



## MIGRAÇÃO E MODELAGEM DE DADOS SÍSMICOS DE ONDAS PLANAS POR FEIXES GAUSSIANOS

Gerson Luis da Silva Ritter

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Webe João Mansur

Rio de Janeiro

Abril de 2011

MIGRAÇÃO E MODELAGEM DE DADOS SÍSMICOS DE ONDAS PLANAS  
POR FEIXES GAUSSIANOS

Gerson Luis da Silva Ritter

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

---

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

---

Dr. Carlos Alves da Cunha Filho, Ph.D.

---

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D.Sc.

---

Prof. Jesse Carvalho Costa, D.Sc.

---

Dr. Eduardo Filpo Ferreira da Silva, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2011

Ritter, Gerson Luis da Silva

Migração e modelagem de dados sísmicos de ondas planas por feixes gaussianos/Gerson Luis da Silva Ritter. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2011.

XIII, 110 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Webe João Mansur

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2011.

Referências Bibliográficas: p. 87 – 91.

1. Migração por feixes gaussianos. 2. Modelagem sísmica. 3. Ondas planas. 4. Refletor explosivo. I. Mansur, Webe João. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*A Cecilia e a Beatriz*

# Agradecimentos

Agradeço a Petrobras por proporcionar o tempo necessário para a realização desta tese. São raras no mundo as empresas que se preocupam tanto com o crescimento profissional dos seus empregados, e esses quatro anos que passei no Doutorado são testemunhas desta preocupação. Espero ter correspondido às expectativas da Petrobras. Agradeço ainda a permissão do uso do dado sísmico real 3D usado nesta tese. Os resultados ficaram muito mais robustos e convincentes com o uso deles.

Esta tese não teria sido feita sem a ajuda e a orientação do meu colega de Petrobras Carlos Alves da Cunha Filho, ou Carlinhos como todo mundo o conhece. Ele sempre esteve disponível para corrigir erros, sugerir novos caminhos, trocar ideias. Ele deveria aparecer como co-orientador desta tese, como de fato ele foi, mas algumas regras novas aqui da COPPE impediram que isso fosse formalizado. Peço desculpas por isso.

Meu orientador, o Prof. Webe João Mansur, foi fundamental para a execução deste trabalho. Sempre tranquilo, mesmo quando os caminhos não pareciam claros, ele me deu a liberdade de procurar a melhor maneira de realizar esta tese. Para mim o mais difícil de uma tese foi, e ainda continua sendo, encontrar um tema que seja interessante, inédito e que possa render frutos. Acho que aprendi um pouco disso com o Webe.

Numa tese a gente sempre se depara com situações desconhecidas e a ajuda de *experts* em áreas específicas é sempre muito bem vinda. Não há como saber de tudo. Algumas pessoas na Petrobras me ajudaram muito e gostaria de agradecer a elas. Fernanda Thedy me ajudou com o dado sísmico 3D usado neste trabalho. Ela preparou o dado de ondas planas, me ajudou com o Promax, com o ambiente paralelo, e em inúmeras outras situações. Jairo Panetta me iniciou no mundo da execução de programas em paralelo. Sem este pontapé inicial, provavelmente estaria executando os exemplos 3D de forma serial até hoje. Paulo Souza me deixou envergonhado com o meu desconhecimento ou desprezo de regras básicas de Fortran. Ele também me mostrou na prática como escrever um programa paralelo. Armando Vicentini leu cuidadosamente o texto desta tese e fez inúmeras sugestões e encontrou também inúmeros erros. Obviamente, os erros remanescentes são de minha responsabilidade.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## MIGRAÇÃO E MODELAGEM DE DADOS SÍSMICOS DE ONDAS PLANAS POR FEIXES GAUSSIANOS

Gerson Luis da Silva Ritter

Abril/2011

Orientador: Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta um método de migração de dados sísmicos registrados com uma fonte de ondas planas usando feixes gaussianos. A extrapolação de ondas planas na superfície com feixes gaussianos é realizada sem o uso explícito da função de Green, gerando ganhos de eficiência na migração destes tipos de dados. O método é demonstrado em duas dimensões com dados sintéticos do modelo de Marmousi, e em três dimensões com um dado real adquirido na costa brasileira. Na migração tridimensional mostra-se como extrapolar uma fonte areal de ondas planas. Os dados foram migrados no domínio do tempo, no caso bidimensional e no domínio da frequência no caso tridimensional. Os resultados mostram boa qualidade em comparação àqueles obtidos usando a migração por *downward continuation*. Além disso, uma extensão do conceito do refletor explosivo para dados de fontes de ondas planas, e afastamento fonte-receptor diferente de zero, é apresentada. Esta extensão é usada para migrar e modelar dados de ondas planas bidimensionais do modelo de Marmousi utilizando também feixes gaussianos. Para complementar o trabalho apresenta-se também um algoritmo de modelagem baseado exclusivamente em feixes gaussianos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## MIGRATION AND MODELING OF PLANE WAVE DATA WITH GAUSSIAN BEAMS

Gerson Luis da Silva Ritter

April/2011

Advisor: Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

This thesis presents a method for migrating plane wave data using gaussian beams. The extrapolation of plane wave at the surface into the subsurface is made without the explicit use of the Green function, being more efficient in this kind of data. The method is applied to migrate the two-dimensional Marmousi model data set and to a real tridimensional data set acquired off the Brazilian coast. In the trimensional case it is shown how to extrapolate an areal source. The data were migrated in the time domain in the bi-dimensional case, and in the frequency domain in the tri-dimensional case. The results compare favorably to the data migrated with a downward continuation algorithm. Also, I present an extension of the explosive reflector concept applied to plane wave data, and non-zero source-receiver offset. This extension is used to migrate and model bi-dimensional plane wave data with the Marmousi velocity model using also gaussian beams. To complement the work a modeling algorithm using gaussian beams only is presented.

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Lista de Figuras</b>  | <b>x</b>  |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 Motivação . . . . .  | 1         |
| 1.2 Premissas básicas . . . . .                                  | 2         |
| 1.3 Algoritmos de migração . . . . .                             | 3         |
| 1.3.1 Feixes gaussianos . . . . .                                | 6         |
| 1.3.2 Migração de ondas planas . . . . .                         | 8         |
| 1.4 Refletor explosivo . . . . .                                 | 9         |
| 1.5 Objetivos da tese . . . . .                                  | 10        |
| 1.6 Estrutura da tese . . . . .                                  | 10        |
| <b>2 Migração de dados de ondas planas</b>                       | <b>11</b> |
| 2.1 Introdução . . . . .   | 11        |
| 2.2 Migração de ondas planas em duas dimensões . . . . .         | 11        |
| 2.3 Migração em três dimensões . . . . .                         | 14        |
| 2.3.1 Ondas cônicas . . . . .                                    | 14        |
| 2.3.2 Ondas planas . . . . .                                     | 15        |
| <b>3 Feixes gaussianos</b>                                       | <b>17</b> |
| 3.1 Introdução . . . . .   | 17        |
| 3.2 Feixes gaussianos em 2 dimensões . . . . .                   | 18        |
| 3.3 Feixes gaussianos em 3 dimensões . . . . .                   | 21        |
| 3.4 Limitações dos feixes gaussianos . . . . .                   | 24        |
| <b>4 Migração de dados de ondas planas por feixes gaussianos</b> | <b>26</b> |
| 4.1 Introdução . . . . .   | 26        |
| 4.2 Cálculos em duas dimensões . . . . .                         | 26        |
| 4.3 Cálculos em três dimensões . . . . .                         | 32        |
| 4.4 Exemplo de migração 2D em dados sintéticos . . . . .         | 34        |
| 4.5 Resultados 2D . . . . .                                      | 41        |
| 4.6 Exemplo de migração 3D em dados reais . . . . .              | 46        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.7      | Resultados 3D . . . . .   | 54         |
| <b>5</b> | <b>Uma extensão do conceito do refletor explosivo</b>                                       | <b>62</b>  |
| 5.1      | Introdução . . . . .  | 62         |
| 5.2      | Refletor explosivo . . . . .  | 62         |
| 5.3      | Uma extensão do refletor explosivo . . . . .  | 64         |
| 5.4      | Migração por refletor explosivo estendido . . . . .   | 72         |
| 5.5      | Modelagem por refletor explosivo estendido . . . . .  | 75         |
| 5.6      | Modelagem por feixes gaussianos . . . . .   | 78         |
| <b>6</b> | <b>Discussão e conclusões</b>   | <b>82</b>  |
| 6.1      | Discussão . . . . .   | 82         |
| 6.2      | Conclusões . . . . .  | 84         |
| 6.3      | Sugestões para trabalhos futuros . . . . .  | 85         |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>   | <b>87</b>  |
| <b>A</b> | <b>Slant stack</b>  | <b>92</b>  |
| <b>B</b> | <b>Equivalência entre receptor comum e fonte comum</b>                                      | <b>94</b>  |
| <b>C</b> | <b>Solução analítica para um feixe gaussiano</b>  | <b>95</b>  |
| <b>D</b> | <b>Equações dinâmicas do raio em três dimensões</b>   | <b>97</b>  |
| <b>E</b> | <b>Derivada da função de Green</b>  | <b>100</b> |
| <b>F</b> | <b>Relação entre dois feixes gaussianos próximos</b>  | <b>103</b> |
| <b>G</b> | <b>Aproximação da amplitude do feixe gaussiano</b>  | <b>105</b> |
| <b>H</b> | <b>Algoritmo para transformar coordenadas do feixe gaussiano em coordenadas cartesianas</b> | <b>107</b> |
| <b>I</b> | <b>Equivalência entre <i>downward continuation</i> e traçado de raios</b>                   | <b>109</b> |

# Lista de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Esquema com os principais processos da migração. . . . .   | 4  |
| 1.2 | Qual o valor do campo no ponto marcado com um triângulo? . . . . .   | 7  |
| 2.1 | Propagação da frente uma onda cônica (em vermelho). . . . .  | 15 |
| 3.1 | Relação entre as coordenadas centradas no raio $(s, n)$ e as coordenadas cartesianas $(x, z)$ . . . . .  | 19 |
| 3.2 | Propagação de um feixe gaussiano. A linha azul é o raio central e o fundo é o modelo de velocidades. . . . .   | 21 |
| 3.3 | Sistema de coordenadas centrado no raio em três dimensões. O sistema depende da posição do feixe. . . . .  | 23 |
| 4.1 | Modelo de velocidades de Marmousi. . . . .   | 35 |
| 4.2 | Ponto de tiro na posição 3640 m. . . . .   | 36 |
| 4.3 | Dado sísmico com fonte de onda plana $p_x = -2 \times 10^{-4} s/m$ . . . . .   | 36 |
| 4.4 | Dado sísmico com fonte de onda plana $p_x = 0.0 s/m$ . . . . .   | 37 |
| 4.5 | Dado sísmico com fonte de onda plana $p_x = 2 \times 10^{-4} s/m$ . . . . .  | 37 |
| 4.6 | Ilustração da correlação cruzada entre os feixes da fonte e do receptor. A região A tem contribuição apenas do feixe da fonte, enquanto que a região B tem contribuição apenas do feixe do receptor. A região D não recebe contribuição de nenhum dos dois feixes. Portanto, não há imagem formada nestas regiões devido a estes feixes. Apenas a região C recebe contribuição dos dois feixes e nela haverá imagem formada. . . . . | 40 |
| 4.7 | Campo de velocidades de Marmousi suavizado com filtro triangular de 7 pontos nas direções vertical e horizontal. . . . .   | 41 |
| 4.8 | Propagação de uma onda plana com $p_x = 0$ ms/m na superfície através do modelo de Marmousi com o método dos feixes gaussianos (acima) e <i>downward continuation</i> com o campo de velocidades suavizado (figura 4.7), no centro, e com o campo de velocidades original (figura 4.1), embaixo . . . . .  | 43 |
| 4.9 | Raios centrais dos feixes gaussianos utilizados para calcular o campo de ondas propagado em profundidade da figura 4.8. . . . .  | 44 |

|  |    |
|--|----|
| 4.10 Migração por feixes gaussianos de dado sísmico com fonte de onda plana $p_x = -2 \times 10^{-4} s/m$ . . . . .  | 44 |
| 4.11 Migração por feixes gaussianos de dado sísmico com fonte de onda plana $p_x = 0.0 s/m$ . . . . .  | 45 |
| 4.12 Migração por feixes gaussianos de dado sísmico com fonte de onda plana $p_x = 2 \times 10^{-4} s/m$ . . . . .   | 45 |
| 4.13 Migração dos dados de ondas planas com algoritmo de feixes gaussianos (superior) e <i>downward continuation</i> (inferior). . . . .   | 46 |
| 4.14 Dados de um cabo de um tiro. . . . .  | 48 |
| 4.15 Diagrama da configuração nominal de aquisição dos dados. . . . .  | 49 |
| 4.16 Posições dos receptores de um tiro (em azul), mostrando a desvio do cabo devido às correntes marítimas ( <i>feathering</i> ). Em vermelho temos as posições de alguns tiros mostrando a direção de aquisição. . . . . | 50 |
| 4.17 Exemplo de dado sísmico de onda plana com $p_x = 0$ ms/m. . . . .   | 51 |
| 4.18 Posições das fontes para a extrapolação por <i>downward continuation</i> . . . . .  | 51 |
| 4.19 Direções iniciais dos feixes das fontes no caso de uma fonte areal. . . . .   | 52 |
| 4.20 Posições das fontes e receptores para o cálculo dos feixes gaussianos. . . . .  | 53 |
| 4.21 Seção do campo de velocidades no traço 2000. . . . .  | 56 |
| 4.22 Seção do campo de velocidades na linha 1225. . . . .  | 56 |
| 4.23 Seção do campo de ondas da fonte extrapolado por feixes gaussianos (esquerda) e <i>downward continuation</i> (direita) no traço 2000 e profundidade 3000 m. . . . .   | 57 |
| 4.24 Seção do campo de ondas do receptor extrapolado por feixes gaussianos (esquerda) e <i>downward continuation</i> (direita) no traço 2000 e profundidade 3000 m. . . . .  | 57 |
| 4.25 Seção do campo de ondas da fonte extrapolado por feixes gaussianos na linha 1225 e profundidade 3000 m. . . . .   | 58 |
| 4.26 Seção do campo de ondas da fonte extrapolado por <i>downward continuation</i> na linha 1225 e profundidade 3000 m. . . . .  | 58 |
| 4.27 Seção do campo de ondas do receptor extrapolado por feixes gaussianos na linha 1225 e profundidade 3000 m. . . . .  | 59 |
| 4.28 Seção do campo de ondas do receptor extrapolado por <i>downward continuation</i> na linha 1225 e profundidade 3000 m. . . . .   | 59 |
| 4.29 <i>Common reflection points</i> da linha 1225 migrados com feixes gaussianos. O eixo horizontal é o número sequencial de $p_x$ . . . . .  | 60 |
| 4.30 <i>Common reflection points</i> da linha 1225 migrados com <i>downward continuation</i> . O eixo horizontal é o número sequencial de $p_x$ . . . . .  | 60 |
| 4.31 Linha 1225 migrada com feixes gaussianos. . . . .   | 61 |
| 4.32 Linha 1225 migrada com <i>downward continuation</i> . . . . .   | 61 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 5.1  | Propagação de uma onda plana entre duas camadas. . . . .  | 66 |
| 5.2  | Modelo de velocidades utilizado na propagação do campo de $p_x$ . . . .   | 68 |
| 5.3  | Campo de ondas planas com $p_x = -0.22$ ms/m na superfície, propa-<br>gado em profundidade nos tempos $t = 400, 800, 1200, 1600, 2000$ ms,<br>usando o algoritmo de extrapolação de $p_x$ . . . . .   | 68 |
| 5.4  | Campo de ondas planas com $p_x = -0.22$ ms/m na superfície, propa-<br>gado em profundidade nos tempos $t = 400, 800, 1200, 1600, 2000$ ms,<br>usando o algoritmo de extrapolação <i>downward continuation</i> . . . . .   | 69 |
| 5.5  | Campo de $p_x$ com $p_x = -0.22$ ms/m na superfície usando o método<br>de van Trier e Symes. . . . .  | 70 |
| 5.6  | Campo de ondas planas com $p_x = -0.22$ ms/m na superfície, propa-<br>gado em profundidade nos tempos $t = 400, 800, 1200, 1600, 2000$ ms,<br>usando o campo de $p_x$ da figura 5.5. . . . .  | 70 |
| 5.7  | Ilustração de <i>multi-pathing</i> . . . . .  | 71 |
| 5.8  | Diagrama da migração por <i>downward-continuation</i> . Note a natureza<br>iterativa da extrapolação dos campos da fonte e do receptor, realiza-<br>das pelo operador $E$ . . . . .   | 73 |
| 5.9  | Diagrama da migração por refletor explosivo. Note a natureza não<br>iterativa da extrapolação do campo da fonte, o qual é calculado dire-<br>tamente na profundidade desejada pela soma dos feixes gaussianos. . .  | 74 |
| 5.10 | Migração por refletor explosivo do dado de ondas planas de Marmousi<br>com $p_x = 0$ ms/m. . . . .  | 75 |
| 5.11 | Modelo de refletividade usado para modelar dados sintéticos de ondas<br>planas. . . . .   | 77 |
| 5.12 | Diagrama das operações de migração e modelagem por feixes gaussi-<br>anos. A migração leva a informação do <i>slant-stack</i> local para a imagem<br>migrada. A modelagem leva a informação do modelo de impedância<br>para construir o <i>slant-stack</i> local. . . . . | 79 |
| 5.13 | Modelagem de dado de onda plana com fonte com $p_x = 0$ s/m usando<br>o método do refletor explosivo. . . . .   | 80 |
| 5.14 | Modelagem de dado de onda plana com fonte com $p_x = 0$ s/m usando<br>o método dos feixes gaussianos. . . . .   | 80 |
| 5.15 | Modelagem de dado de onda plana com fonte com $p_x = 0$ s/m usando<br>diferenças finitas com recursão em profundidade ( <i>upward continuation</i> ). .   | 81 |
| 5.16 | Modelagem de dado de onda plana com fonte com $p_x = 0$ s/m usando<br>diferenças finitas com recursão em tempo. . . . .   | 81 |
| A.1  | Onda plana. . . . .   | 93 |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| C.1 | Segundo termo da equação C.6 responsável pela curvatura da frente de onda do feixe gaussiano. . . . . | 96  |
| E.1 | Diagrama para o cálculo das derivadas $\partial s/\partial z'$ e $\partial n/\partial z'$ . . . . .   | 101 |
| F.1 | Relação entre feixe que inicia em $x_j$ e outro que inicia em $x'$ . . . . .                          | 104 |
| G.1 | Feixe gaussiano sem a aproximação de amplitude. . . . .   | 106 |
| G.2 | Feixe gaussiano com a aproximação de amplitude. . . . .   | 106 |
| I.1 | Equivalência entre <i>downward continuation</i> e traçado de raios. . . . .                           | 110 |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

A exploração de petróleo tem sido realizada em áreas geologicamente cada vez mais complexas. As recentes descobertas de campos gigantes no Brasil, por exemplo, localizadas na Bacia de Santos, apresentam reservatórios situados abaixo de grandes corpos de sal. Na Bacia do Espírito Santo e no Golfo do México também há um grande interesse em prospectos próximos a corpos alóctones de sal. O grande contraste de velocidade das ondas sísmicas entre o sal e os sedimentos clásticos é um desafio para os algoritmos de processamento. Por exemplo, a complexidade das trajetórias dos raios neste tipo de ambiente cria dificuldades para os algoritmos de migração Kirchhoff, que ainda hoje são os mais utilizados na indústria, tanto pela sua eficiência quanto pela sua simplicidade.

Paralelamente a esta dificuldade geofísica, os dados sísmicos estão sendo adquiridos em volumes cada vez maiores. Enquanto há anos atrás o número de canais registrados por tiro era da ordem de centenas, hoje é da ordem de milhares. Embora a capacidade de processamento tenha acompanhado este aumento no volume de dados, ainda há processos que são muito caros ou levam muito tempo para serem executados.

Esta tese, embora não tenha a pretensão de apresentar respostas definitivas para estes problemas, é motivada por eles. Este trabalho apresenta métodos de imageamento que têm potencial de serem mais eficientes que os atualmente em uso e ao mesmo tempo manter ou melhorar a qualidade da imagem resultante. Ao longo desta tese mostra-se que a migração de dados de ondas planas com feixes gaussianos pode apresentar vantagens em relação à migração de dados no domínio do tiro ou afastamento comum, realizados por algoritmos baseados em extrapolação de campos de onda em profundidade por diferenças finitas ou em métodos integrais como a migração Kirchhoff.

## 1.2 Premissas básicas

Dados sísmicos precisam ser processados antes de serem interpretados. Usualmente, o dado sísmico é registrado em superfície e armazenado como um volume penta-dimensional representada por  $R(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t)$ , onde  $\mathbf{x}_s$  e  $\mathbf{x}_r$  são as coordenadas da fonte e do receptor, respectivamente, e  $t$  é o tempo de registro. Entretanto, para ser útil para a interpretação eles devem ser transformados para um volume tri-dimensional representado por  $I(x, y, z)$ , onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas de um ponto em profundidade. Este mapeamento de um dado em tempo para profundidade é chamado de imageamento ou migração. A migração tem dois objetivos principais. O primeiro e o mais básico deles é posicionar os refletores em suas posições em profundidade. O segundo deles, que só pode ser atingido se o primeiro também o for, é que a amplitude da reflexão deve ser proporcional ao coeficiente de reflexão, geralmente dependente do ângulo de incidência na interface refletora. Alguns autores denominam a migração com estes dois objetivos de migração de amplitude verdadeira ou inversão.

Seja o objetivo mais modesto ou o mais ambicioso, todos os métodos de migração partem do mesmo lugar: a equação da onda. O tipo de equação utilizado determina os tipos de problemas a serem tratados e a precisão com que eles podem ser resolvidos. A equação da onda pode ser aplicada à propagação de ondas em meios acústicos, como o ar ou a água, ou elásticos, como as rochas. A equação da onda pode descrever meios isotrópicos ou anisotrópicos. Como na exploração de petróleo as ondas se propagam em meios rochosos é de se supor que a equação a ser utilizada seria uma que descrevesse um meio elástico e anisotrópico. Felizmente, para se obter bons resultados, dezenas de anos de prática demonstraram que a equação acústica e isotrópica descreve a propagação de ondas suficientemente bem para que a imagem migrada obtida seja, na maioria dos casos, uma descrição acurada dos refletores em profundidade. Isto pode ser comprovado pelos resultados de perfuração de poços e testes de perfilagem, que fornecem uma medida direta, porém localizada, da posição dos refletores. Seguindo a prática da migração, nesta tese será adotada esta aproximação: o meio será considerado acústico e isotrópico. Cabe ressaltar, entretanto, que em alguns casos uma imagem adequada para a interpretação só pode ser obtida se a anisotropia do meio for levada em conta na migração.

Além disso, a equação da onda pode descrever a propagação em um meio uni-, bi- ou tridimensional. A diferença se dá na implementação dos algoritmos. A migração de dados em três dimensões é, por vezes, ordens de magnitude mais cara que a de dados em duas dimensões. Apesar do custo mais elevado, em aplicações industriais da migração, como as realizadas pelas companhias de petróleo ou pelas companhias de serviço, as imagens que são usadas em locações de poços são geradas por algoritmos

de migração tridimensional, realizada geralmente em centros de processamento de dados com milhares de CPU's alocadas para uma única migração. Mas a migração em duas dimensões tem uma grande vantagem em relação à tridimensional: ela é muito mais barata, sendo portanto ideal para testar novos conceitos teóricos e novos algoritmos. Nesta tese os conceitos são primeiro desenvolvidos e testados em dados bidimensionais e depois estendidos e aplicados em dados tridimensionais.

Para migrar um dado sísmico necessita-se também de uma descrição das velocidades de propagação em subsuperfície, o campo de velocidades. O dado sísmico é obtido com equipamentos sofisticados em mar ou terra, mas o campo de velocidades precisa ser estimado, usualmente do próprio dado sísmico. Esta etapa do processamento de dados sísmico, chamada de análise de velocidades, ou tomografia, se usados algoritmos sofisticados de inversão, é anterior à migração, mas não independente dela. Usando o exemplo da tomografia, um modelo inicial de velocidades é estimado de alguma forma, os dados sísmicos são com ele migrados e o resultado comparado com o próprio modelo ou com alguma outra função. Um resíduo é calculado, um novo modelo é estimado e o processo iterado até sua convergência. Ressalta-se que a migração é parte integral deste processo. Entretanto, a análise de velocidades ou a tomografia estão fora do escopo desta tese. O campo de velocidades usado nos exemplos será suposto conhecido, seja porque o dado é sintético e foi gerado com este campo, ou em caso de dados reais, porque ele foi previamente estimado e fornecido junto com o dado sísmico. O leitor que tiver interesse em métodos de tomografia e análise de velocidades pode consultar Yilmaz [1] ou Biondi [2] e as referências lá citadas.

Resumindo, neste trabalho é utilizada uma equação da onda para meios acústicos e isotrópicos, com modelo de velocidades conhecido, e aplicada a meios bi- e tridimensionais.

### 1.3 Algoritmos de migração

A migração é composta de dois processos distintos. O primeiro é a propagação dos campos da fonte e do receptor em profundidade. Para o campo da fonte parte-se de uma fonte sintética, mas semelhante à usada na aquisição. Para o campo do receptor usa-se o dado sísmico registrado como condição inicial da extrapolação. O segundo processo é a construção da imagem migrada usando-se a condição de imagem (Claerbout [3]). A figura 1.1 ilustra esquematicamente estas operações.

Uma reflexão é um evento que ocorre em um lugar do espaço em um determinado tempo. A onda incidente vindo da fonte é refletida, produzindo um campo de ondas que se propaga de volta à superfície, onde é registrado. Como os campos da fonte e do receptor são calculados em todas as posições e todos os tempos, as reflexões



Figura 1.1: Esquema com os principais processos da migração.

são localizadas onde eles coincidem em espaço e tempo. Matematicamente isto pode ser calculado através da correlação cruzada entre os dois campos tomada no tempo zero, de acordo com a seguinte equação, escrita no domínio da frequência,

$$I(\mathbf{r}) = \int S^*(\mathbf{r}, \omega) R(\mathbf{r}, \omega) d\omega, \quad (1.1)$$

onde  $S$  e  $R$  são os campos extrapolados da fonte e do receptor, respectivamente,  $\mathbf{r}$  é a coordenada do ponto migrado e  $\omega$  é a frequência angular. A equação 1.1 obtém a imagem migrada por correlação dos campos da fonte e do receptor. Esta operação, entretanto, não preserva a amplitude da imagem. Os valores de amplitude obtidos com ela podem não ter relação com os coeficientes de reflexão nas interfaces entre as camadas. A condição de imagem por deconvolução com amortecimento produz um resultado mais fiel aos coeficientes de reflexão. Ela é escrita como,

$$I(\mathbf{r}) = \int \frac{S^*(\mathbf{r}, \omega) R(\mathbf{r}, \omega)}{S^*(\mathbf{r}, \omega) S(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon} d\omega. \quad (1.2)$$

A condição de imagem de deconvolução divide a correlação cruzada pela magnitude do campo da fonte, levando em conta desta forma variações de amplitude decorrentes de, por exemplo, campos em zona de sombra, onde ele tende a ter menor amplitude. O fator  $\epsilon$  estabiliza a divisão, nos casos em que o campo da fonte tem amplitude muito baixa e é contaminado por ruídos numéricos.

Há dezenas de algoritmos e métodos de migração publicados em artigos e livros. Seguindo Sava e Hill [4] os métodos de migração podem ser classificados na forma como eles extrapolam o campo de ondas em profundidade. Uma das classes é

composta pelos métodos que resolvem a equação da onda por métodos diferenciais (diferenças finitas ou elementos finitos, por exemplo). Estes métodos podem ser implementados em tempo ou frequência, o campo pode ser propagado em tempo ou profundidade e a propagação da onda pode ser feita com a equação completa da onda ou com a equação unidirecional. A combinação das opções acima dá origem aos diversos métodos de migração. Por exemplo, a migração reversa no tempo propaga o campo em tempo, no domínio do tempo e usando a equação completa da onda. A migração por *downward continuation* propaga o campo de onda em profundidade, no domínio da frequência usando a equação da onda unidirecional. Estes métodos, que resolvem a extrapolação do campo de ondas por soluções de diferenças finitas ou espectrais, são geralmente conhecidos como *wave-equation migration*. Embora o objeto desta tese não seja esta classe de migração, usa-se a propagação de ondas com estes métodos para estender o conceito do refletor explosivo. Além disso, as imagens migradas com estes métodos são comparadas com os resultados obtidos com o método que nesta tese é proposto.

Uma outra classe de métodos é baseada na solução integral da equação da onda. Estes métodos, geralmente conhecidos como migração Kirchhoff, são baseados numa aproximação de alta frequência da solução da equação da onda. Nesta classe de migração o campo de ondas é extrapolado por raios que conectam a superfície onde se localizam as fontes e os receptores e os pontos em profundidade onde a imagem é formada. Embora baseado numa solução matematicamente mais sofisticada, a migração Kirchhoff é mais fácil de descrever geometricamente, e mais simples de se entender algorítmicamente.

A classificação acima serve apenas como referência aos métodos existentes no mercado. Mais importante é entender as condições de validade de cada um dos métodos e em que tipo de situações eles são mais ou menos adequados. Os diversos algoritmos de migração se distinguem pela forma com que eles tratam as heterogeneidades do campo de velocidades. Eles são soluções aproximadas da equação da onda, e muitas vezes eles são exatos somente no limite em que a velocidade de propagação é constante. Em geral, algoritmos tipo migração reversa no tempo não têm problemas com variações laterais de velocidade. Já algoritmos tipo *downward continuation* no domínio da frequência utilizam aproximações para levar em conta variações laterais. Algoritmos tipo Kirchhoff, baseados em raios, não têm, em princípio, dificuldades com essas variações laterais, embora na prática eles sofram de outras limitações resultantes delas, como se verá adiante.

No que diz respeito a esta tese, a migração Kirchhoff apresenta duas dificuldades principais. A primeira delas é relacionada às amplitudes ao longo do raio. Se o campo de velocidades for complexo o suficiente, esta amplitude pode se tornar infinita próximo de regiões onde há um acúmulo de raios, conhecidas como cáusticas

(Bleistein et al. [5]). Isto não quer dizer que o campo de ondas se torna infinito nestas regiões, e sim que a aproximação de alta frequência, na qual a migração é baseada, não é mais válida. A outra dificuldade é mais algorítmica do que teórica, mas não menos importante na prática. Um determinado ponto em profundidade pode estar ligado a um ponto na superfície (fonte ou receptor) por um raio, por mais de um raio ou por nenhum raio. Para interpolar o valor do tempo de trânsito e da amplitude em um ponto próximo a este cruzamento de raios, por exemplo, quais raios devem ser utilizados? A figura 1.2 ilustra esta situação. Nela raios associados a uma onda plana na superfície são traçados através de um modelo. O ponto marcado com um triângulo está próximo a dois conjuntos de raios. Se for necessário calcular a amplitude e tempo de propagação do ponto até a superfície isto pode ser feito interpolando os tempos e amplitudes dos raios próximos. Mas quais raios deveriam ser usados? Usando os raios vermelhos ou azuis resultariam em valores de tempo muito diferentes entre si. E interpolar usando os quatro raios não seria razoável, pois o tempo não corresponderia a nenhuma trajetória existente. Há várias maneiras de se resolver este problema. Pode-se, por exemplo, calcular apenas o tempo da primeira chegada em cada ponto, como descrito nos trabalhos de Sethian e Popovic [6] e van Trier e Symes [7]. A vantagem é que o algoritmo de determinação destes tempos é relativamente rápido e estável. Entretanto, como mostraram Geoltrain e Brac [8], para campos de velocidade complexos a primeira chegada não é a mais adequada, pois ela nem sempre carrega a maior parte da energia. Outros métodos como o de Nichols [9], por exemplo, tentam calcular a chegada mais energética e usá-la no lugar da primeira chegada. Mas mesmo isso pode não ser suficiente para descrever corretamente o campo de ondas. Outros autores (Xu e Lambaré [10]) propuseram métodos que calculam todas as chegadas relevantes. Mas estes algoritmos têm a desvantagem não serem baseados na teoria dos raios ou na equação da onda.

### 1.3.1 Feixes gaussianos

Os dois problemas com a migração Kirchhoff mencionados na seção anterior podem ser resolvidos usando a teoria dos feixes gaussianos. Feixes gaussianos (Hill, [11], [12]) são soluções assintóticas da equação da onda, da mesma forma que os raios. A diferença é que o raio é uni-dimensional, daí a necessidade de interpolá-lo em duas ou três dimensões, enquanto que um feixe gaussiano tem uma extensão espacial em torno do seu raio central, ou seja, ele é naturalmente bi- ou tridimensional. Pode-se extrapolar um campo de ondas com feixes gaussianos. Em um determinado ponto em profundidade,  $\mathbf{r}$ , o campo é a soma dos campos de todos os feixes que passam na sua vizinhança. Dependendo das condições iniciais a amplitude de um feixe gaussiano é sempre finita, e portanto, a amplitude da soma de feixes também é.

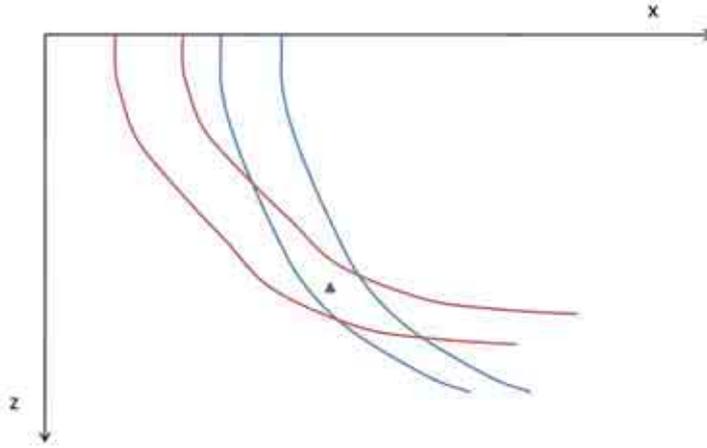


Figura 1.2: Qual o valor do campo no ponto marcado com um triângulo?

Isso resolve uma das dificuldades da migração Kirchhoff. Como os feixes partem em diversas direções em superfície, e dependendo do campo de velocidades, podem atingir um mesmo ponto em profundidade, o problema de determinar os diversos tempos de trânsito é naturalmente resolvido com a soma dos feixes.

A teoria dos feixes gaussianos tem origem em pesquisadores soviéticos nas décadas de 1950 e 60. Para uma breve revisão histórica pode-se consultar Popov et al. [13]. A migração de dados em afastamento comum foi apresentada por Hill [12], numa extensão de um trabalho do mesmo autor para dados empilhados [11]. A migração de dados organizados em ponto de tiro foi apresentada por Gray [14] baseando-se no trabalho de Hill. Nowack et al. [15] apresentaram sua versão da migração por feixes gaussianos no domínio do receptor comum além de ponto de tiro comum. Gray e Bleistein [16] apresentaram uma versão para migração por feixes gaussianos em amplitude verdadeira. Antes mesmo de Hill [11] a migração por feixes gaussianos já tinha sido estudada por Costa [17], [18], em cujos trabalhos muitos dos elementos do algoritmo de Hill foram antecipados. Já Popov et al. [13] apresentaram um trabalho no qual a eficiência do algoritmo de Hill é trocada em favor de uma maior precisão. Hu et al. [19] apresentaram um método de migração de dados de ondas planas por feixes gaussianos, mas com diferenças importantes em relação ao apresentado aqui. Eles usaram feixes gaussianos somente do lado do receptor, e não da fonte. A propagação da fonte sofre dos mesmos problemas de *multi-pathing* que a migração Kirchhoff. Infelizmente, nenhum detalhe da implementação é mencionado.

Variações do método de feixes gaussianos têm sido apresentadas em congressos e publicadas em revistas. Um trabalho interessante é o de Nowack [20], [21] que apresenta feixes gaussianos focalizados em profundidade. Ao contrário de feixes gaussianos convencionais, que têm maior extensão espacial à medida em que se apro-

fundam, os feixes gaussianos localizados, como o nome indica, tem maior localização espacial em uma determinada profundidade. Segundo o autor, eles minimizam a quantidade de feixes necessários para construir a imagem nessa profundidade. Outro desenvolvimento interessante é a construção de um feixe em um meio anisotrópico. Exemplos de resultados de migração anisotrópica com feixes gaussianos pode ser encontrada em Neal et al. [22]. Um método similar ao dos feixes gaussianos é conhecido como *beam migration* e utiliza também feixes como unidade de dado a ser extrapolado. Exemplos deste tipo de migração podem ser encontrados em Sun et al. [23] e Sherwood et al. [24].

### 1.3.2 Migração de ondas planas

Dados sísmicos são geralmente registrados numa organização que reflete a forma como eles foram adquiridos. Usualmente, eles são organizados em ponto de tiro, pois a sua aquisição foi feita sequencialmente tiro a tiro. Entretanto, a migração destes dados pode ser feita reorganizando-os de outra forma. Por exemplo, é usual que a migração Kirchhoff seja feita com os dados organizados em afastamento comum. Em aquisições de dados com receptores no fundo do mar os dados podem ser mais convenientemente processados se organizados em receptor comum. O tipo de organização do dado tem consequências nos algoritmos de migração. Por exemplo, a migração de dados no domínio do ponto de tiro com o algoritmo de *downward continuation* usa um extrapolador com a chamada equação *single square root*. Já a mesma migração com os dados no domínio do afastamento comum deve usar a chamada equação *double square root*. A motivação central para essa variedade de formas de organização de dados é a eficiência dos algoritmos. Dependendo de como o dado foi adquirido e de que algoritmo se deseja usar, a migração com os dados em um domínio pode ser mais eficiente que em outro domínio.

A migração de dados de ondas planas tem sido desenvolvida nos últimos anos com o objetivo de tornar o processo de imageamento mais eficiente. Usando a migração por *downward continuation* no domínio do tiro como referência, o custo é proporcional ao número de tiros processados. No caso de migração de ondas planas, o custo é proporcional ao número de ondas planas migradas. Se este número for menor que o número de tiros, então o custo será proporcionalmente menor. Foi mostrado por Liu et al. [25] e Duquet e Lailly [26] que é possível migrar um volume menor de dados sísmicos em relação aos dados em tiro comum, se estes forem transformados para o domínio de ondas planas. Além disso, estes autores mostraram que as migrações em ponto de tiro e ondas planas são equivalentes, desde que a condição de imagem seja apropriadamente modificada. A migração de ondas planas tem sido objeto de trabalhos de vários autores. Stoffa et al. [27] usaram a teoria

assintótica do raio para calcular tempos de trânsito e fatores de amplitude relevantes ao problema. O método deles é conceitualmente similar à migração Kirchhoff. Zhang et al. [28] denominaram o processo de *Delayed-shot migration* e analisaram questões como o número de ondas planas nas quais o dado é decomposto e técnicas de compensação de iluminação. Stork e Kapoor [29] comentaram alguns aspectos do cálculo do número de ondas planas do artigo anterior. Shan e Biondi [30] e Shan et al. [31] propuseram a migração em um sistema de coordenadas rotacionado, de acordo com a direção inicial da onda plana da fonte. Desta forma é possível tornar a migração com a equação uni-direcional da onda mais efetiva, pois ela produz melhores resultados na direção do eixo de extrapolação.

## 1.4 Refletor explosivo

O conceito do refletor explosivo (Claerbout [32]) é uma abstração teórica que permite modelar e migrar dados sísmicos. A ideia é simples: dado um modelo de refletores em profundidade, todos os pontos destes refletores *explodem* simultaneamente. O campo registrado em superfície é o equivalente àquele que seria registrado se a geometria de aquisição fosse de afastamento nulo, com fonte e receptor na mesma posição em superfície. Da mesma forma, a migração pode ser descrita como o campo de afastamento nulo registrado em superfície, extrapolado em profundidade, registrado no tempo igual a zero, ou seja, no momento em que os refletores *explodem*. Esta analogia permite a construção de algoritmos de modelagem e migração. Na prática, os dados são adquiridos com afastamento diferente de zero, mas se não houver grandes variações laterais de velocidade, o processamento de dados com NMO e DMO seguidos de empilhamento produz uma boa aproximação de uma seção de afastamento nulo.

Este conceito, entretanto, tem limitações. Uma delas é que as múltiplas não são modeladas corretamente. Outra é que reflexões prismáticas podem ser registradas com uma configuração de afastamento nulo, mas também não são modeladas pelo refletor explosivo. Mas a principal delas é que o refletor explosivo é aplicado somente a dados com afastamento nulo. Isso é consequência do fato dos refletores explodirem simultaneamente.

Um trabalho que tenta estender o refletor explosivo é o de Biondi [33] no qual, usando um *subsurface-offset domain common image gather* como condição inicial, um algoritmo de extrapolação de campos de onda é usado para gerar os eventos em superfície de fonte e receptor que geraram a imagem inicial. Note que a condição inicial é uma imagem migrada no domínio do afastamento em sub-superfície. Este método é útil para construir algoritmos de análise de velocidade de migração, pois permite selecionar eventos a serem utilizados nesta análise.

Nesta tese apresenta-se uma outra idéia de refletor explosivo. Mostra-se que se os refletores não explodirem simultaneamente, é possível modelar e migrar dados com afastamento diferente de zero. Os tempos em que cada ponto do refletor explode serão calculados com o auxílio dos feixes gaussianos. A condição inicial para o método aqui apresentado é a mesma do refletor explosivo convencional, o que significa, em relação ao refletor explosivo de Biondi [33], uma simplificação conceitual e prática.

## 1.5 Objetivos da tese

Neste trabalho unem-se os conceitos de migração por feixes gaussianos e de migração de ondas planas. Mostra-se que, além de migrar dados sísmicos, os feixes gaussianos podem ser usados na extensão do conceito de refletor explosivo para afastamentos não nulos.

Esta tese tem por objetivos principais:

- Apresentar a migração e modelagem de dados de ondas planas usando feixes gaussianos em 2 e 3 dimensões.
- Apresentar um conceito estendido de refletor explosivo aplicável na modelagem e migração de dados de ondas planas.

## 1.6 Estrutura da tese

Esta tese está estruturada da seguinte forma. No capítulo 2 é apresentada uma revisão dos conceitos de migração de dados de ondas planas para dados bi- e tridimensionais. Será mostrada a equivalência destas com a migração de dados em tiro comum, desde que com uma necessária modificação na condição de imagem. No capítulo 3 introduz-se a teoria dos feixes gaussianos, mostrando como representar a propagação de uma onda plana na superfície e a função de Green como uma composição de feixes gaussianos. Apresenta-se a representação em feixes gaussianos em duas e três dimensões. No capítulo 4 combinam-se os conceitos de migração de ondas planas com o de feixes gaussianos e desenvolve-se a migração de ondas planas por feixes gaussianos. Exemplos de aplicação do algoritmo na migração são apresentados em duas dimensões com dados sintéticos de Marmousi e em três dimensões com dados reais adquiridos na costa brasileira. No capítulo 5 desenvolve-se a generalização do conceito do refletor explosivo para dados de ondas planas. Mostra-se como usar os feixes gaussianos nesta generalização. O algoritmo de extrapolação por refletor explosivo é aplicado na migração e modelagem de dados sintéticos bidimensionais de Marmousi.

# Capítulo 2

## Migração de dados de ondas planas

### 2.1 Introdução

Em dados sísmicos convencionalmente adquiridos, uma fonte, considerada pontual, é detonada e o campo de ondas por ela gerado se propaga em profundidade, é refletido em interfaces e registrado por receptores na superfície. A migração destes dados tem por objetivo determinar a localização destas interfaces em profundidade. A condição de imagem, escrita no domínio da frequência é

$$I(\mathbf{r}) = \int S^*(\mathbf{r}, \omega) R(\mathbf{r}, \omega) d\omega, \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{r}$  é a coordenada do ponto migrado,  $S$  e  $R$  são os campos da fonte e do receptor extrapolados em profundidade e  $\omega$  é a frequência.

Neste capítulo dois casos são examinados: a propagação de ondas planas em duas e três dimensões.

### 2.2 Migração de ondas planas em duas dimensões

Se a função de Green para a equação unidirecional da onda,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ , para o meio de propagação for conhecida, o campo propagado da fonte é:

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \int G(\mathbf{r}, x, \omega) S(x, \omega) dx. \quad (2.2)$$

Para o caso de uma fonte pontual impulsiva localizada em  $x_s$ , usando a equação 2.2 com  $S(x, \omega) = \delta(x - x_s)$  o campo da fonte extrapolado fica:

$$S(\mathbf{r}, x_s, \omega) = G(\mathbf{r}, x_s, \omega). \quad (2.3)$$

Da mesma forma o campo extrapolado do receptor (devido à fonte em  $x_s$ ) pode ser escrito como:

$$R_{PS}(\mathbf{r}, x_s, \omega) = \int G^*(\mathbf{r}, x_r, \omega) R_{PS}(x_r, x_s, \omega) dx_r. \quad (2.4)$$

Na equação acima deve-se entender  $R_{PS}(x_r, x_s, \omega) = R_{PS}(x_r, z_r = 0, x_s, \omega)$  como o campo registrado da fonte.

Fontes de ondas planas não existem. Mas dados registrados com uma fonte de ondas planas virtuais podem ser construídos a partir de dados registrados com fontes pontuais convencionais, por meio do *slant-stack* destes no domínio do receptor comum, conforme demonstrado no Apêndice A, de acordo com a expressão

$$R_{PW}(x_r, p_x, \omega) = \int R_{PS}(x_r, x_s, \omega) e^{-i\omega p_x x_s} dx_s, \quad (2.5)$$

onde  $R_{PW}$  é o dado sintetizado de ondas planas,  $R_{PS}$  é o dado sísmico de fonte pontual,  $x_s$  é a coordenada da fonte,  $p_x$  é a componente horizontal do vetor vazarosidade na superfície.

Conforme demonstrado por Duquet e Lailly [26], a transformada inversa da expressão acima é :

$$R_{PS}(x_r, x_s, \omega) = \frac{|\omega|}{2\pi} \int R_{PW}(x_r, p_x, \omega) e^{i\omega p_x x_s} dp_x. \quad (2.6)$$

Considera-se agora um conjunto de sismogramas, cada um deles registrado com uma fonte pontual. As fontes estão continuamente distribuídas em uma linha na superfície. A imagem será a soma das imagens obtidas com cada fonte individualmente.

$$I_{CS}(\mathbf{r}) = \int \int S^*(\mathbf{r}, x_s, \omega) R(\mathbf{r}, x_s, \omega) dx_s d\omega. \quad (2.7)$$

Usando a equação 2.2, juntamente com a equação 2.4 na condição de imagem 2.7 resulta em:

$$I_{CS}(\mathbf{r}) = \int \int \int G^*(\mathbf{r}, x_s, \omega) G^*(\mathbf{r}, x_r, \omega) R_{PS}(x_r, x_s, \omega) dx_r dx_s d\omega. \quad (2.8)$$

Supõe-se agora que a fonte sísmica emite ondas planas. Duquet e Lailly [26] mostraram que a condição de imagem deve ser modificada para que o resultado da migração de dados no domínio das ondas planas seja igual ao obtido com o dado no domínio do tiro comum. Considerando-se os vários sismogramas, cada um deles adquirido com uma fonte de ondas planas em uma determinada direção tem-se,

$$I_{PW}(\mathbf{r}) = \int \int \frac{|\omega|}{2\pi} S_{PW}^*(\mathbf{r}, p_x, \omega) R_{PW}(\mathbf{r}, p_x, \omega) dp_x d\omega, \quad (2.9)$$

onde  $S_{PW}(\mathbf{r}, p_x, \omega)$  e  $R_{PW}(\mathbf{r}, p_x, \omega)$  são, respectivamente, os campos extrapolados da fonte de ondas planas e do dado de ondas planas na posição  $\mathbf{r}$ .

A fonte de ondas planas, em duas dimensões, é escrita como :

$$S_{PW}(x_s, p_x, \omega) = e^{-i\omega p_x x_s}. \quad (2.10)$$

Substituindo a equação acima em 2.2, e então 2.2 e 2.4 em 2.9 fica-se com :

$$I_{PW}(\mathbf{r}) = \int \int \int \int \frac{|\omega|}{2\pi} G^*(\mathbf{r}, x_s, \omega) e^{i\omega p_x x_s} G^*(\mathbf{r}, x_r, \omega) R_{PW}(x_r, p_x, \omega) dp_x dx_r dx_s d\omega. \quad (2.11)$$

Usando a equação 2.6 para realizar a integração em  $p_x$  resulta em

$$I_{PW}(\mathbf{r}) = \int \int \int G^*(\mathbf{r}, x_s, \omega) G^*(\mathbf{r}, x_r, \omega) R_{PS}(x_r, x_s, \omega) dx_r dx_s d\omega. \quad (2.12)$$

A imagem para a migração de ondas planas é igual à obtida migrando dados em ponto de tiro comum desde que a condição de imagem seja apropriada para cada caso.

A validade da equivalência entre as migrações de dados de pontos de tiro e de ondas planas está baseada no *slant-stack* e sua inversa dada pelas equações 2.5 e 2.6. Na prática, os dados não estão continuamente distribuídos em superfície, nem é possível uma síntese contínua de ondas planas. Também os dados não são adquiridos de forma espacial e temporal infinitas. Ou seja, a equivalência não é exatamente válida na prática. Uma das consequências disso é o fenômeno do *cross-talk*, no qual na aplicação da condição de imagem termos cruzados do campo de ondas de um tiro com o campo de ondas de receptores não pertencentes a este tiro são computados (Romero et al. [34]). Existem vários trabalhos propondo métodos para reduzir este efeito, como os de Morton e Ober [35], Romero et al. [34], Jing et al. [36], Sun et al. [37], Guerra [38]. Por estar fora do escopo desta tese, não se tratará mais deste assunto.

A principal vantagem da migração de dados de ondas planas é a redução no volume de dados migrados. Liu et al. [25] mostraram que a qualidade das imagens geradas por ambas migrações é semelhante. Outra vantagem importante é que é possível usar na migração de ondas planas os mesmos algoritmos de migração comumente usados para migrar dados em ponto de tiro comum. Portanto, algoritmos como *downward continuation* com solução por diferenças finitas ou mi-

gração reversa no tempo podem ser usados sem modificação. Nesta tese mostra-se como usar os feixes gaussianos para migrar dados de ondas planas.

Embora os cálculos acima tenham sido feitos assumindo que os dados de ondas planas foram sintetizados a partir dos dados originais em receptor comum, uma formulação equivalente é possível com a síntese feita no domínio do tiro comum. No Apêndice B demonstra-se que os dois resultados são iguais desde que a aquisição de dados satisfaça algumas condições. Embora elas sejam difíceis de serem satisfeitas em dados reais, em dados sintéticos elas são fáceis, o que pode auxiliar na modelagem dos mesmos.

## 2.3 Migração em três dimensões

Os cálculos acima foram realizados para um espaço bidimensional. Embora a síntese de dados de ondas planas em 2D seja essencialmente a mesma em dados sintéticos ou reais, em 3D temos problemas com os dados reais. A correspondência entre o caso 2D e o 3D seria realizar o *slant-stack* em duas direções, mas para dados 3D marítimos típicos a direção transversal à linha de aquisição é deficiente em dados, sendo limitada a poucas linhas de cabos.

### 2.3.1 Ondas cônicas

Ainda seguindo Duquet e Lailly [26], supõe-se que os dados sísmicos foram adquiridos com apenas um cabo, e com a linha de tiros na direção do cabo. Ou seja, os dados têm azimute igual a zero. Pode-se, de forma similar ao caso 2D, sintetizar dados sísmicos não de ondas planas, mas das chamadas ondas cônicas, de acordo com a equação abaixo:

$$R_{PW}(x_r, p_x, y_s, \omega) = \int R_{PS}(x_r, x_s, y_s, \omega) e^{-i\omega p_x x_s} dx_s, \quad (2.13)$$

onde  $y_s$  é a posição da fonte na direção perpendicular à linha de aquisição. Cabe observar que o nome de ondas cônicas faz referência à geometria da frente de onda como ilustrado na figura 2.1. A migração destes dados de ondas cônicas é:

$$I_{PW}(\mathbf{r}) = \int \int \int \int \int \frac{|\omega|}{2\pi} G^*(\mathbf{r}, x_s, y_s, \omega) e^{i\omega p_x x_s} \times \\ G^*(\mathbf{r}, x_r, y_s, \omega) R_{PW}(x_r, p_x, y_s, \omega) dx_r dx_s dy_s dp_x d\omega. \quad (2.14)$$

A integração em  $dx_s$  produz o campo propagado em profundidade da fonte de ondas cônicas, a integração em  $dx_r$  produz o campo inversamente propagado do campo do receptor, e integra-se sobre todos os valores  $p_x$  de ondas cônicas, sobre

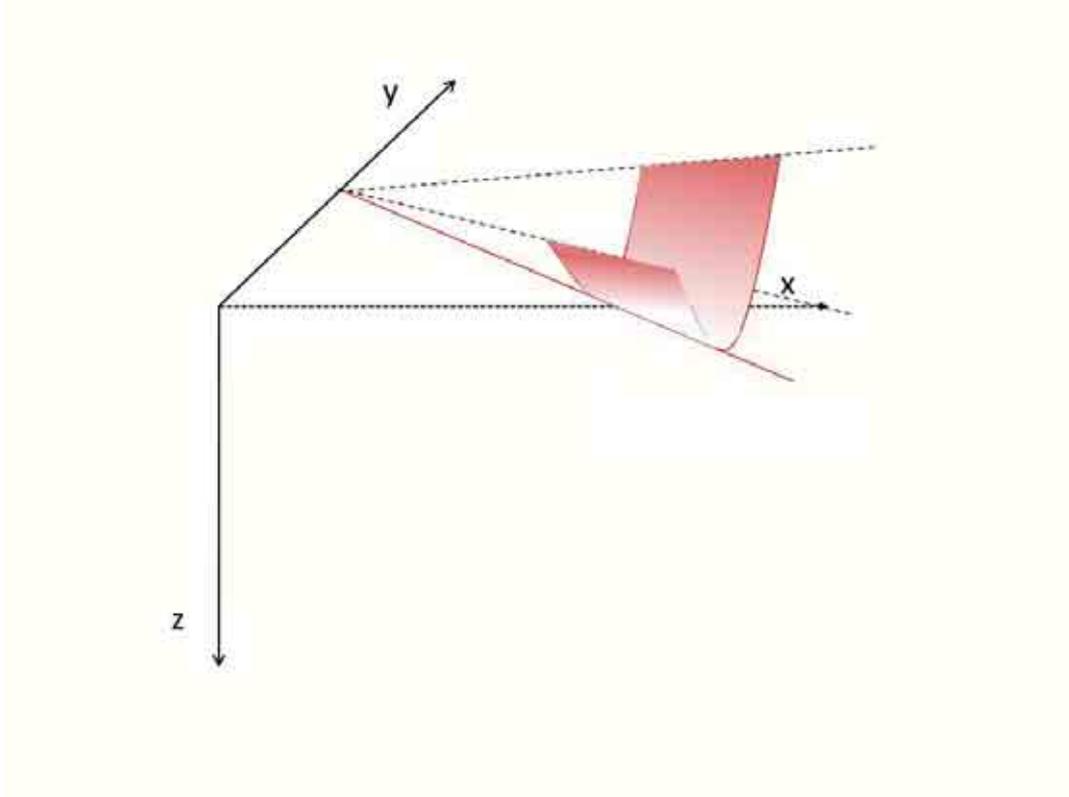


Figura 2.1: Propagação da frente uma onda cônica (em vermelho).

todas as linhas de aquisição  $y_s$  e sobre todas as frequências  $\omega$ . A expressão acima oferece algumas alternativas de execução em paralelo numa implementação prática. Pode-se migrar em separado cada linha de aquisição  $Y_s$  ou cada valor de  $p_x$  ou cada frequência  $\omega$ .

### 2.3.2 Ondas planas

Pode-se usar também uma fonte de ondas planas 3D para migrar os dados com a geometria de aquisição zero azimuth descrita na seção anterior. Neste caso a equação que descreve a imagem migrada é (Duquet e Lailly [26]) :

$$I_{PW}(\mathbf{r}) = \int \int \int \frac{\omega^2}{4\pi^2} S_{PW}^*(\mathbf{r}, p_x, p_y, \omega) R_{PW}(\mathbf{r}, p_x, p_y, \omega) dp_x dp_y d\omega. \quad (2.15)$$

Na equação 2.15  $p_x$  e  $p_y$  são as componentes  $x$  e  $y$  do vetor vagarosidade da fonte na superfície. O campo  $R_{PW}(\mathbf{r}, p_x, p_y, \omega)$  é a extrapolação inversa em profundidade do campo de registrado de ondas cônicas deslocado no tempo de acordo com a linha de aquisição, conforme a seguinte equação:

$$R_{PW}(x_r, y_s, p_x, p_y, \omega) = R_{PW}(x_r, y_s, p_x, \omega) e^{-i\omega y_s p_y}, \quad (2.16)$$

onde  $R_{PW}(x_r, y_s, p_x, \omega)$  é o *slant stack* do dado uma linha de aquisição de dados na posição  $y_s$ .

Foi mostrado (Duquet e Lailly [26]) que a tanto migração de pontos de tiro, como a migração de ondas cônicas e a migração de ondas planas 3D produzem a mesma imagem migrada, desde que a condição de imagem seja devidamente adaptada para cada caso. Esta afirmação é válida para dados e valores de  $(p_x, p_y)$  continuamente distribuídos. Na prática, para dados discretos, artefatos poderão aparecer como ruídos, mas tipicamente sem prejudicar a imagem.

# Capítulo 3

## Feixes gaussianos

### 3.1 Introdução

A migração Kirchhoff (Schneider [39]) ainda é a mais utilizada na indústria do petróleo. Em relação aos métodos chamados de *wave-equation* ela tem, entre outras, a vantagem da eficiência. A migração Kirchhoff é baseada numa aproximação de altas frequências da solução da equação da onda. O algoritmo usa os tempos de propagação de raios que partem da fonte pontual, propagam-se em sub-superfície, refletem numa interface, e são registrados por receptores na superfície. Neste processo está implícita a utilização de raios, de acordo com a aproximação de altas frequências. Este método é capaz de lidar com variações verticais e horizontais de velocidade, e de produzir imagens de refletores com alto mergulho. Além disso, pode ser implementado de forma eficiente em *clusters* de computadores.

Entretanto, a aproximação usada pode ser inadequada em várias situações práticas. Nas proximidades de cáusticas, por exemplo, a amplitude dos raios pode variar de forma abrupta e assumir valores muito grandes, produzindo imagens que não representam de forma correta o modelo geológico. Além desta dificuldade teórica, a migração Kirchhoff pode enfrentar outras dificuldades práticas. Por exemplo, pode haver pontos em profundidade que são conectados a uma fonte ou receptor por mais de um caminho, numa situação conhecida como *multi-pathing*. Embora isto não seja uma deficiência teórica, levar em conta cada caminho do raio reduz muito a eficiência e simplicidade do método.

A teoria dos feixes gaussianos resolve estas duas deficiências, e mantém a eficiência característica da migração Kirchhoff. A migração por feixes gaussianos é baseada na propagação de segmentos de ondas planas a partir da superfície. Estes segmentos podem ser considerados como ondas planas que foram multiplicadas por uma função gaussiana. A propagação destas ondas mantém uma localização espacial em profundidade em torno de um raio central. O campo propagado de várias ondas

é somado em profundidade para formar o campo propagado completo. Dependendo de como estes segmentos de ondas planas (que são as condições iniciais da propagação) estão distribuídos em superfície tem-se o campo de uma fonte pontual, uma fonte de ondas planas ou uma fonte qualquer com outras características.

Um feixe gaussiano é uma solução assintótica da equação da onda. As amplitudes estão concentradas em torno de um raio central e decaem como uma exponencial gaussiana na direção ortogonal a esse raio, daí o nome de feixe gaussiano. Como esta solução tem uma certa extensão espacial, e, além disso, é suave e finita, a soma das contribuições de vários feixes em um determinado ponto também é suave e finita. Isto resolve o problema das cáusticas. O problema das múltiplas chegadas tem uma solução natural: o campo de ondas é a soma de todos os feixes que contribuem para uma determinada posição em profundidade. Se estes feixes percorrem diferentes caminhos e todos são somados, então todas as chegadas são levadas em conta.

A propagação dos feixes gaussianos é analisada em 2 e 3 dimensões. Embora não haja diferenças significativas do ponto de vista conceitual, na prática há diferenças importantes nas equações a serem resolvidas e, principalmente, nos requisitos práticos da implementação computacional.

## 3.2 Feixes gaussianos em 2 dimensões

O primeiro passo para calcular um feixe gaussiano em duas dimensões é determinar a trajetória do seu raio central, resolvendo as equações do raio, que podem ser escritas como:

$$\frac{dx(s)}{ds} = v(s)p_x(s), \quad (3.1)$$

$$\frac{dz(s)}{ds} = v(s)p_z(s), \quad (3.2)$$

$$\frac{dp_x(s)}{ds} = -\frac{1}{v^2(s)} \frac{\partial v(x, z)}{\partial x}, \quad (3.3)$$

$$\frac{dp_z(s)}{ds} = -\frac{1}{v^2(s)} \frac{\partial v(x, z)}{\partial z}. \quad (3.4)$$

No sistema de equações acima  $s$  é o comprimento ao longo do raio,  $x(s)$  e  $z(s)$  são as coordenadas do raio,  $p_x(s)$  e  $p_z(s)$  são as componentes do vetor vorticidade ao longo do raio,  $v(x, z)$  é a velocidade do meio e  $v(s) = v[x(s), z(s)]$  é a velocidade ao longo do raio. O sistema de equações diferenciais ordinárias acima pode ser integrado usando-se, por exemplo, o método de Runge-Kutta (Press et al. [40]).

O tempo ao longo do raio é obtido integrando a equação:

$$\frac{d\tau(s)}{ds} = \frac{1}{v(s)}. \quad (3.5)$$

Após a determinação da trajetória do raio central resolvendo as equações acima, deve-se calcular duas funções complexas ao longo do raio central  $P(s)$  e  $Q(s)$  resolvendo o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dQ(s)}{ds} = v(s)P(s), \quad (3.6)$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = -\frac{1}{v^2(s)} \frac{\partial^2 v(s, n)}{\partial n^2} Q(s). \quad (3.7)$$

Nas equações acima a variável  $n$  é a distância perpendicular ao raio a partir do ponto  $s$ . A figura 3.1 ilustra a relação entre as coordenadas cartesianas  $(x, z)$  e as coordenadas do raio  $(s, n)$ .

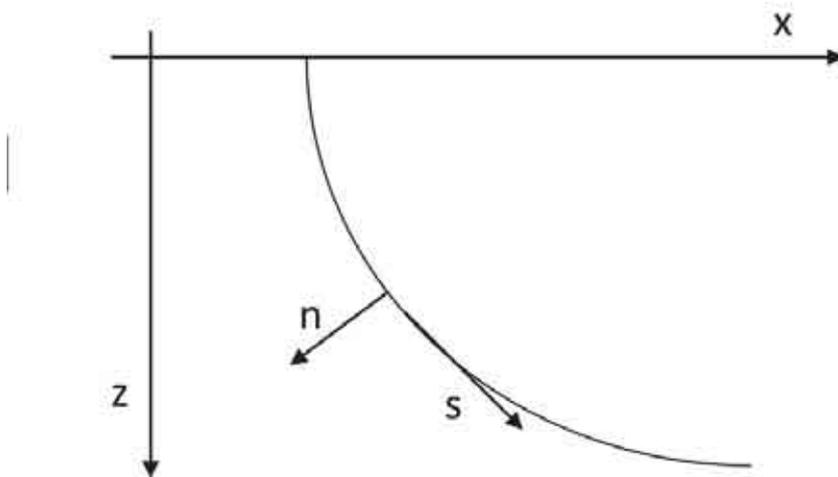


Figura 3.1: Relação entre as coordenadas centradas no raio  $(s, n)$  e as coordenadas cartesianas  $(x, z)$ .

Calculadas as funções  $\tau(s)$ ,  $P(s)$ ,  $Q(s)$  e  $v(s)$  é possível escrever a solução do campo de ondas de um feixe gaussiano no sistema de coordenadas centrado no raio:

$$u(s, n, \omega) = \sqrt{\frac{v(s)}{Q(s)}} e^{i\omega\tau(s) + \frac{i\omega}{2} \frac{P(s)}{Q(s)} n^2}. \quad (3.8)$$

A escolha das condições iniciais do sistema de equações diferenciais determina a estabilidade e o decaimento exponencial do feixe ao longo da coordenada  $n$ . Para que isso ocorra é necessário que :

$$|Q(0)| \neq 0, \quad (3.9)$$

$$\Im\left[\frac{P(0)}{Q(0)}\right] > 0. \quad (3.10)$$

Dadas estas condições, pode-se mostrar (Cerveny [41]) que elas se manterão para qualquer  $s > 0$ . Desta forma a condição da equação 3.9 garante que não haverá singularidades na expressão do feixe gaussiano. Na equação 3.8 o argumento da exponencial tem dois termos. O primeiro,  $i\omega\tau(s)$ , é um deslocamento de fase que depende do tempo percorrido ao longo do raio central. No segundo termo,  $\Re[n^2P(s)/(2Q(s))]$  é também um tempo que depende da distância perpendicular ao raio central. Este tempo é adicionado ao tempo do raio central. Como  $P$  e  $Q$  são funções complexas, a exponencial terá também um termo com uma parte real. Como  $\Im[P(s)/Q(s)] > 0$ , o termo  $\exp[-n^2\omega\Im[P(s)/(2Q(s))]]$  descreve um decaimento exponencial de amplitude perpendicular ao raio central. Observa-se também que a amplitude decai mais rapidamente quanto maior for a frequência.

Segundo Hill [11] uma escolha conveniente das condições para as funções  $P$  e  $Q$  é:

$$P(0) = \frac{i}{v(0)}, \quad (3.11)$$

$$Q(0) = \frac{\omega_r w_0^2}{v(0)}. \quad (3.12)$$

Nas equações acima  $\omega_r$  é uma frequência de referência e  $w_0$  é a largura inicial do feixe.

A equação 3.8 com as condições iniciais 3.11 e 3.12 descreve um campo de ondas que é plano no seu ponto de origem  $s = 0$ . Para tempos diferentes de zero, a onda perde esse seu caráter e passa a ter sua forma determinada pelo campo de velocidade do meio por onde ela se propaga. Na figura 3.2 é mostrado o campo de ondas em vários instantes de tempo. Sua curvatura aumenta com o tempo de propagação, bem como sua largura, mas o campo não perde seu caráter de localização em torno do feixe central. No Apêndice C calcula-se analiticamente o campo de ondas em coordenadas cartesianas para um caso simples de meio homogêneo e propagação vertical.

É possível descrever a propagação de uma onda inicialmente plana na superfície através de uma soma de feixes gaussianos. De acordo com Hill [11] esta soma é dada por:

$$u(x, z, \omega) = \sum_m \varphi_m \sqrt{\frac{v_m(s)}{Q_m(s)}} e^{i\omega\tau_m(s) + \frac{i\omega}{2} \frac{P_m(s)}{Q_m(s)} n^2}. \quad (3.13)$$

Na expressão acima o índice  $m$  identifica um feixe gaussiano. O peso  $\varphi_m$  é dado por:

$$\varphi_m = a \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \frac{\cos \theta}{v(0)}} e^{i\omega p_x x_m}, \quad (3.14)$$

onde  $a$  é a distância entre os raios centrais de cada feixe na superfície,  $\theta$  é o ângulo do raio com a vertical na superfície,  $p_x$  é a componente horizontal do vetor vagarosidade do raio na superfície e  $x_m$  é a posição inicial do raio na superfície.

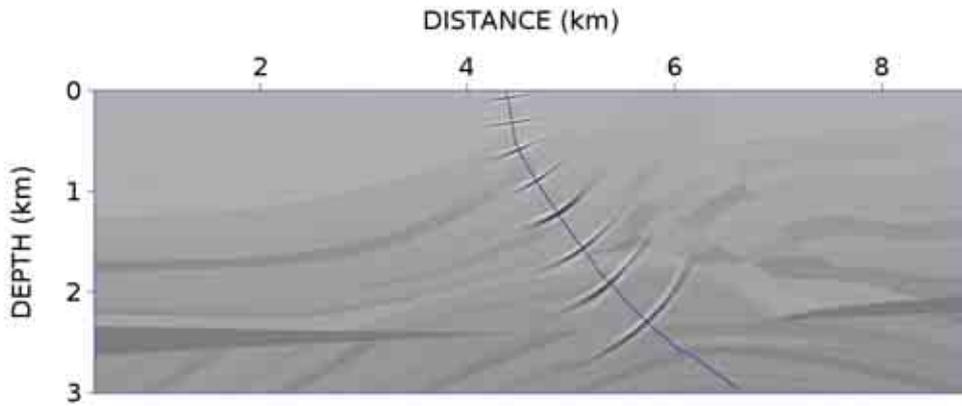


Figura 3.2: Propagação de um feixe gaussiano. A linha azul é o raio central e o fundo é o modelo de velocidades.

Hill [11] mostrou que a separação entre os feixes na superfície deve obedecer à seguinte relação:

$$a < \frac{2w_0}{\cos \theta} \sqrt{\frac{\omega_r}{\omega}}. \quad (3.15)$$

Além disso, a largura inicial do feixe deve ser aproximadamente:

$$w_0 = \frac{2\pi\bar{V}}{\omega_r}. \quad (3.16)$$

Na equação 3.16,  $\bar{V}$  é a média das velocidades do modelo.

### 3.3 Feixes gaussianos em 3 dimensões

A propagação de feixes gaussianos em três dimensões tem as mesmas características da propagação em duas dimensões: o feixe tem uma extensão em torno do seu raio

central, com a amplitude decaindo como uma curva gaussiana. Matematicamente, entretanto, as equações são bem mais complexas. As equações são escritas, como em duas dimensões, em um sistema de coordenadas centrado no raio. Somente no momento da aplicação dos feixes gaussianos em um problema real a transformação para o sistema cartesiano é feita.

Como em duas dimensões, o primeiro passo é resolver as equações do raio central:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\mathbf{p}, \quad (3.17)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla(1/v), \quad (3.18)$$

onde  $v$  é a velocidade e  $\mathbf{p}$  é o vetor vagarosidade.

O tempo  $\tau(s)$  ao longo do raio é dado por:

$$\frac{d\tau}{ds} = 1/v. \quad (3.19)$$

Enquanto que em duas dimensões a definição de um sistema de coordenadas centrado no raio é natural, em três dimensões há infinitas perpendiculares em um determinado ponto do raio. Devem-se escolher duas direções particulares, perpendiculares entre si e ao raio como direções de vetores unitários ( $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ ). Então as coordenadas centradas no raio são  $(s, q_1, q_2)$ , com  $s$  a distância ao longo do raio, e  $q_1$  e  $q_2$  as distâncias nas direções dos vetores unitários  $\hat{\mathbf{e}}_1$  e  $\hat{\mathbf{e}}_2$ , respectivamente.

A escolha dos vetores  $\hat{\mathbf{e}}_1$  e  $\hat{\mathbf{e}}_2$  em um determinado ponto do raio não é suficiente para definir o sistema de coordenadas em todos os pontos. Pode-se mostrar (Cerveny [41]) que estes vetores sofrem uma torção ao longo do raio, isto é, embora eles continuem formando um sistema ortogonal de coordenadas, suas direções mudam ao longo do raio de acordo com o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_1}{ds} = (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \nabla v)\mathbf{p}, \quad (3.20)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_2}{ds} = (\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \nabla v)\mathbf{p}. \quad (3.21)$$

A figura 3.3 ilustra este sistema de coordenadas.

Em duas dimensões  $P(s)$  e  $Q(s)$  são funções complexas escalares. Em três dimensões  $\mathbf{P}(s)$  e  $\mathbf{Q}(s)$  são matrizes de dimensão 2x2 também complexas. Elas se propagam de acordo com o seguinte sistema de equações diferenciais:

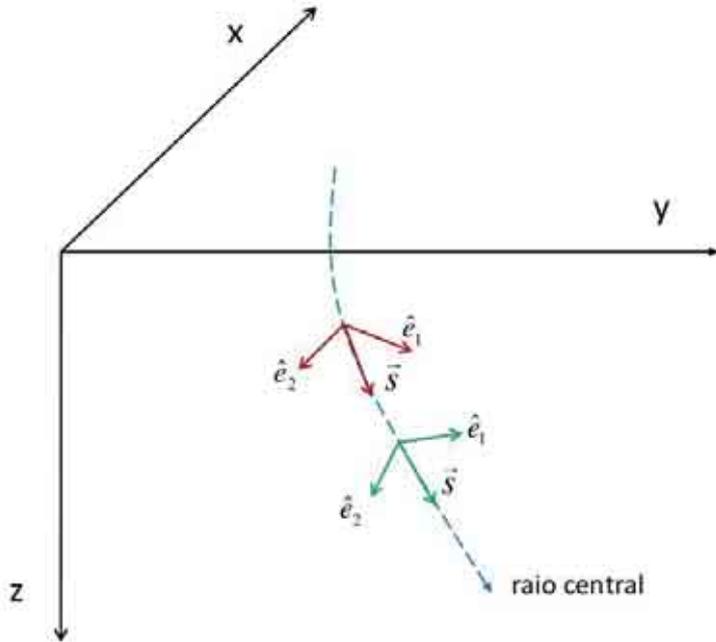


Figura 3.3: Sistema de coordenadas centrado no raio em três dimensões. O sistema depende da posição do feixe.

$$\frac{d\mathbf{Q}}{ds} = v\mathbf{P}, \quad (3.22)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{ds} = -(1/v^2)\mathbf{V}\mathbf{Q}, \quad (3.23)$$

onde  $\mathbf{V}$  é a matriz das segundas derivadas da velocidade na direção dos eixos  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$  do sistema de coordenadas do raio:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial q_2^2} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

A principal diferença entre as equações em duas e três dimensões é a descrição adicional da propagação do sistema de coordenadas. Além disso, as funções  $P$  e  $Q$  são agora matrizes. No apêndice D descrevem-se em detalhes as 29 equações diferenciais resultantes das expressões acima.

Resolvidas as equações acima para  $\tau$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  o feixe gaussiano em três dimensões é representado por:

$$u_{GB}(s, \mathbf{q}, \omega) = \sqrt{\frac{v}{\det \mathbf{Q}}} e^{i\omega\tau + \frac{i\omega}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{P} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{q}}. \quad (3.25)$$

Para que a solução acima não seja singular em nenhum ponto  $(s, \mathbf{q})$  as seguintes condições iniciais devem ser satisfeitas pelas matrizes  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ :

- $\det \mathbf{Q} \neq 0$ ;
- $\mathbf{P} \mathbf{Q}^{-1}$  deve ser simétrica;
- $\Im(\mathbf{P} \mathbf{Q}^{-1})$  deve ser uma matriz positiva definida.

Por exemplo, Hill [12] usou como condições iniciais de  $P$  e  $Q$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(0) &= \frac{\omega_r w_0^2}{v(0)} \mathbf{I}, \\ \mathbf{P}(0) &= \frac{i}{v(0)} \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade 2x2,  $\omega_r$  é uma frequência de referência e  $w_0^2$  é a largura inicial do feixe gaussiano.

Da mesma forma que em duas dimensões, um campo de ondas inicialmente plano na superfície também pode ser representado por uma soma de feixes gaussianos. De acordo com Hill [12] e Bleistein [42] o campo é:

$$U(\mathbf{r}, p_{x0}, p_{y0}, \omega) = \frac{\omega}{2\pi} L_x L_y \frac{p_{z0}}{v(0)} \sum_m \sum_n u_{GB}(\mathbf{r}, mL_x, nL_y, p_{x0}, p_{y0}, \omega), \quad (3.27)$$

onde  $L_x$  e  $L_y$  são as distâncias entre as posições iniciais dos feixes na superfície e  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  é o ponto onde o campo é calculado.

### 3.4 Limitações dos feixes gaussianos

O cálculo dos feixes gaussianos tem algumas limitações relacionadas principalmente a modelos de velocidades que apresentam descontinuidades ou grandes gradientes. Uma dessas limitações é relacionada ao traçado do raio central. A integração das equações diferenciais do raio pelo método de Runge-Kutta deve ser usada com cuidado nestas situações. Quando o problema for um alto gradiente de velocidade, pode-se reduzir o passo da integração. Embora leve mais tempo de computação, a dificuldade é resolvida. No caso de uma interface, a solução é parar a integração na interface, calcular o campo no outro lado da interface usando-se, por exemplo,

a lei de Snell, usar este resultado como nova condição inicial e voltar a integrar as equações por Runge-Kutta. Embora estes métodos resolvam os problemas, na prática eles geram algoritmos bastante complexos. Além disso, no caso de interfaces há a necessidade de interpretá-las, gerando problemas adicionais, como erros humanos e diferenças de interpretação entre as pessoas envolvidas. Mais adiante se utilizará uma solução que é prática e efetiva, a suavização do campo de velocidades, atenuando os gradientes e as interfaces.

Mesmo que essas limitações computacionais sejam resolvidas, os feixes gaussianos ainda são uma solução aproximada da equação da onda. Na presença de fortes variações de velocidade o campo longe do raio pode não ser bem aproximado. Todas as propriedades do feixe estão descritas no raio central através das funções  $\tau(s)$ ,  $P(s)$  e  $Q(s)$  e, portanto, são válidas apenas na medida em que as características do meio sejam aproximadamente homogêneas nas vizinhanças deste raio.

Além disso, a propagação do raio é essencialmente unidirecional. Desta forma, eventos como múltiplas não serão modelados por feixes gaussianos.

Finalmente, há a questão da amplitude. O espalhamento geométrico está contemplado na função de amplitude que acompanha o raio. Mas o raio não contém nenhuma informação sobre coeficientes de reflexão e partição de energia nas interfaces. Portanto, qualquer modelagem ou migração baseado em feixes gaussianos (pelo menos como descrito aqui nesta tese) não tratará de forma correta as amplitudes relevantes ao problema.

Uma discussão interessante sobre as qualidades e deficiências da migração por feixes gaussianos pode ser encontrada em Gray et al. [43].

# Capítulo 4

## Migração de dados de ondas planas por feixes gaussianos

### 4.1 Introdução

Nesta capítulo mostra-se que é possível migrar dados de ondas planas, isto é, dados registrados de fontes sintéticas de ondas planas, usando feixes gaussianos. Os feixes gaussianos são uma opção natural para migrar este tipo de dados, pois a extrapolação do campo da fonte tem uma expressão relativamente simples, não sendo necessário usar a representação da função de Green para extrapolá-lo. Já o campo do receptor deve ser extrapolado usando uma representação por feixes gaussianos das funções de Green, o que torna o processo mais complexo que o do campo da fonte. Entretanto, essa extrapolação pode ser feita apenas uma vez, pois ela pode ser reusada para diversos campos de receptores como veremos adiante.

A formulação final da migração de ondas planas por feixes gaussianos será semelhante àquela obtida por Hill [12]. Neste capítulo demonstra-se com detalhes como chegar nas equações da imagem migrada e como algumas aproximações podem ser feitas para tornar o processo mais rápido, embora menos preciso.

### 4.2 Cálculos em duas dimensões

O ponto de partida será a equação da condição de imagem, que repete-se aqui por conveniência.

$$I(\mathbf{r}) = \int \int \frac{|\omega|}{2\pi} S^*(\mathbf{r}, p_x, \omega) R(\mathbf{r}, p_x, \omega) dp_x d\omega. \quad (4.1)$$

Na equação acima  $\mathbf{r} = (x, z)$  é o ponto migrado,  $S$  é o campo extrapolado da fonte,  $R$  é o campo extrapolado do receptor e  $p_x$  é a componente horizontal do vetor vagarosidade da onda plana da fonte.

Como já foi visto no capítulo dos feixes gaussianos, o campo propagado a partir de uma fonte de ondas planas é:

$$S(\mathbf{r}, p_x, \omega) = \sum_m \varphi_{p_x, m} \sqrt{\frac{v_{p_x, m}(s)}{Q_{p_x, m}(s)}} e^{i\omega\tau_{p_x, m}(s) + \frac{i\omega}{2} \frac{F_{p_x, m}(s)}{Q_{p_x, m}(s)} n^2}. \quad (4.2)$$

Na equação acima o índice  $m$  está relacionado ao feixe gaussiano. Como cada feixe está relacionado ao seu feixe central, e este a uma única posição inicial em superfície, é conveniente usar esta posição como a variável de soma. Definindo,

$$u_{GB}(\mathbf{r}, x_m, p_x, \omega) = \sqrt{\frac{v_{p_x, m}(s)}{Q_{p_x, m}(s)}} e^{i\omega\tau_{p_x, m}(s) + \frac{i\omega}{2} \frac{F_{p_x, m}(s)}{Q_{p_x, m}(s)} n^2}. \quad (4.3)$$

Então,

$$S(\mathbf{r}, p_x, \omega) = \sum_{x_m} \varphi_{p_x, m} u_{GB}(\mathbf{r}, x_m, p_x, \omega). \quad (4.4)$$

Embora as equações acima descrevam a propagação de uma onda inicialmente plana na superfície, a medida que o campo se propaga em um meio heterogêneo a onda deixa de ser plana. Esse campo da fonte ao incidir em um ponto difrator é espalhado e parte dele é registrado pelos receptores na superfície. Esse campo em superfície,  $R(x, z = 0, p_x, \omega) = R(x, p_x, \omega)$ , pode ser inversamente propagado em sub-superfície pela integral de contorno (Schneider [39], Berkhout [44]).

$$R(\mathbf{r}, p_x, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \int \left[ \frac{\partial G^*(\mathbf{r}, x', z', \omega)}{\partial z'} \right]_{z'=0} R(x', p_x, \omega) dx', \quad (4.5)$$

onde  $G(\mathbf{r}, x', z', \omega)$  é a função de Green do meio.

A função de Green pode ser escrita como uma expansão de feixes gaussianos (Hill [12], Bleintein [42]):

$$G(\mathbf{r}, x', z', \omega) = \frac{i\omega}{2\pi} \int u_{GB}(\mathbf{r}, x', z', p'_x, \omega) \frac{dp'_x}{p'_z}. \quad (4.6)$$

Para expandir função de Green em feixes gaussianos foi preciso assumir que a velocidade é constante na superfície (Bleinstein [42]). No apêndice E mostra-se que:

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, x', z', \omega)}{\partial z'} \Big|_{z'=0} \approx -\frac{\omega^2}{2\pi} \int u_{GB}(\mathbf{r}, x', p'_x, \omega) dp'_x. \quad (4.7)$$

O campo extrapolado do receptor em termos de feixes gaussianos fica:

$$R(\mathbf{r}, p_x, \omega) = \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int \int u_{GB}^*(\mathbf{r}, x', p'_x, \omega) R(x', p_x, \omega) dp'_x dx'. \quad (4.8)$$

A expressão acima permite extrapolar o campo do receptor em profundidade usando feixes gaussianos. Nela está implícito que o feixe gaussiano é calculado a

partir da superfície,  $z' = 0$ . Porém em termos computacionais ela é muito ineficiente, pois o feixe gaussiano deve ser calculado em todas as posições iniciais  $x'$ . Seguindo o trabalho de Hill [11], [12] o integrando é dividido em regiões usando a seguinte expressão aproximada para a integral de uma gaussiana (Dwight [45]):

$$1 \approx \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi\gamma}} \sum_j e^{-\frac{(x'-x_j)^2}{2\gamma^2}}, \quad (4.9)$$

onde  $\Delta x$  é a distância entre os pontos  $x_j$  e  $\gamma$  está relacionado à frequência angular  $\omega$ , à largura inicial do feixe gaussiano  $w_0$ , e à frequência de referência  $\omega_r$ ,

$$\gamma = \sqrt{\frac{w_0^2 \omega_r}{\omega}}. \quad (4.10)$$

Inserindo a aproximação da unidade acima na integral do campo extrapolado do receptor tem-se:

$$R(\mathbf{r}, p_x, \omega) = \frac{\omega^2}{4\pi^2} \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi\gamma}} \int \int \sum_j u_{GB}^*(\mathbf{r}, x', p'_x, \omega) e^{-\frac{(x'-x_j)^2}{2\gamma^2}} R(x', p_x, \omega) dp'_x dx'. \quad (4.11)$$

O próximo passo é calcular os feixes gaussianos somente em torno dos pontos  $x_j$ . De acordo com o apêndice F,

$$u_{GB}^*(\mathbf{r}, x', p'_x, \omega) \approx u_{GB}^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x, \omega) e^{-i\omega p'_x (x'-x_j)}. \quad (4.12)$$

Substituindo a expressão acima na anterior fica-se com:

$$R(\mathbf{r}, p_x, \omega) = \frac{\omega^2}{4\pi^2} \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi\gamma}} \int \int \sum_j u_{GB}^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x, \omega) \times e^{-i\omega p'_x (x'-x_j)} e^{-\frac{(x'-x_j)^2}{2\gamma^2}} R(x', p_x, \omega) dp'_x dx'. \quad (4.13)$$

Para posição  $x_j$  o suporte do integrando está apenas em torno deste ponto. Ou seja, o valor do integrando é desprezível longe dos pontos  $x_j$ . Isto permite trocar as posições das integrais com a do somatório em  $j$ .

$$R(\mathbf{r}, p_x, \omega) = \frac{\omega^2}{4\pi^2} \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi\gamma}} \sum_j \int \int u_{GB}^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x, \omega) \times e^{-i\omega p'_x (x'-x_j)} e^{-\frac{(x'-x_j)^2}{2\gamma^2}} R(x', p_x, \omega) dp'_x dx'. \quad (4.14)$$

Agora pode-se calcular a integral em  $x'$  e definir:

$$\bar{R}(x_j, p'_x, p_x, \omega) = \frac{\omega^2}{4\pi^2} \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi\gamma}} \int e^{-i\omega p'_x(x'-x_j)} e^{-\frac{(x'-x_j)^2}{2\gamma^2}} R(x', p_x, \omega) dx'. \quad (4.15)$$

A equação acima representa um *slant-stack* do dado registrado  $R$  centrado na posição  $x_j$ , com inclinação dada por  $p'_x$  e limitado espacialmente pelo peso gaussiano  $\exp -(x' - x_j)^2$ .

Usando a definição acima o campo extrapolado fica:

$$R(\mathbf{r}, p_x, \omega) = \sum_j \int u_{GB}^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x, \omega) \bar{R}(x_j, p'_x, p_x, \omega) dp'_x. \quad (4.16)$$

Usando as expressões dos campos extrapolados da fonte 4.4 e do receptor 4.16 e aplicando a condição de imagem 4.1 resulta em:

$$I(\mathbf{r}, p_x) = \sum_m \sum_j \int \int \frac{|\omega|}{2\pi} \varphi_{p_x, m} u_{GB}^*(\mathbf{r}, x_m, p_x, \omega) \times u_{GB}^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x, \omega) \bar{R}(x_j, p'_x, p_x, \omega) dp'_x d\omega. \quad (4.17)$$

Substituindo a expressão para  $\varphi_m$  pela equação 3.14

$$I(\mathbf{r}, p_x) = \Delta x \frac{p_z}{\sqrt{2\pi}} \sum_m \sum_j \int \int \frac{|\omega|}{2\pi} \sqrt{\omega} \times e^{-i\omega p_x x_m} u_{GB_i}^*(\mathbf{r}, x_m, p_x, \omega) u_{GB}^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x, \omega) \bar{R}(x_j, p'_x, p_x, \omega) dp'_x d\omega. \quad (4.18)$$

A expressão 4.18 é a migração de dados de ondas planas no domínio da frequência. Sua eficiência pode ser melhorada se ela for realizada no domínio do tempo, eliminando a integral em  $\omega$ .

Usando a expressão para o feixe gaussiano, equação 3.8,

$$u_{GB}(\mathbf{r}, x_j, p'_x, \omega) = A(\mathbf{r}, x_j, p'_x) e^{i\omega T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)}, \quad (4.19)$$

onde,

$$A(\mathbf{r}, x_j, p'_x) = \sqrt{\frac{v_{x_j, p'_x}(s)}{Q_{x_j, p'_x}(s)}}, \quad (4.20)$$

e

$$T(\mathbf{r}, x_j, p'_x) = \tau_{x_j, p'_x}(s) + \frac{P_{x_j, p'_x}(s)}{Q_{x_j, p'_x}(s)} n^2. \quad (4.21)$$

O objetivo agora é calcular a integral em  $\omega$  da equação 4.18. Substituindo a equação acima naquela tem-se:

$$\int \frac{|\omega|\sqrt{\omega}}{2\pi} e^{-i\omega p_x x_m} u_{GB}^*(\mathbf{r}, x_m, p_x, \omega) u_{GB}^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x, \omega) \bar{R}(x_j, p'_x, p_x, \omega) d\omega =$$

$$A^*(\mathbf{r}, x_m, p_x) A^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x) \times$$

$$\int e^{-i\omega[p_x x_m + T^*(\mathbf{r}, x_m, p_x) + T^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x)]} \frac{|\omega|\sqrt{\omega}}{2\pi} \bar{R}(x_j, p'_x, p_x, \omega) d\omega. \quad (4.22)$$

Agora, como  $T$  é um tempo complexo pode-se escrever:

$$T = \Re T + i\Im T. \quad (4.23)$$

Substituindo a expressão acima no argumento da exponencial da integral na equação 4.22:

$$-i\omega[p_x x_m + T^*(\mathbf{r}, x_m, p_x) + T^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x)] =$$

$$-i\omega[p_x x_m + \Re T(\mathbf{r}, x_m, p_x) - i\Im T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Re T(\mathbf{r}, x_j, p'_x) - i\Im T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)] =$$

$$-i\omega[p_x x_m + \Re T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Re T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)] - \omega[\Im T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Im T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)]. \quad (4.24)$$

Substituindo o resultado acima na integral em  $\omega$  da equação 4.22 resulta em:

$$\int e^{-i\omega[p_x x_m + T^*(\mathbf{r}, x_m, p_x) + T^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x)]} \frac{|\omega|\sqrt{\omega}}{2\pi} \bar{R}(x_j, p'_x, p_x, \omega) d\omega =$$

$$\int e^{-i\omega[p_x x_m + \Re T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Re T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)]} e^{-\omega[\Im T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Im T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)]} \times$$

$$\frac{|\omega|\sqrt{\omega}}{2\pi} \bar{R}(x_j, p'_x, p_x, \omega) d\omega. \quad (4.25)$$

A equação acima é a transformada de Fourier inversa de

$$e^{-\omega[p_x x_m + \Im T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Im T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)]} \frac{|\omega|\sqrt{\omega}}{2\pi} \bar{R}(x_j, p'_x, p_x, \omega),$$

calculada no tempo  $p_x x_m + \Re T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Re T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)$ .

Calcular a integral acima em cada  $(x, z)$  não é prático, pois em cada ponto teríamos que calcular a transformada inversa de uma função diferente. No apêndice F mostra-se que uma aproximação razoável da integral acima é considerar o termo de amplitude

$$e^{-\omega[\Im T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Im T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)]},$$

como constante fixando a frequência  $\omega$  em uma frequência de referência  $\omega_r$ . Então a integral é a transformada inversa de Fourier de

$$\frac{|\omega|\sqrt{\omega}}{2\pi} \bar{R}(x_j, p'_x, p_x, \omega),$$

que é muito mais facilmente calculada por ser constante para todos os pontos  $(x, z)$ . Antes de finalizar o cálculo define-se

$$\bar{\bar{R}}(x_j, p'_x, p_x, \omega) = \frac{|\omega|\sqrt{\omega}}{2\pi} \bar{R}(x_j, p'_x, p_x, \omega). \quad (4.26)$$

Usando estes resultados para calcular a equação 4.18 resulta em:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, p_x) &= \Delta x \frac{p_z}{\sqrt{2\pi}} \sum_m \sum_j \int A^*(\mathbf{r}, x_m, p_x) A^*(\mathbf{r}, x_j, p'_x) \times \\ &e^{-\omega_r[\Im T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Im T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)]} \times \\ &\bar{\bar{R}}(x_j, p'_x, p_x, t = p_x x_m + \Re T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Re T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)) dp'_x. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Na integral acima a amplitude do integrando é controlado pela exponencial  $e^{-\omega_r[\Im T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Im T(\mathbf{r}, x_j, p'_x)]}$ . Ele será significativo se e somente se os feixes originados em  $x_m$  e  $x_j$  com inclinações iniciais  $p_x$  e  $p'_x$ , respectivamente, passarem ambos próximos do ponto de imagem  $\mathbf{r}$ . A imagem em um determinado ponto é formada pela soma de todos os feixes originados em todas as posições  $x_m$  e  $x_j$ , com inclinação inicial constante igual a  $p_x$  nas posições  $x_m$  e com todas as inclinações nas posições  $x_j$ . É desta forma que todas as chegadas são levadas em conta no algoritmo de migração por feixes gaussianos.

Na prática a integral em  $p'_x$  é substituída por um somatório em  $p'_{xk}$  que por simplicidade notacional vamos escrever como  $p_k$ . Então a expressão 4.27 fica:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, p_x) &= \Delta x \frac{p_z \Delta p_k}{\sqrt{2\pi}} \sum_m \sum_j \sum_{p_k} A^*(\mathbf{r}, x_m, p_x) A^*(\mathbf{r}, x_j, p_k) \times \\ &e^{-\omega_r[\Im T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Im T(\mathbf{r}, x_j, p_k)]} \times \\ &\bar{\bar{R}}(x_j, p_k, p_x, t = p_x x_m + \Re T(\mathbf{r}, x_m, p_x) + \Re T(\mathbf{r}, x_j, p_k)). \end{aligned} \quad (4.28)$$

A expressão a que se chega para a migração de ondas planas é muito semelhante a que Hill [12] chegou para dados em afastamento comum.

### 4.3 Cálculos em três dimensões

A migração de dados de ondas planas em três dimensões tem uma estrutura similar àquela que foi deduzida em duas dimensões. Por conta dessa semelhança esboça-se aqui apenas os seus pontos principais.

O ponto de partida é o mesmo da migração em duas dimensões, a condição de imagem, com a diferença que agora a fonte é caracterizada pelas duas componentes  $p_x$  e  $p_y$  do vetor vazarosidade.

$$I(\mathbf{r}) = \int \int \frac{\omega^2}{4\pi^2} S^*(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0, \omega) R(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0, \omega) d\mathbf{p}_0 d\omega. \quad (4.29)$$

Na equação 4.29 acima  $\mathbf{p}_0 = (p_{x0}, p_{y0})$  são as componentes iniciais do vetor vazarosidade que caracteriza a fonte de ondas planas e  $S$  e  $R$  são os campos da fonte e do receptor extrapolados em profundidade na posição  $\mathbf{r}$ , respectivamente.

O campo da fonte de ondas planas é expresso como uma soma de feixes gaussianos através da equação

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0, \omega) = \frac{\omega}{2\pi} \Delta \mathbf{L} \frac{p_z}{v(0)} \sum_m \sum_n u_{GB}(\mathbf{r}, \mathbf{L}_{mn}, \mathbf{p}_0, \omega), \quad (4.30)$$

onde  $\mathbf{L}_{mn} = (L_m, L_n)$  são as posições iniciais dos feixes na superfície.

O campo inversamente propagado do receptor em profundidade é:

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0, \omega) = - \int \int \frac{\partial G^*}{\partial z}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \Big|_{z=0} R(\mathbf{r}', \mathbf{p}_0, \omega) d\mathbf{r}', \quad (4.31)$$

onde  $\mathbf{r}' = (x_r, y_r, z_r = 0)$  são as posições dos receptores em superfície.

A função de Green em três dimensões pode ser expressa como uma expansão em feixes gaussianos.

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \approx \frac{i\omega}{2\pi} \int \int u_{GB}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', \omega) \frac{d\mathbf{p}'}{p_{z'}}. \quad (4.32)$$

Da mesma forma que em duas dimensões:

$$\frac{\partial G}{\partial z}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = - \frac{\omega^2}{2\pi} \int \int u_{GB}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', \omega) d\mathbf{p}'. \quad (4.33)$$

Substituindo 4.33 em 4.31 tem-se:

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0, \omega) = \frac{\omega^2}{2\pi} \int \int \int \int u_{GB}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', \omega) R(\mathbf{r}', \mathbf{p}_0, \omega) d\mathbf{r}' d\mathbf{p}'. \quad (4.34)$$

Aplica-se agora a decomposição do dado de entrada em *slant-stacks* locais usando a seguinte aproximação (Hill [12], Dwight [45]):

$$\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left| \frac{\omega}{\omega_r} \right| \left( \frac{a}{w_0} \right)^2 \sum_m \sum_n e^{-\left| \frac{\omega}{\omega_r} \right| \frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{L}|^2}{2w_0^2}} \approx 1. \quad (4.35)$$

Usando a equação 4.35 acima e inserindo-a na equação 4.34 tem-se:

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0, \omega) = \frac{i\omega}{2\pi} \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left| \frac{\omega}{\omega_r} \right| \left( \frac{a}{w_0} \right)^2 \int \int \int \int u_{GB}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', \omega) \times \\ \sum_m \sum_n e^{-\left| \frac{\omega}{\omega_r} \right| \frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{L}|^2}{2w_0^2}} R(\mathbf{r}', \mathbf{p}_0, \omega) d\mathbf{r}' d\mathbf{p}'. \quad (4.36)$$

O feixe gaussiano pode ser aproximado na posição  $\mathbf{L}$  da mesma forma que em duas dimensões:

$$u_{GB}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', \omega) = u_{GB}^*(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}', \omega) e^{-i\omega \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{L})}. \quad (4.37)$$

Substituindo a equação 4.37 acima em 4.36 resulta em:

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0, \omega) = \frac{i\omega}{2\pi} \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left| \frac{\omega}{\omega_r} \right| \left( \frac{a}{w_0} \right)^2 \int \int \int \int u_{GB}^*(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}', \omega) \times \\ \sum_m \sum_n e^{-\left| \frac{\omega}{\omega_r} \right| \frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{L}|^2}{2w_0^2}} e^{-i\omega \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{L})} R(\mathbf{r}', \mathbf{p}_0, \omega) d\mathbf{r}' d\mathbf{p}'. \quad (4.38)$$

Definindo o *slant-stack* local do dado a ser migrado como:

$$\bar{R}(\mathbf{L}, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}', \omega) = \frac{i\omega}{2\pi} \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left| \frac{\omega}{\omega_r} \right| \left( \frac{a}{w_0} \right)^2 \int \int e^{-\left| \frac{\omega}{\omega_r} \right| \frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{L}|^2}{2w_0^2}} e^{i\omega \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{L})} R(\mathbf{r}', \mathbf{p}_0, \omega) d\mathbf{r}'. \quad (4.39)$$

Agora o *slant-stack* é feito nas direções  $x$  e  $y$ . O campo inversamente propagado do receptor fica:

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0, \omega) = \int \int \sum_m \sum_n u_{GB}^*(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}', \omega) \bar{R}(\mathbf{L}, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}', \omega) d\mathbf{p}'. \quad (4.40)$$

Substituindo as expressões 4.30 e 4.40 na condição de imagem 4.29 resulta em :

$$I(\mathbf{r}) = \int \int \frac{\omega^2}{4\pi} \sum_{\mathbf{L}} \sum_{\mathbf{L}'} \int u_{GB}^*(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}_0, \omega) u_{GB}^*(\mathbf{r}, \mathbf{L}', \mathbf{p}', \omega) \bar{R}(\mathbf{L}', \mathbf{p}_0, \mathbf{p}', \omega) d\mathbf{p}' d\mathbf{p}_0 d\omega, \quad (4.41)$$

onde,  $\sum_{\mathbf{L}} \equiv \sum_m \sum_n$ .

A expressão acima é calculada no domínio da frequência. Podem-se fazer as

mesmas aproximações feitas em duas dimensões e chegar numa expressão para o cálculo da imagem migrada no domínio do tempo. Decompondo o feixe gaussiano em uma parte de amplitude e tempo complexos escreve-se:

$$u_{GB}(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}_0, \omega) = A(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}_0) e^{i\omega T(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}_0)}. \quad (4.42)$$

Substituindo a equação 4.42 acima em 4.41 e calculando da mesma forma que em duas dimensões obtém-se a expressão para a imagem migrada calculada no domínio do tempo.

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) = & \sum_{\mathbf{L}} \sum_{\mathbf{L}'} \sum_{\mathbf{p}'} \sum_{\mathbf{p}_0} A^*(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}_0, \omega) A^*(\mathbf{r}, \mathbf{L}', \mathbf{p}', \omega) \times \\ & e^{-\omega_r [\Im T(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}_0) + \Im T(\mathbf{r}, \mathbf{L}', \mathbf{p}')] } \times \\ & \overline{\overline{R}}(\mathbf{L}', \mathbf{p}_0, \mathbf{p}', t = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{L} + \Re T(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}_0) + \Re T(\mathbf{r}, \mathbf{L}', \mathbf{p}')), \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde,

$$\overline{\overline{R}}(\mathbf{L}', \mathbf{p}_0, \mathbf{p}', t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\omega^2}{4\pi} \overline{\overline{R}}(\mathbf{L}', \mathbf{p}_0, \mathbf{p}', \omega) \right]. \quad (4.44)$$

## 4.4 Exemplo de migração 2D em dados sintéticos

Os conceitos desenvolvidos no capítulo anterior são aplicados para migrar os dados sísmicos de ondas planas gerados sinteticamente com o modelo de velocidades de Marmousi. O modelo de Marmousi (Versteeg [46]) foi criado com o objetivo de testar algoritmos de determinação de velocidades em uma situação de alta complexidade geológica. Como se pode ver na figura 4.1 abaixo, o modelo contém altos contrastes de velocidade, falhas de alto mergulho, e outras características que o tornam um desafio para qualquer algoritmo. Estas características tornam esse modelo muito popular para testes para algoritmos de migração, e é dessa forma que ele é aqui utilizado.

O dado sísmico sintético foi gerado com um algoritmo de modelagem por diferenças finitas, usando a equação acústica da onda. Isto implica que vários eventos, como reflexões múltiplas internas e *turnig waves*, serão gerados. O algoritmo de feixes gaussianos apresentado neste trabalho não é capaz de modelar reflexões múltiplas. Além disso, para simplificar o algoritmo, optou-se por não incluir eventos com *turnig waves*.

O dado sintético foi gerado no domínio do tiro, com uma geometria *split-spread*, incluindo o afastamento nulo. Foram gerados 351 tiros espaçados de 24m. O intervalo de receptor é de 12m. O afastamento máximo é de 3600m. Na figura 4.2

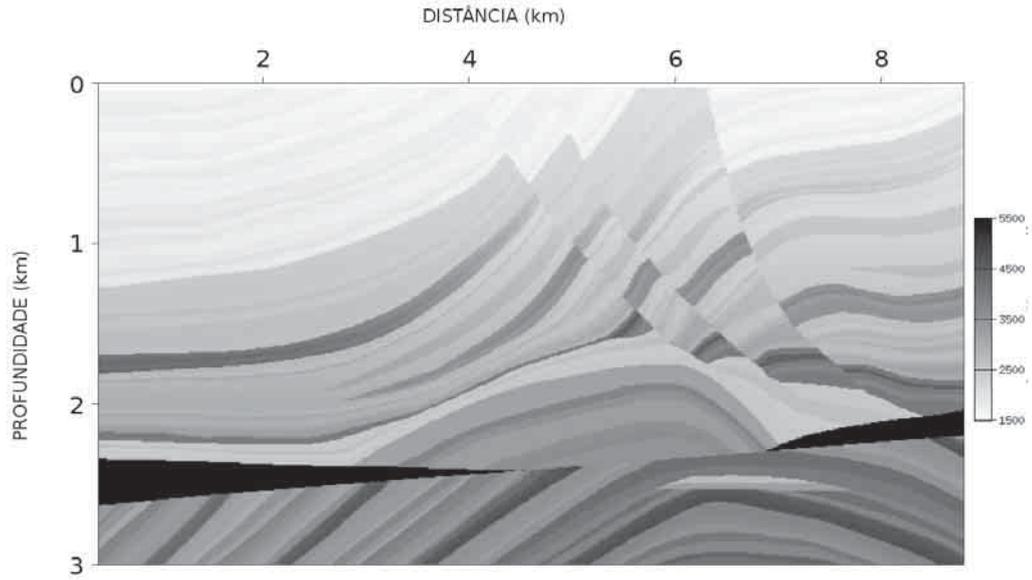


Figura 4.1: Modelo de velocidades de Marmousi.

está um exemplo de tiro usado neste trabalho. Nota-se uma grande assimetria das reflexões em um lado e outro do ponto de tiro, consequência da grande complexidade do modelo de velocidades.

Após a modelagem dos dados em ponto de tiro foi feita a síntese do dados de onda plana. A síntese foi feita no domínio do tiro comum, usando a equação abaixo. Conforme visto no apêndice B, resultado equivalente seria obtido no domínio do receptor comum.

$$R_{PW}(p_x, x_s, \omega) = \int R_{PS}(x_r, x_s, \omega) e^{-i\omega p_x x_r} dx_r. \quad (4.45)$$

Foram sintetizados dados para 101  $p_x$  diferentes, iniciando em  $p_x = -5 \times 10^{-4} s/m$  até  $p_x = 5 \times 10^{-4} s/m$ , com intervalo de  $\Delta p_x = 10^{-5} s/m$ . Nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5 são mostrados exemplos de dados de onda plana para  $p_x = -2 \times 10^{-4} s/m$ ,  $p_x = 0.0 s/m$  e  $p_x = 2 \times 10^{-4} s/m$ .

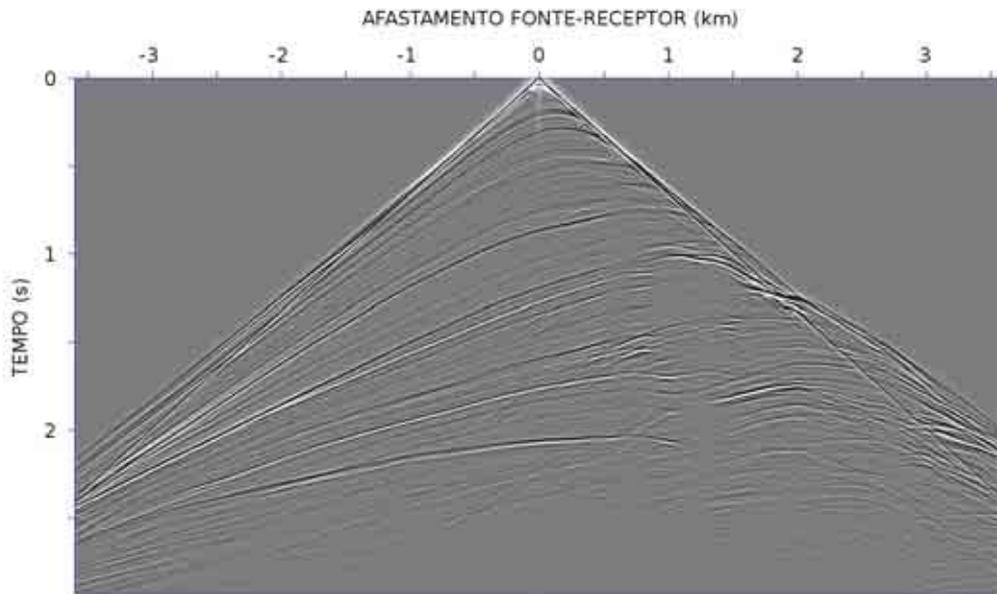


Figura 4.2: Ponto de tiro na posição 3640 m.

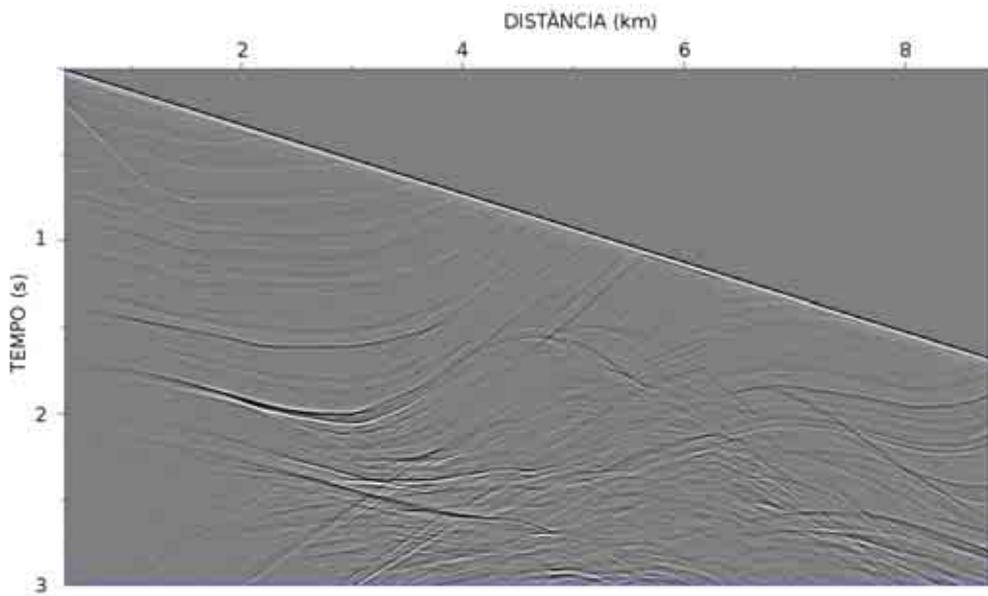


Figura 4.3: Dado sísmico com fonte de onda plana  $p_x = -2 \times 10^{-4} s/m$ .

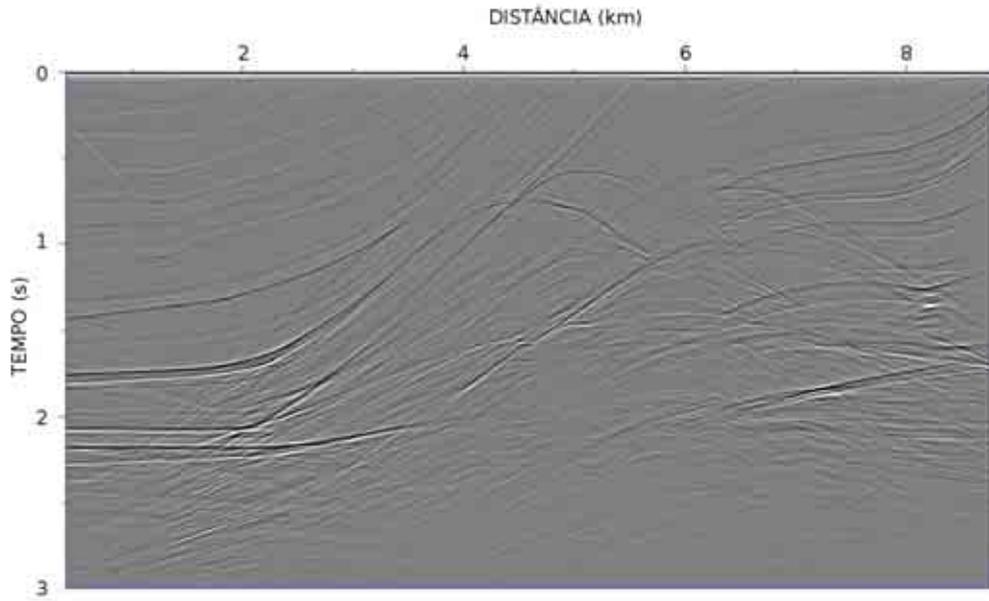


Figura 4.4: Dado sísmico com fonte de onda plana  $p_x = 0.0s/m$ .

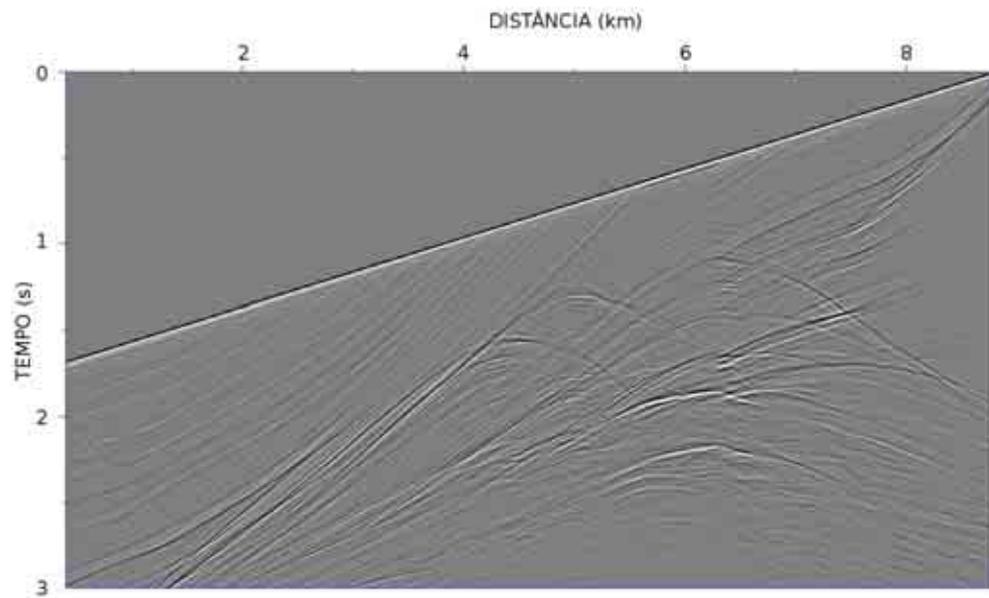


Figura 4.5: Dado sísmico com fonte de onda plana  $p_x = 2 \times 10^{-4}s/m$ .

Tendo o dado de entrada pode-se migrá-lo com o método dos feixes gaussianos descrito na seção anterior usando-se o seguinte algoritmo:

- Para cada  $p_x$  do dado de ondas planas registrado
  - Para cada posição inicial  $x_j$  do raio central

- \* Calcular o raio central, as funções  $P(s)$  e  $Q(s)$  e o tempo  $\tau(s)$
- Para cada  $p'_x$  no qual o dado de entrada é decomposto
  - Para cada posição inicial  $x_m$  do raio central
    - \* Decompor o dado de entrada em um *slant-stack* local centrado em  $x_m$  e com inclinação  $p'_x$
- Para cada  $p'_x$  no qual o dado de entrada é decomposto
  - Para cada posição inicial  $x_m$  do raio central
    - \* Calcular o raio central, as funções  $P(s)$  e  $Q(s)$  e o tempo  $\tau(s)$
- Para cada ponto  $(x, z)$  da imagem migrada
  - Para cada feixe da fonte com posição inicial  $x_j$ 
    - \* Para cada feixe do receptor com posição inicial  $x_m$  e inclinação  $p'_x$ 
      - Calcular o tempo complexo do feixe da fonte e do receptor em  $(x, z)$
      - Se a amplitude for significativa tomar amostra do dado de entrada correspondente na parte imaginária do tempo e somar na saída migrada

O algoritmo acima não lida com questões de eficiência, ou seja, quão rápido ele é executado numa implementação em um programa de computador. Na prática, quanto mais interno o *loop*, mais vezes suas operações serão executadas. Portanto, o cálculo do tempo complexo e a avaliação se a amplitude é significativa devem ser analisadas com mais cuidado na construção de um código mais eficiente.

O algoritmo acima pode ser dividido em quatro blocos, que podem ser executados de forma independente, com exceção do quarto que usa as informações dos três primeiros blocos. Isto permite várias estratégias de execução. Os dois primeiros blocos calculam os feixes gaussianos da fonte e do receptor. Eles podem ser calculados em qualquer ordem, em um programa serial ou em paralelo. Além disso, a transformação do dado em *slant-stacks* locais também pode ser calculada em série ou paralelo. Estes três primeiros blocos devem ser executados previamente em relação ao quarto bloco. Além disso o cálculo dos feixes gaussianos do receptor pode ser feito apenas uma vez para todos os  $p_x$  das fontes. Isto é uma vantagem em relação à migração por *downward continuation* que deve ser feita usando o dado sísmico como condição inicial.

Como já foi mencionado, a amplitude em um determinado ponto  $(x, z)$  devido a um feixe gaussiano da fonte e outro do receptor será significativa se e somente se

ambos os feixes passarem próximos deste ponto. Se um dos feixes está distante do ponto onde a correlação cruzada está sendo feita, sua contribuição será pequena, pois sua amplitude tem a característica de uma gaussiana, com um decaimento exponencial de amplitude. Isto permite escrever um código mais eficiente. Para cada feixe da fonte, calculam-se as posições  $(x, z)$  onde ele tem amplitude significativa. Faz-se o mesmo para os feixes do receptor. Marcando as posições mínimas e máximas de cada feixe por profundidade, pode-se eliminar a imensa maioria das correlações cruzadas e calcular diretamente somente as que realmente contribuem para a imagem. A figura 4.6 abaixo ilustra essa condição.

A equação 3.8 está escrita em um sistema de coordenadas centrado no raio. Para que se possa representar a onda no sistema cartesiano é necessária uma transformação de coordenadas. Nesta tese o algoritmo de transformação parte das coordenadas cartesianas  $(x, z)$  onde se deseja calcular o campo e busca as coordenadas do raio  $(s(x, z), n(x, z))$  correspondentes. O algoritmo que realiza esta transformação é detalhado no apêndice G. Nesta tese optou-se por calcular os valores de  $(s, n)$  para todos os pontos  $(x, z)$ . Outros autores, como Hill [12], sugerem que estes valores sejam calculados em apenas alguns pontos e interpolados. O algoritmo de transformação aqui exposto é bem mais eficiente que aquele usado por Hill, baseado no trabalho de Hale [47], permitindo uma maior precisão no cálculo.

Uma questão muito importante para o sucesso do método dos feixes gaussianos está na construção do raio central e das funções  $P$  e  $Q$ . Como viu-se, eles são obtidos resolvendo um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, e neste trabalho especificamente, pelo método de Runge-Kutta. Mas este método, assim como outros, tem dificuldades em situações de alto gradiente do campo de velocidades. Algumas soluções podem ser implementadas para manter a precisão do método, como por exemplo, diminuir o passo de integração, através de um algoritmo adaptativo como em Press et al. [40]. Para uma quantificação deste passo ver Cunha [48]. Outra solução é dividir o modelo de velocidade em regiões com pequenos gradientes de velocidade. Os raios seriam propagados até as fronteiras destas regiões onde seria aplicada diretamente a lei de Snell e outras condições de contorno e continuados na região seguinte com o método de Runge-Kutta usual. Desta forma a integração numérica não seria afetada pelos grandes gradientes de velocidade. Este método, entretanto, tem a desvantagem de necessitar uma descrição da posição de cada interface. Isso envolve interpretação de interfaces, o que pode ser tanto trabalhoso quanto impreciso, além de ser sujeito a variações de intérprete para intérprete.

Neste trabalho usou-se a suavização do campo de velocidades como forma de atenuar os gradientes. Foi utilizado um filtro triangular de 7 pontos tanto na direção horizontal quanto na vertical. Embora o resultado tenha mostrado que este filtro é essencial para produzir um bom resultado, na prática ele foi obtido por tentativa

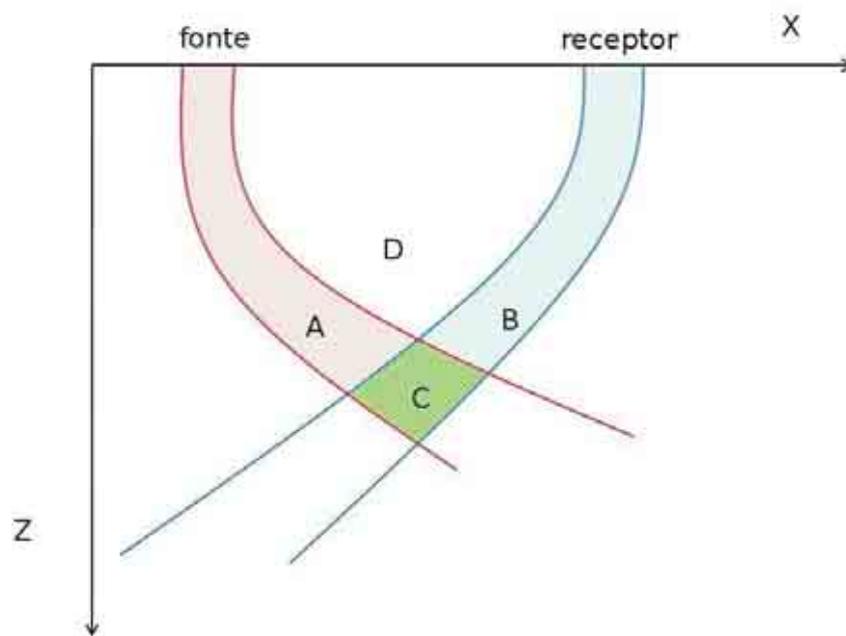


Figura 4.6: Ilustração da correlação cruzada entre os feixes da fonte e do receptor. A região A tem contribuição apenas do feixe da fonte, enquanto que a região B tem contribuição apenas do feixe do receptor. A região D não recebe contribuição de nenhum dos dois feixes. Portanto, não há imagem formada nestas regiões devido a estes feixes. Apenas a região C recebe contribuição dos dois feixes e nela haverá imagem formada.

e erro. Fica como sugestão para futuros trabalhos o estudo teórico de como obter um filtro de suavização adequado para atenuar os gradientes e estabilizar o traçado de raios. Na figura 4.7 é mostrado o campo de velocidades de Marmousi após a suavização. Observa-se que ele mantém os principais contrastes de forma qualitativa, mas parece estar desfocado. Embora não usando o campo original, o resultado com os feixes gaussianos é muito melhor com o campo suavizado.

Os parâmetros usados na migração por feixes gaussianos também determinam a qualidade do resultado e o tempo de execução do programa. As equações 3.15 e 3.16 foram usadas para determinar a distância entre os feixes na superfície e sua largura inicial. Na prática, foram testadas variações em torno dos valores obtidos. Por exemplo, foram testadas distância entre feixes desde 25 m até 200 m. Os mesmos valores foram testados para a largura inicial. As diferenças entre os resultados se dão especialmente no nível de ruídos. Outro parâmetro importante é a separação

angular entre os feixes usados na extrapolação do receptor. Foram usados 91 valores de  $p_x$  equiespaçados entre os ângulos  $[-80^\circ, 80^\circ]$ . Novamente, testes foram feitos com outras distribuições angulares.

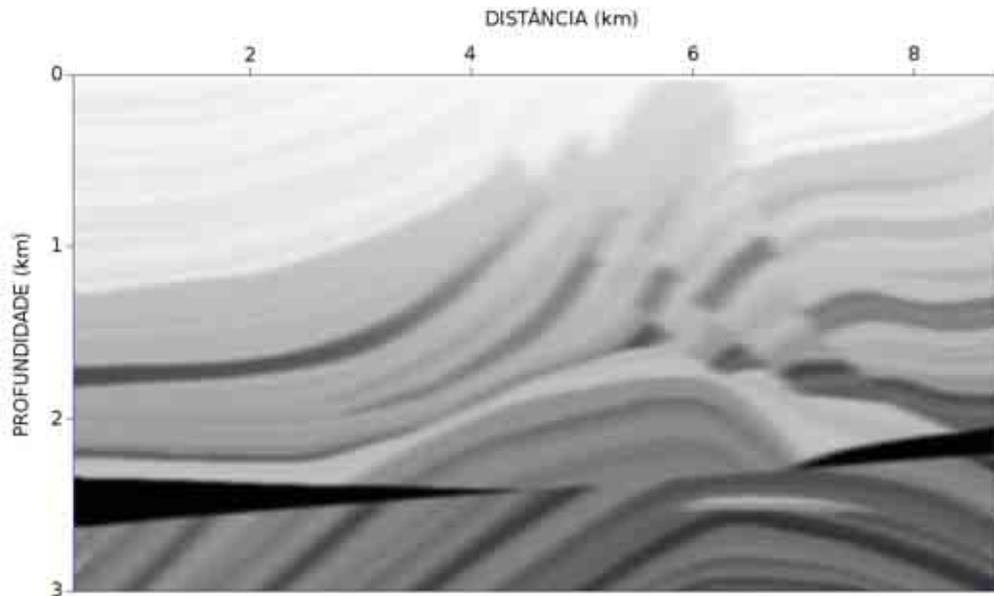


Figura 4.7: Campo de velocidades de Marmousi suavizado com filtro triangular de 7 pontos nas direções vertical e horizontal.

## 4.5 Resultados 2D

O algoritmo pode ser testado extrapolando uma onda plana na superfície e comparando o resultado com o obtido por outro método já testado. Neste trabalho compara-se o resultado obtido com os feixes gaussianos com aquele obtido por *downward continuation*.

A figura 4.8 mostra uma onda plana propagada por dois métodos: feixes gaussianos e *downward continuation*, e neste extrapolados com a velocidade suavizada usada nos feixes gaussianos (na figura 4.7) e com a velocidade original (figura 4.1). Os campos são apresentados em vários instantes de tempo (150 ms, 300 ms, 450 ms, 600 ms, 750 ms, 900 ms e 1050 ms). Os campos extrapolados por feixes gaussianos e *downward continuation* com as mesmas velocidades são cinematicamente semelhantes, com este último apresentando uma continuidade um pouco maior de eventos. Já o campo extrapolado por *downward continuation* com a velocidade original apresenta uma maior complexidade de eventos, refletindo a própria complexidade do modelo de velocidades.

É útil analisar também as trajetórias dos raios centrais dos feixes que formaram

a imagem da figura 4.8. A figura 4.9 mostra estes raios. Observa-se na região entre 4 e 6 km os raios centrais têm comportamento irregular, o que explica a complexidade do campo propagado. Observa-se também as várias situações de múltiplas chegadas, caracterizadas pelo cruzamento de um ou mais raios. Como o algoritmo de construção do campo propagado soma as contribuições de todos os feixes, estas múltiplas chegadas são todas levadas em conta.

Outra observação que pode ser feita é que a magnitude do campo de ondas é menor na região entre 4 e 6 km que nas demais. A figura 4.9 mostra o porquê. Nesta região a densidade de raios é menor que nas outras, produzindo um campo total menor. Em outros casos, como modelos de corpos de sal, pode haver grandes regiões sem nenhum raio, as chamadas regiões de sombra, produzindo uma amplitude nula. Isto resulta numa seção sísmica de aspecto pouco usual, pois outros algoritmos, como o de *downward continuation* por exemplo, produzirão ao menos um ruído numérico.

Os dois métodos usados para fazer a comparação trabalham essencialmente com as mesmas hipóteses sobre a propagação do campo. A primeira é que a propagação é feita de forma unidirecional, com profundidades crescentes. No caso dos feixes gaussianos isto significa que o raio central não se propaga para cima, embora, em princípio, nada o impedisse de fazê-lo. A outra, até como consequência da primeira, é que não são modeladas reflexões múltiplas entre as camadas.

As figuras 4.8 e 4.9 são importantes para validar o algoritmo de feixes gaussianos. Os dados sísmicos são agora migrados de acordo com o algoritmo descrito anteriormente. O campo de velocidades usado para calcular os feixes gaussianos é aquele suavizado. O campo usado para migrar com o algoritmo de *downward continuation* é o não suavizado, pois este não tem os mesmos problemas com os gradientes de velocidade. As figuras 4.10, 4.11 e 4.12 são as migrações com feixes gaussianos dos dados sísmicos apresentados nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5, respectivamente

A figura 4.13 apresenta o empilhamento de todos os planos de  $p_x$ , migrados com feixes gaussianos e *downward continuation*. Os resultados de ambas migrações são muito semelhantes. Os refletores estão posicionados nas profundidades corretas. As amplitudes, entretanto, diferem significativamente. A migração com feixes gaussianos apresenta uma amplitude menor que a feita com o algoritmo de *downward continuation* na parte mais profunda da seção, especialmente a estrutura anticlinal localizada aproximadamente na profundidade 2.5 km e na posição horizontal entre 6 e 7 km. Ela está bem imageada com a migração *downward continuation* e bem mais fraca na migração com feixes gaussianos. Isto pode ser explicado, em parte, pela densidade menor de raios que atingem esta região.

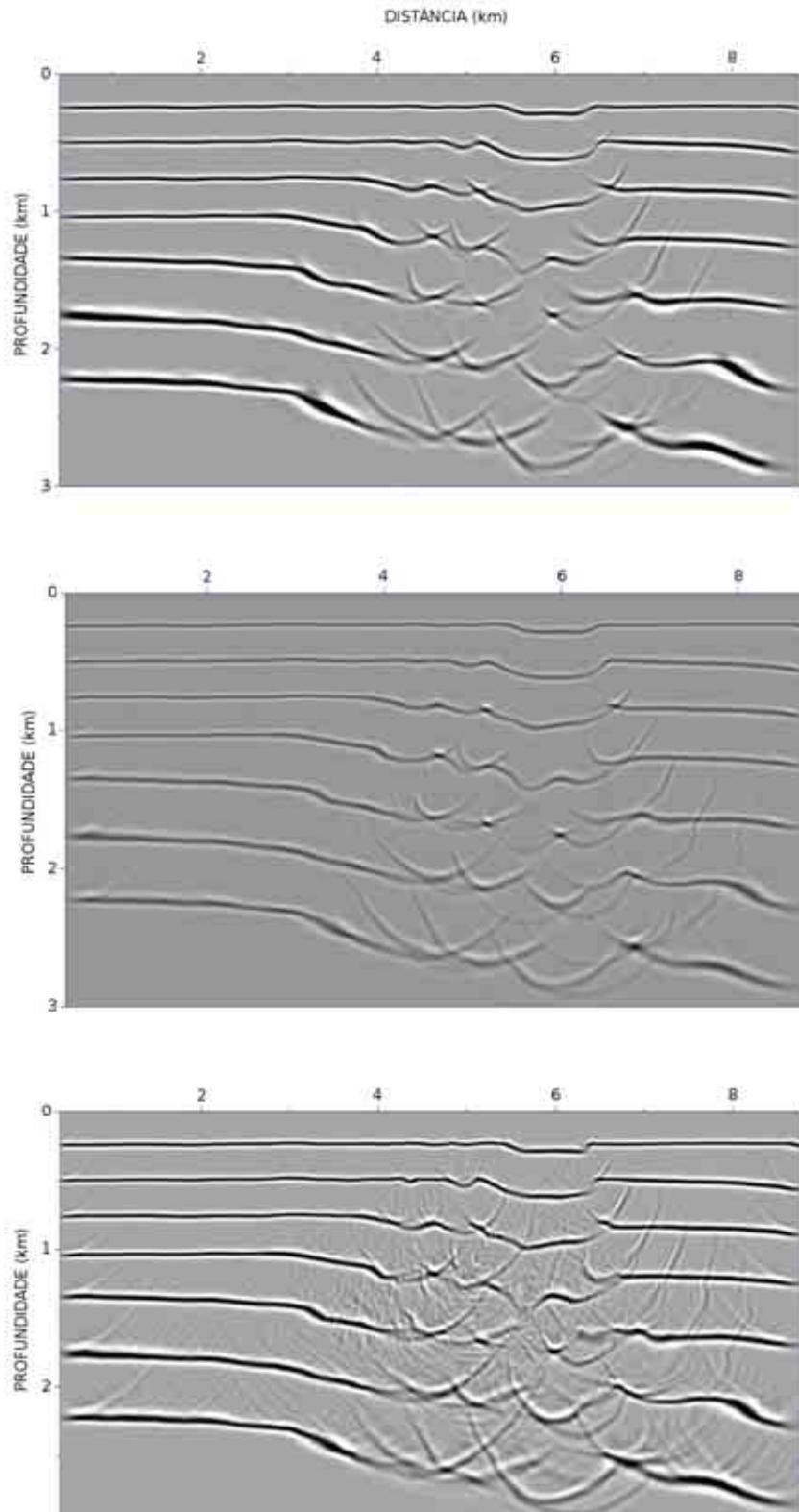


Figura 4.8: Propagação de uma onda plana com  $p_x = 0$  ms/m na superfície através do modelo de Marmousi com o método dos feixes gaussianos (acima) e *downward continuation* com o campo de velocidades suavizado (figura 4.7), no centro, e com o campo de velocidades original (figura 4.1), embaixo

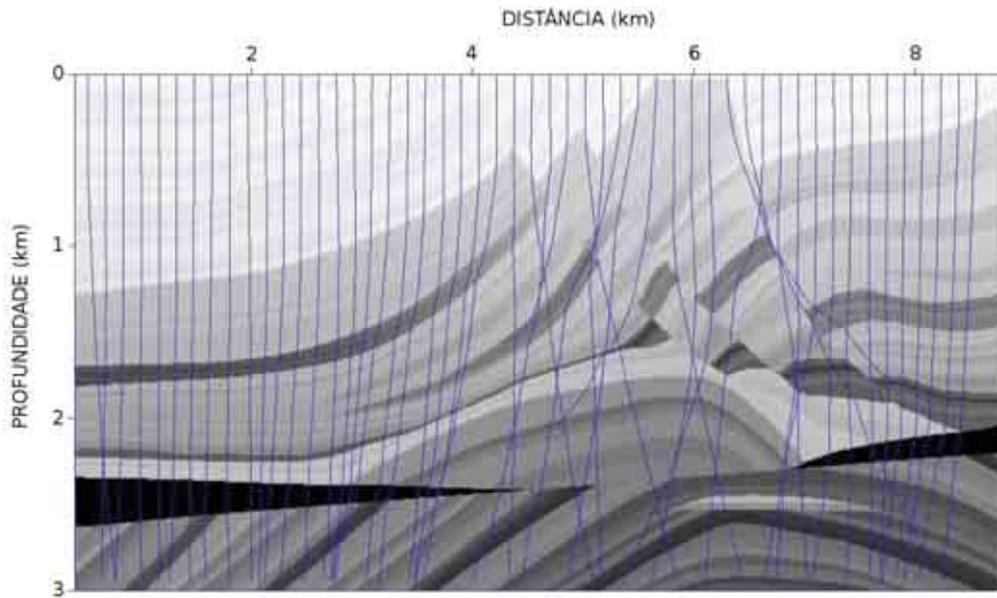


Figura 4.9: Raios centrais dos feixes gaussianos utilizados para calcular o campo de ondas propagado em profundidade da figura 4.8.

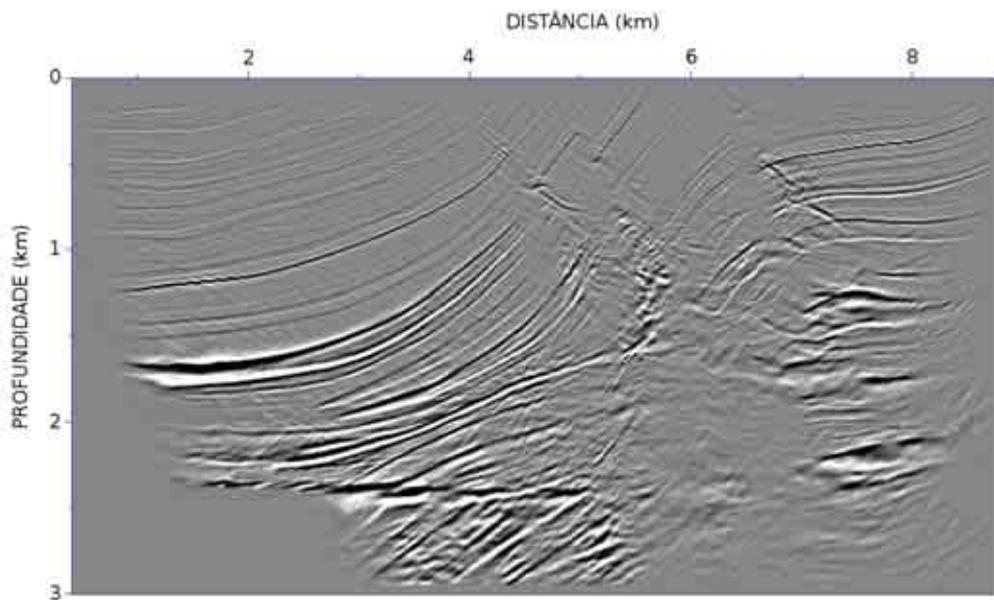


Figura 4.10: Migração por feixes gaussianos de dado sísmico com fonte de onda plana  $p_x = -2 \times 10^{-4} s/m$ .

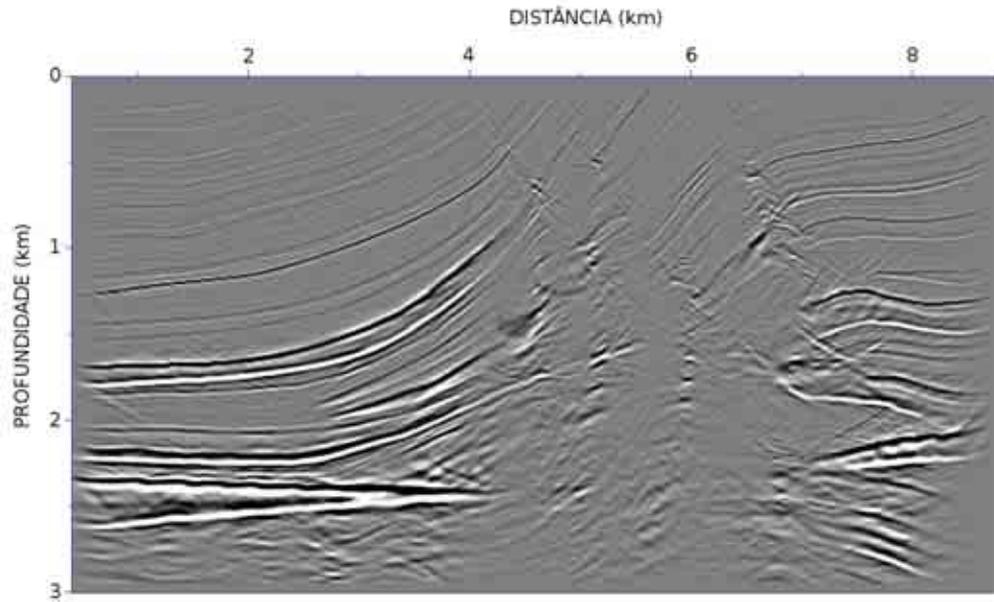


Figura 4.11: Migração por feixes gaussianos de dado sísmico com fonte de onda plana  $p_x = 0.0s/m$ .

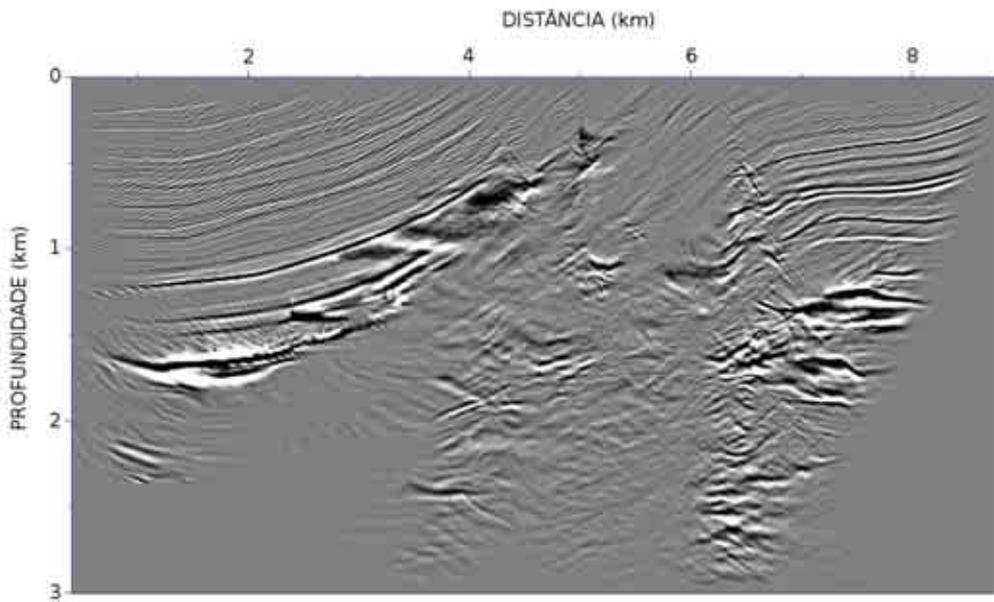


Figura 4.12: Migração por feixes gaussianos de dado sísmico com fonte de onda plana  $p_x = 2 \times 10^{-4}s/m$ .

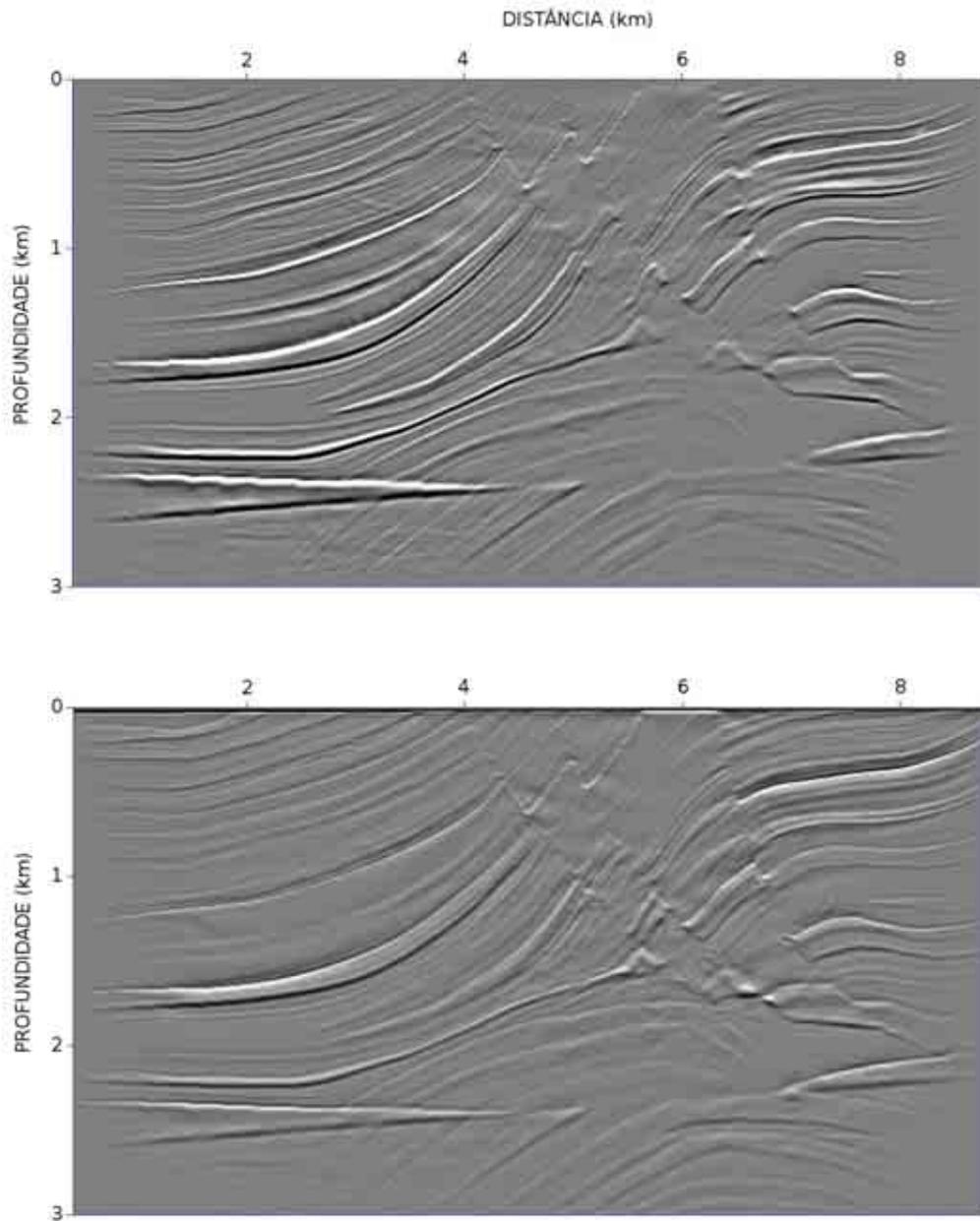


Figura 4.13: Migração dos dados de ondas planas com algoritmo de feixes gaussianos (superior) e *downward continuation* (inferior).

## 4.6 Exemplo de migração 3D em dados reais

A migração de ondas planas por feixes gaussianos é aplicada também em um dado real adquirido na costa brasileira. Dados reais diferem dos sintéticos em vários aspectos. Primeiro, enquanto em dados sintéticos o modelo de velocidades é em geral conhecido, nos dados reais ele é estimado e a estimativa pode ser feita de várias formas. Neste trabalho o campo de velocidades foi previamente estimado

com um algoritmo baseado em um método de migração diferente do método de feixes gaussianos aqui apresentado. Embora esta não seja a situação ideal, isto não deve ter impacto relevante nos resultados.

Outra diferença é que enquanto em dados sintéticos as posições de fontes e receptores são em geral regularmente distribuídas, em dados reais isso não acontece. Isso pode degradar a qualidade da imagem, pois alguns algoritmos esperam regularidade nas posições dos dados. Por exemplo, algoritmo que usam métodos de diferenças finitas esperam dados posicionados em um *grid*. Com feixes gaussianos isto também ocorre, embora em situações específicas a este tipo de algoritmo.

Dados reais apresentam ruídos, especialmente de natureza ambiental. Por exemplo, o dado marítimo pode ser adquirido em um mar agitado, com muitas ondas, gerando um ruído conhecido como *swell noise*. Ou na área onde o dado é registrado há outro tipo de atividade, como por exemplo plataformas de produção, com motores e outros equipamento geradores de ruídos. Dados sintéticos podem também apresentar ruídos, embora estes sejam de natureza numérica de ou efeitos de bordas.

Finalmente, dados reais podem ser adquiridos com especificações diferentes daquelas usadas nas hipóteses da solução do problema. Por exemplo, o algoritmo de migração pode ter sido desenvolvido para uma geometria com dados adquiridos com azimute zero, ou então, registrados também com afastamento nulo. Na prática estas condições são difíceis ou impossíveis de serem obtidas.

Na figura 4.14 é apresentado um exemplo dos dados utilizados neste trabalho, provenientes de um cabo de um tiro. Pode-se observar um ruído de baixa frequência presente em todos os traços desde o tempo inicial até o tempo final do registro. Provavelmente este ruído é do tipo *swell noise*.

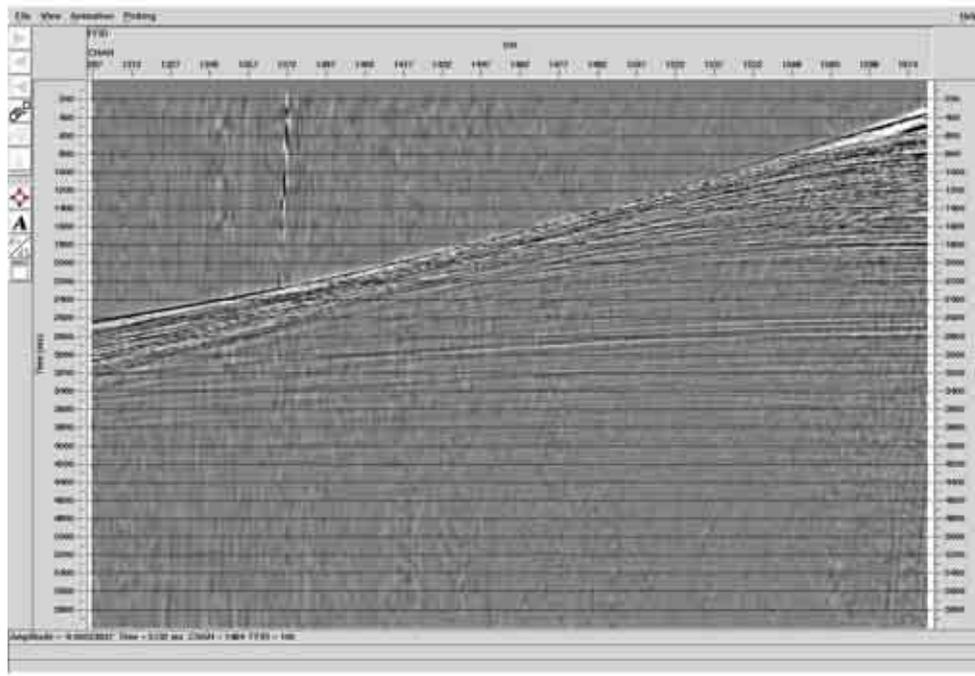


Figura 4.14: Dados de um cabo de um tiro.

O dado real que foi utilizado neste trabalho provém de um dado marítimo adquirido com as seguintes especificações (ver também a figura 4.15) :

- Intervalo de amostragem : 4 ms
- Comprimento do registro :: 6 s
- Número de cabos : 10
- Distância entre cabos : 50 m
- Número de receptores : 324 por cabo
- Intervalo de receptores : 12.5 m
- Intervalo de tiros : 18.75 m
- Afastamento mínimo : 158 m
- Afastamento máximo : 4200 m

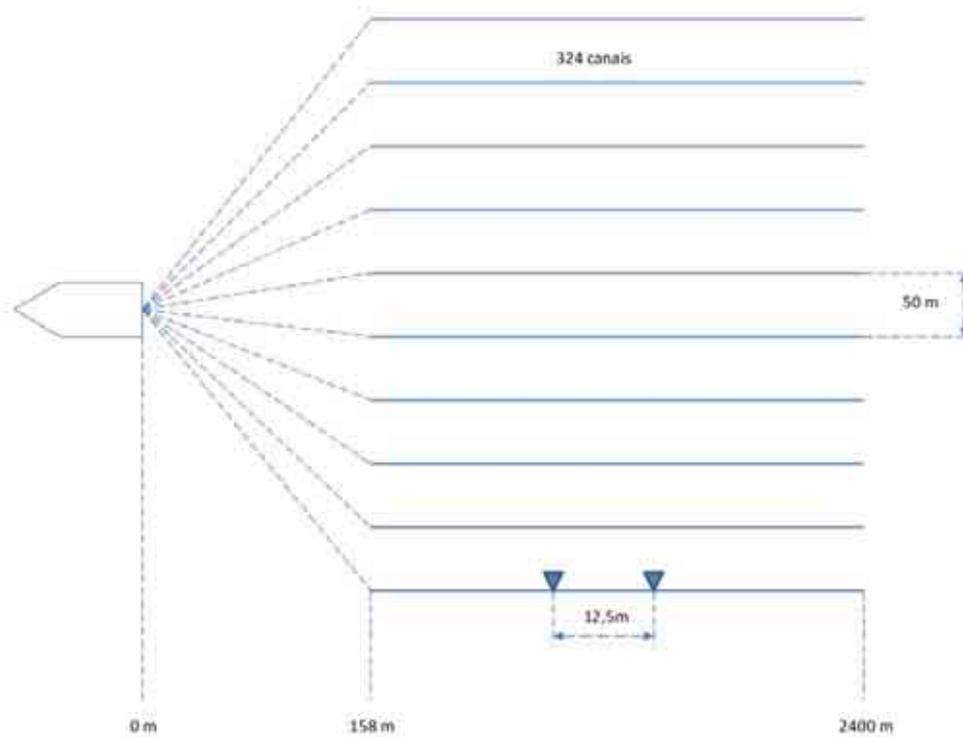


Figura 4.15: Diagrama da configuração nominal de aquisição dos dados.

As especificações acima são nominais. Elas podem ou não ser satisfeitas no dado real. De particular importância para o processamento de dados é o desvio do cabo sísmico de uma linha reta, ocasionado pela presença de correntes marinhas na direção transversal a ele. Isto ocasiona um desvio das posições nominais dos receptores, resultando em azimutes variáveis. No jargão da geofísica este efeito é chamado de *feathering* e pode ser tão forte a ponto de exigir que o navio readquira os dados na área afetada em condições mais favoráveis. Na figura 4.16 mostra-se um exemplo da posição dos receptores em um cabo. Observa-se que a direção do cabo tem um desvio em relação à direção de navegação, representada pela linha vermelha. Como a migração de ondas cônicas assume que o azimute é zero, este desvio implica que o dado não está de acordo com a hipótese usada na migração. Entretanto, o resultado obtido, como se verá adiante, mostra que esta hipótese não precisa ser exatamente satisfeita para a obtenção de bons resultados.

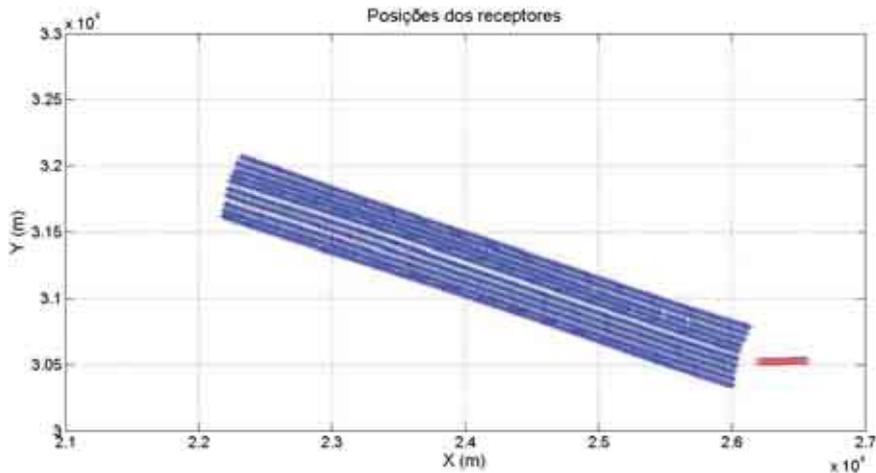


Figura 4.16: Posições dos receptores de um tiro (em azul), mostrando a desvio do cabo devido às correntes marítimas (*feathering*). Em vermelho temos as posições de alguns tiros mostrando a direção de aquisição.

Outra diferença importante em relação à teoria exposta no capítulo 2 é a forma com que o dado de ondas planas (ou cônicas) é calculado. Relembrando, o dado é reordenado para receptor comum e um *slant-stack* é aplicado ao longo do eixo dos tiros. A posição do traço resultante é a do receptor. A figura 4.16 explica por que essa estratégia não funciona em dados marítimos reais. As posições dos receptores variam muito de tiro para tiro tornando um receptor muito deficiente em traços. A solução é calcular o *slant-stack* no domínio do tiro comum, usar o princípio da reciprocidade e assumir que a posição do tiro é um receptor e a dos receptores são as posições dos tiros. Desta forma pode-se usar a teoria desenvolvida para dados organizados em receptor comum. Na figura 4.17 é apresentado um exemplo de dado sísmico de uma fonte areal de ondas planas, calculado a partir de dados organizados em tiro comum, como o da figura 4.14. Neste caso, o dado foi calculado com  $p_x = 0$  ms/m.

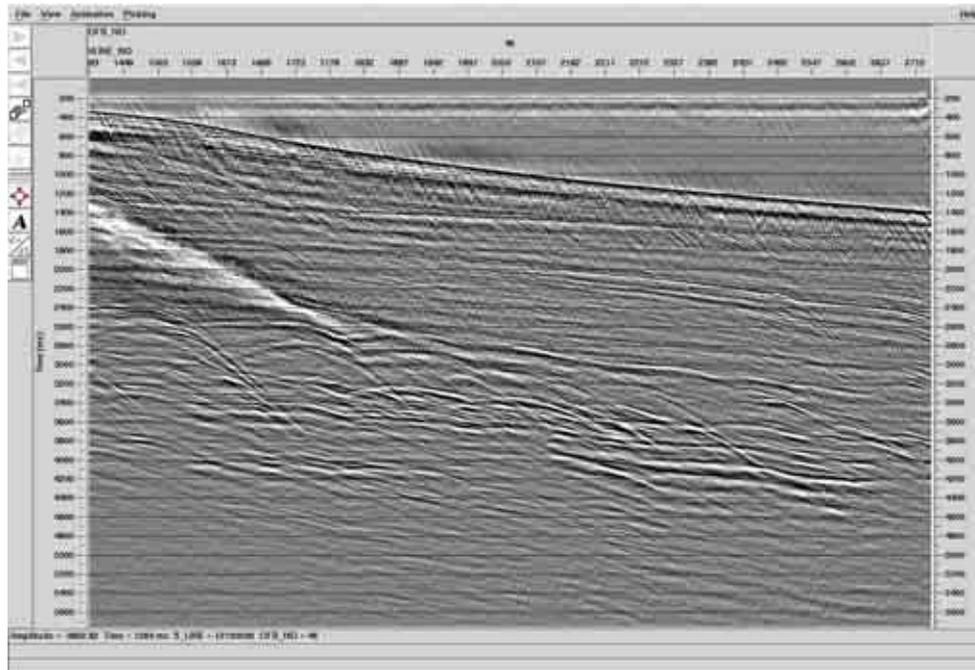


Figura 4.17: Exemplo de dado sísmico de onda plana com  $p_x = 0$  ms/m.

No mapa da figura 4.18 são mostradas as posições das fontes resultantes do *slant-stack* descrito no parágrafo anterior. Observa-se que as fontes não estão em uma linha nem cobrem totalmente a superfície. Na verdade, não se pode falar exatamente nem de ondas cônicas nem de ondas planas geradas por essa configuração. Em relação aos feixes gaussianos pode-se tratar os pontos interiores à superfície coberta pelas fontes como tendo a direção nominal do *slant-stack* que deu origem a estes dados. Nas bordas deve-se tratar de forma diferente os feixes gaussianos. A borda é considerada como uma linha de fontes que emitem ondas na direção transversal a esta linha. Na figura 4.19 esta situação é ilustrada com um corte transversal à linha das fontes.

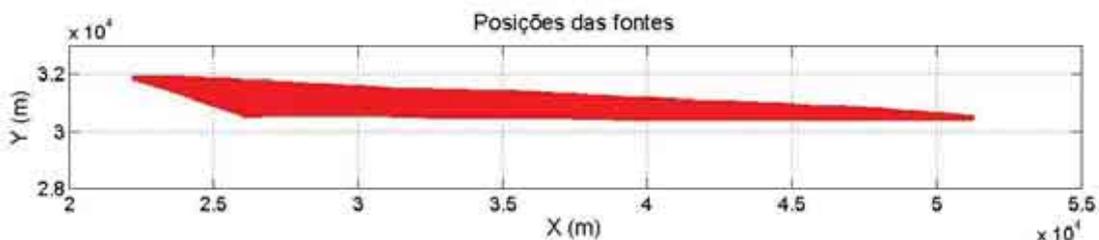


Figura 4.18: Posições das fontes para a extrapolação por *downward continuation*.

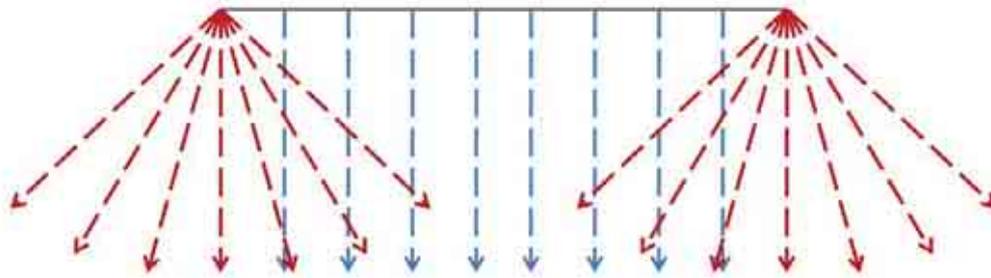


Figura 4.19: Direções iniciais dos feixes das fontes no caso de uma fonte areal.

Essa metodologia é complexa quando comparada a outras. Ela requer que as bordas da superfície das fontes sejam identificadas juntamente com a direção normal a elas. Feixes precisam ser tratados de formas diferentes dependendo de suas localizações. Embora, por motivos práticos, este seja o caminho escolhido nesta tese, é possível que outras soluções, como ondas verdadeiramente planas, que seriam geradas por uma superfície uniforme de fontes na área do dado sejam mais simples de serem calculadas. Entretanto, neste caso teriam que ser usadas fontes com feixes nas direções  $x$  e  $y$ . A migração por *downward continuation* trata essas irregularidades na geometria das fontes de maneira bem mais simples. Para este algoritmo não importa a configuração da fonte, seja ela linear ou areal, pois a posição das fontes é apenas a condição inicial da propagação do campo de ondas.

Para se calcular as posições dos feixes gaussianos estabelece-se primeiro uma distância nominal entre eles. Como se vê na figura 4.18 há uma direção principal de distribuição das fontes. Os feixes são distribuídos primeiramente ao longo desta direção, nesse caso na direção  $x$ . Em seguida, medem-se nestas posições os valores máximos e mínimos das coordenadas  $y$  das fontes e distribuem-se os feixes ao longo da direção  $y$ , mantendo sempre um feixe na posição máxima e outro na mínima. Nesta direção calcula-se o número de fontes de tal forma que a separação entre elas se aproxime da nominal. Nesta tese usou-se uma distância nominal de 200 m.

A posição dos receptores em dados marítimos tem em geral uma geometria mais simples. Como foi visto anteriormente, as posições dos receptores correspondem às posições das fontes no dado registrado. Como um navio tem um controle muito melhor na sua direção de navegação que sobre a posição dos cabos, as fontes marítimas têm uma distribuição muito mais regular que os receptores. Portanto, no dado

de onda plana calculado segundo a metodologia desta tese os receptores têm uma geometria mais simples. Na figura 4.20 as posições dos receptores estão anotadas em vermelho, mostrando que eles estão distribuídos em uma linha aproximadamente reta.

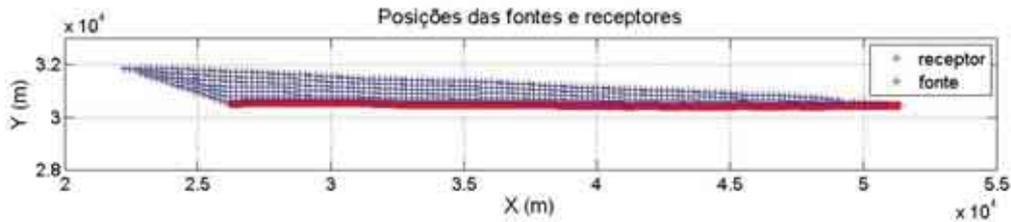


Figura 4.20: Posições das fontes e receptores para o cálculo dos feixes gaussianos.

A propagação inversa do campo dos receptores é feita de acordo com a equação 4.40. O dado registrado é decomposto em *slant-stacks* locais. Neste caso específico em que os receptores estão dispostos em uma linha, os *slant-stacks* serão calculados somente na direção da linha. Mas seu campo é propagado em todas as direções. Em um determinado ponto  $(L_x, L_y)$  é calculado o *slant-stack* usando o valor de  $p_x$ . Este dado em superfície será inversamente propagado em profundidade com feixes gaussianos com valores iniciais do vetor vagarosidade  $(p_x, [p_{y_{min}} \dots p_{y_{max}}])$ . Apesar dos receptores estarem em uma linha, há muito mais feixes a calcular para propagar o seu campo que os usados para propagar o campo das fontes, pois estas, apesar de estarem distribuídas arealmente, têm seu campo propagado em apenas uma direção (exceto nas bordas), enquanto que o campo dos receptores é propagado em todas as direções.

Para aplicar a condição de imagem neste exemplo optou-se por fazê-lo no domínio da frequência. Como o volume de dados é bem maior, não é possível, na prática, migrar o dado em um computador pessoal, como foi feito com o dado bi-dimensional de Marmousi. É necessário usar um *cluster* de computadores, executando o programa em centenas de processos paralelos. Como havia esta necessidade de executar o programa em paralelo, e havia na Petrobras um programa com uma estrutura de paralelização adequada à migração por feixes gaussianos, optou-se por usar esta estrutura para demonstrar a migração em três dimensões.

O algoritmo fica mais simples que aquele usado para migrar no domínio do tempo. Os passos usados no processamento foram os seguintes:

- Calcular os feixes gaussianos da fonte.

- Calcular os feixes gaussianos do receptor.
- Calcular o campo propagado da fonte.
- Calcular o campo inversamente propagado do receptor.
- Calcular a condição de imagem.

A simplicidade do algoritmo acima não traduz algumas complexidades enfrentadas na prática. Primeiro, cada um dos itens acima pode ser computado em paralelo, tirando vantagem da estrutura computacional disponível. Entretanto, para calcular o campo da fonte (ou do receptor) os feixes devem estar todos disponíveis. Isto implica em estruturas de dados que podem exceder em tamanho a capacidade de memória dos processadores. Além disso, o tráfego de dados na rede pode ser impeditivo para executar o programa em um tempo razoável. O objetivo da tese não é gerar o código mais eficiente possível, mas ele também não pode ser tão lento que torne impossível testá-lo. De qualquer forma, o código gerado foi bastante eficiente, especialmente quando foi usada uma das características da migração por feixes gaussianos, que é poder migrar diretamente uma região em profundidade, não sendo necessário extrapolar os campos recursivamente para todo o domínio de saída, como nos algoritmos *downward continuation* ou migração reversa no tempo.

## 4.7 Resultados 3D

Os dados de entrada usados foram os do cabo 5, aquele de menor azimute fonte-receptor. Os dados de ondas planas foram sintetizados para 89 valores de  $p_x$  de  $-0.3256$  ms/m até  $+0.3256$  ms/m em intervalos de  $7.4 \times 10^{-3}$  ms/m.

As figuras das páginas seguintes mostram os resultados da migração do dado sísmico real descrito na seção anterior. Foram escolhidas imagens da linha 1225 (coordenada  $y=30625$  m) e do traço 2000 (coordenada  $x=37500$  m), perpendiculares entre si para evidenciar o aspecto tridimensional da migração. Além disso, como no exemplo bidimensional, os resultados da obtidos com os feixes gaussianos são comparados com os obtidos com o algoritmo de *downward continuation*, usado como referência de qualidade. Nas figuras 4.21 e 4.22 são apresentadas seções do campo de velocidades nas posições do traço 2000 e da linha 1225, respectivamente. Pode-se observar o grande contraste de velocidade existente na profundidade aproximada de 3000 m, devido à presença de uma camada de sal.

A figura 4.23 mostra os campos extrapolados da fonte na profundidade de 3000 para o traço 2000 usando os feixes gaussianos e *downward continuation*. A figura 4.24 mostra os campos do receptor extrapolados para a mesma profundidade e posição que a figura anterior, usando os mesmos algoritmos de extrapolação. Conclui-se,

observando estas figuras, que a extrapolação de campos de onda por feixes gaussianos produz resultados praticamente idênticos cinematicamente, e um pouco diferentes em relação à amplitude, frequência e fase, especialmente do campo do receptor.

As figuras 4.25, 4.26, 4.27 e 4.28 mostram os campos da fonte e receptor extrapolados na posição da linha 1225 na profundidade de 3000 m, por feixes gaussianos e *downward continuation*. Observa-se também que elas são semelhantes entre si, validando o método dos feixes gaussianos. Na figura 4.25 observa-se um efeito na borda direita, devido a um efeito do posicionamento dos feixes gaussianos da fonte nesta extremidade. Isto indica uma alta sensibilidade do campo de ondas a pequenas variações da posição dos feixes.

As figuras 4.29 e 4.30 mostram os *common reflection points* nas posições dos traços 1800, 1900, 2000 e 2100 da linha 1225 migrados com feixes gaussianos e *downward continuation*, respectivamente. Os resultados das migrações são semelhantes, com algumas diferenças de amplitude. Observe que na imagem com os feixes gaussianos o dado não foi migrado até 6000 m, pois os feixes não foram gerados até essa profundidade.

As figuras 4.31 e 4.32 mostram o empilhamento dos *common reflection points* dos dados migrados por feixes gaussianos e *downward continuation*. Os dois empilhamentos são muito semelhantes, de novo com algumas diferenças de amplitude, especialmente na parte mais profunda das seções.

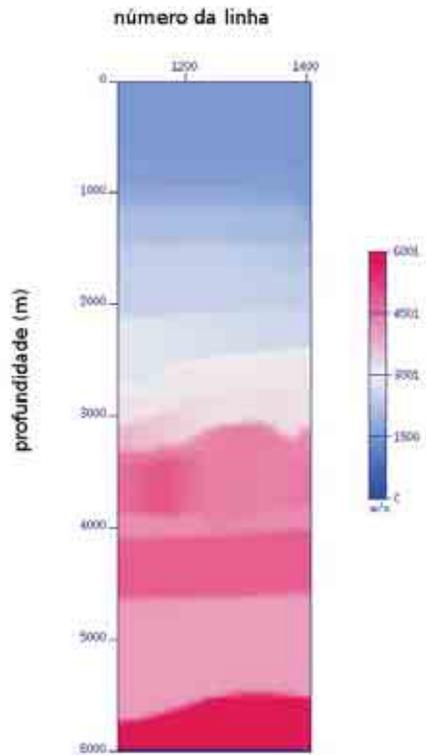


Figura 4.21: Seção do campo de velocidades no traço 2000.

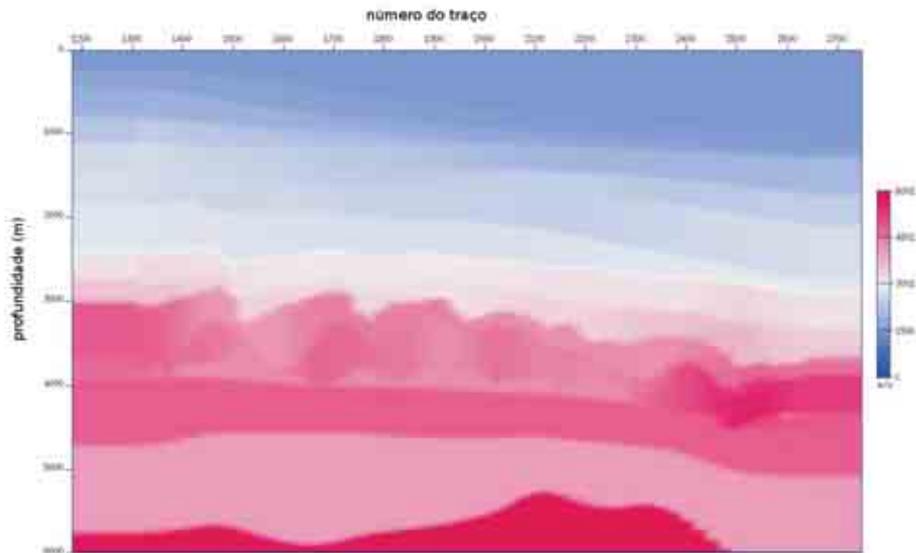


Figura 4.22: Seção do campo de velocidades na linha 1225.

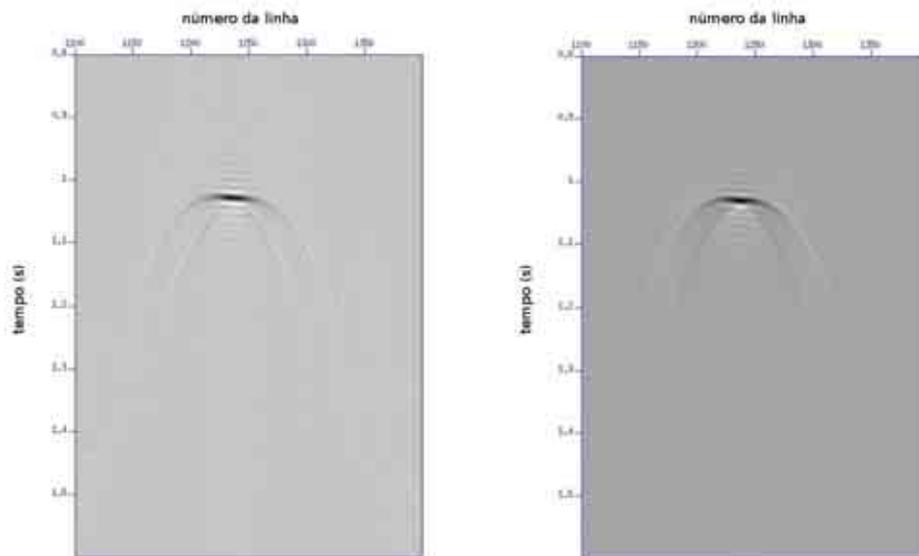


Figura 4.23: Seção do campo de ondas da fonte extrapolado por feixes gaussianos (esquerda) e *downward continuation* (direita) no traço 2000 e profundidade 3000 m.

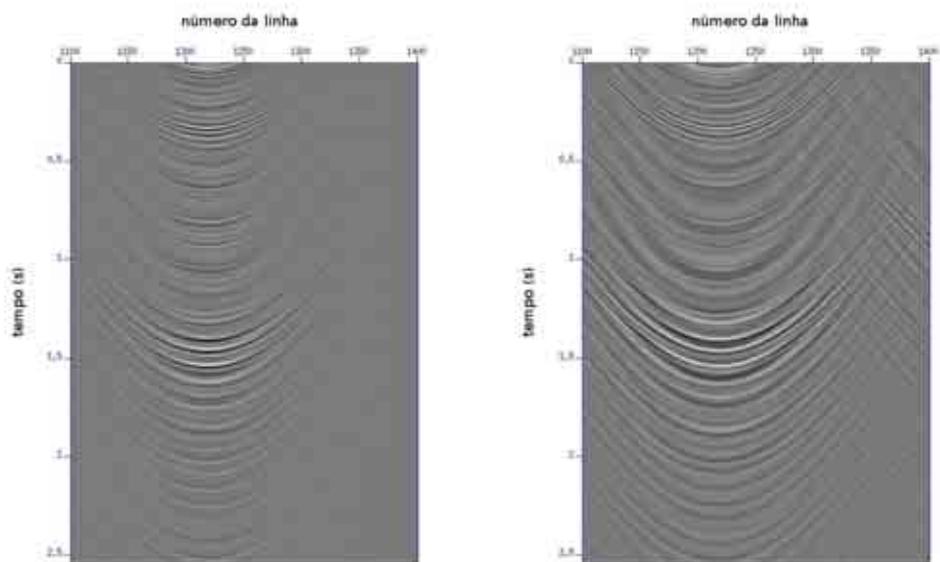


Figura 4.24: Seção do campo de ondas do receptor extrapolado por feixes gaussianos (esquerda) e *downward continuation* (direita) no traço 2000 e profundidade 3000 m.

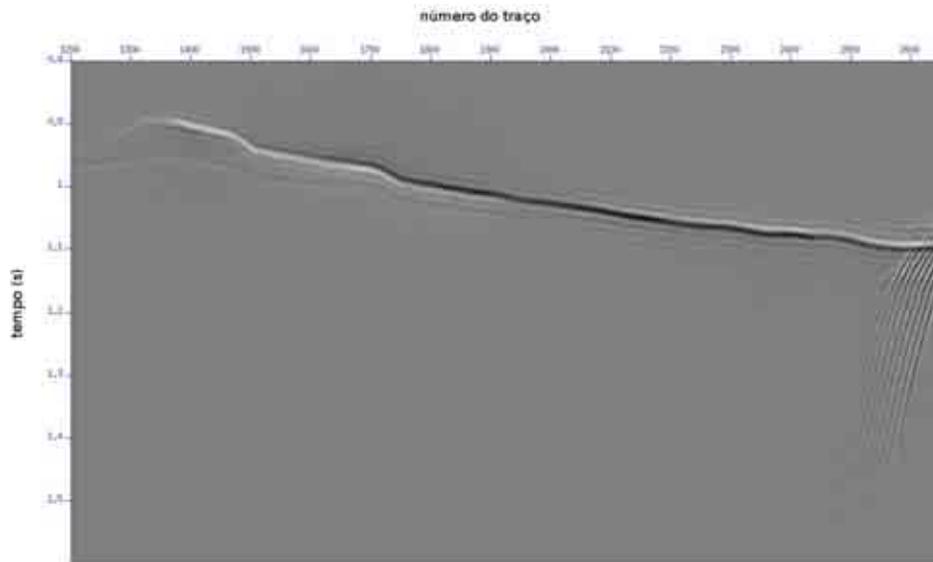


Figura 4.25: Seção do campo de ondas da fonte extrapolado por feixes gaussianos na linha 1225 e profundidade 3000 m.

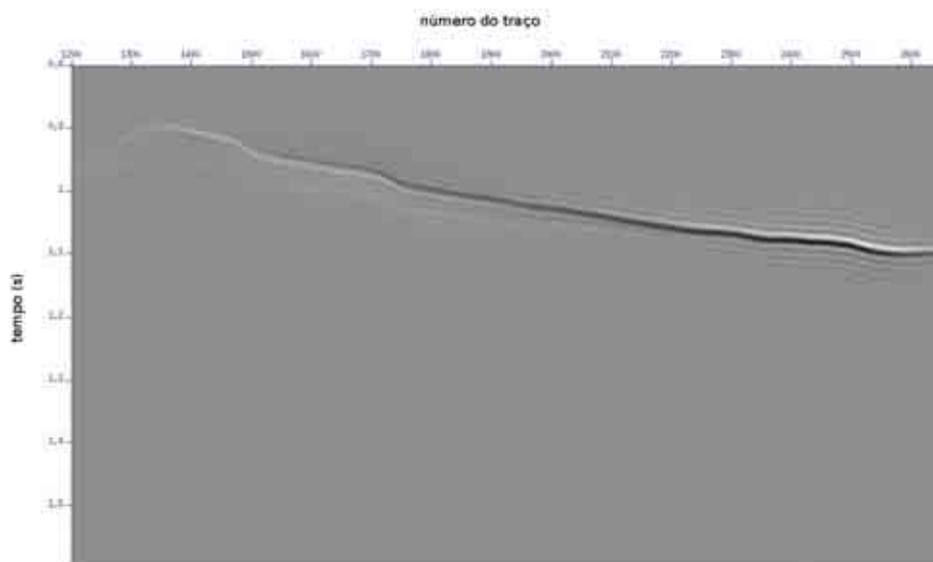


Figura 4.26: Seção do campo de ondas da fonte extrapolado por *downward continuation* na linha 1225 e profundidade 3000 m.

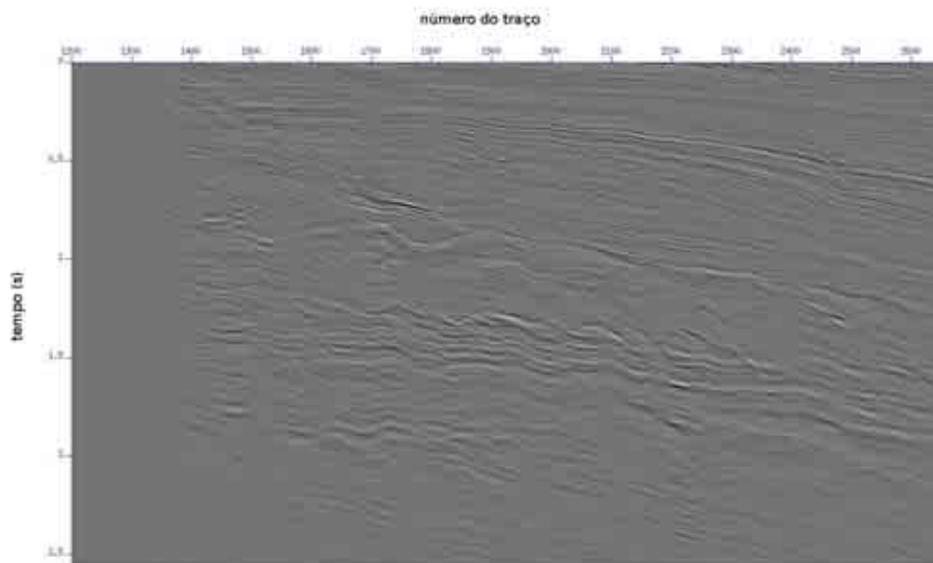


Figura 4.27: Seção do campo de ondas do receptor extrapolado por feixes gaussianos na linha 1225 e profundidade 3000 m.

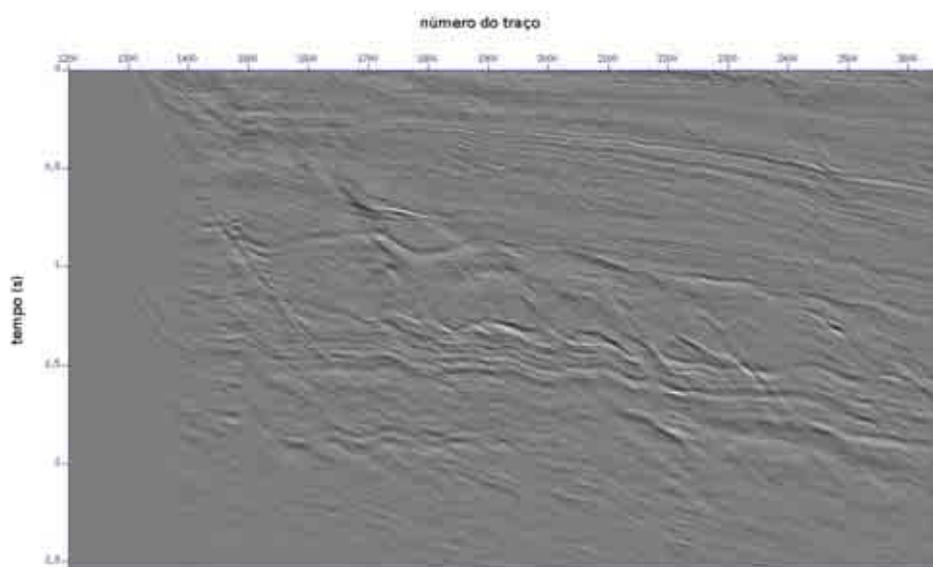


Figura 4.28: Seção do campo de ondas do receptor extrapolado por *downward continuation* na linha 1225 e profundidade 3000 m.

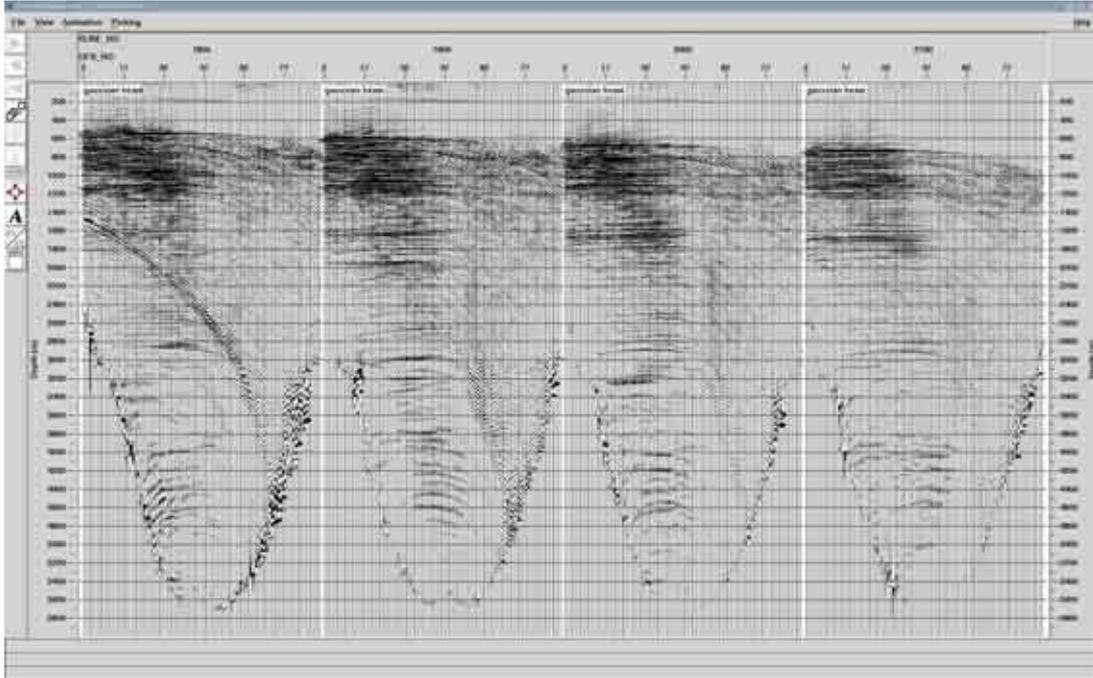


Figura 4.29: *Common reflection points* da linha 1225 migrados com feixes gaussianos. O eixo horizontal é o número sequencial de  $p_x$

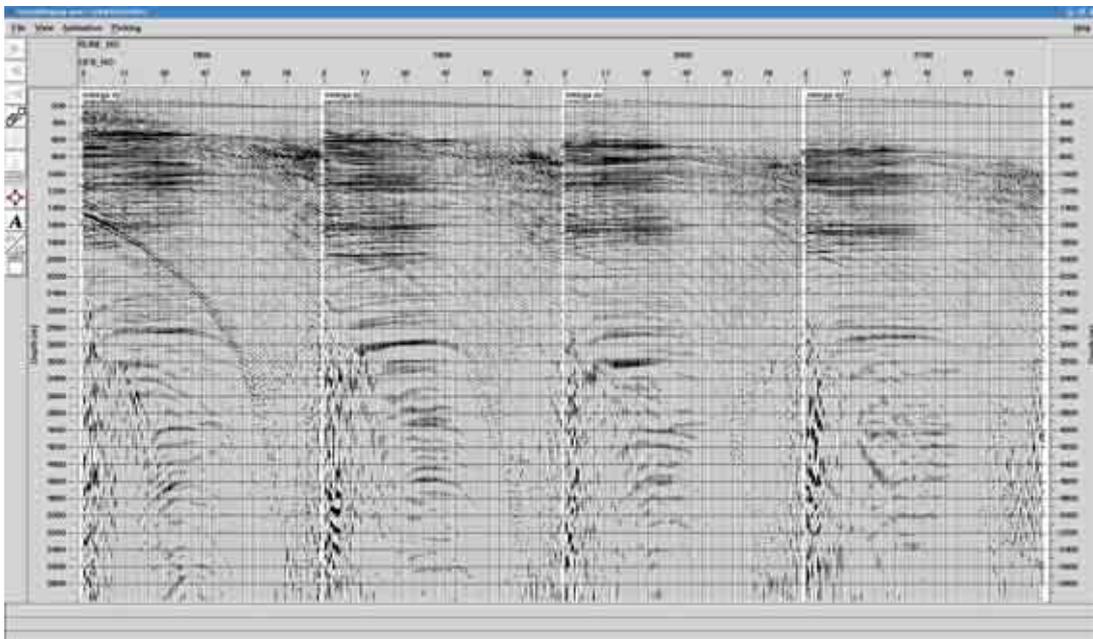


Figura 4.30: *Common reflection points* da linha 1225 migrados com *downward continuation*. O eixo horizontal é o número sequencial de  $p_x$

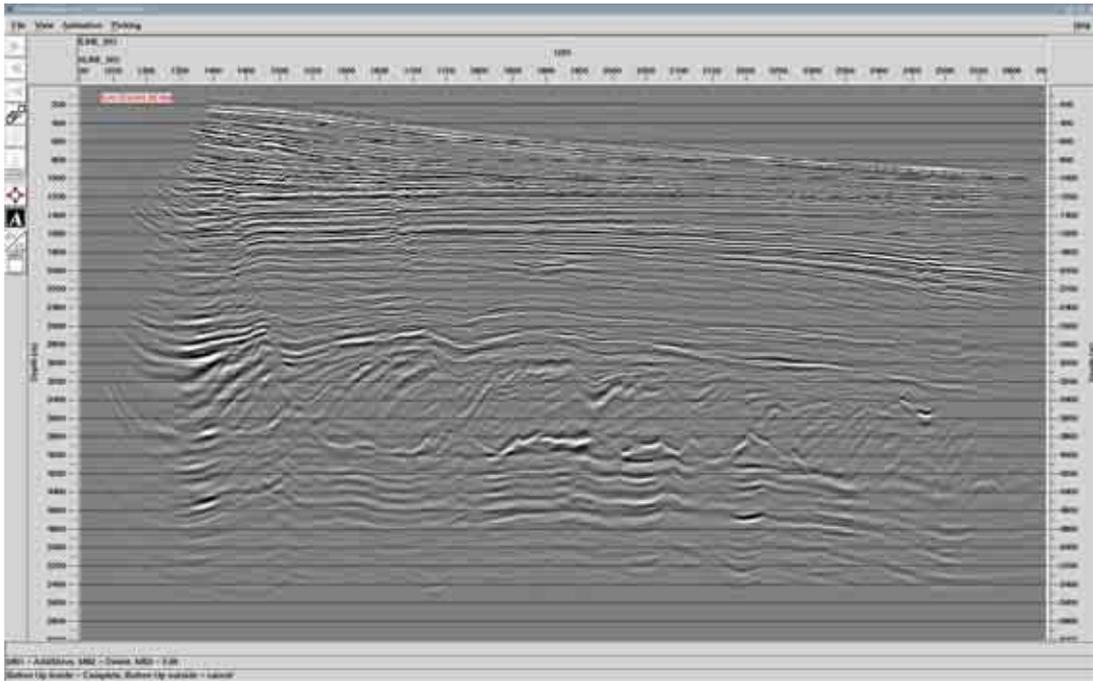


Figura 4.31: Linha 1225 migrada com feixes gaussianos.

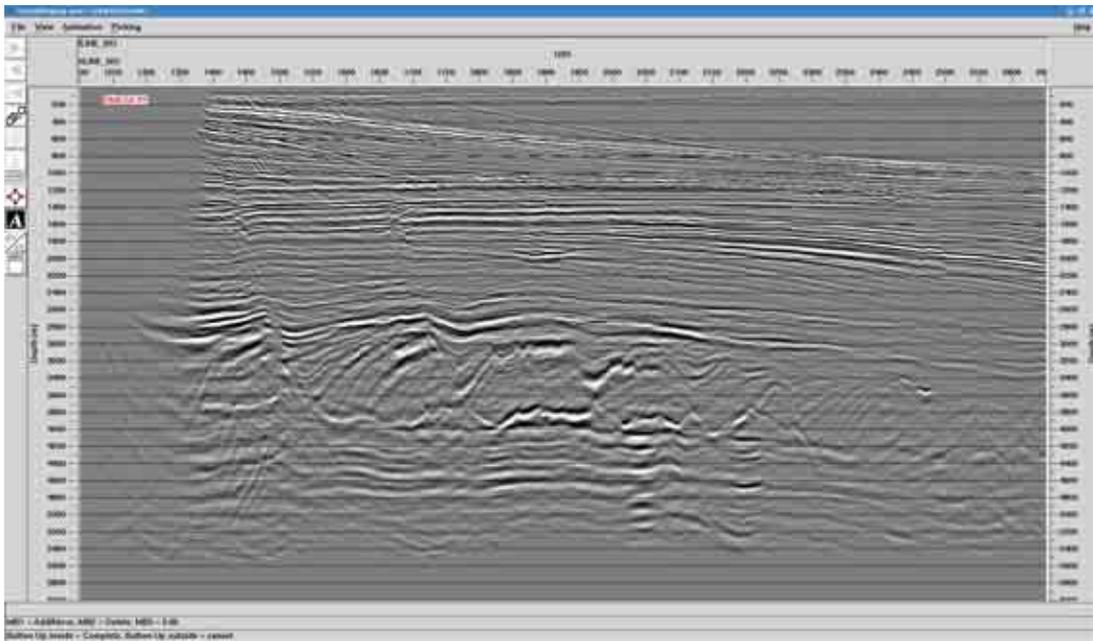


Figura 4.32: Linha 1225 migrada com *downward continuation*.

# Capítulo 5

## Uma extensão do conceito do refletor explosivo

### 5.1 Introdução

Neste capítulo estende-se o conceito do refletor explosivo para casos em que o afastamento fonte-receptor é não nulo. Inicialmente, é revisado o conceito usual do refletor explosivo, atribuído originalmente a Claerbout [49]. Verifica-se que ele se aplica à modelagem e à migração de dados com afastamento nulo. Este conceito é estendido para dados de ondas planas. Mostra-se como os feixes gaussianos podem ser usados para implementar esta extensão. Finalmente estas ideias são utilizadas para modelar e migrar dados sísmicos usando o modelo de velocidades de Marmousi.

### 5.2 Refletor explosivo

Para ilustrar o conceito do refletor explosivo deve-se supor que se tem um modelo de sub-superfície caracterizado por um campo de velocidades e um refletor contínuo. Neste refletor estão colocadas cargas explosivas, que em um determinado instante  $t = 0$  são simultaneamente detonadas. Se a superfície do refletor for contínua e suave, então pode-se mostrar com o princípio de Huygens que as ondas resultantes se propagarão, na vizinhança do refletor, numa direção perpendicular a ele. Estas ondas se propagarão em sub-superfície de acordo com a equação da onda e com a velocidade do modelo e serão registradas em superfície (em  $z = 0$ ).

Agora supõe-se dados sísmicos adquiridos numa configuração em que fonte e receptor estão localizados no mesmo ponto em superfície. Neste caso, todos os raios que incidem normalmente ao refletor são refletidos e percorrem de forma inversa o mesmo caminho de volta ao receptor. Os dados registrados são semelhantes àqueles gerados com o refletor explosivo, com uma importante diferença: neste caso o raio

percorre o caminho da fonte ao refletor e de volta ao receptor, enquanto que naquele somente o caminho do receptor ao refletor é percorrido. O tempo de reflexão observado nos dados modelados com o refletor explosivo é a metade daquele modelado a partir da superfície. Isto pode ser corrigido se, ao se modelar os dados com o refletor explosivo, for usada como velocidade a metade da velocidade real.

O conceito do refletor explosivo pode ser usado para migrar dados sísmicos, além de modelá-los. Usando um algoritmo que extrapole o campo registrado em  $z = 0$  para uma profundidade  $z = z_m$ , obtém-se um campo como se fosse registrado nesta profundidade. Como no refletor explosivo os refletores explodem em  $t = 0$ , o campo extrapolado neste tempo é o dado migrado nesta profundidade. Extrapolando o campo sucessivamente para outras profundidade e coletando o resultado para  $t = 0$  na saída migrada tem-se o dado migrado para todas as profundidades.

Na prática não se tem dados adquiridos com afastamento nulo para aplicar a migração com o método do refletor explosivo. Mas estes podem ser sintetizados num centro de processamento de dados aplicando processos como a correção de *normal-moveout*, o *dip-moveout* e o empilhamento. Entretanto, estes processos são apenas aproximados e são inadequados em situações em que, por exemplo, há grandes variações laterais de velocidade. Nestes casos o campo de afastamento nulo sintetizado pode não ser sequer semelhante ao que seria obtido numa hipotética aquisição de afastamento nulo, e o resultado da migração com o método do refletor explosivo seria incorreto.

Além deste problema, há outras deficiências na modelagem e migração com o refletor explosivo. A modelagem a partir da superfície pode ser feita resolvendo a equação da onda com um algoritmo de diferenças finitas, por exemplo. Neste caso irão aparecer outros eventos que não são modelados por refletor explosivo. Por exemplo, reflexões múltiplas, nas quais o campo é refletido para cima e depois refletido novamente para baixo em outra interface. Com a modelagem do refletor explosivo não se obtém o tempo correto desta reflexão múltipla. Na prática do processamento podem-se aplicar técnicas que eliminem ou pelo menos atenuem estas reflexões múltiplas, gerando dados adequados para a migração. Outro caso em que o refletor explosivo não é adequado é a chamada reflexão prismática, na qual o dado registrado é de afastamento nulo, mas o caminho percorrido envolve mais de uma reflexão não normal nas interfaces.

Da discussão acima pode-se concluir que a migração com o modelo do refletor explosivo é adequada somente para dados com geometria de afastamento nulo, mas, na prática, esses só podem ser sintetizados em situações onde não há variações laterais significativas de velocidade. Isto exclui, por exemplo, modelos geológicos onde há corpos de sal, que atualmente são de grande importância nas bacias brasileiras, e em outras, como no Golfo do México. A solução é usar a migração de dados de

afastamentos não nulos, mas neste caso o refletor explosivo não é aplicável.

### 5.3 Uma extensão do refletor explosivo

A ideia fundamental no modelo do refletor explosivo é a simultaneidade da *explosão*. Nesta seção é explorada a situação em que diferentes pontos do refletor não explodem simultaneamente.

Para dados bidimensionais, um campo de ondas observado na profundidade  $z$  pode ser extrapolado para a profundidade  $z + \Delta z$  através das equações:

$$R(k_x, z + \Delta z, \omega) = e^{ik_z \Delta z} R(k_x, z, \omega), \quad (5.1)$$

$$S(k_x, z + \Delta z, \omega) = e^{-ik_z \Delta z} S(k_x, z, \omega). \quad (5.2)$$

A exponencial complexa nas equações acima deve ser entendida mais como um operador que leva o campo de uma profundidade  $z$  para uma profundidade  $z + \Delta z$ , do que como parte de uma equação matemática. Na expressão acima  $R$  é o campo de ondas do receptor e  $S$  é o campo de ondas da fonte. Note que na superfície  $z = 0$ ,  $R$  é o campo registrado e  $S$  é a fonte no momento da sua detonação.  $k_z$  é o número de onda direção vertical e é dado por:

$$k_z = \frac{\omega}{v(x, z)} \sqrt{1 - \frac{v^2(x, z)}{\omega^2} k_x^2} = \frac{\omega}{v(x, z)} \sqrt{1 + \frac{v^2(x, z)}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x^2}}. \quad (5.3)$$

A equação acima é contraditória, pois se misturam variáveis, como número de onda  $K_x$  e velocidade, como função das coordenadas cartesianas  $x$  e  $z$ . Além disso, na segunda expressão se tem um operador derivada dentro de uma raiz quadrada, o qual não tem uma definição matemática precisa. As diversas soluções para essa inconsistência dão origem aos diversos métodos de migração existentes. Por exemplo, para campos de velocidade dependentes apenas da profundidade tem-se a migração por deslocamento de fase (Gazdag [50]). Para campos de velocidade com variação lateral de velocidade tem-se o método do deslocamento de fase mais interpolação (Gazdag e Sguazzero [51]) (mais conhecido pelo seu acrônimo em inglês, PSPI, ou *phase shift plus interpolation*). E há os métodos baseados na expansão da raiz quadrada em séries de potências ou frações contínuas, os quais podem ser resolvidas por métodos de diferenças finitas aplicados no domínio  $(x, z)$  (Claerbout [32]). Uma discussão mais detalhada destes e outros métodos de migração pode ser encontrada em Biondi [2] e Romanelli [52].

Analisa-se agora o caso de dados registrados com uma fonte de ondas planas. Neste caso, o campo registrado em superfície,  $R(x, z = 0, \omega)$  pode ser sintetizado a

partir de dados convencionais com fontes pontuais usando a equação 2.5, para um determinado parâmetro de raio  $p_x$ . Para este mesmo parâmetro de raio o campo da fonte em  $z = 0$  é:

$$S(x, z = 0, \omega) = e^{-i\omega p_x x}. \quad (5.4)$$

O campo da fonte acima no domínio  $k_x$  é:

$$S(k_x, z = 0, \omega) = \int e^{-i\omega p_x x} e^{ik_x x} dx = \delta(k_x - \omega p_x). \quad (5.5)$$

Extrapolando a onda plana acima para uma profundidade  $\Delta z$  com a equação 5.1 resulta em :

$$S(k_x, \Delta z, \omega) = e^{ik_x \Delta z} \delta(k_x - \omega p_x). \quad (5.6)$$

Usando a primeira igualdade da equação 5.3 e calculando a transformada de Fourier inversa do campo extrapolado da equação 5.6 obtém-se (a menos de um fator multiplicativo):

$$S(x, \Delta z, \omega) = e^{-i\Delta z \frac{\omega}{v} \sqrt{1-v^2 p_x^2}} e^{-i\omega p_x x}. \quad (5.7)$$

Supõe-se agora que a velocidade depende apenas da profundidade, isto é,  $v = v(z)$ . Neste caso  $p_x$  permanece constante em todas as profundidades. Aplicando sucessivamente a extrapolação do campo de ondas até a profundidade  $z = n\Delta z$  resulta em:

$$S(x, n\Delta z, \omega) = e^{-i\omega p_x x} e^{-i\omega \sum_j^n \frac{\Delta z}{v(j\Delta z)} \sqrt{1-v^2(j\Delta z)p_x^2}}. \quad (5.8)$$

A equação acima extrapola uma onda inicialmente plana na superfície num meio que tem variação de velocidade em função da profundidade somente. Esta equação tem a forma  $e^{i\omega\tau}$  o que permite associar o tempo de propagação da onda com o argumento da exponencial. Pode-se analisar melhor com o auxílio da figura 5.1.

Na figura 5.1 a onda se propaga numa camada de espessura  $\Delta z$ , onde a velocidade é constante. O vetor normal à frente de onda forma um ângulo  $\theta$  com a vertical. Estão representadas as frentes de onda em dois instantes de tempo, correspondentes aos momentos em que a onda passa pela posição  $x$  nas duas profundidades. A distância entre as frentes de onda nesses dois instantes é  $d$ . De acordo com a equação 5.2 o campo na posição  $z + \Delta z$  é dado pelo campo em  $z$  multiplicado pelo operador  $e^{-iK_z \Delta z}$ . Mas,

$$k_z \Delta z = \omega p_z \Delta z = \omega \frac{\cos \theta}{v} \Delta z. \quad (5.9)$$

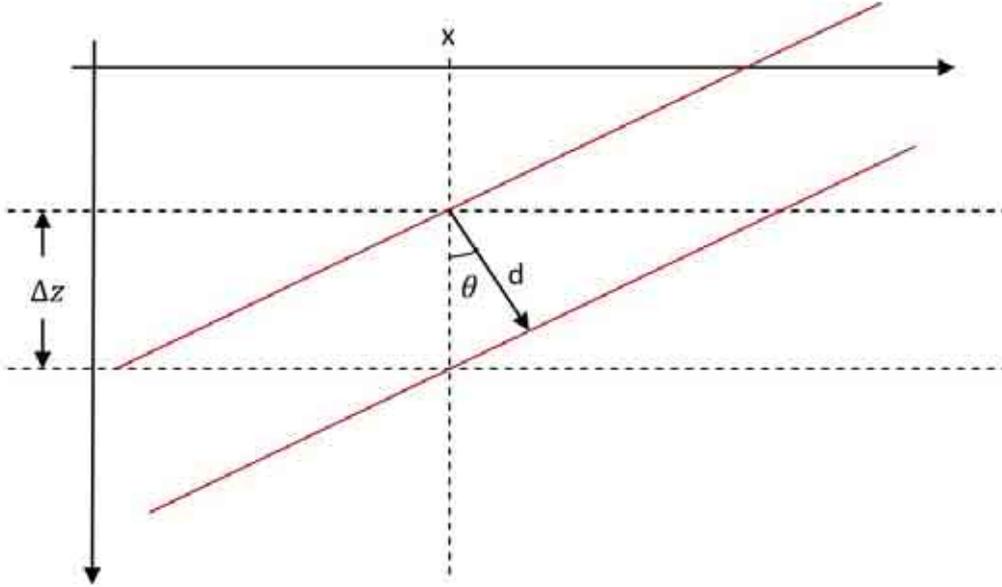


Figura 5.1: Propagação de uma onda plana entre duas camadas.

Da figura 5.1 vê-se que  $\Delta z \cos \theta = d$ . Portanto,

$$k_z \Delta z = \omega \frac{d}{v} = \omega \tau. \quad (5.10)$$

Na expressão acima  $\tau$  é o tempo de propagação da onda de uma camada a outra. Portanto, os argumentos das exponenciais dos operadores de extrapolação das equações 5.1 e 5.2 estão associados com o tempo de propagação das ondas em subsuperfície.

Usando a condição de imagem para a migração de ondas planas (equação 2.9) e usando o campo da fonte propagado em profundidade (equação 5.8) tem-se :

$$I(x, n\Delta z, p_x) = \int \frac{|\omega|}{2\pi} R(x, n\Delta z, \omega) e^{i\omega p_x x} e^{i\omega \sum_j^n \frac{\Delta z}{v(j\Delta z)} \sqrt{1-v^2(j\Delta z)p_x^2}} d\omega. \quad (5.11)$$

O argumento da segunda exponencial nada mais é do que o tempo de propagação total da onda desde a posição em superfície ( $x, z = 0$ ) até ( $x, n\Delta z$ ), denominado de  $\tau_n$ . Então:

$$I(x, n\Delta z, p_x) = \int \frac{|\omega|}{2\pi} R(x, n\Delta z, \omega) e^{i\omega p_x x} e^{i\omega \tau_n} d\omega. \quad (5.12)$$

O argumento acima pode ser estendido para  $p_x \neq 0$ . Neste caso há um tempo adicional a ser somado no tempo de propagação, o qual é dado por  $p_x x$ , como na equação 5.12. Este tempo é proporcional à posição  $x$  na qual a imagem é calculada. Isto sugere que o atraso de tempo necessário para estender o conceito de refletor

explosivo está relacionado com a extrapolação da onda plana da fonte. Neste caso, o conceito de refletor explosivo pode ser ampliado para migrar e modelar ondas planas.

Até agora tratou-se somente do caso de modelos de velocidade dependentes apenas da profundidade. Em casos mais realistas nos quais a velocidade varia lateralmente, as ideias acima podem ser estendidas usando a equação 5.8 e permitindo que  $p_x$  seja uma função de  $x$  e  $z$ . A condição de imagem fica:

$$I(x, n\Delta z, p_x) = \int \frac{|\omega|}{2\pi} R(x, n\Delta z, \omega) e^{i\omega p_x x} e^{i\omega \sum_j^n \frac{\Delta z}{v(x, j\Delta z)} \sqrt{1 - v^2(x, j\Delta z) p_x^2(x, j\Delta z)}} d\omega. \quad (5.13)$$

Quando o modelo de velocidades é simples o suficiente para que  $p_x$  tenha somente um valor por ponto em profundidade, ele pode ser calculado iterativamente, pelo seguinte algoritmo:

1. Usando o modelo de velocidades, calcular o gradiente deste modelo. A direção perpendicular a esse gradiente é a direção do mergulho da interface.
2. Iniciar com os raios partindo da superfície com a direção de uma onda plana, com  $p_x$  constante.
3. Para cada profundidade.
  - (a) Para cada raio.
    - i. Propagar o raio através de uma camada homogênea.
    - ii. Na interface desta camada com a camada abaixo, também homogênea, usar o campo de gradiente para determinar o mergulho da interface e aplicar a lei de Snell, calculando o novo valor de  $p_x$ .
    - iii. Interpolar os valores de  $p_x$  nas posições do *grid*.
  - (b) Fim cada raio.
4. Fim cada profundidade.

Esse algoritmo foi aplicado em um modelo de com variação lateral de velocidades, mostrado na figura 5.2.

O campo propagado com o método acima para uma onda plana, com  $p_x = -0.22$  ms/m na superfície está na figura 5.3. A mesma onda plana propagada com um algoritmo de *downward continuation* está na figura 5.4.

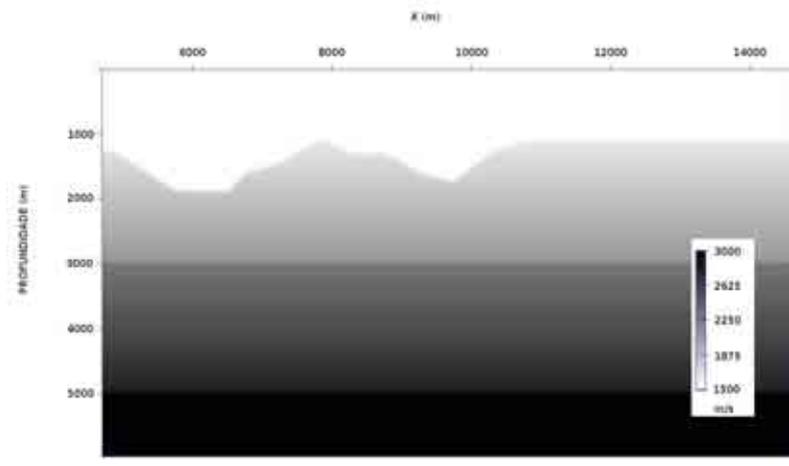


Figura 5.2: Modelo de velocidades utilizado na propagação do campo de  $p_x$ .

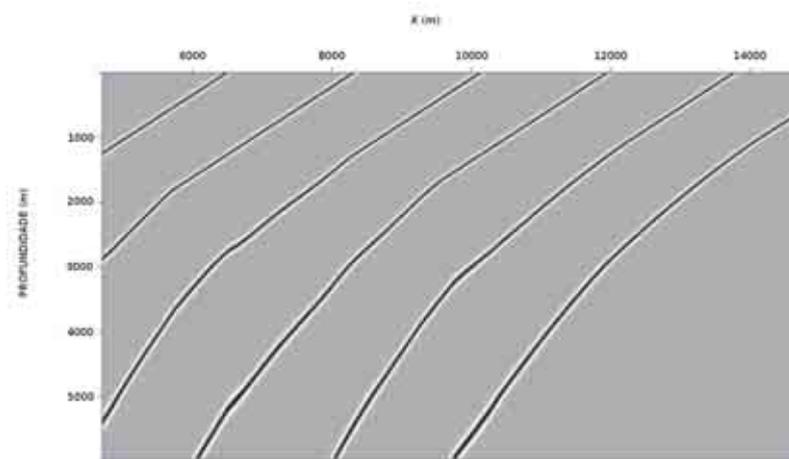


Figura 5.3: Campo de ondas planas com  $p_x = -0.22$  ms/m na superfície, propagado em profundidade nos tempos  $t = 400, 800, 1200, 1600, 2000$  ms, usando o algoritmo de extrapolação de  $p_x$ .

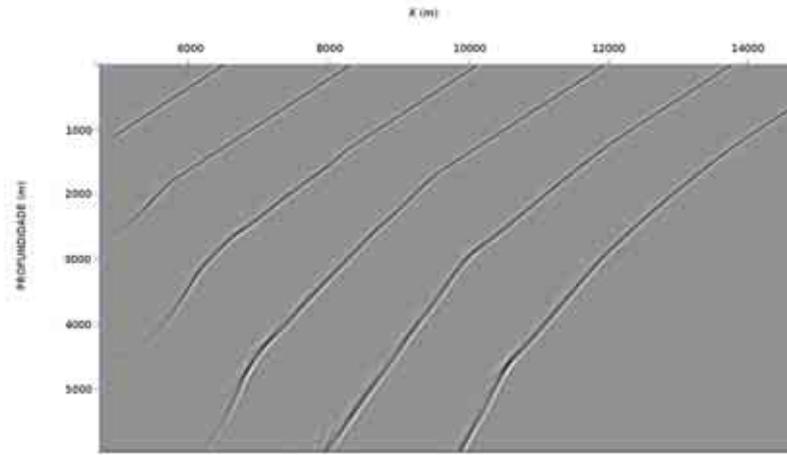


Figura 5.4: Campo de ondas planas com  $p_x = -0.22$  ms/m na superfície, propagado em profundidade nos tempos  $t = 400, 800, 1200, 1600, 2000$  ms, usando o algoritmo de extrapolação *downward continuation*.

Há outros métodos que calculam os tempos de trânsito em cada ponto em profundidade com a primeira chegada ou a mais energética. Supondo que um campo de tempos de trânsito  $\tau(x, z)$  é calculado em cada ponto do modelo, então o valor de  $p_x$  é dado por:

$$p_x = \frac{\partial \tau}{\partial x}. \quad (5.14)$$

Os métodos de cálculo do tempo de trânsito usualmente são baseados na solução da equação eikonal (Aki e Richards [53]):

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, z)}. \quad (5.15)$$

Os métodos baseados nesta equação calculam as primeiras chegadas. van Trier e Symes [7] propuseram uma solução da equação eikonal por um esquema de diferenças finitas *up-wind*. O método é rápido, preciso e estável. Outro método foi proposto por Sethian e Popovici [6]. Ele é baseado na técnica de *fast-marching*, é incondicionalmente estável e adequado para modelos de velocidade com grandes contrastes de velocidade.

A figura 5.5 mostra o campo de  $p_x$  calculado com o método de van Trier e Symes [7] e a figura 5.6 mostra a propagação da onda plana com  $p_x = -0.22$  ms/m na superfície com este campo.

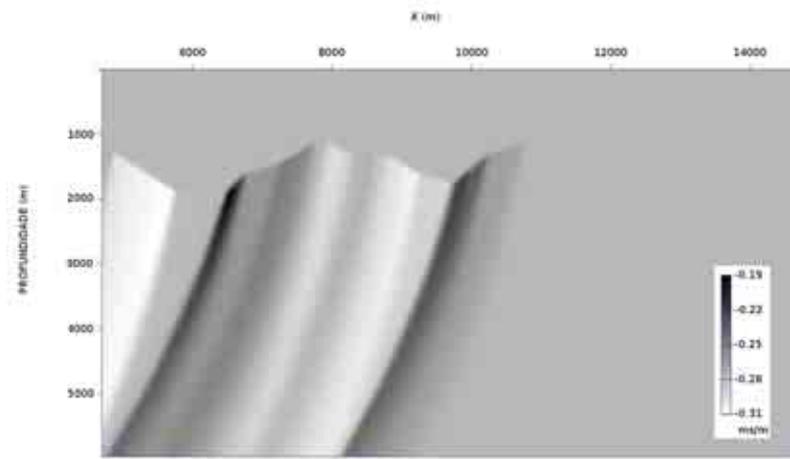


Figura 5.5: Campo de  $p_x$  com  $p_x = -0.22$  ms/m na superfície usando o método de van Trier e Symes.

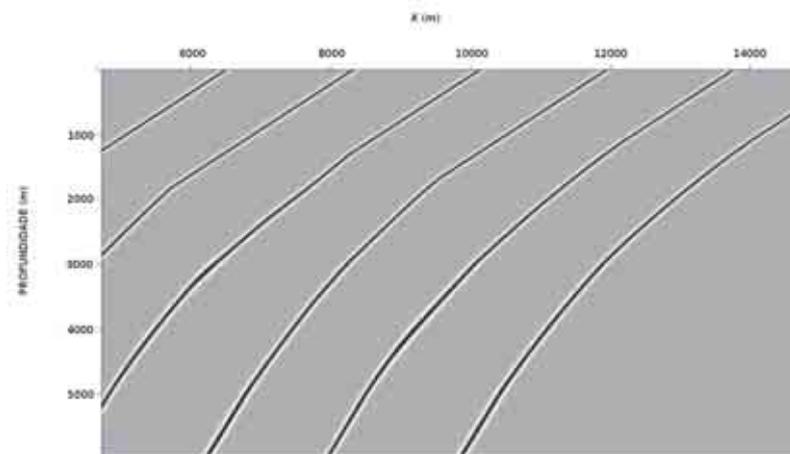


Figura 5.6: Campo de ondas planas com  $p_x = -0.22$  ms/m na superfície, propagado em profundidade nos tempos  $t = 400, 800, 1200, 1600, 2000$  ms, usando o campo de  $p_x$  da figura 5.5.

Os campos propagados das figuras 5.3 e 5.6 são semelhantes entre si e em relação ao da figura 5.4 propagado com o algoritmo de *downward continuation*, usado como referência de qualidade. Mas não são idênticos. Especialmente na parte mais profunda os campos propagados com o método do refletor explosivo não têm a mesma qualidade do campo propagado por *downward continuation*. Isto porque, apesar do modelo de velocidades ser relativamente simples, a interface não plana existente gera regiões onde há mais de uma chegada de raios, como já vimos no modelo de Marmousi.

Implicitamente assumiu-se que a cada posição  $(x, z)$  podia ser associado um único valor de  $p_x$ . Isto nem sempre é verdade. O parâmetro do raio é um conceito associado com a teoria assintótica do raio, sendo uma aproximação de alta frequência da solução da equação da onda. Na prática, a função  $p(x, z)$  pode admitir vários valores para uma determinada posição  $(x, z)$  (estritamente falando,  $p_x$  não é uma função). Nesse caso, qual valor de  $p_x$  que deve ser usado na equação 5.13? A figura 5.7 ilustra a situação acima descrita.

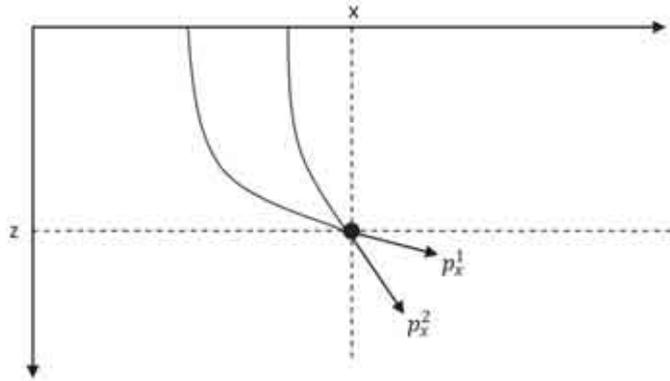


Figura 5.7: Ilustração de *multi-pathing*.

A situação descrita acima é chamada de *multi-pathing*.

É possível também calcular várias chegadas em um determinado ponto. Entretanto, isto resulta em complicações adicionais. Para interpolar tempos de trânsito ou parâmetros de raio tem-se que usar raios que tenham ponto de partida semelhante, o que leva a algoritmos complexos e não muito práticos. Por exemplo, Xu e Lambaré [10] apresentaram um método baseado na reconstrução de frentes de onda em que a interpolação dos valores de tempo é feita através da identificação de ramos de raios. Entretanto, o algoritmo de interpolação não é baseado na teoria dos raios ou na equação da onda, o que pode levar a resultados inconsistentes com a propagação dos campos de onda.

Estratégia alternativa foi apresentada por Nichols [9], na qual ele resolve a equação de Helmholtz para um número reduzido de frequências e em seguida aplica um ajuste paramétrico do campo de ondas para calcular o tempo de trânsito, a amplitude e a fase. Dessa forma é possível escolher a máxima amplitude sem calcular todo o campo de ondas.

Nos métodos acima citados o campo é caracterizado por apenas um valor em cada ponto, seja a primeira chegada ou a máxima energia, o que pode não ser adequado em alguns problemas. Ou então múltiplas chegadas são calculadas, usualmente por algoritmos complexos cujos resultados nem sempre podem ser garantidos.

Nos casos de múltiplas chegadas, aquela mais rápida nem sempre carrega a maior

parte da energia. Entretanto, a chegada mais energética irá contribuir mais para a formação da imagem de acordo a equação da condição de imagem. Portanto, calcular somente o tempo associado a cada ponto em profundidade não é suficiente para escolher qual tempo usar.

## 5.4 Migração por refletor explosivo estendido

Com os conceitos de refletor explosivo e feixes gaussianos podem-se descrever algoritmos para migração e modelagem de dados de ondas planas que levem em contas as múltiplas chegadas em um ponto em profundidade. De acordo com a equação 2.9 é necessário calcular os campos propagados em profundidade da fonte e do receptor. Mas o campo da fonte pode ser calculado através da equação 3.13, que extrapola uma onda plana em profundidade por feixes gaussianos. Por outro lado, o conceito do refletor explosivo estendido para ondas planas requer que se calcule um tempo de trânsito da superfície até o ponto de imagem, que é dado pelo argumento da segunda exponencial na equação 5.13. Comparando-se a equação 3.13 com a 5.13 podem-se conciliar estes dois conceitos usando como argumento da exponencial os tempos calculados pelos feixes gaussianos. A diferença é que agora tem-se uma exponencial para cada feixe que contribuir com amplitudes significativas para a imagem em um determinado ponto  $(x, z)$ . No apêndice I demonstra-se a equivalência cinemática da extrapolação por raios e por *downward continuation* para o caso de um modelo de camadas dependente apenas da profundidade.

$$I(x, n\Delta z) = \int \frac{|\omega|}{2\pi} R(x, n\Delta z, \omega) \sum_m A_m(x, n\Delta z, \omega) e^{-i\omega\tau_m(x, n\Delta z)} d\omega. \quad (5.16)$$

Na equação 5.16 tem-se a soma sobre todos os feixes gaussianos que contribuem para a imagem em  $(x, z)$ , cada um com uma fase  $\tau_m$  diferente. Assim como na migração por feixes gaussianos, desta forma levam-se em conta todos os possíveis caminhos da onda, resolvendo o problema do *multi-pathing*. Ao contrário do que foi utilizado na migração do dado de Marmousi, neste caso trabalha-se no domínio da frequência e não do tempo. O algoritmo é consideravelmente mais lento, e se usado em migração 3D, um esquema de paralelização seria necessário.

O algoritmo de migração por *downward continuation* serve de base para o algoritmo de migração de dados de ondas planas por refletor explosivo. No caso deste, o campo da fonte não é mais extrapolado por *downward continuation* e sim por feixes gaussianos. Além disso, devem-se somar explicitamente em um ponto migrado as contribuições efetivas de todos os feixes gaussianos que passam na sua vizinhança. Nas figuras 5.8 e 5.9 os dois algoritmos são sucintamente descritos.

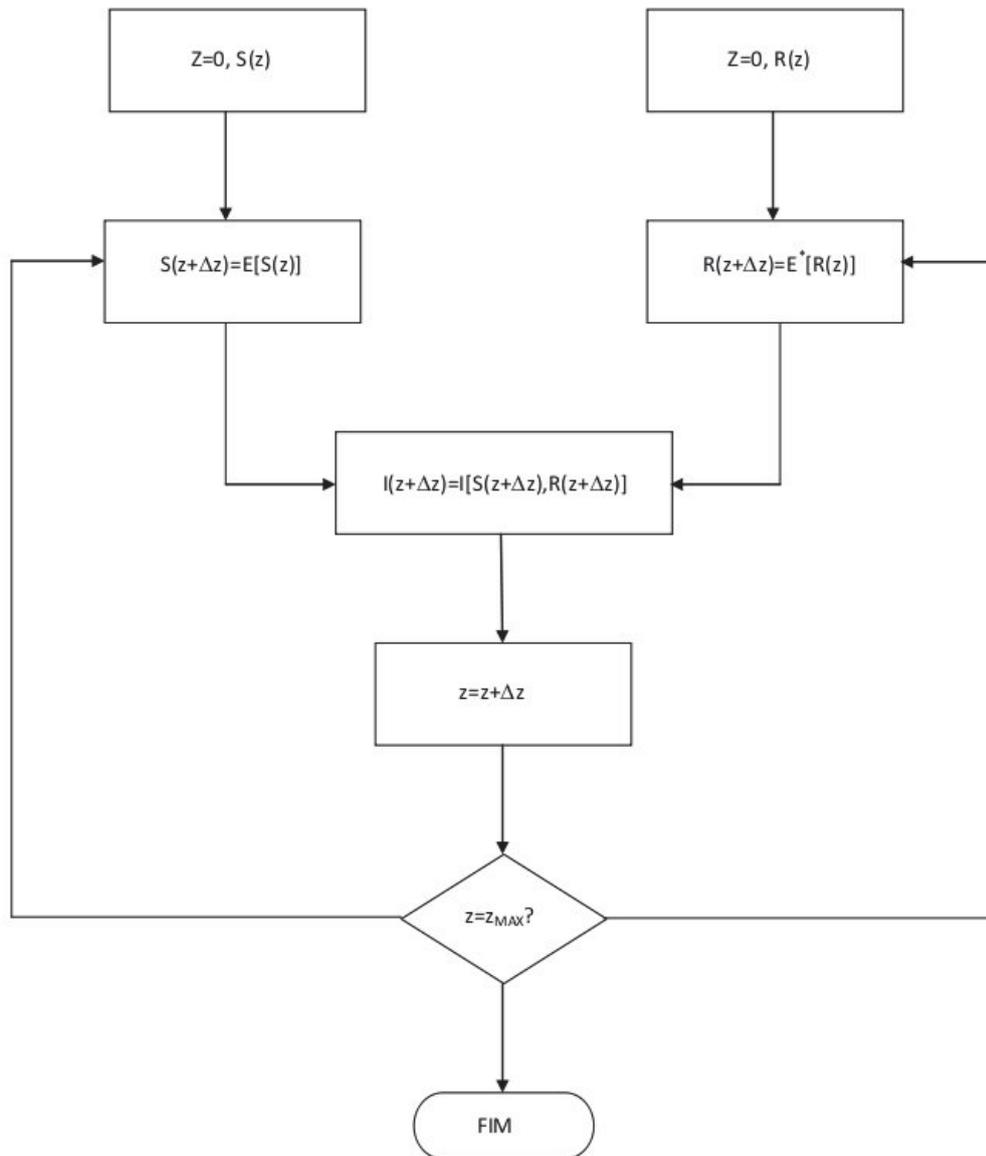


Figura 5.8: Diagrama da migração por *downward-continuation*. Note a natureza iterativa da extrapolação dos campos da fonte e do receptor, realizadas pelo operador  $E$ .

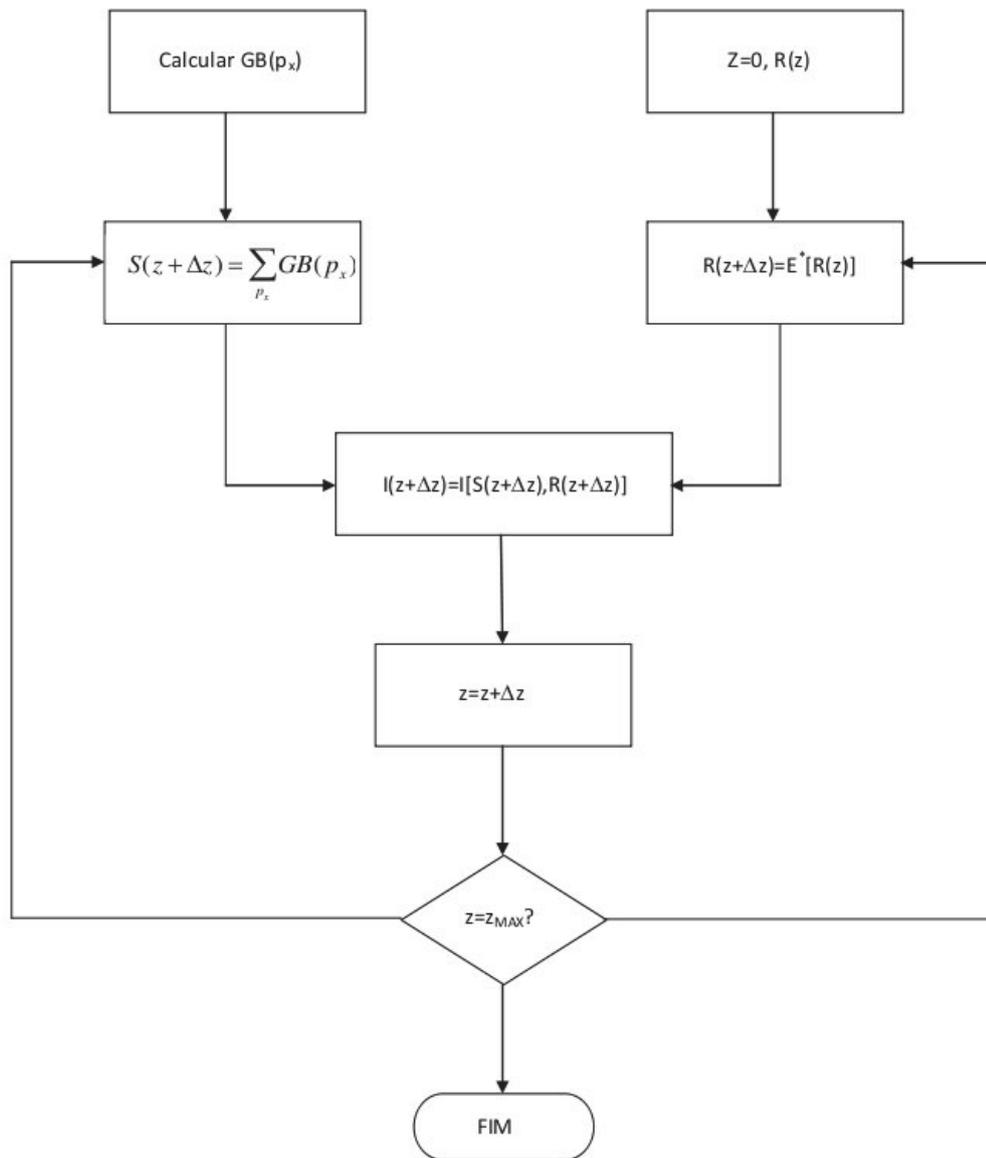


Figura 5.9: Diagrama da migração por refletor explosivo. Note a natureza não iterativa da extrapolação do campo da fonte, o qual é calculado diretamente na profundidade desejada pela soma dos feixes gaussianos.

Para modelos de geológicos complexos como o de Marmousi, no qual o campo de velocidades deve ser suavizado para o cálculo do traçado dinâmico dos raios, há um problema com essa metodologia. Os tempos do refletor explosivo são calculados por feixes gaussianos, mas o campo dos receptores é extrapolado por *downward continuation* cada um com sua própria velocidade. Isso resulta em campos não exatamente em fase no cálculo da condição de imagem que será degradada por isso. Na figura 5.10 mostra-se a migração por refletor explosivo do dado de Marmousi para fonte com  $p_x = 0$  ms/m. Observa-se que a migração apresenta resultado inferior àquela obtida com feixes gaussianos (figura 4.11). Na verdade isto indica que o cálculo do raio e do feixe são os aspectos mais importantes da migração por feixes gaussianos, e que algoritmos que sejam robustos em situações com grandes gradientes de velocidade são um campo de pesquisas ainda em aberto.

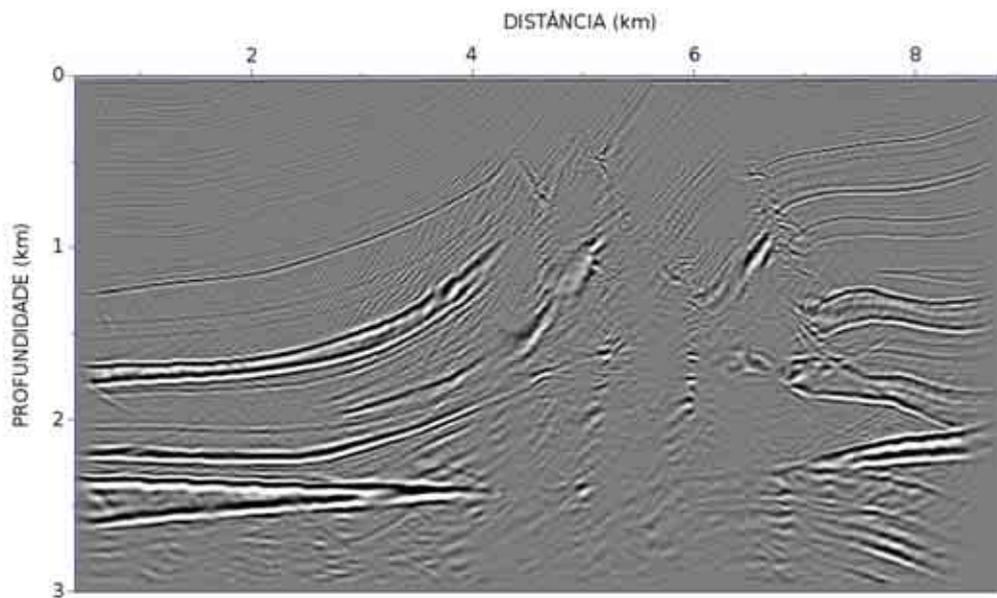


Figura 5.10: Migração por refletor explosivo do dado de ondas planas de Marmousi com  $p_x = 0$  ms/m.

## 5.5 Modelagem por refletor explosivo estendido

A modelagem de dados sísmicos tem sido utilizada pela indústria e academia para diversas finalidades. Por exemplo, nesta tese o dado sísmico bidimensional com o modelo de Marmousi foi sinteticamente modelado para servir de dado-teste para algoritmos de migração. Outros usos da modelagem são estudos de iluminação em profundidade para o desenho de geometrias de aquisição de dados sísmicos, simulação de respostas acústicas e elásticas para a caracterização de fluidos em reservatórios, a

modelagem de dados para uso em algoritmos de tomografia de reflexão, entre outros.

Diversas técnicas tem sido utilizadas na modelagem de dados, sendo as principais baseadas em métodos de diferenças finitas, elementos finitos, métodos integrais e métodos assintóticos. Para uma revisão destes e outros métodos pode-se consultar o artigo de Carcione et al. [54].

O conceito do refletor explosivo pode ser também usado na modelagem de dados sísmicos de ondas planas. A modelagem por refletor explosivo convencional é feita com os refletores explodindo simultaneamente em  $t = 0$ . Neste caso a modelagem pode ser feita recursivamente com a seguinte expressão (Romanelli [52]):

$$R(x, z - \Delta z, \omega) = e^{-ik_z \Delta z} [R(x, z, \omega) + I(x, z)], \quad (5.17)$$

onde  $I(x, z)$  é a imagem migrada. A inconsistência da expressão acima com variáveis espaciais e frequência espacial é resolvida na prática calculando o operador de extrapolação  $e^{-ik_z \Delta z}$  com um algoritmo de diferenças finitas no domínio do espaço.

Para estender o conceito de refletor explosivo acrescenta-se uma defasagem de tempo na *explosão* do refletor. A expressão do campo extrapolado acima é modificada para :

$$R(x, z - \Delta z, \omega) = e^{-ik_z \Delta z} [R(x, z, \omega) + I(x, z)e^{-i\omega\tau(x,z)}]. \quad (5.18)$$

Por analogia com a migração o tempo de atraso  $\tau(x, z)$  necessário para modelar dados de onda plana pode ser obtido a partir dos tempos de propagação dos feixes gaussianos. Usando também a amplitude da expressão dos feixes gaussianos, a equação 5.18 pode ser reescrita como :

$$R(x, z - \Delta z, \omega) = e^{-ik_z \Delta z} [R(x, z, \omega) + I(x, z) \sum_m A_m(x, z) e^{-i\omega\tau_m(x,z)}]. \quad (5.19)$$

Na expressão acima a amplitude  $A_m$  e o tempo complexo  $\tau_m$  se referem ao feixe  $m$  e são calculados com a equação 3.13.

São utilizados dois métodos de modelagem. O primeiro é o baseado no conceito estendido do refletor explosivo de acordo com a equação 5.19, com a extrapolação dos tempos da onda plana da fonte calculada por feixes gaussianos e do *upward continuation* calculado por um algoritmo iterativo com a solução por diferenças finitas da equação unidirecional da onda. O outro método utiliza feixes gaussianos para extrapolar o dado sintético de uma profundidade diretamente até a superfície.

Para comparar os resultados com os métodos acima modela-se o dado de ondas planas com o algoritmo recursivo. Em comum com o método dos feixes gaussianos estão a extrapolação unidirecional do campo e a não modelagem de múltiplas. Para

completar, comparam-se os resultados obtidos com o dado sintetizado a partir do dado modelado em ponto de tiro. Entretanto, este último dado foi construído com a equação acústica completa da onda, modelando a onda direta e reflexões múltiplas intra-camadas. Este dado será o menos similar dos quatro apresentados.

Para realizar a modelagem de dados sísmicos é necessário um modelo de refletividade, ou seja, a localização espacial dos refletores e o coeficiente de reflexão de cada um deles. Pode-se aproximar este modelo de refletividade usando o modelo de velocidades de Marmousi e calculando a magnitude do gradiente de velocidade em cada posição em profundidade. A figura 5.11 mostra este modelo.

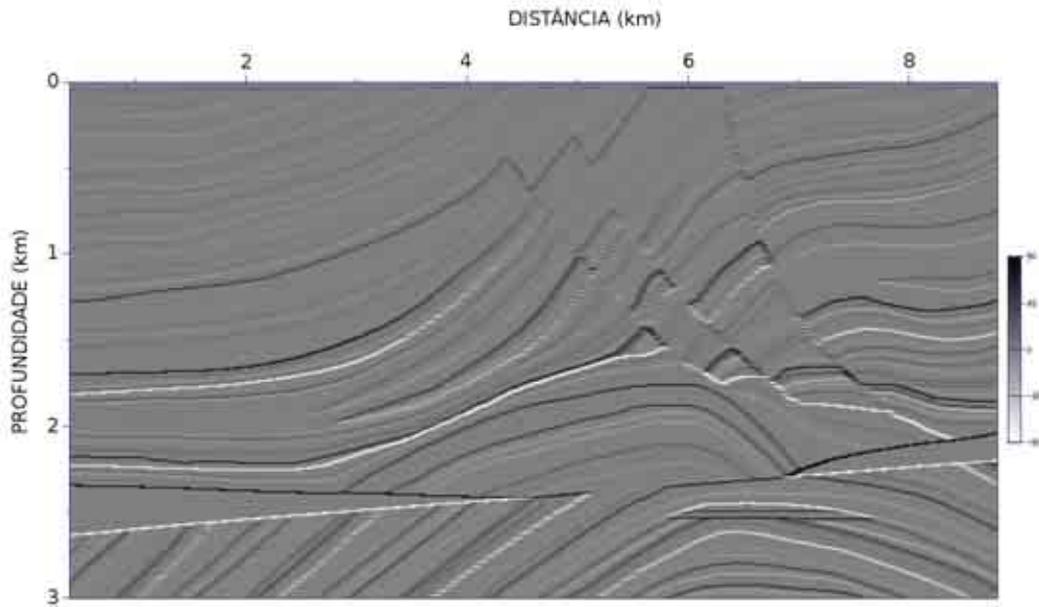


Figura 5.11: Modelo de refletividade usado para modelar dados sintéticos de ondas planas.

Na equação 5.19 acima observa-se que o somatório nada mais é que a extrapolação do campo da fonte até a profundidade  $z$ . Então, pode-se escrever de maneira mais geral,

$$R(x, z - \Delta z, \omega) = e^{-ik_z \Delta z} [R(x, z, \omega) + I(x, z)S(x, z, \omega)]. \quad (5.20)$$

Na equação 5.19 os dados sísmicos são modelados com o campo da fonte extrapolado por feixes gaussianos, num método que foi denominado de refletor explosivo, pois ele vem de uma extensão natural da modelagem por refletor explosivo para dados de afastamento nulo. Mas a equação 5.20 sugere que pode-se usar qualquer extrapolação do campo da fonte para calcular os dados sísmicos modelados. Neste trabalho usa-se a propagação da fonte por um algoritmo de diferenças finitas, o mesmo usado para extrapolar inversamente os dados dos receptores na migração.

Outra observação interessante é que o tipo de dado modelado depende somente da fonte que é usada. Se uma fonte de ondas planas for propagada em profundidade e a equação 5.20 for utilizada têm-se dados de ondas planas. Se for utilizada uma fonte pontual têm-se dados sintéticos de uma fonte pontual. Isto permite uma grande flexibilidade conceitual e prática na modelagem de dados sísmicos sintéticos.

As equações 5.19 e 5.20 modelam o dado de forma recursiva em profundidade, ou seja, o dado em uma profundidade é usado como condição inicial para a extrapolação para uma profundidade imediatamente superior. Outra recursão possível é usar o eixo do tempo no lugar do de profundidade. Neste caso o dado modelado é aquele coletado em  $z = 0$  para cada passo de tempo. Foi dessa forma que o dado sintético original de Marmousi foi gerado.

## 5.6 Modelagem por feixes gaussianos

Pode-se também usar os feixes gaussianos para modelar dados sísmicos. Da mesma forma que a migração, a modelagem por feixes gaussianos não é recursiva, o que quer dizer que se podem modelar dados sísmicos que seriam registrados caso houvesse refletor em apenas uma região em profundidade. Esta habilidade pode ter aplicações práticas na análise de velocidades para migração e em algoritmos de inversão como a tomografia.

A idéia da modelagem por feixes gaussianos é desfazer a migração. O algoritmo pode ser dividido em duas partes. A primeira é a reconstrução dos traços que foram migrados, ou seja, os *slant-stacks* locais. O segundo é, a partir destes reconstruir o dado de ondas planas. A equação 4.27 diz que o *slant-stack* local  $\overline{\overline{R}}(x_j, p'_x, t)$  é espalhado por várias posições  $(x, z)$ . A soma de todos os dados espalhados na mesma posição  $(x, z)$  resulta na imagem migrada neste ponto. É claro que nem todos *slant-stacks* contribuem para todas as posições de imagem. Apenas aqueles cujos feixes correspondentes passam próximos do ponto migrado têm uma contribuição efetiva. Partindo da imagem migrada há duas alternativas de reconstrução do dado que a originou. Em um determinado ponto apenas alguns *slant-stacks* contribuem. Como saber em qual proporção cada um deles contribui se não se conhece a amplitude de cada um deles, o que é na verdade o que estamos querendo determinar? Uma solução seria resolver o problema como uma inversão, pois um traço contribui para mais de uma posição em profundidade. Mas mesmo para um caso 2D um sistema de milhares e milhares de equações e milhares de parâmetros deveria ser resolvido. Embora isso não seja impossível, seria extremamente exigente em termos de recursos computacionais. Outra solução, menos ambiciosa mas muito mais eficiente, é usar a operação conjugada da migração. Na prática isto significa espalhar cada ponto imagem para todos os feixes igualmente e supor que a soma deles se aproxime da

amplitude verdadeira de cada traço. Experimentos numéricos indicam diz que esta solução produz muito bons resultados.

A segunda parte, a reconstrução do campo registrado pelos receptores a partir dos *slant-stacks* locais, também admite as duas soluções: a inversa e a conjugada. Neste a inversa não é tão custosa pois deve-se reconstruir apenas alguns traços a partir de alguns *slant-stacks*. Foi esta solução adotada nos resultados apresentados nesta tese.

A figura abaixo ilustra as operações de migração e modelagem por feixes gaussianos, de acordo com a visão da operação conjugada.

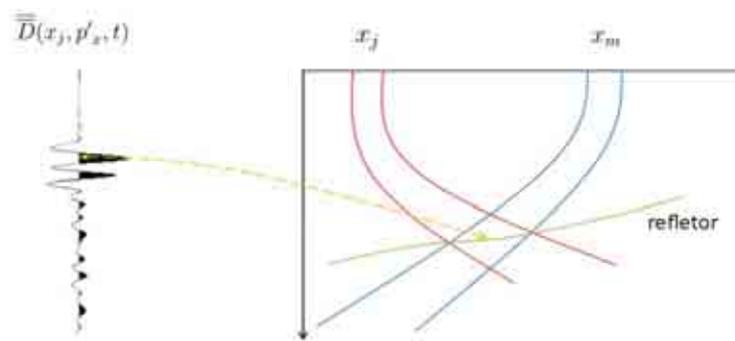


Figura 5.12: Diagrama das operações de migração e modelagem por feixes gaussianos. A migração leva a informação do *slant-stack* local para a imagem migrada. A modelagem leva a informação do modelo de impedância para construir o *slant-stack* local.

As figuras 5.13 e 5.14 mostram, respectivamente, os dados modelados com o algoritmo do refletor explosivo e feixes gaussianos, e, para comparar com estes, os dados modelados com os algoritmos de diferenças finitas com recursão em profundidade, usando a equação unidirecional da onda (figura 5.15), e com recursão em tempo, usando a equação completa (acústica) da onda (figura 5.16).

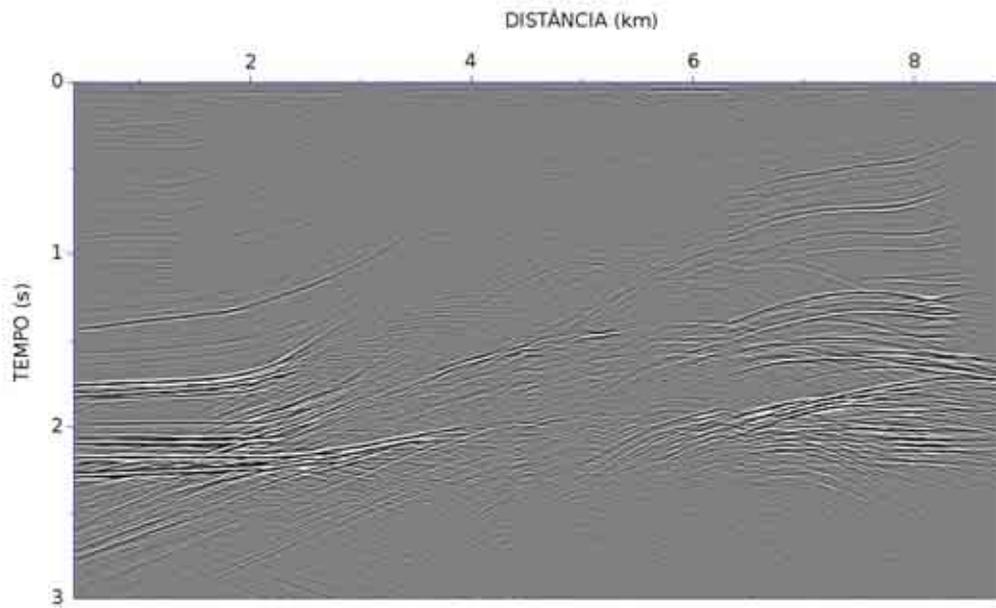


Figura 5.13: Modelagem de dado de onda plana com fonte com  $p_x = 0$  s/m usando o método do refletor explosivo.

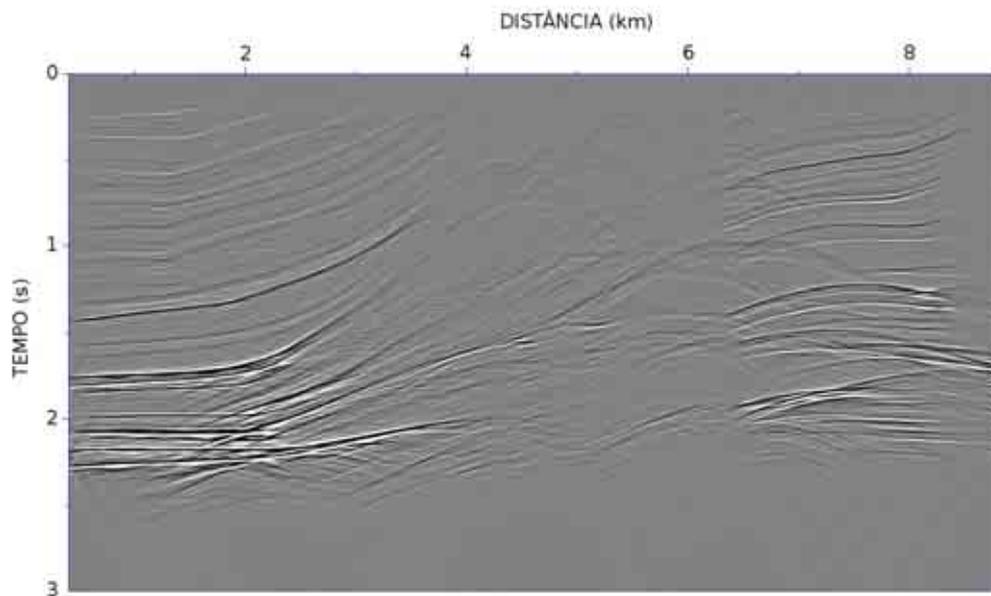


Figura 5.14: Modelagem de dado de onda plana com fonte com  $p_x = 0$  s/m usando o método dos feixes gaussianos.

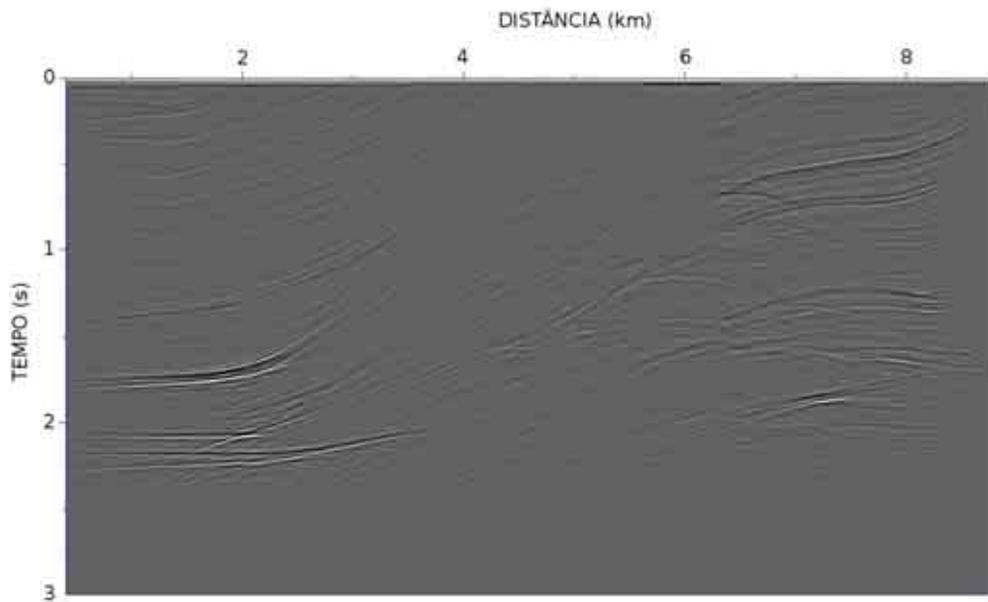


Figura 5.15: Modelagem de dado de onda plana com fonte com  $p_x = 0$  s/m usando diferenças finitas com recursão em profundidade (*upward continuation*).

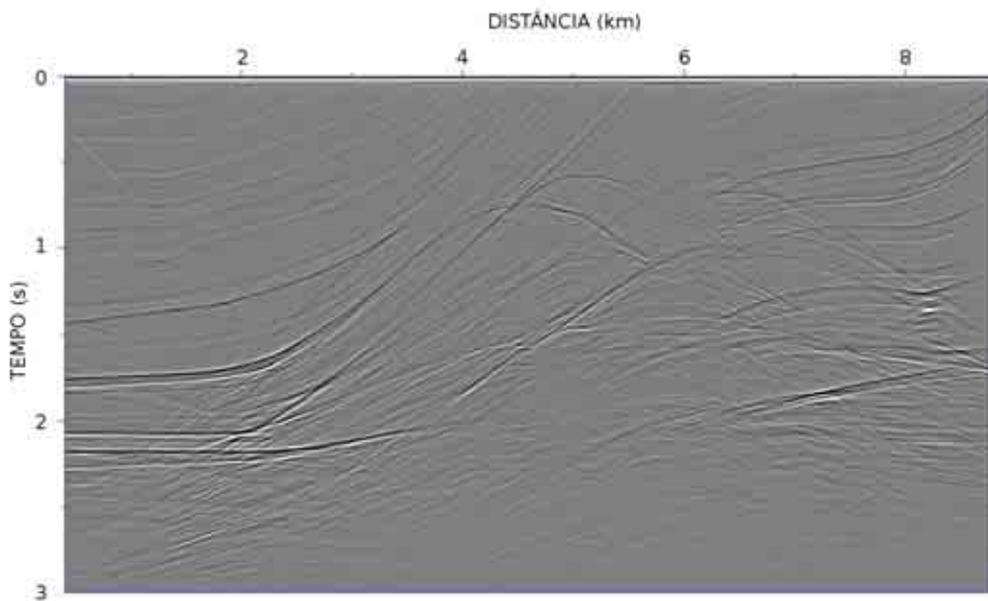


Figura 5.16: Modelagem de dado de onda plana com fonte com  $p_x = 0$  s/m usando diferenças finitas com recursão em tempo.

# Capítulo 6

## Discussão e conclusões

### 6.1 Discussão

Neste trabalho foi apresentada uma formulação para a migração de dados de ondas planas usando feixes gaussianos. O campo da fonte de ondas planas é convenientemente extrapolado diretamente com feixes gaussianos sem a necessidade de calcular a função de Green. O campo do receptor é extrapolado com a função de Green calculada com feixes gaussianos. Uma potencial vantagem deste método é que a função de Green pode ser calculada apenas uma vez, para qualquer fonte, de ondas planas ou não, sendo possível reutilizá-la várias vezes.

Embora não se tenha tido nesta tese a preocupação imediata com a eficiência do método, é importante ressaltar algumas características favoráveis a ela. Em primeiro lugar no domínio de ondas planas a quantidade de dados a serem migrados é menor que no domínio do tiro comum. Por exemplo, supondo-se uma linha sísmica 2D com 30 km de extensão, e fontes espaçadas a 25 m e receptores espaçados a 12.5 m, há 2400 posições de receptor comum. Supondo que o dado foi sintetizado com 80 fontes de ondas planas, há um total de 192.000 traços. No domínio do ponto de tiro, considerando um total de 1200 tiros e cada um deles com 200 traços há um total de 240.000 traços, ou seja, o dobro em relação ao dado de ondas planas. Usando feixes gaussianos, cada registro de onda plana tem 2400 traços. Se os feixes estiverem espaçados de 200 m, e houver 10 feixes para cada posição, o total de *slant-stacks* locais a serem migrado é de 1500. Multiplicando esse valor por 80 fontes de ondas planas, há 120.000 traços no total. Haveria uma redução de metade dos traços migrados. Como na migração Kirchhoff o tempo de migração é proporcional ao número de traços, haveria uma redução substancial de custo.

Outro aspecto prático importante é a quantidade de dados a serem armazenados. Como já foi dito, o campo pode ser inversamente propagado em profundidade sem o recálculo dos feixes gaussianos. Mas para isso eles precisam ser calculados a primeira

vez e armazenados. Quanto espaço é necessário? Como exemplo supõe-se uma área de 30 x 30 km. Se as posições iniciais dos feixes estiverem espaçadas de 200 m em ambas as direções, há um total de 22.500 pontos. Considerando uma migração tridimensional, e 150 feixes por ponto, resulta em 3.375.000 feixes gaussianos a serem calculados. O que se necessita na verdade são os tempos e amplitudes em torno do feixe central. Supondo uma largura de 1000 m e um grid de cálculo de 200 x 200 x 200 nas três dimensões e 6000 m de profundidade há um total de 3000 valores a serem calculados por feixe. Cabe observar que os valores de tempo e amplitude devem ser interpolados para o *grid* de migração. Como esses valores são números complexos o espaço de armazenagem é de aproximadamente 324 Gbytes. Embora esse valor não esteja dentro da capacidade de memória atual dos computadores ele é facilmente armazenável em disco. Pode-se prever que em um futuro próximo a capacidade de memória será suficiente para armazenar a totalidade da função de Green dos feixes gaussianos, tornando a migração por este método muito eficiente. Será possivelmente mais eficiente que o algoritmo de *downward continuation*, pois este exige que a propagação seja inteiramente calculada para os dados de cada fonte, seja ela de ondas planas ou outra qualquer.

Um outro aspecto a ser mencionado é a semelhança entre o algoritmo de migração por feixes gaussianos e o Kirchhoff. Na versão no domínio do tempo a unidade a ser migrada é o *slant-stack* local, enquanto que no Kirchhoff é o traço sísmico original. O núcleo de ambos os algoritmos migra um traço calculando o tempo da fonte ao ponto migrado ao receptor e somando o valor da amostra do traço neste tempo na posição migrada. Entretanto, essa semelhança não é completa. A migração Kirchhoff é baseada na função de Green tanto para fonte quanto para receptor, ou seja, a fonte emite uma onda em todas as direções e o receptor recebe de todas as direções. No feixe gaussiano, cada feixe tem uma direção inicial que o levará ou não ao ponto migrado. Isso torna o algoritmo mais complexo.

Uma outra característica importante da migração por feixes gaussianos que é compartilhada com a Kirchhoff é a migração localizada em volumes específicos do espaço. Isso em contraste com os algoritmos conhecidos como migração por *wave-equation* que devem calcular o campo em todo o volume. Isto torna a migração por feixes gaussianos especialmente eficiente para gerar imagens migradas com várias velocidades em pontos selecionados e esparsos, como é necessário em métodos de análise de velocidades ou tomografia. Como viu-se neste trabalho, a imagem gerada pelo método de feixes gaussianos é muito semelhante àquela gerada por *downward continuation*, sendo portanto um campo de velocidade obtido por um método adequado para migrar com o outro.

A modelagem de dados tanto por refletor explosivo quanto por feixes gaussianos é inferior à obtida por diferenças finitas. A modelagem de dados por diferenças

finitas é baseada na solução direta da equação da onda, levando em conta de forma natural a partição de energia nas interfaces, incluindo os efeitos do ângulo de incidência nos coeficientes de reflexão e transmissão, as múltiplas internas, as múltiplas chegadas e todas as frequências. Os métodos aqui apresentados tem dificuldades em modelar estas características da propagação de ondas. Entretanto, a modelagem por feixes gaussianos apresenta uma vantagem em relação às diferenças finitas. É possível modelar eventos isolados de forma não recursiva. Embora as características de amplitude não sejam necessariamente preservadas, cinematicamente a solução é adequada, tornando este método de modelagem uma alternativa para análise de velocidades, em métodos que dependam dos tempos de reflexão.

## 6.2 Conclusões

Foi demonstrada nesta tese a migração de dados sísmicos de ondas planas usando o método dos feixes gaussianos. A migração foi demonstrada para dados bi e tridimensionais, tanto no domínio do tempo quanto no da frequência, e aplicada em dados sintéticos e reais. Usou-se como padrão de migração o algoritmo de *downward continuation*, com extrapolação em profundidade, no domínio da frequência temporal e solução da equação da onda uni-direcional no domínio do espaço. Os resultados dos dados migrados com ambos os métodos são essencialmente da mesma qualidade. No caso bidimensional o dado escolhido foi o de Marmousi, um modelo de velocidades complexo. A migração por feixes gaussianos demonstrou ser capaz de lidar com as múltiplas chegadas de raios em pontos em profundidade, como foi teoricamente previsto.

Na migração de dados ondas planas em dados tridimensionais reais foram levadas em conta as peculiaridades deste tipo de dado. Por exemplo, na presença de correntes marinhas que provocam o desvio do cabo sísmico, as posições de fonte e receptor não são, em geral, coincidentes. Para sintetizar o dado de ondas planas a partir dos dados originais em ponto de tiro usou-se o princípio da correspondência para trocar as posições de fontes e receptores. Além disso, a fonte agora não é mais uma fonte linear e sim uma fonte areal, que emite uma onda numa determinada direção. Isso provoca algumas dificuldades algorítmicas cuja solução foi mostrada neste trabalho.

Em dados com altos contrastes de velocidade, como o de Marmousi, foi essencial aplicar uma suavização ao campo de velocidades para obter uma imagem migrada de boa qualidade. Isto porque a integração das equações diferenciais do raio pelo método de Runge-Kutta é inapropriada para meios descontínuos.

Os feixes gaussianos são mais facilmente calculados em coordenadas centradas no raio. Entretanto, para ser aplicada na migração os feixes devem ser transforma-

dos para coordenadas cartesianas. Nesta tese foi apresentado um método eficiente para realizar esta transformação, permitindo que se calcule os valores de tempo e amplitude em todos os pontos do *grid* de migração. Ou então, que se calcule menos pontos de forma muito mais rápida.

O refletor explosivo é uma abstração na qual se imagina uma superfície em profundidade na qual explosivos são detonados simultaneamente. A onda sísmica gerada é registrada em superfície e pode-se mostrar que este campo de ondas é equivalente ao que seria registrado se a fonte estivesse na superfície, o receptor estivesse na mesma posição e a velocidade do meio fosse a metade da velocidade real. Nesta tese foi apresentada uma extensão deste conceito, na qual o tempo de detonação em subsuperfície não é mais simultâneo. Foi mostrado que para determinados tempos pode-se simular o dado que seria registrado se a fonte fosse de ondas planas. Mostrou-se como calcular estes tempos com três algoritmos diferentes. O primeiro usa a lei de Snell para propagar os valores de  $p_x$  em profundidade. O segundo usa uma solução de diferenças finitas da equação *eikonal*. Estes dois algoritmos sofrem dos mesmos problemas de múltiplas chegadas de outros métodos baseados em raios. O terceiro usa os tempos complexos dos feixes gaussianos calculados sobre a superfície para resolver o problema do *multi-pathing*.

Da mesma forma que o conceito tradicional do refletor explosivo, sua extensão pode ser usada para migrar e modelar dados sísmicos. Neste trabalho isto foi demonstrado migrando os dados sintéticos de Marmousi, e modelando dados de ondas planas com este mesmo modelo. Nestes dois exemplos foram usados os feixes gaussianos. Para complementar, apresentou-se também um algoritmo de modelagem inteiramente baseado em feixes gaussianos.

### 6.3 Sugestões para trabalhos futuros

Este trabalho deixa algumas questões não resolvidas e que podem ser objeto de pesquisas futuras. Uma das mais importantes é o traçado de raios em meios descontínuos. Nesta tese adotamos a solução de suavizar o modelo de velocidades, mas isso foi feito de forma empírica sem nenhum suporte teórico. Uma possível linha de pesquisa seria encontrar esse suporte. Ou usar métodos numéricos de integração de equações diferenciais que levem em conta de forma natural as discontinuidades do meio. Outra aplicação dos métodos desta tese é a tomografia com dados de ondas planas. Por exemplo, como estes dados se comportam quando migrados com uma velocidade incorreta? Como extrair da imagem perturbada a correspondente perturbação na velocidade? Uma outra linha de trabalho seria a construção de uma migração orientada ao alvo por síntese de frentes de onda usando feixes gaussianos, numa extensão da tese de doutorado de Boechat [55]. A equação da onda usada

neste trabalho foi para meios isotrópicos. O método pode ser estendido para meios anisotrópicos.

# Referências Bibliográficas

- [1] YILMAZ, O. *Seismic data analysis: processing, inversion, and interpretation of seismic data*. Tulsa, EUA, Society of Exploration Geophysicists, 2001.
- [2] BIONDI, B. L. *3D seismic imaging*. Tulsa, EUA, Society of Exploration Geophysicists, 2006.
- [3] CLAERBOUT, J. F. “Towards a unified theory of reflector mapping”, *Geophysics*, v. 36, pp. 467–481, 1971.
- [4] SAVA, P., HILL, S. “Overview and classification of wavefield seismic imaging methods”, *The Leading Edge*, pp. 170–183, 2009.
- [5] BLEISTEIN, N., COHEN, J., JR., J. S. *Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration and inversion*. Nova Iorque, EUA, Springer, 2001.
- [6] SETHIAN, J. A., POPOVICI, A. M. “3-D travelttime computation using the fast marching method”, *Geophysics*, pp. 516–523, 1999.
- [7] VAN TRIER, J., SYMES, J. J. “Upwind finite-difference calculation of traveltimes”, *Geophysics*, pp. 812–821, 1991.
- [8] GEOLTRAIN, S., BRAC, J. “Can we image complex structures with first-arrival travelttime?” *Geophysics*, pp. 564–575, 1993.
- [9] NICHOLS, D. E. “Maximum energy traveltimes calculated in the seismic frequency band”, *Geophysics*, pp. 253–263, 1996.
- [10] XU, S., LAMBARÉ, G. “Fast migration/inversion with multivalued rayfields: part 1 - method, validation test, and application in 2D to Marmousi”, *Geophysics*, pp. 1311–1319, 2004.
- [11] HILL, N. R. “Gaussian beam migration”, *Geophysics*, v. 55, pp. 1416–1428, 1990.
- [12] HILL, N. R. “Prestack Gaussian-beam depth migration”, *Geophysics*, v. 66, pp. 1240–1250, 2001.

- [13] POPOV, M. M., SEMTCHENOK, N. M., POPOV, P. M., et al. “Depth migration by the Gaussian beam summation method”, *Geophysics*, v. 75, pp. S81–S93, 2010.
- [14] GRAY, S. H. “Gaussian beam migration of common-shot records”, *Geophysics*, v. 70, pp. S71–S77, 2005.
- [15] NOWACK, R. L., SEN, M. K., STOFFA, P. L. “Gaussian beam migration for sparse common-shot and common-receiver data”, *73rd SEG Annual International Meeting*, pp. 1114–1117, 2003.
- [16] GRAY, S. H., BLEISTEIN, N. “True-amplitude Gaussian-beam migration”, *Geophysics*, v. 74, pp. S11–S23, 2009.
- [17] DA COSTA, C. A. *Migração através de feixes gaussianos*. Salvador, Tese de doutorado, UFBA, 1989.
- [18] DA COSTA, C. A., RAZ, S., KOSLOFF, D. “Gaussian beam migration”, *59rd SEG Annual International Meeting*, pp. 1169–1171, 1989.
- [19] HU, C., SEN, M. K., STOFFA, P., et al. “Plane wave gaussian beam prestack depth migration”, *SEG Expanded Abstracts*, pp. 2200–2204, 2007.
- [20] NOWACK, R. L. “Focused gaussian beams for seismic imaging”, *78rd SEG Annual International Meeting*, pp. 2376–2380, 2008.
- [21] NOWACK, R. L. “Focused gaussian beams for seismic imaging”, *Purdue University*, pp. 1–11, 2008.
- [22] NEAL, S. L., HILL, N. R., WANG, Y. “Anisotropic velocity modeling and prestack Gaussian-beam depth migration with applications in the deepwater Gulf of Mexico”, *The Leading Edge*, pp. 1110–1119, 2009.
- [23] SUN, Y., QIN, F., CHECKLES, S., et al. “3D prestack Kirchhoff beam migration for depth imaging”, *Geophysics*, pp. 1592–1603, 2000.
- [24] SHERWOOD, J. W. C., SHERWOOD, K., TIEMAN, H., et al. “3D beam prestack depth migration with examples from around the world”, *The Leading Edge*, pp. 1120–1127, 2009.
- [25] LIU, F., HANSON, D. W., WHITMORE, N. D., et al. “Toward a unified analysis for source plane-wave migration”, *Geophysics*, v. 71, pp. S129–S139, 2006.

- [26] DUQUET, B., LAILLY, P. “Efficient 3D wave-equation migration using virtual planar sources”, *Geophysics*, v. 71, pp. S185–S197, 2006.
- [27] STOFFA, P. L., SEN, M. K., SEIFOULLAEV, R. K., et al. “Plane-wave depth migration”, *Geophysics*, pp. S261–S272, 2006.
- [28] ZHANG, Y., SUN, J., NOFFORS, C., et al. “Delayed-shot 3D depth migration”, *Geophysics*, pp. E21–E28, 2005.
- [29] STORK, C., KAPOOR, J. “Discussion on Delayed-shot 3D depth migration”, *Geophysics*, pp. X25–X30, 2006.
- [30] SHAN, G., BIONDI, B. “Plane-wave migration in tilted coordinates”, *Geophysics*, pp. S185–S194, 2008.
- [31] SHAN, G., CLAPP, R., BIONDI, B. “3D plane-wave migration in tilted coordinates: a field data example”, *Geophysics*, pp. WCA199–WCA209, 2009.
- [32] CLAERBOUT, J. F. *Imaging the Earth’s interior*. Oxford, Reino Unido, Blackwell Scientific Publications, 1985.
- [33] BIONDI, B. “Prestack exploding-reflector modeling for migration velocity analysis”, *76rd SEG Annual International Meeting*, pp. 3056–3060, 2006.
- [34] ROMERO, L. A., GHIGLIA, D. C., OBER, C. C., et al. “Phase encoding of shot records in prestack migration”, *Geophysics*, v. 65, pp. 426–436, 2000.
- [35] MORTON, S. A., OBER, C. C. “The impact of reciprocity on prestack source plane wave migration”, *SEG Expanded Abstracts*, pp. 1131–1134, 1998.
- [36] JING, X., FINN, C. J., DICKEN, T. A., et al. “Encoding multiple shot gathers in prestack migration”, *SEG Expanded Abstracts*, pp. 786–789, 2000.
- [37] SUN, P., ZHANG, S., LIU, F. “Prestack migration of areal shot records with phase encoding”, *SEG Expanded Abstracts*, pp. 1172–1175, 2002.
- [38] GUERRA, C. *Migration velocity analysis using image-space generalized wavefields*. Stanford, EUA, Ph.D. Thesis, Stanford University, 2010.
- [39] SCHNEIDER, W. A. “Integral formulation for migration in two dimensions and three dimensions”, *Geophysics*, pp. 49–76, 1978.
- [40] PRESS, W. H., TEUKOLSKI, S. A., VETTERLING, W. T., et al. *Numerical recipes in Fortran 77*. Nova Iorque, EUA, Cambridge University Press, 2003.

- [41] CERVENY, V. *Seismic ray theory*. Cambridge, Inglaterra, Cambridge University Press, 2001.
- [42] BLEINSTEIN, N. *Mathematics of modeling, migration and inversion with Gaussian beams*. Nova Iorque, EUA, Colorado School of Mines, 2008.
- [43] GRAY, S. H., XIE, Y., NOTFORS, C., et al. “Taking apart beam migration”, *The Leading Edge*, pp. 1098–1108, 2009.
- [44] BERKHOUT, A. J. *Seismic migration - imaging of acoustic energy by wavefield extrapolation - A. Theoretical aspects*. Amsterdam, Holanda, Elsevier Science Publishers B.V., 1985.
- [45] DWIGHT, H. B. *Table of integrals and other mathematical data*. Nova Iorque, EUA, The Macmillan Company, 1961.
- [46] VERSTEEG, R. “The Marmousi experience: Velocity model determination on synthetic complex data set”, *The Leading Edge*, pp. 927–936, 1994.
- [47] HALE, D. “Computational aspects of gaussian beam migration”, *Colorado School of Mines Center for Wave Phenomena Report 139*, pp. 1–16, 1992.
- [48] CUNHA, P. E. M. *Imageamento sísmico por propagação de ondas no limite de altas e baixas frequências*. Rio de Janeiro, Tese de doutorado, UFRJ, 2005.
- [49] CLAERBOUT, J. F. “Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure”, *Geophysics*, pp. 407–418, 1970.
- [50] GAZDAG, J. “Wave equation migration with the phase-shift method”, *Geophysics*, pp. 1342–1351, 1978.
- [51] GAZDAG, J., SGUAZZERO, P. “Migration of seismic data by phase-shift plus interpolation”, *Geophysics*, pp. 124–131, 1984.
- [52] ROSA, A. L. R. *Análise do sinal sísmico*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Geofísica, 2010.
- [53] AKI, K., RICHARDS, P. G. *Quantitative Seismology*. Sausalito, EUA, University Science Books, 2002.
- [54] CARCIONE, J., HERMAN, G. C., TEN KROODE, A. “Seismic modeling”, *Geophysics*, pp. 1304–1325, 2002.

- [55] BOECHAT, J. B. T. *Migração reversa no tempo 3-D orientado ao alvo por síntese de frentes de onda*. Rio de Janeiro, Tese de doutorado, UFRJ, 2007.

# Apêndice A

## Slant stack

Demonstra-se neste apêndice que o *slant-stack* no domínio do receptor de um dado sísmico de uma fonte pontual é equivalente a um dado sísmico de uma fonte de ondas planas.

O dado refletido em uma superfície  $S$  registrado em  $x_r$  devido a uma fonte pontual localizada em  $x_s$  é dado pela integral de contorno (Romanelli, [52]):

$$d(x_s, x_r, \omega) = \oint_S [G(x_s, x, z, \omega) \nabla G(x_r, x, z, \omega) + G(x_r, x, z, \omega) \nabla G(x_s, x, z, \omega)] dS. \quad (\text{A.1})$$

$G$  é a função de Green que descreve a propagação de um ponto em superfície ( $x_s$  ou  $x_r$ , neste caso) até um ponto na superfície  $S = (x, z)$  em profundidade.

Por hipótese uma onda plana cruza o eixo  $z = 0$  na posição  $x_s$  em um tempo  $\tau_s$ . Se a onda se propaga com uma inclinação  $\theta$  e uma velocidade  $v$  junto à superfície, então de acordo com a figura A.1:

$$\tau_s = \frac{d}{v} = x_s \frac{\sin \theta}{v} = x_s p_x. \quad (\text{A.2})$$

Incluindo o atraso da onda plana na posição  $x_s$  e somando as contribuições de todas as posições  $x_s$  na equação A-1, tem-se a expressão para a resposta a uma fonte de ondas planas propagando-se na superfície com parâmetro de raio  $p_x$  :

$$d_{PW}(p_x, x_r, \omega) = \oint_S e^{-i\omega p_x x_s} [G(x_s, x, z, \omega) \nabla G(x_r, x, z, \omega) + G(x_r, x, z, \omega) \nabla G(x_s, x, z, \omega)] dS dx_s. \quad (\text{A.3})$$

Usando a equação A-1 em A-3 resulta em:

$$d_{PW}(p_x, x_r, \omega) = \int d(x_s, x_r, \omega) e^{-i\omega p_x x_s} dx_s. \quad (\text{A.4})$$

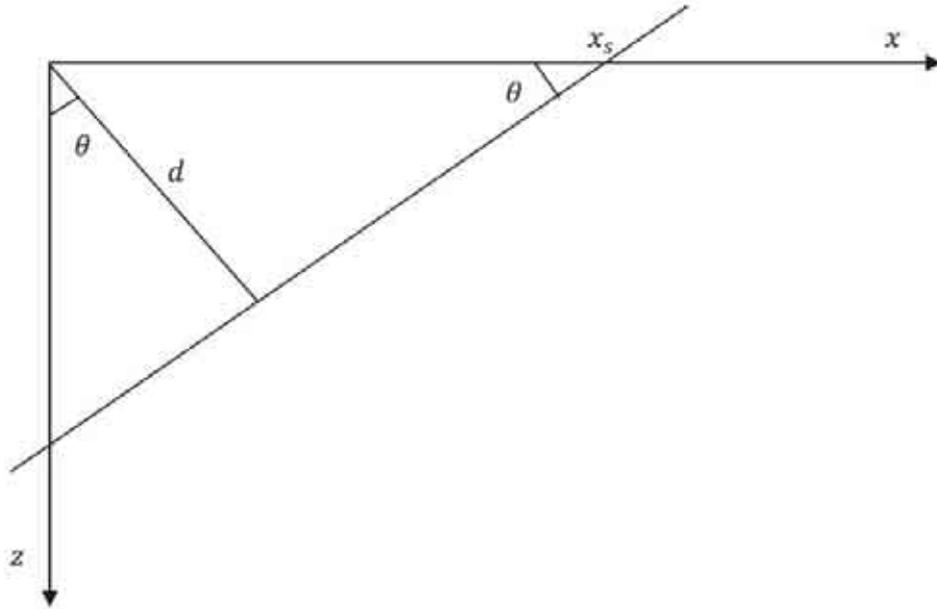


Figura A.1: Onda plana.

A expressão acima mostra que a equação 2.5 é a resposta em  $x_r$  para uma fonte de ondas planas.

## Apêndice B

# Equivalência entre receptor comum e fonte comum

A formulação de ondas planas apresentada nesta tese é baseada na aplicação de um *slant-stack* aos dados registrados com fontes pontuais, organizados em receptor comum. Como foi demonstrado no Apêndice A, isto gera dados equivalentes ao que seriam registrados se a fonte fosse de ondas planas.

Uma formulação alternativa e equivalente seria a aplicação do *slant-stack* em dados organizados em fonte comum. Nesse caso a interpretação seria a decomposição dos dados registrados em ondas planas, com uma fonte puontual.

Os dois métodos produzem o mesmo resultado nas seguintes condições :

- A aquisição dos dados é feita em uma linha;
- Um tiro é registrado com receptores em ambos os lados da fonte (*split-spread*), incluindo o afastamento nulo;
- As posições ocupadas pelos tiros são as mesmas dos receptores.

Usando o princípio da reciprocidade, ou seja, o dado registrado é o mesmo se a fonte e o receptor comum forem trocados de posição, o dado em fonte comum ou receptor é composto pelos mesmos dados. Portanto, o *slant-stack* produz o mesmo resultado em ambos os casos.

# Apêndice C

## Solução analítica para um feixe gaussiano

Neste Apêndice calcula-se a solução analítica para um feixe gaussiano no caso de um meio homogêneo com velocidade de propagação  $V$  e com direção de propagação vertical, isto é,  $p_x = 0$ . Neste caso simples a coordenada do raio  $s$  está associada à coordenada cartesiana  $z$  e coordenada do raio  $n$  está associada à coordenada cartesiana  $x$ .

As condições iniciais para a propagação do feixe são aquelas das equações 3.11 e 3.12. Resolvendo o sistema de equações 3.6 e 3.7 com essas condições iniciais tem-se:

$$P(z) = \frac{i}{V}, \quad (\text{C.1})$$

$$Q(z) = \frac{\omega_r w_0^2}{v(0)}. \quad (\text{C.2})$$

Além disso,

$$\tau(z) = \frac{z}{V}. \quad (\text{C.3})$$

O campo de ondas em profundidade é então:

$$u(x, z, \omega) = \frac{V}{\sqrt{\omega_r w_0^2 + iVz}} e^{i\frac{\omega}{V}z - \frac{\omega}{2}(\omega_r w_0^2 + iVz)^{-1}x^2}. \quad (\text{C.4})$$

Examinando-se o argumento da exponencial:

$$\begin{aligned} \arg(x, z, \omega) &= i\frac{\omega}{V}z - \frac{\omega}{2}(\omega_r w_0^2 + iVz)^{-1}x^2 \\ &= i\frac{\omega}{V}z - \frac{\omega}{2} \frac{\omega_r w_0^2 - iVz}{(\omega_r w_0^2)^2 + V^2 z^2} x^2. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

A parte imaginária do argumento está associada ao tempo de propagação :

$$\Im[\arg(x, z, \omega)] = \frac{\omega}{V}z - \frac{\omega}{2} \frac{Vz}{(\omega_r w_0^2)^2 + V^2 z^2} x^2. \quad (\text{C.6})$$

O primeiro termo da equação acima é o tempo ao longo do raio central. O segundo termo é uma correção responsável pela curvatura da frente do feixe à medida que aumenta a profundidade. A figura C.1 mostra o valor deste segundo termo para várias profundidades. Usou-se neste exemplo os seguintes valores:  $\omega_r = 94$  rad/s ,  $w_0 = 200$  m,  $V = 1500$  m/s, e  $z = 100, 500, 1000$  e  $2000$  m.

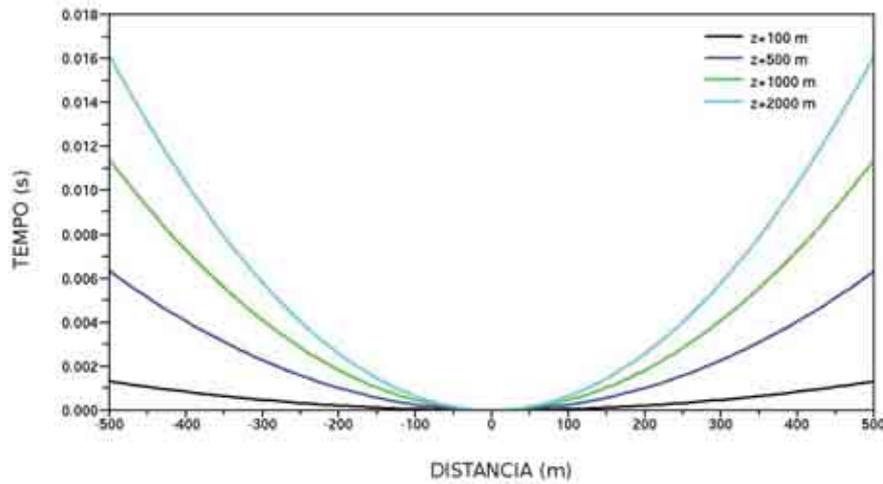


Figura C.1: Segundo termo da equação C.6 responsável pela curvatura da frente de onda do feixe gaussiano.

A parte real do argumento está relacionada com o decaimento exponencial de amplitude na direção normal ao raio central:

$$\Re[\arg(x, z, \omega)] = -\frac{\omega}{2} \frac{\omega_r w_0^2}{(\omega_r w_0^2)^2 + V^2 z^2} x^2. \quad (\text{C.7})$$

Observa-se que o decaimento de amplitude depende de  $x^2$ , daí o nome de feixe gaussiano. Além disso, o decaimento é dependente da frequência, sendo maior para frequências mais altas. Observa-se também que quanto maior a profundidade  $z$ , maior é o valor de  $x$  necessário para manter a mesma amplitude. Portanto, a gaussiana é mais larga quanto maior a profundidade.

# Apêndice D

## Equações dinâmicas do raio em três dimensões

As equações dinâmicas do raio em três dimensões são bem mais complexas que em duas. Neste apêndice estas equações são escritas explicitamente. Primeiramente, explicitam-se as equações diferenciais para os vetores unitários do sistema de coordenadas do raio, equações 3.20 que aqui são repetidas por conveniência:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{e}_1}{ds} &= (\hat{e}_1 \cdot \nabla v)\mathbf{p}, \\ \frac{d\hat{e}_2}{ds} &= (\hat{e}_2 \cdot \nabla v)\mathbf{p}.\end{aligned}\tag{D.1}$$

Tem-se um sistema de 6 equações acopladas 3 a 3:

$$\begin{aligned}\frac{de_{1x}}{ds} &= \left(e_{1x} \frac{\partial v}{\partial x} + e_{1y} \frac{\partial v}{\partial y} + e_{1z} \frac{\partial v}{\partial z}\right)p_x, \\ \frac{de_{1y}}{ds} &= \left(e_{1x} \frac{\partial v}{\partial x} + e_{1y} \frac{\partial v}{\partial y} + e_{1z} \frac{\partial v}{\partial z}\right)p_y, \\ \frac{de_{1z}}{ds} &= \left(e_{1x} \frac{\partial v}{\partial x} + e_{1y} \frac{\partial v}{\partial y} + e_{1z} \frac{\partial v}{\partial z}\right)p_z, \\ \frac{de_{2x}}{ds} &= \left(e_{2x} \frac{\partial v}{\partial x} + e_{2y} \frac{\partial v}{\partial y} + e_{2z} \frac{\partial v}{\partial z}\right)p_x, \\ \frac{de_{2y}}{ds} &= \left(e_{2x} \frac{\partial v}{\partial x} + e_{2y} \frac{\partial v}{\partial y} + e_{2z} \frac{\partial v}{\partial z}\right)p_y, \\ \frac{de_{2z}}{ds} &= \left(e_{2x} \frac{\partial v}{\partial x} + e_{2y} \frac{\partial v}{\partial y} + e_{2z} \frac{\partial v}{\partial z}\right)p_z.\end{aligned}\tag{D.2}$$

Agora explicitam-se as equações de  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  a partir de:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{Q}}{ds} &= v\mathbf{P}, \\ \frac{d\mathbf{P}}{ds} &= -(1/v^2)\mathbf{V}\mathbf{Q},\end{aligned}\tag{D.3}$$

onde,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial q_2^2} \end{bmatrix}.\tag{D.4}$$

Escrevendo  $P$  e  $Q$  como,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},\tag{D.5}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}.\tag{D.6}$$

Substituindo as equações D.4, D.5 e D.6 nas equações D.3 resulta no seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\frac{dQ_{11}}{ds} &= vP_{11}, \\ \frac{dQ_{12}}{ds} &= vP_{12}, \\ \frac{dQ_{21}}{ds} &= vP_{21}, \\ \frac{dQ_{22}}{ds} &= vP_{22}, \\ \frac{dP_{11}}{ds} &= [V_{11}Q_{11} + V_{12}Q_{21}]/v^2, \\ \frac{dP_{12}}{ds} &= [V_{11}Q_{12} + V_{12}Q_{22}]/v^2, \\ \frac{dP_{21}}{ds} &= [V_{21}Q_{11} + V_{22}Q_{21}]/v^2, \\ \frac{dP_{22}}{ds} &= [V_{21}Q_{12} + V_{22}Q_{22}]/v^2.\end{aligned}\tag{D.7}$$

Observa-se que nas equações acima as quantidades calculadas são complexas. Mas os valores reais e imaginários de  $P_{ij}$  e  $Q_{ij}$  estão desacoplados nestas equações. Portanto, eles podem ser calculados de forma independente e, na prática, as 8 equações acima são um sistema de 16 equações.

Têm-se agora as equações diferenciais do raio central:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= vp_x, \\
\frac{dy}{ds} &= vp_y, \\
\frac{dz}{ds} &= vp_z, \\
\frac{dp_x}{ds} &= -\frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\frac{dp_y}{ds} &= -\frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\frac{dp_z}{ds} &= -\frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Finalmente, a equação do tempo ao longo do raio:

$$\frac{d\tau}{ds} = 1/v. \tag{D.9}$$

Considerando todas as equações acima há 6 equações para o raio, 1 para o tempo, 6 para os vetores do sistema de coordenadas e 16 equações para  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ . Elas formam um sistema de 29 equações diferenciais ordinárias. Elas não são todas acopladas, mas é mais prático implementá-las como um sistema único, resolvendo-as pelo método de Runge-Kutta.

# Apêndice E

## Derivada da função de Green

A função de Green pode ser escrita como uma expansão de feixes gaussianos (Bleinstein [42]):

$$G(x, z, x', z', \omega) = \frac{i\omega}{2\pi} \int u_{GB}(x, z, x', z', p'_x, \omega) \frac{dp'_x}{p'_z}. \quad (\text{E.1})$$

A derivada parcial da função de Green acima em relação à variável  $z'$  é:

$$\frac{\partial G(x, z, x', z')}{\partial z'} = \frac{i\omega}{2\pi} \int \frac{\partial u_{GB}(x, z, x', z', p'_x, \omega)}{\partial z'} \frac{dp'_x}{p'_z}. \quad (\text{E.2})$$

O feixe gaussiano  $u_{GB}$  é escrito como:

$$u_{GB}(x, z, x', z', p'_x, \omega) = A(x, z, x', z', p'_x) e^{i\omega T(x, z, x', z', p'_x)}. \quad (\text{E.3})$$

Mas a amplitude complexa  $A$  e o tempo complexo  $T$  são funções de  $s$  e  $n$ , as variáveis do sistema de coordenadas do raio, de acordo com

$$A(x, z, x', z', p'_x) = \sqrt{\frac{v(s)}{Q(s)}}, \quad (\text{E.4})$$

$$T(x, z, x', z', p'_x) = \tau(s) + \frac{P(s)}{2Q(s)} n^2. \quad (\text{E.5})$$

De acordo com a figura E.1,

$$\frac{\partial s}{\partial z'} = \cos \theta, \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{\partial n}{\partial z'} = \sin \theta. \quad (\text{E.7})$$

Com esse resultado calcula-se  $\partial T / \partial z'$ :

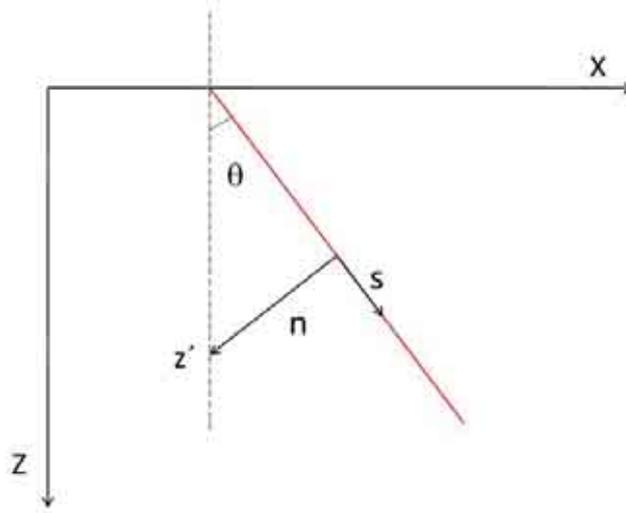


Figura E.1: Diagrama para o cálculo das derivadas  $\partial s/\partial z'$  e  $\partial n/\partial z'$ .

$$\frac{\partial T}{\partial z'} = \frac{\partial \tau(s)}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{P(s)}{2Q(s)} n^2 \right]. \quad (\text{E.8})$$

O resultado acima fica:

$$\frac{\partial T}{\partial z'} = \frac{\partial \tau}{\partial z'} \cos \theta + \frac{1}{2Q} \frac{\partial P}{\partial s} n^2 \cos \theta - \frac{P}{2Q^2} \frac{\partial Q}{\partial s} n^2 \cos \theta + \frac{P}{Q} n \sin \theta. \quad (\text{E.9})$$

Como a derivada acima é calculada na superfície e usando as condições iniciais de  $P$  e  $Q$  (equações 3.11 e 3.12), as equações diferenciais 3.6 e 3.7 e assumindo que a velocidade é constante na superfície tem-se:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z'} \right|_{z'=0} = \frac{\cos \theta}{v(0)} - v(0) \frac{P(0)^2}{Q(0)^2} \cos \theta n^2 + 2 \frac{P(0)}{Q(0)} \sin \theta. \quad (\text{E.10})$$

O primeiro termo da soma acima é simplesmente  $p_{z'}$ . Os segundo termo, usando as condições iniciais, é de ordem menor e pode ser desprezado. O terceiro termo é um número imaginário e pode ser desprezado se for assumido que  $P/Q$  é pequeno. Desta forma,

$$\frac{\partial T}{\partial z'} \approx p_{z'}. \quad (\text{E.11})$$

De forma similar a derivada da amplitude do feixe  $A(x, z, x', z', p'_x) = A(s)$  em relação à  $z'$  é:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \sqrt{\frac{v(s)}{Q(s)}} \right] \\
&= -\frac{1}{2Q(s)} \sqrt{\frac{v(s)}{Q(s)}} \frac{\partial Q}{\partial z'}.
\end{aligned} \tag{E.12}$$

Usando as mesma hipóteses do cálculo de  $\partial T/\partial z'$  conclui-se que:

$$\frac{\partial A}{\partial z'} \Big|_{z'=0} = -\frac{1}{2Q(0)} \sqrt{\frac{v(0)}{Q(0)}} v(0) P(0) \cos \theta. \tag{E.13}$$

Comparando a expressão acima com a expressão original da amplitude E.4, vê-se que ela é de ordem menor, com um fator adicional  $P/Q$ . Portanto, pode-se desprezá-la no cálculo da derivada do feixe gaussiano.

Concluindo o cálculo resulta em :

$$\frac{\partial u_{GB}(x, z, x', z', p'_x, \omega)}{\partial z'} \approx i\omega p_{z'} u_{GB}(x, z, x', z', p'_x, \omega), \tag{E.14}$$

e que,

$$\frac{\partial G(x, z, x', z')}{\partial z'} \approx -\frac{\omega^2}{2\pi} \int u_{GB}(x, z, x', z', p'_x, \omega) dp'_x. \tag{E.15}$$

# Apêndice F

## Relação entre dois feixes gaussianos próximos

Demonstra-se que um feixe que inicia na posição  $(x_j, 0)$  e outro que inicia em  $(x', 0)$ , onde  $x_j$  e  $x'$  são próximos estão relacionados, em primeira ordem, por :

$$u_{GB}^*(x, z, x', p'_x, \omega) = u_{GB}^*(x, z, x_j, p'_x, \omega) e^{-i\omega p_x (x' - x_j)}. \quad (\text{F.1})$$

A expressão do campo de um feixe gaussiano é:

$$u_{GB}(x, z, x_j, p_x, \omega) = A(x, z, x_j, p_x) e^{i\omega T(x, z, x_j, p_x)}. \quad (\text{F.2})$$

Mas a amplitude complexa  $A$  e o tempo complexo  $T$  são funções de  $s$  e  $n$ , as variáveis do sistema de coordenadas do raio

$$A(x, z, x_j, p_x) = \sqrt{\frac{v(s)}{Q(s)}}, \quad (\text{F.3})$$

$$T(x, z, x_j, p_x) = \tau(s) + \frac{P(s)}{2Q(s)} n^2. \quad (\text{F.4})$$

Assumindo que as funções  $P(s)$  e  $Q(s)$  têm variação de segunda ordem em relação ao tempo de trânsito  $\tau(s)$ , então de acordo com a figura F.1 o feixe que inicia em  $x'$  terá uma defasagem de tempo em relação ao que inicia em  $x_j$  de:

$$\Delta t = \sin \theta \frac{x' - x_j}{V}, \quad (\text{F.5})$$

onde  $V$  é a velocidade do meio próxima à superfície, suposta constante.

Como  $\sin \theta / V = p_x$ , então a expressão F.1 fica demonstrada.

Note que esta aproximação é válida para meios em que a velocidade não tem variações laterais de velocidade muito fortes. Nestes meios pode acontecer que mesmo

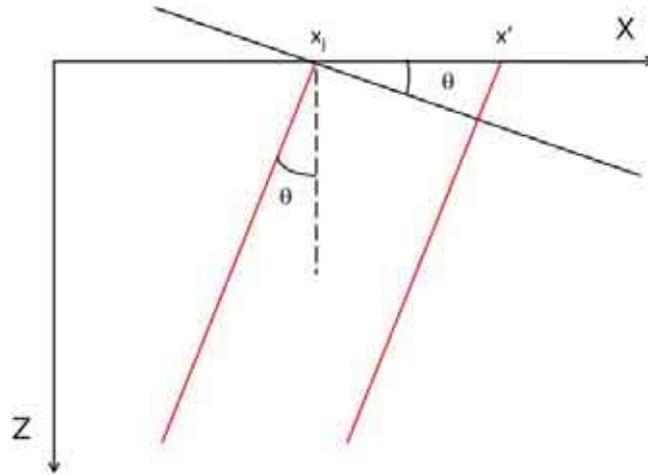


Figura F.1: Relação entre feixe que inicia em  $x_j$  e outro que inicia em  $x'$ .

raios que iniciem sua trajetória em pontos próximos da superfície podem tomar caminhos bem distintos à medida em que se propagam. A figura 2.12 ilustra de certa forma isto, com raios com ponto de partida próximos tomando caminhos totalmente diferentes.

## Apêndice G

# Aproximação da amplitude do feixe gaussiano

Neste apêndice examina-se qualitativamente a aproximação feita na equação 4.26. As figuras abaixo mostram um feixe gaussiano se propagando em um meio homogêneo em três instantes de tempo. Uma das figuras mostra o feixe calculado com a aproximação de amplitude e outro sem essa aproximação. Eles têm as mesmas características cinemáticas, mas diferentes amplitude e fase, principalmente na região mais afastada do raio central. Para a migração e modelagem pode-se limitar o feixe às regiões mais próximas ao raio central que a aproximação feita será adequada. De qualquer forma a contribuição do feixe não aproximado longe do raio central é pequena, justificando a aproximação feita.

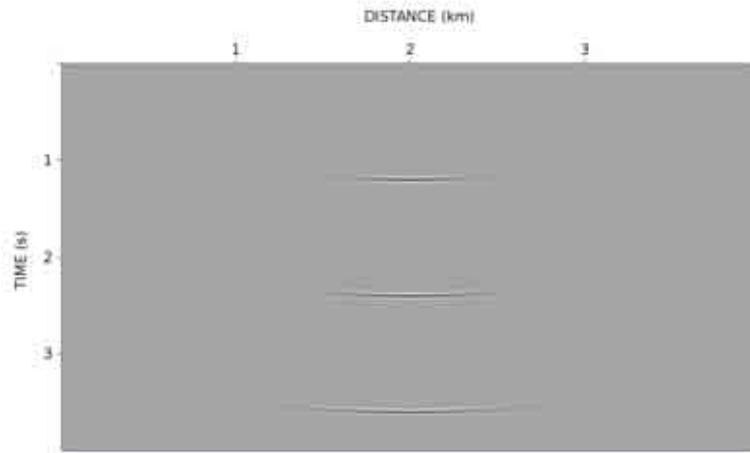


Figura G.1: Feixe gaussiano sem a aproximação de amplitude.

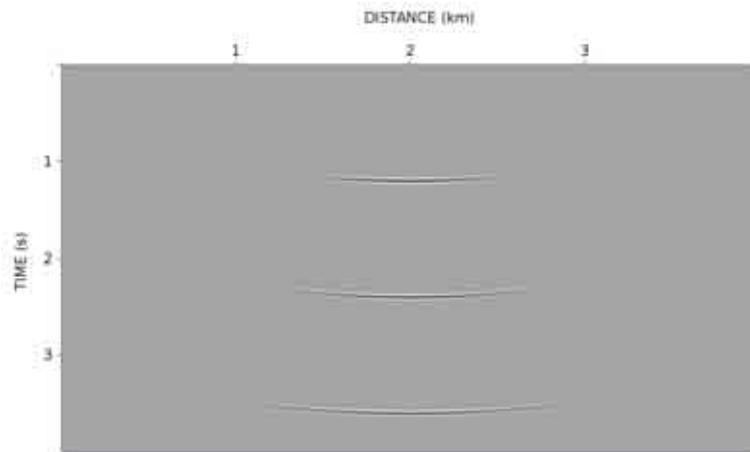


Figura G.2: Feixe gaussiano com a aproximação de amplitude.

# Apêndice H

## Algoritmo para transformar coordenadas do feixe gaussiano em coordenadas cartesianas

As equações para os feixes gaussianos são mais convenientemente expressas nas coordenadas centradas no raio,  $(s, n)$  para duas dimensões. Para serem usadas nos algoritmos de modelagem e migração o campo de ondas deve ser expresso em coordenadas cartesianas. Como esta transformação é feita repetidas vezes, um algoritmo eficiente é necessário para que o processo como um todo seja também eficiente. Um método iterativo foi apresentado Hale [47] que tem um custo proporcional a  $\sqrt{N}$ , onde  $N$  é o número de pontos no raio central. Neste apêndice é apresentado um método alternativo cujo custo é proporcional a  $\log_2 N$ , que é mais eficiente para raios com um número grande de pontos. Esta eficiência pode ser usada, por exemplo, para computar todos os pontos cartesianos diretamente, sem a necessidade de usar um *grid* menos denso e então interpolar os valores para o *grid* final.

Pode haver mais de um ponto no raio central correspondente a uma coordenada cartesiana específica, mas isso ocorrerá onde o raio tem alta curvatura. Para raios típicos, com uma pequena curvatura, tais pontos são encontrados muito distantes do raio, onde a amplitude é desprezível. Na maioria das situações somente um ponto no raio central por coordenada cartesiana é necessário.

O algoritmo é muito simples. É necessário encontrar para uma coordenada cartesiana  $(x, z)$  o ponto mais próximo a ela no raio central. O ponto no raio central corresponde à coordenada  $s$  e a distância entre esse ponto e a coordenada  $(x, z)$  corresponde à coordenada do raio  $n$ . O ponto mais próximo também tem a propriedade de que a linha o conectando ao ponto  $(x, z)$  é perpendicular ao raio. Na implementação do algoritmo preferiu-se usar esta última condição.

Dado um conjunto ordenado de pontos no raio central, foi computado o produto

interno do vetor tangente ao raio e o vetor que conecta a  $(x, z)$  a cada um dos pontos inicial, final e central do raio central. Se nenhum destes pontos é o perpendicular, então dois dos produtos internos têm sinal oposto e o ponto perpendicular está entre eles. O ponto médio entre eles é calculado e o processo repetido, de novo encontrando entre os três pontos aqueles que têm sinais opostos. Este processo é repetido até encontrar o ponto perpendicular. É preciso notar que se houver mais de um ponto perpendicular somente um deles é encontrado. Como este é um algoritmo de pesquisa binária, ele encontra o ponto procurado em no máximo  $\log_2 N$  tentativas. O único requisito é que o raio central seja ordenado na coordenada  $s$ . Ele não precisa ser equi-espaçado, por exemplo. Finalmente, o método descrito é exatamente o mesmo para transformação de coordenadas em 3 dimensões.

# Apêndice I

## Equivalência entre *downward continuation* e traçado de raios

Neste apêndice mostra-se que para um modelo de camadas horizontais há uma equivalência entre os campos calculados por *downward continuation* e traçado de raios. A figura I.1 ilustra os tempos usados em ambas as extrapolações. A linha lilás representa os tempos envolvidos no *downward continuation* e a linha verde o traçado de raios. As diferenças de percursos entre eles são os catetos opostos dos triângulos verde e vermelho. Como a hipotenusa,  $\Delta x$ , é comum aos dois triângulos, os tempos de cada um dos percursos são:

$$T_1 = \Delta x \frac{\sin \theta_1}{V_1}, \quad (\text{I.1})$$

$$T_2 = \Delta x \frac{\sin \theta_2}{V_2}. \quad (\text{I.2})$$

Pela lei de Snell,  $T_1 = T_2$ . Portanto, os campos calculados por ambos os métodos são cinematicamente equivalentes.

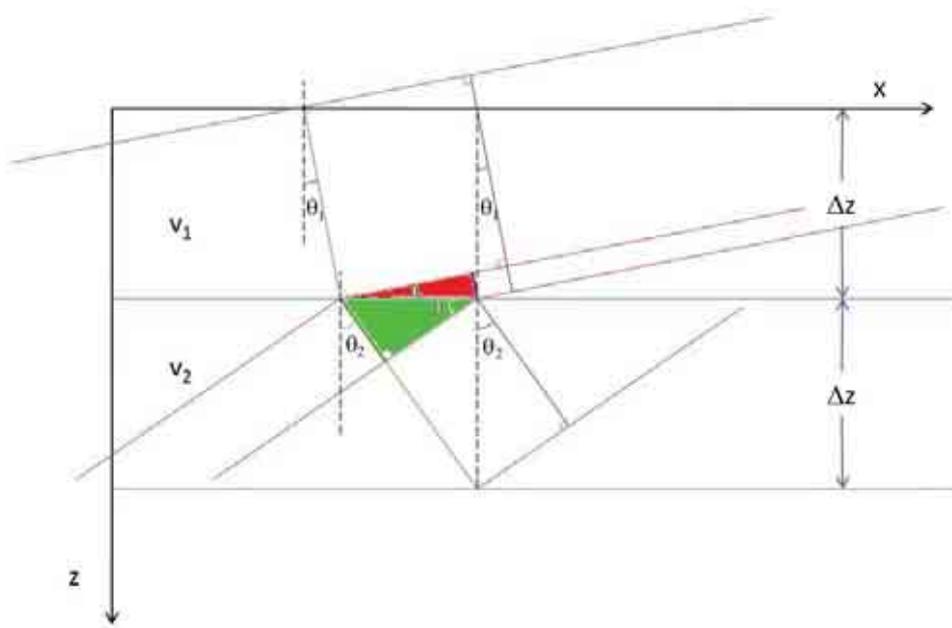


Figura I.1: Equivalência entre *downward continuation* e traçado de raios.