sz,vc,dsk1,a,incr,nn);
    szpt[pt]:=sz;
end;
cs:=cs+1;
until cs>ns;

```

{Saida de resultados para o Modo M = 2}

```

180:  saida(arq,op);
      if op=2 then goto 170;
      writeln(arq);
      writeln(arq,'Tensoes nas Secoes para o Carregamento dado');
      writeln(arq);
      write(arq,'      Pto 1      Pto 2      Pto 3      Pto 4      Pto 5');
      writeln(arq,'Pto 6      Pto 7');
      writeln(arq);
      cs:=1;
      repeat
        cz:=vsc[1+cs];
        writeln(arq,'Secao onde Z = ',cz:6:2);
        writeln(arq);
        for pt:=(cs-1)*7+1 to cs*7 do
          write(arq,szpt[pt]:9:2);
          writeln(arq);
          cs:=cs+1;
        until cs>ns;
        close(arq);
        goto 180;
        {Opcao de Reinicio}

170:  clrscr;
      writeln('Deseja trabalhar com outra haste ? - S/N');
      aux:=readkey;
      if (upcase(aux))='S' then goto 800;
end.

```

{ Fim de Programa }

Anexo B : Coeficientes das equações (II.44a,b)

Os coeficientes das citadas equações são as integrais dadas adiante, todas calculadas ao longo da LMP.

$$a_{ij} = \int_s t \omega^i \omega^j ds = a_{ji}$$

$$b_{ij} = \int_s t^3 u_v^i u_v^j ds = b_{ji}$$

$$\dot{b}_{ij} = \int_s t^3 \dot{u}_v^i \dot{u}_v^j ds = \dot{b}_{ji}$$

$$\ddot{b}_{ij} = \int_s t^3 \ddot{u}_v^i \ddot{u}_v^j ds = \ddot{b}_{ji}$$

$$\bar{b}_{ij} = 1/12 \int_s t^3 u_v^i \ddot{u}_v^j ds$$

$$\bar{\bar{b}}_{ij} = 1/12 \int_s t^3 \ddot{u}_v^i u_v^j ds$$

$$b_{ij}^* = 2 \cdot \dot{b}_{ij} \quad , \quad \text{para } i, j \neq 3$$

$$b_{ij}^* = 2(1-\nu)\dot{b}_{ij} - \nu(\bar{b}_{ij} + \bar{\bar{b}}_{ij}), \quad \text{para } i, j = 3$$

$$c_{i1} = 1/12 \int_s t^3 u_v^i u_\phi^1 ds$$

$$\dot{c}_{i1} = 1/12 \int_s t^3 \dot{u}_v^i \dot{u}_\phi^1 ds$$

$$\bar{c}_{i1} = 1/12 \int_s t^3 u_v^i \ddot{u}_\phi^1 ds$$

$$\ddot{c}_{i1} = 1/12 \int_s t^3 \ddot{u}_v^i \ddot{u}_\varphi^1 ds$$

$$c_{i1}^* = (2-\nu) \dot{c}_{i1} - \nu \bar{c}_{i1}$$

$$c_{kj} = 1/12 \int_s t^3 u_\varphi^k u_v^j ds$$

$$\dot{c}_{kj} = 1/12 \int_s t^3 \dot{u}_\varphi^k \dot{u}_v^j ds$$

$$\bar{c}_{kj} = 1/12 \int_s t^3 \ddot{u}_\varphi^k u_v^j ds$$

$$\ddot{c}_{kj} = 1/12 \int_s t^3 \ddot{u}_\varphi^k \ddot{u}_v^j ds$$

$$c_{kj}^* = (2-\nu) \dot{c}_{kj} - \nu \bar{c}_{kj}$$

$$d_{k1} = 1/12 \int_s t^3 u_\varphi^k u_\varphi^1 ds = d_{1k}$$

$$\dot{d}_{k1} = 1/12 \int_s t^3 \dot{u}_\varphi^k \dot{u}_\varphi^1 ds = \dot{d}_{1k}$$

$$\ddot{d}_{k1} = 1/12 \int_s t^3 \ddot{u}_\varphi^k \ddot{u}_\varphi^1 ds = \ddot{d}_{1k}$$

Anexo C : Expressões para A_{i0} e B_{k0}

Para uma barra k-r, através de integração parcial, se pode colocar o primeiro termo do membro direito de (II.45a) na forma :

$$\int_s (m''_{z,p} + 2\dot{m}'_{zs,p} + \ddot{m}_{s,p}) u_v^i ds - (\dot{m}_{s,p} + 2m'_{zs,p}) u_v^i \Big|_A^B,$$

onde B e A correspondem respectivamente aos extremos de cada barra com $s_{kr} = b_{kr}$ e $s_{kr} = 0$.

Substituindo em (II.45a) e reagrupando, vem :

$$A_{i0} = \int_s (m''_{z,p} + 2\dot{m}'_{zs,p} + \ddot{m}_{s,p} + \bar{p}_n) u_v^i ds - (\dot{m}_{s,p} + 2m'_{zs,p}) u_v^i \Big|_A^B + \int_s (\bar{p}_s^i v + \bar{p}'_z^i \omega) ds$$

De acordo com a teoria das placas [10], a expressão entre parêntesis na primeira integral é nula, pois constitui a forma geral da equação de equilíbrio de uma placa retangular, representada por sua superfície média, sob a ação de uma carga externa normal \bar{p}_n , sem levar em conta as condições de extremidade. Assim tem-se

$$A_{i0} = -(\dot{m}_{s,p} + 2m'_{zs,p}) u_v^i \Big|_A^B + \int_s (\bar{p}_s^i v + \bar{p}'_z^i \omega) ds$$

Considerando que a grandeza expressão entre parêntesis estabelece o esforço cortante em cada ponto da barra, pode-se escrever, para os esforços nos nós extremos, as expressões

$$P_{kr} = (\dot{m}_{s,p} + 2m'_{zs,p})_{s_{kr} = 0}$$

$$P_{rk} = -(\dot{m}_{s,p} + 2m'_{zs,p})_{s_{kr} = b_{kr}}$$

Desse modo vem :

$$-(\dot{m}_{s,p} + 2\dot{m}'_{zs,p})u_v^i \Big|_A^B = p_{rk} \alpha_{rk}^i + p_{kr} \alpha_{kr}^i$$

Da consideração de todas as barras da LMP decorre que esse resultado se transforma em um duplo somatório, e a equação do termo de carga A_{i0} toma o aspecto final de (II.48).

De modo inteiramente análogo, através de integração parcial, o primeiro termo do membro direito de (II.45b) toma a forma :

$$\int_s^B (\ddot{m}_{z,p} + 2\dot{m}'_{zs,p} + \ddot{m}_{s,p}) u_\varphi^k ds + m_{s,p} \dot{u}_\varphi^k \Big|_A^B$$

Substituindo em (II.45b) e fazendo a mesma simplificação, se obtém :

$$B_{k0} = m_{s,p} \dot{u}_\varphi^k \Big|_A^B$$

Tomando m_{kr} e m_{rk} como os momentos atuantes respectivamente nos nós extremos k e r da barra, pode-se escrever :

$$m_{s,p}(s_{kr} = b_{kr}) = -m_{rk}$$

$$m_{s,p}(s_{kr} = 0) = -m_{kr} \quad ,$$

uma vez que $m_{s,p}$ é um momento fletor atuante nos pontos da LMP.

Par \dot{u}_φ^k se conhece a expressão

$$\dot{u}_\varphi^k = \mp \left(b_{kr}^2 - 4b_{kr}s_{kr} + 3s_{kr}^2 \right) / b_{kr}^2 \quad ,$$

de modo que

$$\dot{u}_\varphi^k(s_{kr} = b_{kr}) = 0 \quad e$$

$$\dot{u}_{\varphi}^k(s_{kr} = 0) = \mp 1$$

Assim tem-se, para uma barra,

$$m_{s,p} \dot{u}_{\varphi}^k \Big|_A^B = - \left[-m_{kr} \dot{u}_{\varphi}^k(s_{kr} = 0) \right] = \mp m_{kr} \quad ,$$

e para o conjunto das barras que se conectam no nó "k",

$$B_{k0} = \sum_{r=1}^R m_{kr} = m_k \quad ,$$

tomando-se m_{kr} como positivo quando este indicar um giro no sentido anti-horário.