ANÁLISE ESTÁTICA DE PLACAS PELO MÉTODO COMBINADO ELEMENTOS FINITOS - MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

Magnólia Maria de Souza Campêlo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Humberto Lima Soriano
(Presidente)

Luiz Fernando Taborda Garcia

Carlos Henrique Holck

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 1986

CAMPÊLO, MAGNÓLIA MARIA DE SOUZA

Análise Estática de Placas pelo Método Combinado Elementos Finitos-Matriz de Transferência (Rio de Janeiro) 1986.

viii, 90 p., 29,7 cm (COPPE / UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil,1986).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Métodos Numéricos para Resolução de Estruturas. I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

Ao Joaquim e à
pequena Lígia.

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Humberto Lima Soriano, pela dedicação e orientação prestadas na execução deste trabalho.

- À CAPES/PICD, pelo auxílio financeiro.

- À minha família e aos meus amigos, pelo apoio sempre encontrado.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

ANÁLISE ESTÁTICA DE PLACAS PELO MÉTODO COMBINADO ELEMENTOS FINITOS - MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

Magnólia Maria de Souza Campêlo

Novembro, 1986

Orientador: Humberto Lima Soriano

Programa: Engenharia Civil

Estuda-se, neste trabalho, o método combinado elementos finitos - matriz de transferência. A principal vantagem do método é a de permitir uma redução na ordem das matrizes obtidas na análise, possibilitando o uso de computadores de pouca quantidade de memória RAM. Este método foi utilizado na análise estática de placas retangulares isotrópicas totalmente engastadas no contorno.

São desenvolvidos os fundamentos teóricos do método para problemas de flexão de placas e são mostrados alguns resultados de exemplos numéricos destes problemas. Para aplicação do método, desenvolveu-se um programa automático em um microcomputador de 8 bits. Os resultados concordam com os obtidos no método dos elementos finitos,adotando-se precisão dupla para as variáveis do programa, caso contrário ocorre uma degeneração dos resultados, devido a erros de arredondamento, à medida que cresce o número de faixas no modelo do método combinado.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

STATIC ANALYSIS OF PLATES BY A COMBINED FINITE ELEMENT - TRANSFER MATRIX METHOD

Magnólia Maria de Souza Campêlo

November, 1986

Chairman: Humberto Lima Soriano

Department: Civil Engineering

This work deals with the combined finite element-transfer matrix method. The main advantage of this method is to reduce the size of matrices envolved in the analysis which is useful in microcomputers with little RAM memory. Herein this method is used for static analysis of isotropic retangular plates with all edges clamped.

The theoretical fundamentals of the method are developed for plate bending and some numerical results of the problem are presented. A code for 8 bit microcomputer was developed. Using double precision for the computer variables, the numerical results of the present formulation agree with those obtained by the finite element method. In simple precision there is a degeneracy in the accuracy due to round off errors with increasing the strips of combined method.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II - CONCEITOS BÁSICOS 4

2.1 - INTRODUÇÃO 4

2.2 - VETOR DE ESTADO 4

2.3 - MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA 7

2.4 - MATRIZ FRONTEIRA 10

CAPÍTULO III - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA 13

3.1 - INTRODUÇÃO 13

3.2 - MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA DE UMA FAIXA 13

CAPÍTULO IV - OBTENÇÃO DA MATRIZ FRONTEIRA 17

4.1 - INTRODUÇÃO 17

4.2 - CARGAS NODAIS EM UMA SEÇÃO 17

4.3 - APOIO ELÁSTICO 21

CAPÍTULO V - O MÉTODO COMBINADO ELEMENTOS FINITOS - MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA 24

5.1 - INTRODUÇÃO 24

5.2 - ANÁLISE GERAL 24

CAPÍTULO VI - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL 33

6.1 - INTRODUÇÃO 33

6.2 - NOTAÇÃO UTILIZADA NA PROGRAMAÇÃO 33

6.3 - ESTRUTURAÇÃO DO PROGRAMA 35

6.3.1 - Programa Principal 36

6.3.2 - Módulo I - Dados da Estrutura 36

6.3.3 - Módulo II - Cálculo dos Vetores de Estado Extremos 37

6.3.4 - Módulo III - Cálculo dos Vetores de Estado das Seções Intermediárias e das Tensões ... 40

6.4 - ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A PROGRAMAÇÃO 41

6.4.1 - Módulo I 41

6.4.2 - Módulo II 43

6.4.3 - Módulo III 48

CAPÍTULO VII - RESULTADOS E CONCLUSÕES 49

7.1 - INTRODUÇÃO 49

7.2 - RESULTADOS 49

7.3 - CONCLUSÕES 59

APÊNDICE 61

A - NOTAÇÃO UTILIZADA NO DESENVOLVIMENTO TEÓRICO 62

B - MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO RETANGULAR DE PLACA . 64

C - MATRIZ DE TENSÕES DO ELEMENTO RETANGULAR DE PLACA . 68

D - LISTAGEM DA PROGRAMAÇÃO 70

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 89

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Atualmente, o método dos elementos finitos é um dos mais poderosos instrumentos para análise de estruturas. Entretanto, a principal desvantagem deste método é que, no caso de estruturas muito complexas, é necessário usar um grande número de elementos para discretizá-las, resultando em modelos estruturais com grande número de incógnitas, com matrizes de elevada ordem, exigindo o uso de computadores que possuam elevada capacidade de memória.

A fim de reduzir a ordem das matrizes obtidas pelo método dos elementos finitos, muitas técnicas têm sido propostas (condensação estática e o método da subestruturação, entre outras técnicas). Uma outra possibilidade consiste na união do método dos elementos finitos com o método das matrizes de transferência aplicado a problemas estruturais bidimensionais, resultando no método combinado elementos finitos - matriz de transferência.

Usando o método combinado elementos finitos - matriz de transferência reduz-se a ordem das matrizes obtidas na análise de estruturas, permitindo-se, assim, o uso de computadores de pequeno porte.

O método das matrizes de transferência, largamente empregado nos domínios da física, foi introduzido no cálculo estrutural por FALK e PESTEL, por volta de 1950. A menos dos erros de arredondamento, é um método exato aplicado a pro -

blemas unidimensionais.

Na COPPE, em 1979, MELLO (3) apresentou em seu trabalho os conceitos do método das matrizes de transferência na análise estrutural com aplicação em estruturas reticuladas mais frequentes na construção civil.

A idéia de aplicar o método da matriz de transferência a problemas bidimensionais foi sugerido por LECKIE (5) . Em 1962, ele aplicou o método no estudo de vibração de placas , utilizando o modelo proposto por HERENIKOFF, que consistia em dividir a estrutura num sistema de vigas equivalentes.

Seguindo esta linha de pesquisa, DOKAINISH (2),em 1972, publicou um interessante trabalho no qual a união do método dos elementos finitos com o método da matriz de transferência era feita no estudo de vibração de placas.

Por volta de 1982, OHGA, SHIGEMATSU e HARA (1) voltaram seus estudos à aplicação do método combinado elementos finitos-matriz de transferência na análise de flexão e flambagem de placas.

No presente trabalho, é feito o desenvolvimento teórico do método combinado elementos finitos - matriz de transferência para análise estática linear de placas retangulares. Aplica-se, então, o método à resolução de placas retangulares totalmente engastados no contorno, através de um programa automático no microcomputador CP-500 da Prológica com 48 Kbytes de memória RAM e 2 drives de 5 1/4".

Nos três capítulos que se seguem, desenvolvem-se os fundamentos teóricos básicos do método, seguindo uma formulação matricial dirigida aos engenheiros estruturais.

Mostram-se, no Capítulo V, as etapas a serem seguidas na análise estática de placas pelo método combinado elementos finitos - matriz de transferência com aplicação a uma placa totalmente engastada no contorno, por ser esta a utilizada na programação automática.

Reserva-se o Capítulo VI para a apresentação das rotinas do programa desenvolvido, procurando-se comentar e esclarecer alguns aspectos importantes.

O Capítulo VII é o das aplicações; discutem-se os resultados obtidos através de comparações com o método dos elementos finitos e tiram-se algumas conclusões importantes. O método é eficiente quanto à economia de memória, porém observa-se uma deterioração na precisão dos resultados, devido a erros de arredondamento, com o aumento do número de faixas na estrutura.

No Apêndice são dadas as notações utilizadas no desenvolvimento teórico, a listagem do programa, a matriz de rigidez e a matriz de tensões para o elemento retangular não-conforme de flexão de placa, adotado neste trabalho.

CAPÍTULO II

CONCEITOS BÁSICOS

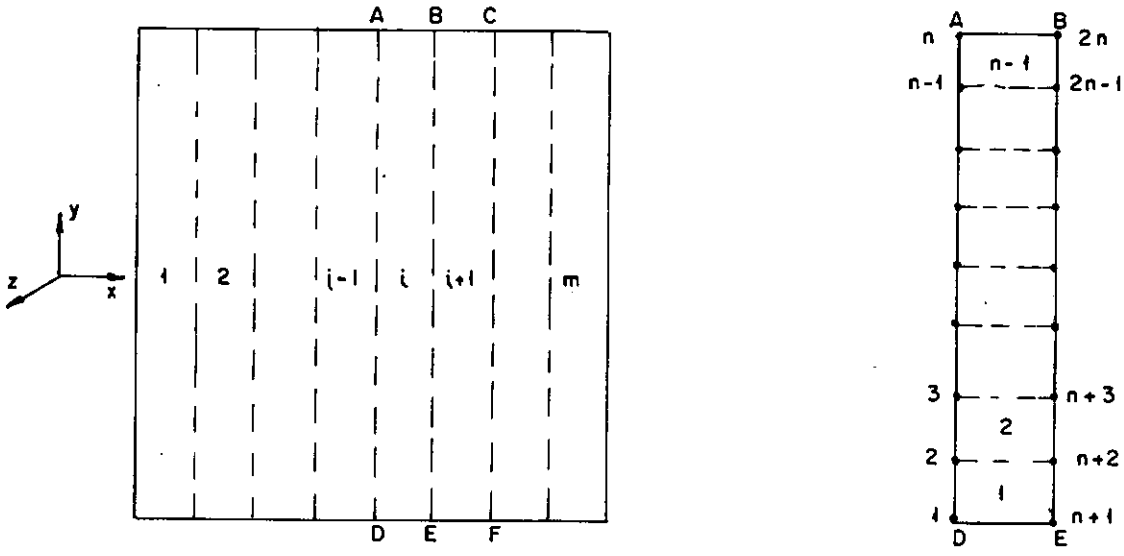
2.1 - Introdução

Definem-se, neste capítulo, vetor de estado, matriz de transferência e matriz fronteira que são conceitos necessários ao desenvolvimento teórico do método.

Chega-se também à relação matricial final que une os vetores de estado de dois extremos opostos da placa.

2.2. - Vetor de Estado

A figura (2.1) mostra uma placa dividida em m faixas e cada faixa subdividida em elementos finitos. Ilustram-se, na figura, elementos finitos retangulares, embora outros tipos de elemento pudessem ser utilizados. As linhas comuns entre duas faixas adjacentes são chamadas de seções e as linhas do contorno horizontal são designadas de bordos. Assim, o lado AD é a seção esquerda da faixa i e a seção direita da faixa i-1. AB é o bordo superior da faixa i e DE o bordo inferior. Existe um total de 2n nós na faixa i com n nós na seção esquerda AD e n nós na seção direita BE. XYZ é o sistema cartesiano de referência para estrutura, sendo o eixo Z normal à superfície da placa.

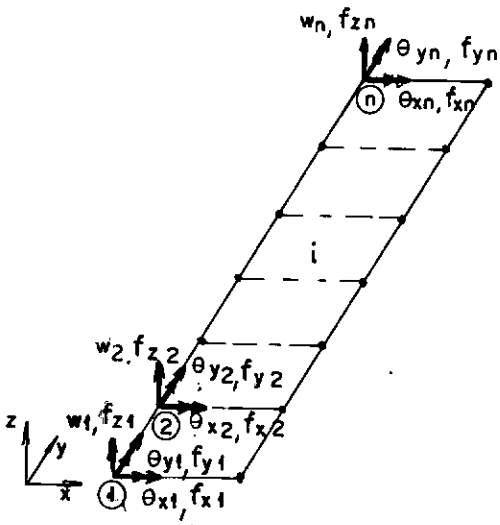


(a) Estrutura dividida em m faixas (b) Faixa i dividida em elementos finitos

Figura 2.1 - Placa Retangular

Os deslocamentos por nó da placa, cujas faixas estão subdivididas em elementos finitos retangulares, são o deslocamento transversal w, a rotação $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$, em torno do eixo X e a rotação $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$, em torno do eixo Y, e as ações são as forças nodais associadas a esses deslocamentos: uma força transversal (f_z) e dois momentos (f_x e f_y).

Ações e deslocamentos na seção esquerda da faixa i estão representados na figura (2.2) com a notação de d para deslocamentos e f para as ações. Assim, denota-se o vetor de deslocamentos para o nó p por $\{d_p\}$ e o correspondente vetor de forças nodais por $\{f_p\}$.



(a) Faixa i

$$\{d_p\} = \{W_p,\ \Theta_{xp},\ \Theta_{yp}\}^t$$

(b) vetor deslocamento para o nó p

$$\{f_p\} = \{f_{zp},\ f_{xp},\ f_{yp}\}^t$$

(c) vetor de forças nodais para o nó p

Figura 2.2 - Representação dos Deslocamentos e Ações

O vetor que contém esses deslocamentos e ações é chamado vetor de estado da seção. Assim, representa-se o vetor de estado da seção esquerda da faixa i por

$$\{V^e\}_i = \{w_1^e, \Theta_{x1}^e, \Theta_{y1}^e, \ldots, w_n^e, \Theta_{xn}^e, \Theta_{yn}^e, f_{z1}^e, f_{x1}^e, f_{y1}^e, \ldots, f_{zn}^e, f_{xn}^e, f_{yn}^e\}_i^t \quad \ldots (2.1a)$$

ou

$$\{V^e\}_i = \{\underset{\sim}{d}_1^e, \ldots, \underset{\sim}{d}_n^e, \underset{\sim}{f}_1^e, \ldots, \underset{\sim}{f}_n^e\}_i^t \quad (2.1b)$$

e genericamente

$$\{V^e\}_i = \{\underset{\sim}{d}^e,\ \underset{\sim}{f}^e\}_i^t \quad (2.1c)$$

Para seção direita da faixa i , escreve-se

$$\{V^d\}_i = \{\underset{\sim}{d}^d, -\underset{\sim}{f}^d\}_i^t \quad (2.2)$$

(a convenção de sinais para deslocamentos e ações é explicada a seguir)

2.3 - Matriz de Transferência

Uma vez conhecido o vetor de estado na seção esquerda da faixa i , procura-se determinar o vetor de estado na seção direita dessa faixa.

O operador que associa os vetores de estado para uma mesma faixa é chamado operador de transferência. Assim, o operador de transferência fornece os deslocamentos e ações na seção direita da faixa em função dos deslocamentos e ações da seção esquerda da mesma.

Adotando-se como referência o triedro direto da figura (2.3), a convenção de sinais para deslocamentos e ações a adotar, na obtenção do operador de transferência, é a seguinte: deslocamentos positivos nas seções esquerda e direita da faixa coincidem com os sentidos positivos no sistema de referência e as ações são positivas se atuando na seção esquerda (direita) seus vetores estão nos sentidos positivos (negativos). Na figura (2.3) estão representados deslocamentos e ações positivas para seção esquerda da faixa i .

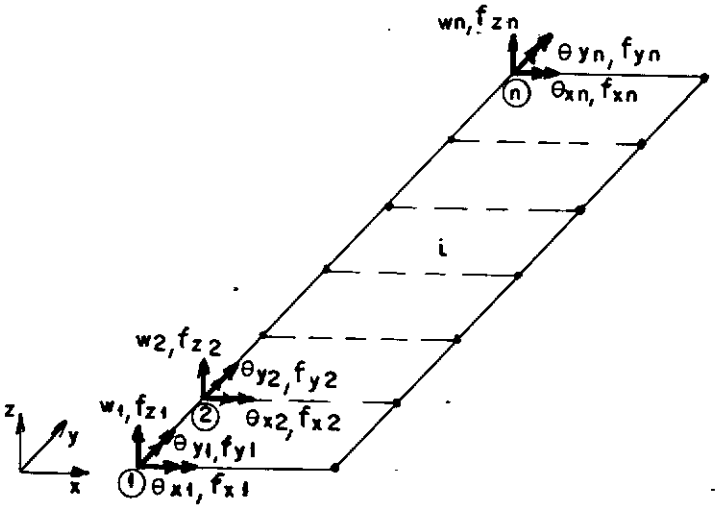


Figura 2.3 - Sentidos Positivos na Seção Esquerda da Faixa i

Chamado o operador de transferência para a faixa i de $|T|_i$, tem-se

$$\{V^d\}_i = |T|_i \{V^e\}_i \tag{2.3}$$

O operador $|T|_i$ é uma matriz quadrada de ordem igual ao número de termos que contêm o vetor de estado, sendo chamada matriz de transferência.

Aplicando-se a equação (2.3) à placa da figura (2.1), formada de m faixas, chega-se a

$$\{V^d\}_1 = |T|_1 \{V^e\}_1 \tag{2.4}$$

$$\{V^d\}_2 = |T|_2 \{V^e\}_2 \tag{2.5}$$

$$\{V^d\}_3 = |T|_3 \{V^e\}_3 \tag{2.6}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\{V^d\}_{m-1} = |T|_{m-1} \{V^e\}_{m-1} \tag{2.7}$$

$$\{V^d\}_m = |T|_m \{V^e\}_m \tag{2.8}$$

Admitindo-se que não existe descontinuidade nas seções, as seguintes relações podem ser escritas:

$$\{V^e\}_2 = \{V^d\}_1 \tag{2.9}$$

$$\{V^e\}_3 = \{V^d\}_2 \tag{2.10}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\{V^e\}_{m-1} = \{V^d\}_{m-2} \tag{2.11}$$

$$\{V^e\}_m = \{V^d\}_{m-1} \tag{2.12}$$

Através da relação (2.9) e da equação (2.4) substituída em (2.5), fica-se com

$$\{V^d\}_2 = |T|_2 \; |T|_1 \; \{V^e\}_1 \tag{2.13}$$

De (2.13) em (2.6), conhecendo-se a relação (2.10), escreve-se

$$\{V^d\}_3 = |T|_3 \; |T|_2 \; |T|_1 \; \{V^e\}_1 \tag{2.14}$$

Fazendo-se todas as substituições, seguindo o mesmo raciocínio, tem-se

$$\{V^d\}_m = |T|_m \; |T|_{m-1} \ldots |T|_3 \; |T|_2 \; |T|_1 \; \{V^e\}_1 \tag{2.15}$$

que na forma mais compacta, representa-se por

$$\{V^d\}_m = |P| \; \{V^e\}_1 \tag{2.16}$$

onde

$$|P| = |T|_m \; |T|_{m-1} \ldots\ldots |T|_3 \; |T|_2 \; |T|_1 \tag{2.17}$$

Assim, a matriz de transferência da placa, que relaciona os vetores de estado extremos, é o produto das matrizes de transferência das m faixas que a formam.

2.4 - Matriz Fronteira

Considerando-se que existam descontinuidades em todas as seções da placa, as equações (2.4) a (2.8), que transferem os vetores de estado de uma seção esquerda a uma seção direita de uma faixa, continuam verdadeiras. Porém a igualdade entre os vetores de estado em uma mesma seção não mais se verifica e as relações (2.9) a (2.12) deixam de ser válidas.

Precisamos agora relacionar os vetores de estado, numa mesma seção, entre as descontinuidades

$$\{V^e\}_i = \{F\}_i + \{V^d\}_{i-1} \tag{2.18}$$

Chama-se ao vetor $\{F\}_i$ vetor fronteira na seção i e permite estabelecer as condições de equilíbrio e de compatibilidade dos deslocamentos na seção. Sendo $\{V^e\}_i$ o vetor de estado para seção esquerda da faixa i e $\{V^d\}_{i-1}$ o vetor de estado para seção direita da faixa $i-1$.

Aplicando-se a equação (2.18) às várias seções da placa, chega-se a

$$\{V^e\}_2 = \{F\}_2 + \{V^d\}_1 \tag{2.19}$$

$$\{V^e\}_3 = \{F\}_3 + \{V^d\}_2 \tag{2.20}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\{V^e\}_{m-1} = \{F\}_{m-1} + \{V^d\}_{m-2} \tag{2.21}$$

$$\{V\}_m^e = \{F\}_m + \{V^d\}_{m-1} \tag{2.22}$$

Substituindo-se a equação (2.19) em (2.5), tem-se

$$\{V^d\}_2 = |T|_2 \ (\{F\}_2 + \{V^d\}_1) \tag{2.23}$$

Mas conhecendo a equação (2.4), fica-se com

$$\{V^d\}_2 = |T|_2 \ \ (\ \{F\}_2 + |T|_1 \ \ \{V^e\}_1) \tag{2.24}$$

Seguindo-se a mesma substituição para as descontinuidades em todas as seções, pode-se escrever

$$\{V^d\}_m = \ |T|_m \ (\{F\}_m + |T|_{m-1}(\{F\}_{m-1} + \ldots \ |T|_2 \ (\{F\}_2 + \\ + |T|_1 \ \{V^e\}_1)) \ \ldots \ ) \tag{2.25}$$

Ao invés de trabalhar com o vetor fronteira como em (2.25), pode-se definir a matriz fronteira nas seções para introduzir as descontinuidades

$$\{V^e\}_i = |F|_i \ \{V^d\}_{i-1} \tag{2.26}$$

Aplicando-se (2.26) às seções da placa, tem-se

$$\{V^e\}_2 = |F|_2 \ \{V^d\}_1 \tag{2.27}$$

$$\{V^e\}_3 = |F|_3 \ \{V^d\}_3 \tag{2.28}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\{V^e\}_{m-1} = |F|_{m-1} \ \{V^d\}_{m-2} \tag{2.29}$$

$$\{V^e\}_m = |F|_m \ \{V^d\}_{m-1} \tag{2.30}$$

E fazendo-se a substituição nas equações (2-4) a (2.8) das relações obtidas em (2.27) a (2.30), chega-se à equação final.

$$\{V^d\}_m = |T|_m \, |F|_m \, |T|_{m-1} \, |F|_{m-1} \cdots |T|_3 \, |F|_3 \, |T|_2 \, |F|_2 \, |T|_1 \, \{V^e\}_1 \quad \ldots. \quad (2.31)$$

$$\{V^d\}_m = |P| \, \{V^e\}_1 \quad (2.32)$$

onde:

$$|P| = |T|_m \, |F|_m \, |T|_{m-1} \, |F|_{m-1} \cdots |T|_3 \, |F|_3 \, |T|_2 \, |F|_2 \, |T|_1 \quad \ldots. \quad (2.33)$$

De acordo com a equação (2.32), define-se a matriz final, que relaciona os vetores de estado das seções extremas da placa, como o produto sucessivo de matrizes de transferência das faixas e matrizes fronteira das seções que a compõe. Esta úlma forma de definir a matriz fronteira é a que será utilizada posteriormente neste texto.

CAPÍTULO III

OBTENÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

3.1 - Introdução

O método combinado elementos finitos - matriz de transferência utiliza o método dos elementos finitos para obtenção da matriz de rigidez de uma faixa e, a partir desta, chega-se à matriz de transferência que relaciona os vetores de estado das seções esquerda e direita de uma faixa qualquer da placa.

Mostra-se, neste capítulo, a obtenção da matriz de transferência de uma faixa.

3.2 - Matriz de Transferência de uma Faixa

Uma vez definidos o vetor deslocamento e o vetor de forças nodais que atuam em cada nó da faixa, pode-se formar o vetor de deslocamentos nodais total da faixa e o respectivo vetor de forças nodais.

A equação

$$\{V^d\}_i = |T|_i \{V^e\}_i \tag{3.1}$$

que relaciona o vetor de estado da seção esquerda, $\{V^e\}_i$, com o vetor de estado da seção direita, $\{V^d\}_i$, de uma faixa i qualquer através do operador de transferência $|T|_i$, será escrita na forma

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^d \\ -\underset{\sim}{f}^d \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{11} & \underset{\sim}{T}_{12} \\ \underset{\sim}{T}_{21} & \underset{\sim}{T}_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{f}^e \end{Bmatrix}_i \tag{3.2}$$

O sinal negativo, para as forças nodais da seção direita da faixa, vem da própria definição do operador de transferência dada no Capítulo II, tendo-se como referência o sistema de eixos da figura (2.2).

Efetuando o produto matricial dado em (3.2), chega-se a

$$\{d^d\}_i = |T_{11}|_i \{d^e\}_i + |T_{12}|_i \{f^e\}_i \tag{3.3}$$

$$\{-f^d\}_i = |T_{21}|_i \{d^e\}_i + |T_{22}|_i \{f^e\}_i \tag{3.4}$$

Buscam-se, agora , as quatro submatrizes da matriz de transferência.

A matriz de rigidez total da faixa corresponde à matriz de rigidez global da malha de elementos finitos retangulares definidos na faixa. A matriz de rigidez global da malha é obtida pelos processos usuais do método dos elementos finitos, adicionando-se as contribuições de rigidez dos diversos elementos finitos retangulares da malha.

Chamando-se a matriz de rigidez global da faixa i de $|S|_i$ e particionando-a em quatro submatrizes, escreve-se:

$$|S|_i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{S}_{11} & \underset{\sim}{S}_{12} \\ \underset{\sim}{S}_{21} & \underset{\sim}{S}_{22} \end{bmatrix}_i \tag{3.5}$$

A equação de equilíbrio para faixa i será, então, representada por

$$|S|_i \{d\}_i = \{f\}_i \tag{3.6}$$

sendo $\{d\}_i$ o vetor de deslocamentos nodais da seção esquerda e direita da faixa i e $\{f\}_i$ o respectivo vetor de forças nodais.

Mas a equação (3.6) pode ainda ser escrita sob a forma

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{S}_{11} & \underset{\sim}{S}_{12} \\ \underset{\sim}{S}_{21} & \underset{\sim}{S}_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{d}^d \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}^e \\ \underset{\sim}{f}^d \end{Bmatrix}_i \tag{3.7}$$

Desenvolvendo a equação (3.7), chega-se a

$$|S_{11}|_i \{d^e\}_i + |S_{12}|_i \{d^d\}_i = \{f^e\}_i \tag{3.8}$$

$$|S_{21}|_i \{d^e\}_i + |S_{22}|_i \{d^d\}_i = \{f^d\}_i \tag{3.9}$$

Explicitando-se $\{d^d\}_i$ da equação (3.8) em termos de $\{d^e\}_i$ e $\{f^e\}_i$, tem-se

$$\{d^d\}_i = -|S_{12}|_i^{-1} |S_{11}|_i \{d^e\}_i + |S_{12}|_i^{-1} \{f^e\}_i \tag{3.10}$$

Substituindo a equação (3.10) em (3.9), resolvendo para $\{f^d\}_i$, também em termos de $\{d^e\}_i$ e $\{f^e\}_i$, e multiplicando-se por (-1), chega-se a

$$\{-f^d\}_i = (-|S_{21}|_i + |S_{22}|_i |S_{12}|_i^{-1} |S_{11}|_i) \{d^e\}_i - |S_{22}|_i |S_{12}|_i^{-1} \{f^e\}_i \tag{3.11}$$

Finalmente, comparando-se a equação (3.3) com (3.10) e (3.4) com (3.11), explicitam-se os termos da matriz de transferência como

$$|T_{11}| = -|S_{12}|_i^{-1} \, |S_{11}|_i \tag{3.12a}$$

$$|T_{12}|_i = |S_{12}|_i^{-1} \tag{3.12b}$$

$$|T_{21}|_i = -|S_{21}|_i + |S_{22}|_i \, |S_{12}|_i^{-1} |S_{11}|_i \tag{3.12c}$$

$$|T_{22}|_i = -|S_{22}|_i \, |S_{12}|_i^{-1} \tag{3.12d}$$

Em forma matricial, escreve-se

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^d \\ -\underset{\sim}{f}^d \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} -\underset{\sim}{S}_{12}^{-1} & \underset{\sim}{S}_{11} & \underset{\sim}{S}_{12}^{-1} \\ -\underset{\sim}{S}_{21} + \underset{\sim}{S}_{22} \, \underset{\sim}{S}_{12}^{-1} \, \underset{\sim}{S}_{11} & -\underset{\sim}{S}_{22} & \underset{\sim}{S}_{12}^{-1} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{f}^e \end{Bmatrix}_i \tag{3.13}$$

A matriz de transferência deve ser acrescida de uma linha e uma coluna a fim de que o produto pela matriz fronteira possa existir, como será visto no próximo capítulo. E o vetor de estado, pelo mesmo motivo, será acrescido de um termo. Tem-se, então, o sistema final que relaciona os vetores de estado à esquerda e à direita de uma determinada faixa i

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^d \\ -\underset{\sim}{f}^d \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{11} & \underset{\sim}{T}_{12} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{T}_{21} & \underset{\sim}{T}_{22} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{f}^e \\ 1 \end{Bmatrix}_i \tag{3.14}$$

CAPÍTULO IV

OBTENÇÃO DA MATRIZ FRONTEIRA

4.1 - Introdução

A matriz fronteira torna-se necessária para introduzir as descontinuidades nas seções da placa, como foi visto no Capítulo II. Ela estabelece as condições de compatibilidade dos deslocamentos e equilíbrio nas seções.

Objetiva-se, com este capítulo, a determinação da matriz fronteira para alguns casos de descontinuidade nas seções da placa como cargas nodais e apoio elástico.

4.2 - Cargas Nodais em uma Seção

Em relação à figura (4.1), seja a equação (2.26) que relaciona os vetores de estado numa seção i da placa e que particionada fornece

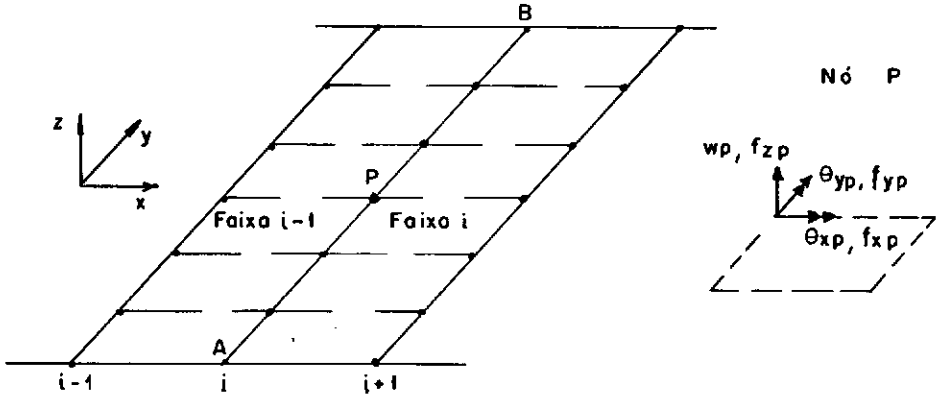


Figura (4.1) - Representação de uma Seção i da Placa

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{f}^e \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{F}_{11} & \underset{\sim}{F}_{12} \\ \underset{\sim}{F}_{21} & \underset{\sim}{F}_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^d \\ -\underset{\sim}{f}^d \end{Bmatrix}_{i-1} \tag{4.1}$$

As forças externas, que atuam na placa, podem ser distribuídas totais ou parciais, aplicadas diretamente nos pontos nodais ou em outros pontos que não sejam os nós das seções da placa. Em qualquer caso, é necessário, primeiro, encontrar as cargas nodais equivalentes, somá-las às cargas diretamente aplicadas nos nós das seções e, assim, obter o vetor de forças nodais externas para cada seção $\{F^{ext}\}$. Este vetor representa uma descontinuidade de ações na seção e será introduzido através ma matriz fronteira.

Já que os nós da seção direita da faixa i-1 são os mesmos que os da seção esquerda da faixa i , a equação matricial de compatibilidade dos deslocamento fica

$$\{d^e\}_i = \{d^d\}_{i-1} \tag{4.2}$$

Também do equilíbrio de forças nodais na seção i , escreve-se

$$\{f^d\}_{i-1} + \{f^e\}_i = \{F^{ext}\}_i$$

$$\{f^e\}_i = -\{f^d\}_{i-1} + \{F^{ext}\}_i \tag{4.3}$$

onde $\{F^{ext}\}_i$ é o vetor de forças externas atuando nos nós da seção i , lado AB . O vetor de forças externas é a soma das contribuições das cargas nodais da seção direita da faixa i-1 e da seção esquerda da faixa i.

Sabe-se do sistema (4.1) que

$$\{d^e\}_i = |F_{11}|_i \{d^d\}_{i-1} + |F_{12}|_i\{-f^d\}_{i-1} \tag{4.4}$$

$$\{f^e\}_i = |F_{21}|_i\{d^d\}_{i-1} + |F_{22}|_i\{-f^d\}_{i-1} \tag{4.5}$$

A comparação das equações (4.2) com (4.4) e (4.3) com (4.5) conduz a

$$|F_{11}| = |I| \qquad \text{(matriz identidade)} \tag{4.6a}$$

$$|F_{12}| = |0| \qquad \text{(matriz nula)} \tag{4.6b}$$

$$|F_{21}| = |0| \qquad \text{(matriz nula)} \tag{4.6c}$$

$$|F_{22}| = |I| \qquad \text{(matriz identidade)} \tag{4.6d}$$

Torna-se necessário acrescentar uma coluna na matriz fronteira a fim de introduzir o vetor de cargas nodais externas. Para obedecer as regras do cálculo matricial, ela também deve ser acrescida de uma linha e o vetor de estado de um elemento

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{f}^e \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{F}_{11} & \underset{\sim}{F}_{12} & \underset{\sim}{F}_{13} \\ \underset{\sim}{F}_{21} & \underset{\sim}{F}_{22} & \underset{\sim}{F}_{23} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^d \\ -\underset{\sim}{f}^d \\ 1 \end{Bmatrix}_{i-1} \tag{4.7}$$

ou

$$\{d^e\}_i = |F_{11}|_i \{d^d\}_{i-1} + |F_{12}|_i\{-f^d\}_{i-1} + |F_{13}|_i \tag{4.8}$$

$$\{f^e\}_i = |F_{21}|_i\{d^d\}_{i-1} + |F_{22}|_i\{-f^d\}_{i-1} + |F_{23}|_i \tag{4.9}$$

Uma vez conhecidas as relações (4.6a) a (4.6d) e comparando-se as equações (4.2) com (4.8) e (4.3) com (4.9), tira-se o valor das submatrizes da matriz fronteira ainda desconhecidas

$$\{F_{13}\} = \{0\} \qquad \text{(vetor nulo)} \tag{4.10a}$$

$$\{F_{23}\} = \{F^{ext}\}_i \qquad \text{(vetor de forças externas na seção i)} \tag{4.10b}$$

Chega-se, finalmente, à matriz fronteira que introduz a descontinuidade nas ações, representadas pelas cargas nodais externas.

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{f}^e \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{F}^{ext} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^d \\ -\underset{\sim}{f}^d \\ 1 \end{Bmatrix}_{i-1} \tag{4.11}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \\ f_{z1} \\ f_{x1} \\ f_{y1} \\ \vdots \\ f_{zn} \\ f_{xn} \\ f_{yn} \\ 1 \end{Bmatrix}_i^e = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & & & & \underset{\sim}{0} \\ & & & & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & & & \underset{\sim}{0} \\ & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & & & F_{z1} \\ & & & & & & & & & & 1 & & & & F_{x1} \\ & & \underset{\sim}{0} & & & & & & & & & 1 & & & F_{y1} \\ & & & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & F_{zn} \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 \; F_{xn} \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 \; F_{yn} \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \\ -f_{z1} \\ -f_{x1} \\ -f_{y1} \\ \vdots \\ -f_{zn} \\ -f_{xn} \\ -f_{yn} \\ 1 \end{Bmatrix}_{i-1}^d$$

Em notação mais simplificada, pode-se representar, reagrupando os deslocamentos e ações, a relação matricial anterior por

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{w} \\ \underset{\sim}{\theta}_x \\ \underset{\sim}{\theta}_y \\ \underset{\sim}{f}_z \\ \underset{\sim}{f}_x \\ \underset{\sim}{f}_y \\ 1 \end{Bmatrix}_i^e = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & & & & & & \underset{\sim}{0} \\ & \underset{\sim}{I} & & & & & \underset{\sim}{0} \\ & & \underset{\sim}{I} & & & & \underset{\sim}{0} \\ & & & \underset{\sim}{I} & & & \underset{\sim}{F}_z \\ & & & & \underset{\sim}{I} & & \underset{\sim}{F}_x \\ & & & & & \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{F}_y \\ & & & & & & 1 \quad 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{w} \\ \underset{\sim}{\theta}_x \\ \underset{\sim}{\theta}_y \\ -\underset{\sim}{f}_z \\ -\underset{\sim}{f}_x \\ -\underset{\sim}{f}_y \\ 1 \end{Bmatrix}_{i-1} \qquad (4.12)$$

Agora, entende-se porque a matriz de transferência também deve ser acrescida de uma linha e uma coluna, como mencionado no capítulo anterior.

4.3 - Apoio Elástico

Seja a figura (4.2) onde nos nós l e m da seção i existem apoios elásticos na direção vertical, representando colunas

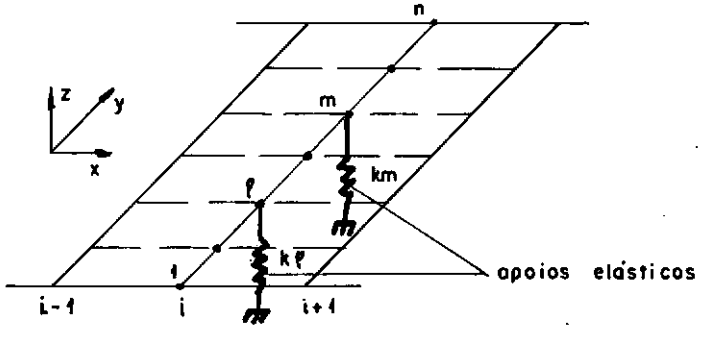


Figura (4. 2) - Representação de colunas nos nós ℓ e m da seção i

As reações dos apoios elásticos são proporcionais aos deslocamentos transversais nos nós l e m da seção i

$$R_\ell = -k_\ell \, W_\ell$$
$$R_m = -k_m \, W_m \tag{4.13}$$

onde k_ℓ e k_m são as constantes de proporcionalidade ou rigidezes de mola.

Tem-se, para o vetor de estado na seção i, as seguintes relações:

$$\{W\}_i^e = \{W\}_{i-1}^d \tag{4.14a}$$

$$\{\theta_x\}_i^e = \{\theta_x\}_{i-1}^d \tag{4.14b}$$

$$\{\theta_y\}_i^e = \{\theta_y\}_{i-1}^d \tag{4.14c}$$

$$\{f_x\}_i^e = \{-f_x\}_{i-1}^d \tag{4.14d}$$

$$\{f_y\}_i^e = \{-f_y\}_{i-1}^d \tag{4.14e}$$

onde as três primeiras relações,(4.14a) a (4.14c),representam a continuidade total dos deslocamentos na seção i , ou seja

$$\{d\}_i^e = \{d\}_{i-1}^d$$

Das equações (4.14d) e (4.14e) observa-se a continuidade de parte das ações, porém com a presença dos apoios elásticos o vetor das forças na direção z deixa de ser contínuo e tem-se as seguintes relações:

$$f_{z1,i}^e = -f_{z1,i-1}^d$$

$$f_{z2,i}^e = -f_{z2,i-1}^d$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f_{z\ell,i}^e = -f_{z\ell,i-1}^d - k_\ell W_\ell$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{e}_{zm,i} = -f^{d}_{zm,i-1} - k_m W_m$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{e}_{zn,i} = -f^{d}_{zn,i-1}$$

Representa-se, então, a matriz fronteira que intro - duz a descontinuidade dada pelos apoios elásticos por

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_\ell \\ \vdots \\ w_m \\ \vdots \\ w_n \\ \underset{\sim}{\theta}_x \\ \underset{\sim}{\theta}_y \\ f_{z1} \\ f_{z2} \\ \vdots \\ f_{z\ell} \\ \vdots \\ f_{zm} \\ \vdots \\ f_{zn} \\ \underset{\sim}{M}_x \\ \underset{\sim}{M}_y \\ 1 \end{Bmatrix}^{e}_{i} = \left[\begin{array}{cccccc|c|cccccc|c} 1 & & & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \underset{\sim}{0} \\ \hline & & & & & & & \underset{\sim}{I} & & & & & & \\ & & & & & & & & \underset{\sim}{I} & & & & & \\ \hline 0 & & & & & & & & 1 & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & 1 & & & & \underset{\sim}{0} \\ & & \ddots & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & -k_\ell & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & -k_m & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 & & & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & & & & & & & \underset{\sim}{I} & \\ & & & & & & & & & & & & & \underset{\sim}{I} \\ \hline & & & & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right]^{i}_{i} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_\ell \\ \vdots \\ w_m \\ \vdots \\ w_n \\ \underset{\sim}{\theta}_x \\ \underset{\sim}{\theta}_y \\ -f_{z1} \\ -f_{z2} \\ \vdots \\ -f_{z\ell} \\ \vdots \\ -f_{zm} \\ \vdots \\ -f_{zn} \\ -\underset{\sim}{M}_x \\ -\underset{\sim}{M}_y \\ 1 \end{Bmatrix}^{d}_{i-1}$$

..... (4.15)

CAPÍTULO V

O MÉTODO COMBINADO ELEMENTOS FINITOS-MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

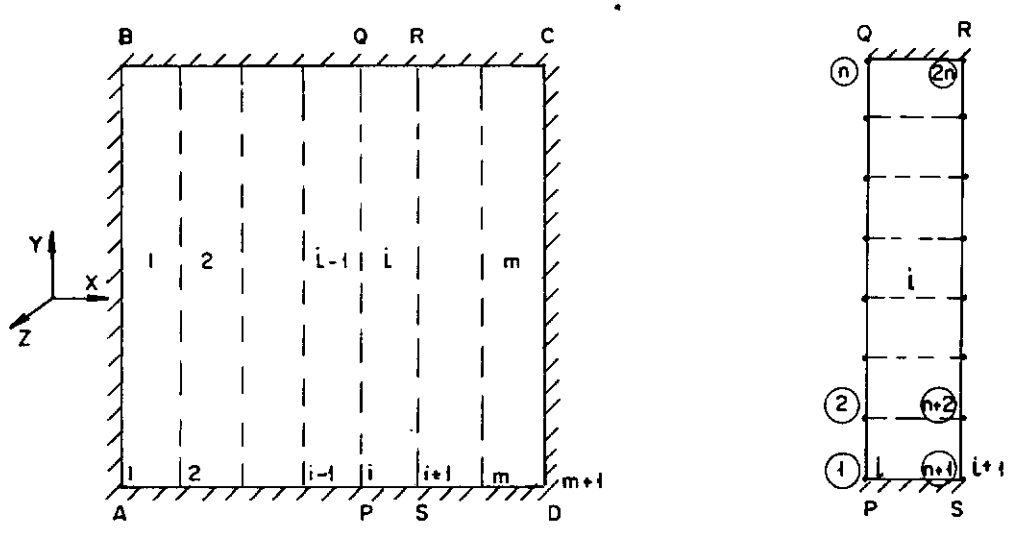
5.1 - Introdução

Neste capítulo, apresentam-se as etapas a serem seguidas para se proceder à análise de placas pelo método combinado elementos finitos-matriz de transferência.

No desenvolvimento das etapas,a serem seguidas na análise, procurou-se aplicar a uma placa totalmente engastada no contorno por ser esta a utilizada na programação automática.

5.2 - Análise Geral

Seja a placa da figura (5.1) com as seções do contorno esquerdo (AB) e direito (CD) e os bordos superior (BC) e inferior (AD) totalmente engastados.



(a) Estrutura dividida em m faixas

(b) Faixa i dividida em elementos finitos

Figura 5.1 - Placa Retangular totalmente engastada

Para se efetuar a análise de placas, tem-se que:

I. Dividir a placa em faixas e estas em elementos finitos. Escolher uma função adequada para representar a distribuição aproximada dos deslocamentos no elemento em termos dos deslocamentos nodais, e assim obter a matriz de rigidez para cada elemento da faixa. Para o elemento i, obtém-se $|K^e|_i$.

Placa Engastada

Para o exemplo, dividiu-se a placa em m faixas e cada faixa em elementos finitos retangulares não-conformes. Cada faixa possuindo um total de $2n$ nós, sendo n nós na seção esquerda e n na seção direita. O vetor de deslocamentos e o correspondente vetor de forças nodais para o nó p consistindo, cada um, de três componentes:

$$\{d_p\} = \{W_p,\ \Theta_{xp} = \frac{\partial w}{\partial y},\ \Theta_{yp} = -\frac{\partial w}{\partial x}\}^t \tag{5.1a}$$

$$\{f_p\} = \{f_{zp},\ f_{xp},\ f_{yp}\}^t \tag{5.1b}$$

Na figura (5.2), mostram-se as componentes positivas para os deslocamentos e forças nodais no nó p e tendo como referência o sistema de eixos XYZ.

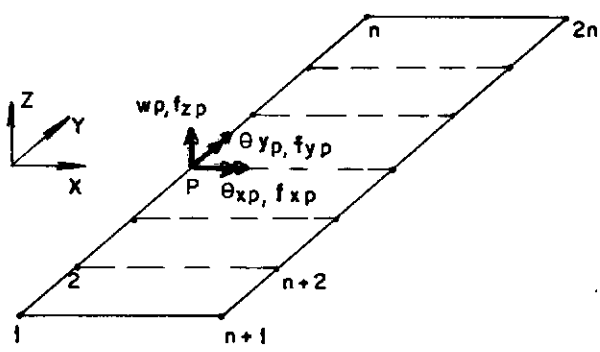


Figura 5.2 - Representação dos Deslocamentos e Forças Nodais para o nó P

II. Reunir adequadamente as matrizes de rigidez dos elementos da faixa e obter a matriz de rigidez completa da faixa $|K|$. Para a faixa i, escreve-se a relação

$$|K|_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{d}^d \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}^e \\ \underset{\sim}{f}^d \end{Bmatrix}_i \tag{5.2}$$

Placa Engastada

Para faixa i da placa e conhecendo-se a relação (5.2) as componentes do vetor de deslocamentos e forças nodais, escrevem-se

$$\{d^e\}_i = \{\underset{\sim}{d}^e_1, \underset{\sim}{d}^e_2, \ldots, \underset{\sim}{d}^e_p, \ldots, \underset{\sim}{d}^e_n\}^t_i \tag{5.3a}$$

$$\{d^d\}_i = \{\underset{\sim}{d}^d_{n+1}, \underset{\sim}{d}^d_{n+2}, \ldots, \underset{\sim}{d}^d_{2n}\}^t_i \tag{5.3b}$$

$$\{f^e\}_i = \{\underset{\sim}{f}^e_1, \underset{\sim}{f}^e_2, \ldots, \underset{\sim}{f}^e_p, \ldots, \underset{\sim}{f}^e_n\}^t \tag{5.3c}$$

$$\{f^d\}_i = \{\underset{\sim}{f}^d_{n+1}, \underset{\sim}{f}^d_{n+2}, \ldots, \underset{\sim}{f}^d_{2n}\}^t_i \tag{5.3d}$$

III. Introduzir as condições de contorno dos bordos superior e inferior da faixa através da eliminação na matriz de rigidez da faixa das linhas e colunas correspondentes aos deslocamentos nodais nulos. Obtém-se a matriz de rigidez reduzida da faixa. Para faixa i , tem-se:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{S}_{11} & \underset{\sim}{S}_{12} \\ \underset{\sim}{S}_{21} & \underset{\sim}{S}_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{d}^d \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}^e \\ \underset{\sim}{f}^d \end{Bmatrix}_i \tag{5.4}$$

onde $|S|_i$ é a matriz de rigidez reduzida da faixa i ;

$$\{d^e\}_i = \left\{\begin{array}{l} \text{termos não nulos de } \underset{\sim}{d}_1 \text{ (nó 1) em PS} \\ \quad d_2 \\ \quad \vdots \\ \quad d_{n-1} \\ \text{termos não nulos de } \underset{\sim}{d}_n \text{ (nó n) em QR} \end{array}\right\}_i$$

$$\{d^d\}_i = \left\{\begin{array}{l} \text{termos não nulos de } d_{n+1} \text{ (nó n+1) em PS} \\ \quad d_{n+2} \\ \quad \vdots \\ \quad d_{2n-1} \\ \text{termos não nulos de } d_{2n} \text{ (nó 2n) em QR} \end{array}\right\}_i$$

são os vetores de deslocamentos para os nós da seção esquerda e direita da faixa i .

Uma conclusão importante, nesta etapa, é que o método só se aplica para condições de contorno iguais em um mesmo bordo. Assim, todos os nós do bordo superior (BC) devem possuir o mesmo tipo de apoio, o mesmo acontencendo com os nós do bordo inferior (AD). Esta condição é necessária para que os vetores de deslocamentos das seções tenham um mesmo número de termos.

Placa Engastada

Na condição de engaste nos bordos superior e inferior da faixa i , tem-se

$$\{d_1^e\}_i = \{d_{n+1}^d\}_i = \{0\} \quad \text{em PS} \qquad \text{e}$$

$$\{d_n^e\}_i = \{d_{2n}^d\}_i = \{0\} \quad \text{em QR} .$$

Então, o vetor de deslocamentos escreve-se:

$$\{d\}_i = \{\underset{\sim}{d}_2^e, \underset{\sim}{d}_3^e, \ldots, \underset{\sim}{d}_{n-1}^e, \underset{\sim}{d}_{n+2}^d, \underset{\sim}{d}_{n+3}^d, \ldots, \underset{\sim}{d}_{2n-1}^d\}_i^t \qquad (5.5)$$

IV - Através de operações na matriz de rigidez da faixa, encontrar a matriz de transferência que relaciona os vetores de estado da seção esquerda e direita

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^d \\ -\underset{\sim}{f}^d \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{11} & \underset{\sim}{T}_{12} \\ \underset{\sim}{T}_{21} & \underset{\sim}{T}_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{f}^e \end{Bmatrix}_i \tag{5.6}$$

onde

$$|T_{11}|_i = -|S_{12}|_i^{-1} \; |S_{11}|_i \tag{5.7a}$$

$$|T_{12}|_i = |S_{12}|_i^{-1} \tag{5.7b}$$

$$|T_{21}|_i = -|S_{21}|_i + |S_{22}|_i \; |S_{12}^{-1}|_i |S_{11}|_i \tag{5.7c}$$

$$|T_{22}|_i = -|S_{22}|_i \; |S_{12}^{-1}|_i \tag{5.7d}$$

Acrescentar uma linha e uma coluna na matriz de transferência e um termo nos vetores de estado, para tornar possível a multiplicação pela matriz fronteira

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^d \\ \underset{\sim}{f}^d \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{11} & \underset{\sim}{T}_{12} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{T}_{21} & \underset{\sim}{T}_{22} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{f}^e \\ 1 \end{Bmatrix}_i \tag{5.8a}$$

ou

$$\{V^d\}_i = |T|_i \; \{V^e\}_i \tag{5.8b}$$

<u>Placa Engastada</u>

Para uma faixa de $2n$ nós com três deslocamentos por nó, a matriz de transferência terá a ordem de

$$L = (2n \times 3) - (4 \times 3) + 1$$

A parte subtraída corresponde aos quatro nós da faixa que foram eliminados por possuírem deslocamentos nulos . São os nós de bordo superior e inferior.

V. Formar a matriz fronteira das seções da faixa que introduz as descontinuidades representadas pelas cargas nodais externas e apoio elástico

$$|F|_i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{k} & \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{F}^{ext} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_i$$

onde

$|k|_i$ representa a matriz que introduz as descontinuidades das forças na direção do apoio elástico, sendo uma matriz diagonal, cujos elementos diagonais são as rigidezes de mola existentes nos nós da seção;

$\{F^{ext}\}_i$ é o vetor de forças nodais externas da seção i

VI. Repetir as etapas II a V para todas as faixas e seções da placa de modo a percorrer toda estrutura e relacionar então os vetores de estado da seção esquerda e direita do contorno

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^d \\ -\underset{\sim}{f}^d \\ 1 \end{Bmatrix}_m = |T|_m \, |F|_m \, \ldots \, |T|_2 \, |F|_2 \, |T|_1 \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{f}^e \\ 1 \end{Bmatrix}_1 \qquad (5.9a)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^d \\ -\underset{\sim}{f}^d \\ 1 \end{Bmatrix}_m = |P| \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{f}^e \\ 1 \end{Bmatrix}_1 \qquad (5\text{-}9b)$$

onde

$$|P| = |T|_m \; |F|_m \; \ldots \; |T|_2 \; |F|_2 \; |T|_1 \tag{5.10}$$

De maneira mais compacta, representa-se a eq. (5.9) por:

$$\{V^d\}_m = |P| \; \{V^e\}_1 \tag{5.11}$$

VII- Resolver o sistema final, dado pela equação (5.9b), para as condições de contorno dos apoios extremos, que podem ser quaisquer:

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^d \\ -\underset{\sim}{f}^d \\ 1 \end{Bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{P}_{11} & \underset{\sim}{P}_{12} & \underset{\sim}{P}_{13} \\ \underset{\sim}{P}_{21} & \underset{\sim}{P}_{22} & \underset{\sim}{P}_{23} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{d}^e \\ \underset{\sim}{f}^e \\ 1 \end{Bmatrix}_1 \tag{5.12}$$

<u>Placa Engastada</u>

Para as seções do contorno esquerdo $\{V^e\}_1$ e direito $\{V^d\}_m$ tem-se as condições do tipo

$$\{d^d\}_m = \{d^e\}_1 = \{0\}$$

E o sistema (5.12) fica:

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ -\underset{\sim}{f}^d \\ 1 \end{Bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{P}_{11} & \underset{\sim}{P}_{12} & \underset{\sim}{P}_{13} \\ \underset{\sim}{P}_{21} & \underset{\sim}{P}_{22} & \underset{\sim}{P}_{23} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{f}^e \\ 1 \end{Bmatrix}_1 \tag{5.13}$$

$$\underset{\sim}{P}_{12} \; \underset{\sim}{f}_1^e + \underset{\sim}{P}_{13} = \underset{\sim}{0} \tag{5.14a}$$

$$\underset{\sim}{P}_{22} \; \underset{\sim}{f}_1^e + \underset{\sim}{P}_{23} = -\underset{\sim}{f}_m^d \tag{5.14b}$$

Resolvendo-se a equação (5.14a), encontra-se o vetor de estado da seção 1, seção esquerda. Uma vez obtido o vetor de estado em 1, por aplicação da equação (5.14b), determi -

na-se o vetor de estado da seção m , seção direita.

Conclui-se que a ordem da matriz de transferência final da estrutura $|P|$ não depende do número de faixas em que a placa foi dividida, mas apenas do número de nós da faixa. Para a placa engastada, o sistema a ser resolvido tem um número de equações igual à metade da ordem do vetor de estado.

Um dos inconveninetes do presente método é o fato de que para a consideração de condições de contorno variadas, o sistema de equações final necessita de um reordenamento para possibilitar o cálculo dos vetores de estado extremos.

VIII. Percorrer novamente a estrutura de modo a determinar passo a passo os vetores de estado das seções intermediárias:

$$\{V^d\}_1 = |T|_1 \{V^e\}_1 \tag{5.15}$$

$$\{F^e\}_2 = |F|_1 \{V^d\}_1 \tag{5.16}$$

$$\{V^d\}_2 = |T|_2 \{V^e\}_2 \tag{5.17}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\{V^e\}_m = |F|_m \{V^d\}_{m-1} \tag{5.18}$$

IX - Determinar as tensões nos nós das seções da placa. O que se obtém nos vetores de estado são deslocamentos e forças nodais fictícias. Para se obter as resultantes de tensões, que para o caso de flexão são os momentos fletores internos por unidade de comprimento M_x e M_y , e o momento torsor por unidade de comprimento M_{xy} , recorre-se, novamente à técnica dos elementos finitos. Obtém- se

o vetor de tensões para cada elemento finito da faixa, pela multiplicação da matriz de tensões com os deslocamentos nodais do elemento. E pela união adequada dos vetores de tensões dos elementos da faixa, encontram-se as tensões nos nós das seções da placa. Na figura (5.3) indicam-se os sentidos positivos para os momentos no elemento retangular de flexão de placa.

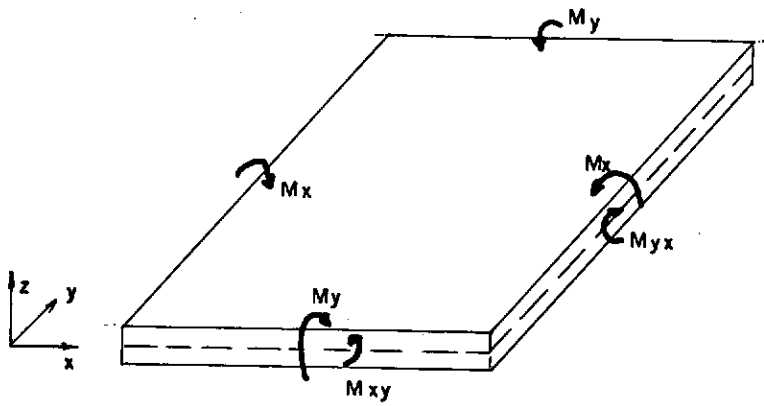


Figura 5.3 - Sentidos Positivos para os Momentos na Placa

CAPÍTULO VI

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

6.1 - Introdução

Apresenta-se, neste capítulo, a estruturação do programa, a notação utilizada nas rotinas e alguns esclarecimentos importantes na compreensão de algumas das subrotinas desenvolvidas.

O programa faz a análise estática linear de placas retangulares isotrópicas totalmente engastadas no contorno pelo método combinado elementos finitos - matriz de transferência . Foi desenvolvido no microcomputador CP-500 da Prológica, com 48 kbytes de memória RAM e 2 drives.

6.2 - Notação Utilizada na Programação

A - comprimento da placa (direção x) ;

B - largura da placa (direção y) ;

NF - número de faixas em que foi dividida a estrutura;

NEF - número de elementos por faixa;

NTE - número de tipos de elementos;

NCC - número de cargas concentradas;

NVI - número de vinculações intermediárias;

N2FS- número de faixas semelhantes ;

NUDF- número de deslocamentos por faixa, exluindo os nós dos bordos superior e inferior;

N3UDTF - número de deslocamentos totais da faixa;

ELM(I,J) - características J do tipo I de elemento:

$$J = \begin{cases} 1 - \text{módulo de elasticidade;} \\ 2 - \text{coeficiente de Poisson;} \\ 3 - \text{espessura do elemento;} \\ 4 - \text{peso específico.} \end{cases}$$

IA(I) - tipo do elemento I ;

IB(I) - semelhança da faixa I:

$$IB(I) = \begin{cases} 0 - \text{faixa não semelhante;} \\ 1 - \text{faixa semelhante.} \end{cases}$$

C(I) - valor da carga concentrada I;

IC(I) - número da faixa da carga conentrada I;

ID(I) - número do nó da carga concentrada I;

R(I) - valor da constante de mola I;

IE(I) - número da faixa da constante de mola I;

IG(I) - número do nó da constante de mola I;

FF - no módulo II: vetor de forças nodais global da faixa, vetor auxiliar na subrotina de multiplicação e gravação das matrizes de transferência; vetor auxiliar na subrotina de resolução do sistema por Gauss;

no módulo III:vetor de estado da seção esquerda da faixa;

F - no módulo II: vetor de cargas nodais equivalentes do elemento;

no módulo III: vetor de deslocamentos do elemento;

SG - no módulo II: matriz de rigidez do elemento retangular;

no módulo III: matriz de tensões do elemento de placa;

SF - no módulo II: matriz de rigidez global da faixa, matriz de transferência da faixa, matriz dos coeficientes na resolução do sistema por Gauss;

no módulo III: matriz de transferência da faixa;

JK - vetor de trabalho que faz a correspondência entre a numera-

ção local do elemento e a numeração global da faixa;

H - no módulo II: vetor auxiliar no cálculo da matriz de transferência;

no módulo III: vetor de tensões para os nós da seção direita da faixa:

G - no módulo II : vetor auxiliar no cálculo da matriz de transferência da faixa;

no módulo III: vetor de tensões para os nós da seção esquerda da faixa;

FV - vetor de estado da seção direita da faixa;

V1, V2, V3, V4, V5, RIG, VMIN, DX, DY - variáveis reais auxiliares nas rotinas;

K1, K2, K3, K4, K5, K6, IAUX - variáveis inteiras auxiliares nas rotinas.

6.3 - Estruturação do Programa

O programa está dividido em três módulos:

- MÓDULO I - Entrada de dados da estrutura;
- MÓDULO II - Cálculo dos vetores de estado extremos;
- MÓDULO III - Cálculo dos vetores de estado das seções intermediárias e das tensões.

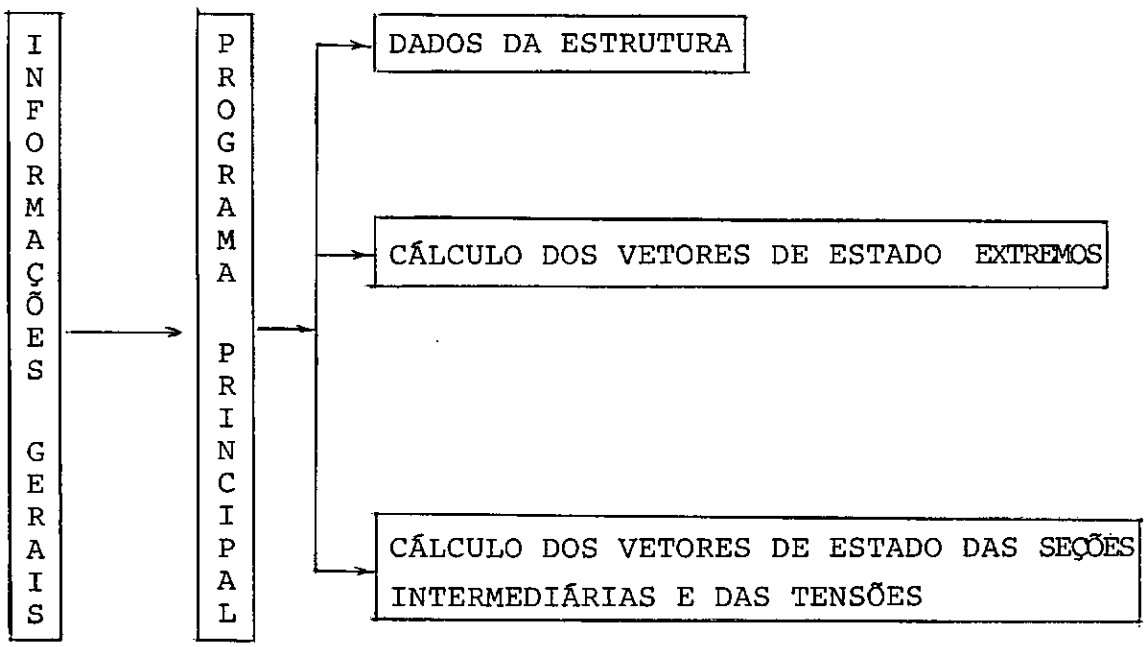
Os três módulos são acessados por um programa principal logo que o usuário tiver fornecido as informações gerais sobre a estrutura. As informações gerais são as oito primeiras variáveis dadas no item (6.2).

Uma vez fornecidas as informações gerais, o programa principal dimensiona as variáveis necessárias e pede ao usuário que escolha um dos módulos. Esta pergunta será sempre feita lo

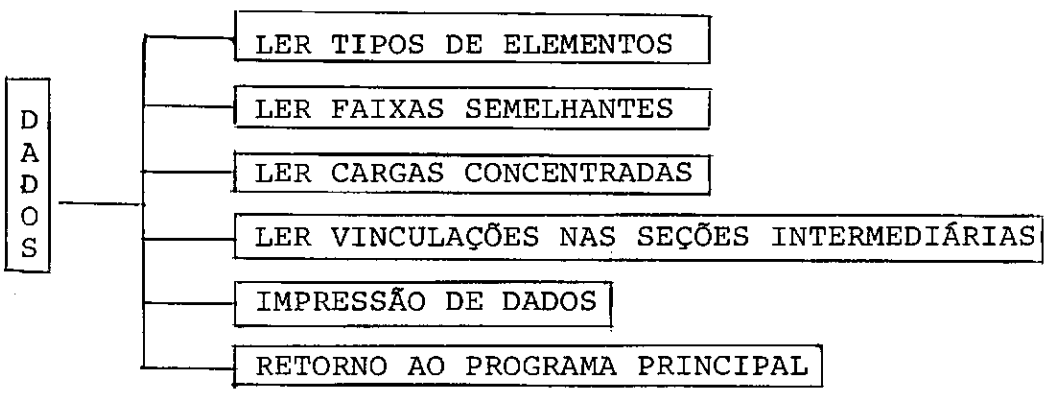
go que seja encerrado o processamento em qualquer dos módulos . Desta forma, é possível corrigir dados da estrutura, do carregamento, chamando o módulo II ou o módulo III quando houver certeza dos dados fornecidos.

A seguir,mostrar-se-á, de maneira simplificada o fluxograma das etapas seguidas na programação.

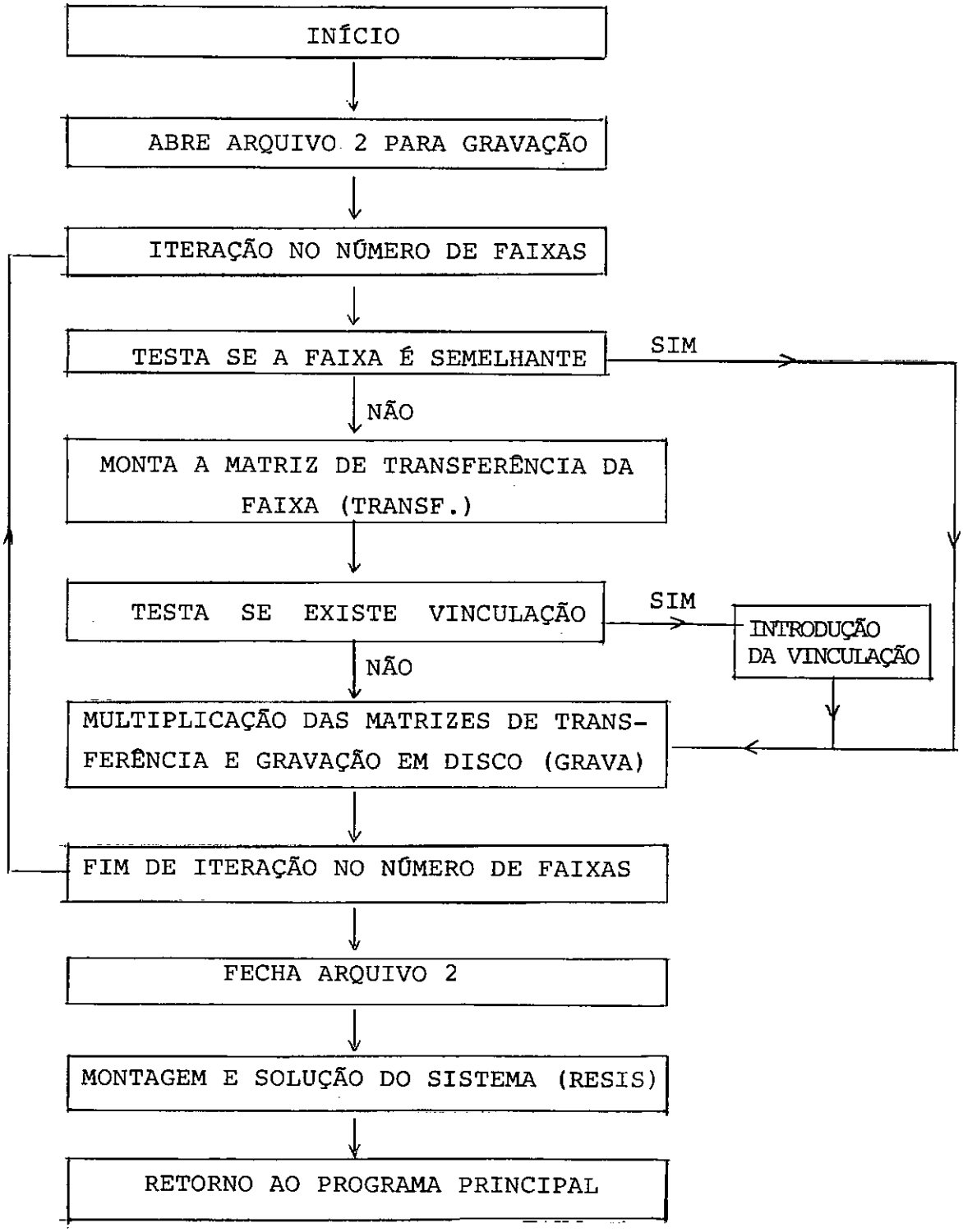
6.3.1 - PROGRAMA PRINCIPAL



6.3.2 - MÓDULO I - DADOS DA ESTRUTURA

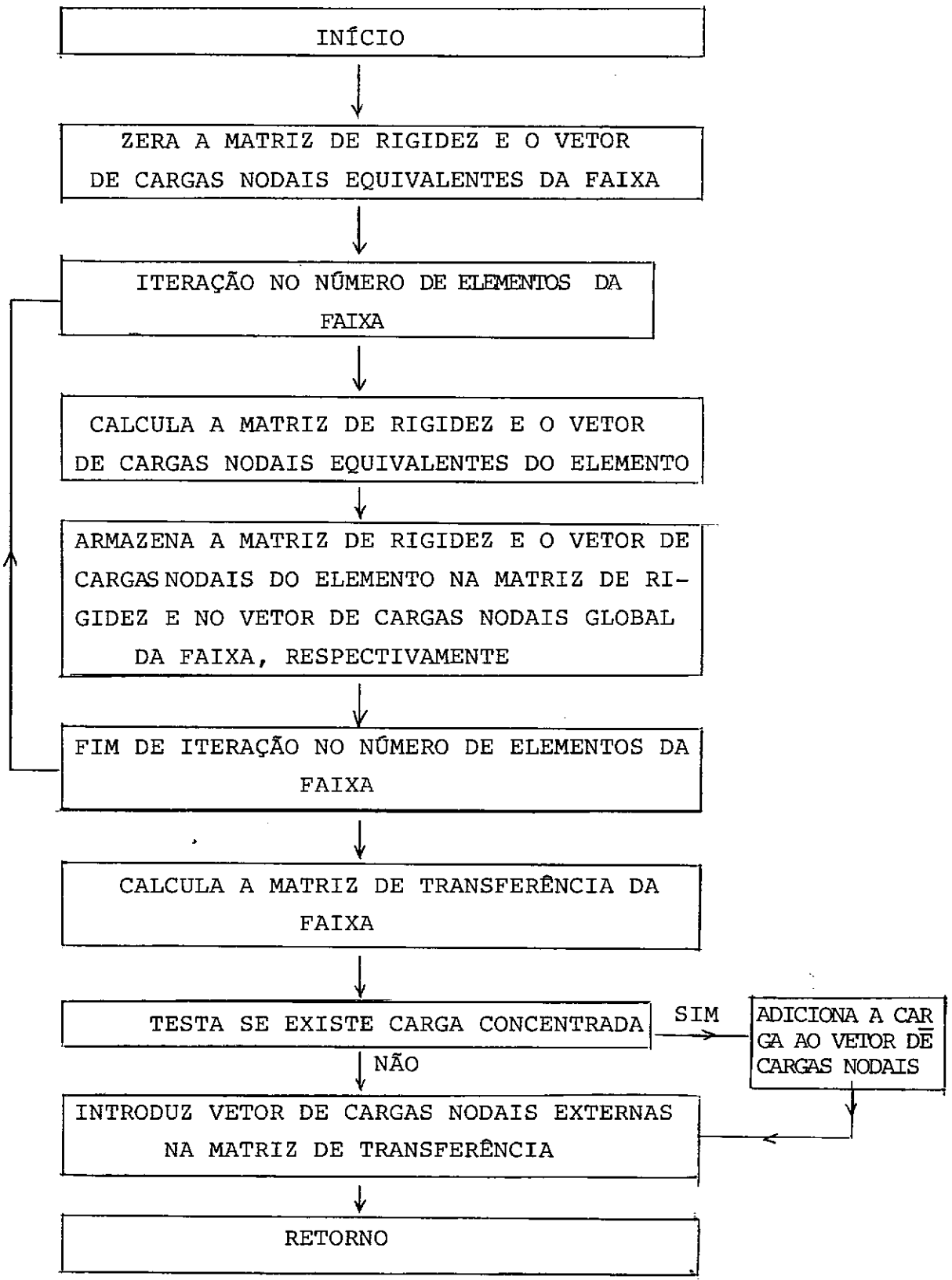


6.3.3 - MÓDULO II - CÁLCULO DOS VETORES DE ESTADO EXTREMOS

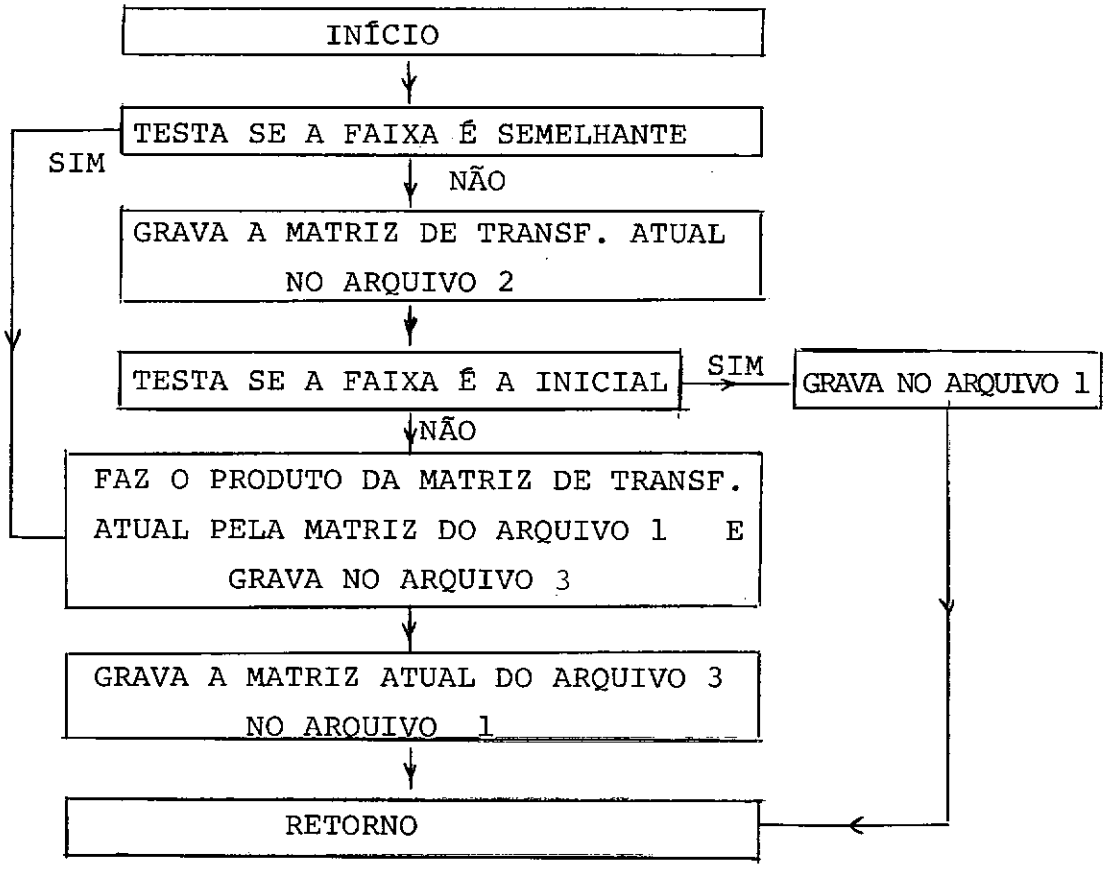


SUBROTINAS DO MÓDULO II

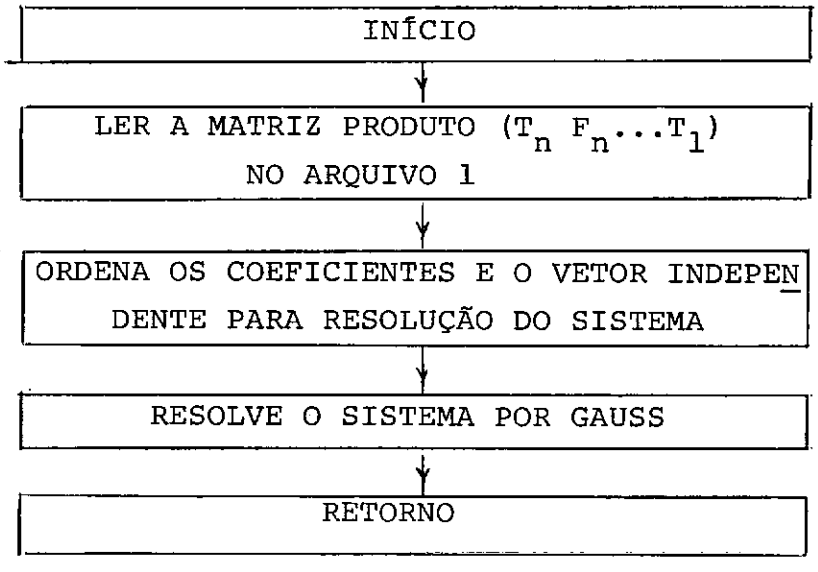
- MONTAGEM DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA DA FAIXA (TRANSF)



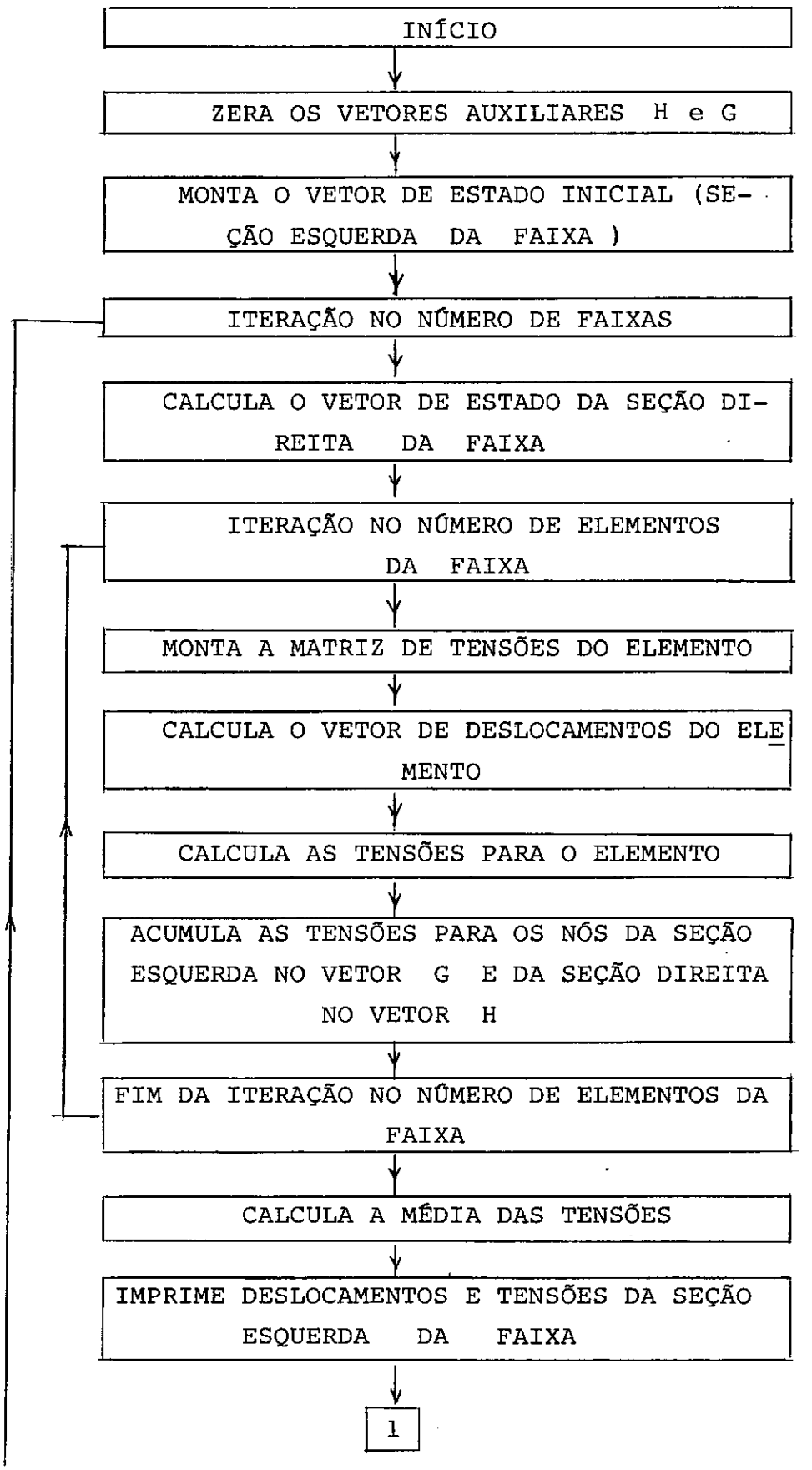
- MULTIPLICAÇÃO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA E GRAVAÇÃO EM DISCO (GRAVA)

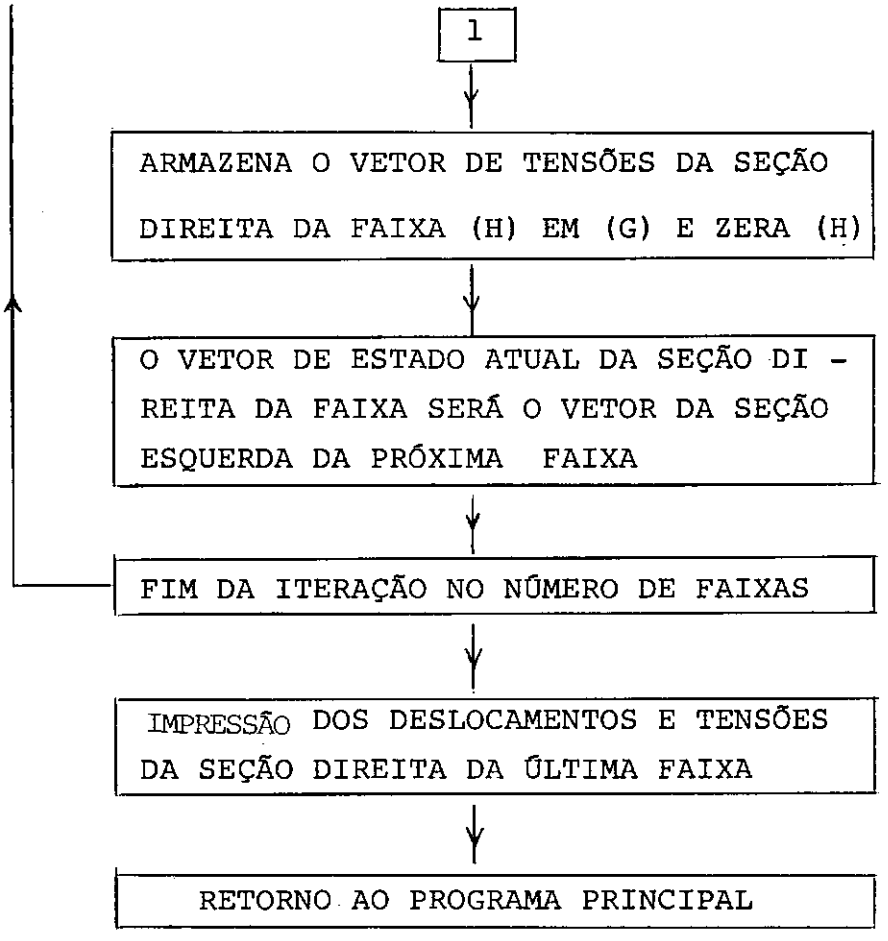


- MONTAGEM E SOLUÇÃO DO SISTEMA (RESIS)



6.3.4 - MÓDULO III - CÁLCULO DOS VETORES DE ESTADO DAS SEÇÕES INTERMEDIÁRIAS E DAS TENSÕES





6.4 - Algumas Considerações sobre a Programação

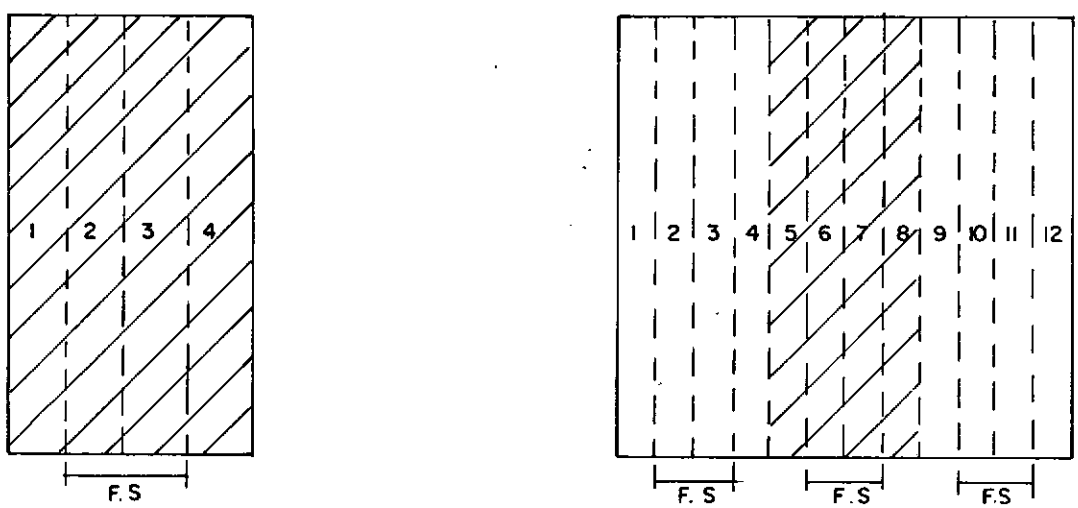
6.4.1 - MÓDULO I

Tipos de Elementos - Será feito um agrupamento por tipos de elementos existentes, cada tipo contendo seu grupo de valores: módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, espessura, peso específico e carga distribuída no elemento que será transformada em unidades de peso específico e somada ao valor anterior fornecido.

Semelhança de Faixas - Duas faixas são ditas semelhantes quando

possuem a mesma matriz de transferência. O comando semelhança de faixa permite ao usuário informar ao programa a existência de faixas semelhantes consecutivas. Desta forma, somente a matriz de transferência da primeira faixa do conjunto de faixas semelhantes precisa ser montada. Obtém-se, assim , uma economia no tempo de análise.

Deve-se lembrar que para duas faixas possuírem a mesma matriz de transferência é necessário igualdade na geometria, nas propriedades físicas dos elementos da faixa e no carregamento. Na figura (6.1a) e (6.1b) são apresentados dois casos onde se ilustra a utilização da semelhança de faixas.



F.S - Faixas Semelhantes

(a) Carregamento distribuído total

(b) Carregamento parcial distribuído nas faixas 5 a 8

Figura 6.1 - Casos de Faixas Semelhantes

Cargas Concentradas - A numeração da faixa que a carga concentrada entrará na programação corresponde àquela em que a carga está atuando na sua seção direita. Assim, para a placa dada na figura (6.2) e carga P pertencerá à primeira faixa.

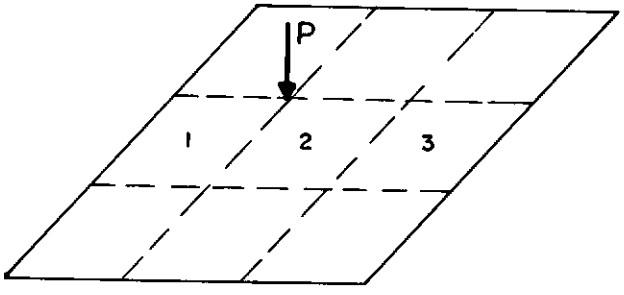


Figura 6.2

O fato das cargas concentradas serem identificadas pela faixa imediatamente anterior deve-se à montagem da matriz de transferência com a introdução do vetor de cargas diretamente nesta matriz como será visto no item (6.4.2).

A mesma técnica é empregada na introdução das vinculações intermediárias.

6.4.2 - MÓDULO II

Montagem da Matriz de Rigidez Global da Faixa - Na rotina de montagem da matriz de rigidez global da faixa a numeração inicialmente arbitrada para os deslocamentos dos nós da faixa i é alterada visando-se obter a matriz de rigidez global reduzida da faixa $|S|_i$ com suas linhas e colunas já reorganizadas. Isto corresponde a introduzir as condições de contorno do bordo superior e inferior da faixa: deslocamentos nulos nos nós pertencentes aos bordos.

Um eficiente armazenamento usual da matriz de rigidez global da estrutura no método dos elementos finitos é a técnica do perfil (skyline). Na programação, contudo, a matriz de rigidez da faixa é armazenada na sua forma completa. Isto possibilita a implementação de uma rotina que calcula a matriz de transferência e armazena nas mesmas posições ocupadas pela matriz de rigidez. A matriz de transferência é uma matriz não simétrica.

Montagem de Matriz de Transferência - No cálculo da submatriz $|T_{12}|$ da matriz de transferência, que corresponde à inversa da submatriz $|S_{12}|$ da matriz de rigidez global da faixa, ver item (3.2), utilizou-se a rotina de inversão por particionamento dada na referência (12) com algumas modificações desta por se tratar de inversão de uma submatriz e não da matriz completa.

A matriz de transferência é uma matriz de ordem nxn, sendo n o número de deslocamentos total da faixa excluindo os nós dos bordos, até à subrotina de introdução do vetor de cargas nodais externas. A partir deste ponto, acrescenta-se automaticamente mais uma coluna na matriz de transferência, correspondnete ao vetor de cargas nodais externas, e mais uma linha.

Introdução do Vetor de Cargas Nodais na Matriz de Transferência- Alguns esclarecimentos de como é feito o produto das matrizes de transferência pelas matrizes fronteiras a nível da programação serão aqui fornecidos.

Aplicando-se a equação (2.31) à placa da figura (6.1a) fica-se com:

$$\{V\}_4^d = |T|_4|F|_4|T|_3|F|_3|T|_2|F|_2|T|_1 \{V\}_1^e \qquad (6.1)$$

onde $|F|_i$ é a matriz fronteira da seção i que introduz as cargas nodais externas, que para a placa em estudo corresponde às cargas nodais equivalentes do carregamento distribuído.

Como, na programação, o cálculo das matrizes de transferência é feito individualmente e, do mesmo modo, o vetor de forças nodais externas, é interessante, então, fazer-se a divisão da matriz fronteira por faixa. A equação (6.1) escreve- se por:

$$\{V\}_4^d = |T|_4|F|_4^{II}|F|_4^{I}|T|_3|F|_3^{II}|F|_3^{I}|T|_2|F|_2^{II}|F|_2^{I}|T|_1\{V\}_1^e$$

onde $|F|_i^{II}$ é a matriz fronteira que introduz a contribuição das cargas nodais externas dos nós da seção esquerda da faixa i; $|F|_i^{I}$ é a matriz fronteira que introduz a contribuição das cargas nodais externas dos nós da seção direita da faixa i-1.

Explicitando o produto da matriz fronteira pela matriz de transferência para as faixas, escreve-se:

Faixa 1 = $|F|_2^{I} \quad |T|_1$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{F}_I^{ext} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{11} & \underset{\sim}{T}_{12} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{T}_{21} & \underset{\sim}{T}_{22} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{11} & \underset{\sim}{T}_{12} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{T}_{21} & \underset{\sim}{T}_{22} & \underset{\sim}{F}_I^{ext} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_1$$

Faixa 2 = $|F|_3^{I}\ |T|_2\ |F|_2^{II}$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{F}_I^{ext} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{11} & \underset{\sim}{T}_{12} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{T}_{21} & \underset{\sim}{T}_{22} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{F}_{II}^{ext} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{11} & \underset{\sim}{T}_{12} & \underset{\sim}{T}_{12}\ \underset{\sim}{F}_{II}^{ext} \\ \underset{\sim}{T}_{21} & \underset{\sim}{T}_{22} & \underset{\sim}{T}_{22}\ \underset{\sim}{F}_{II}^{ext} + \underset{\sim}{F}_I^{ext} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_2$$

Faixa 3 - semelhante à faixa 2, pois, além das características geométricas e físicas dos seus elementos serem as mesmas, o carregamento é igual ao da faixa 2;

Faixa 4 = $|T|_4\ |F|_4^{II}$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{11} & \underset{\sim}{T}_{12} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{T}_{21} & \underset{\sim}{T}_{22} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{F}_{II}^{ext} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_4 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}_{11} & \underset{\sim}{T}_{12} & \underset{\sim}{T}_{12}\ \underset{\sim}{F}_{II}^{ext} \\ \underset{\sim}{T}_{21} & \underset{\sim}{T}_{22} & \underset{\sim}{T}_{22}\ \underset{\sim}{F}_{II}^{ext} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 1 \end{bmatrix}_4$$

Assim, introduz-se o vetor de cargas nodais externas da faixa diretamente na matriz de transferência considerando-se os três casos distintos: faixa inicial, faixa intermediária e faixa final.

<u>Gravação e Multiplicação das Matrizes de Transferência</u> - Na subrotina de multiplicação e gravação das matrizes de transferência serão criados três arquivos. O arquivo 2 armazenará as matrizes de transferências individuais das faixas; caso existam faixas semelhantes só será gravada a primeira matriz de transferência do conjunto de faixas semelhantes. O arquivo 1 armazenará o produto da matriz de transferência atual pelas anteriores;no final estará com a matriz produto dada pela equação (2.30). O

arquivo 3 é um arquivo auxiliar criado para se fazer o produto da matriz de transferência atual pelas anteriores. O produto é feito na seguinte ordem: é lida a 1ª coluna da matriz de transferência que está no arquivo 1 e armazenada em um vetor, faz-se o produto das linhas da matriz de transferência atual, que está na memória RAM, pela coluna lida e obtém-se, assim, a primeira coluna da matriz produto, que será armazenada no arquivo 3; seguem-se os mesmos passos anteriores lendo-se a próxima coluna no arquivo 1 e assim até que o produto tenha se completado. Após o produto estar completo, grava-se a matriz do arquivo 3 no arquivo 1. Para a placa dada na figura (6.1a) a situação final dos arquivos será:

Arquivo 1	Arquivo 2	Arquivo 3
$T_4T_2T_2T_1$	T_1	$T_4T_2T_2T_1$
	T_2	
	T_4	

Resolução do Sistema - Na subrotina de resolução do sistema de equações, utilizou-se a rotina, dada na referência (9), que resolve o sistema pelo método de Gauss para o caso de matriz não simétrica com escolha do elemento pivô. "Este método para o tratamento de sistemas de equações com a matriz dos coeficientes não simétrica é o que apresenta corpo de programação mais reduzido e menor número de operações aritméticas, além de ter grande estabilidade numérica quando se faz a escolha do elemento pivô" (9).

6.4.3 - MÓDULO III

Cálculo das Tensões - As tensões em um ponto nodal são dadas pela média das tensões obtidas para este ponto considerando todos os elementos a que ele pertence. Um ponto no interior da placa terá contribuição de dois elementos da faixa anterior e de mais dois elementos da faixa seguinte. Isto significa que quando as tensões são calculadas em uma faixa somente é possível imprimir as tensões dos pontos nodais da seção esquerda, já que a seção direita ainda receberá a contribuição da faixa seguinte. Uma exceção é feita obviamente para a última faixa, uma vez que o bordo só recebe contribuição dos elementos desta faixa.

CAPÍTULO VII

RESULTADOS E CONCLUSÕES

7.1 - Introdução

O presente capítulo tem por objetivo apresentar alguns exemplos de aplicação do método combinado elementos finitos - matriz de transferência na análise de placas retangulares totalmente engastada no contorno.

Através dos exemplos, analisa-se a precisão dos resultados e a convergência dos mesmos para a solução analítica. É feita a comparação dos resultados com os obtidos pelo método dos elementos finitos.

7.2 - Resultados

EXEMPLO 1

Neste primeiro exemplo, foi resolvida uma placa, utilizando diferentes malhas, com o objetivo de comparar o presente método com o método dos elementos finitos e, assim, poder verificar a precisão dos resultados. Recorreu-se à referência (6) para se obter os resultados numéricos da análise da placa feita pelo método dos elementos finitos.

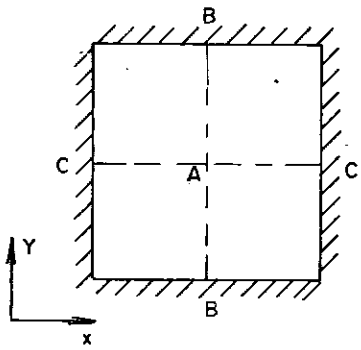
Características da Placa Analisada: placa quadrada de 3m x 3m, totalmente engastada no contorno.

Módulo de Elasticidade: 25×10^5 tf/m^2

Coeficiente de Poisson: 0,3

Espessura da Placa: 0,1 m

Carga uniformemente distribuída: 0,4 tf/m^2



Figura(VII.1)- Placa 1

Nas tabelas (VII.1), (VII.2) e (VII.3) apresentam - se os valores obtidos para o deslocamento transversal W e o momento fletor $M_x=M_y$ no centro da placa e os momentos fletores no centro dos bordos.

MALHA	Valores de W em A ($\times 10^{-4}$m)	
	ELEMENTOS FINITOS	ELEMENTOS FINITOS - M. TRANSFERÊNCIA
2x2	-2,094	-2,094
4x2	-2,037	-2,037
4x4	-1,981	-1,986
6x6	-	-1,885
8x6	-	-1,865
8x8	-1,839	-
Valor teórico dado na referência (7) W = 1,783		

Tabela (VII.1)

MALHA	Valores de $M_x=M_y$ em A ($\frac{t_f.m}{m}$)	
	ELEMENTOS FINITOS	ELEM. FINITOS - M. TRANSFERÊNCIA
2x2	0,16632	0,16619
4x2	0,13068	0,13053
4x4	0,10008	0,10002
6x6	-	0,08984
8x6	-	0,08819
8x8	0,0864	-
Valor teórico dado na referência (7): $M_x=M_y=0,08316$		

Tabela (VII.2)

MALHA	Valores de $M_{yB}=M_{xC}$ nos bordos ($\frac{t_f.m}{m}$)	
	ELEMENTOS FINITOS	ELEM. FINITOS - M. TRANSFERÊNCIA
2x2	-0,12780	-0,12784
4x2	-0,15048	-0,15036
4x4	-0,17136	-0,17138
6x6	-	-0,17841
8x6	-	-0,17977
8x8	-0,18108	-
Valor teórico dado na referência (7): $M_{yB}=M_{xC}= -0,18468$		

Tabela (VII-3)

Ilustram-se nos gráficos da figura (VII.2) e (VII.3) as convergências para os valores dados nas tabelas (VII-1) e (VII.2), respectivamente.

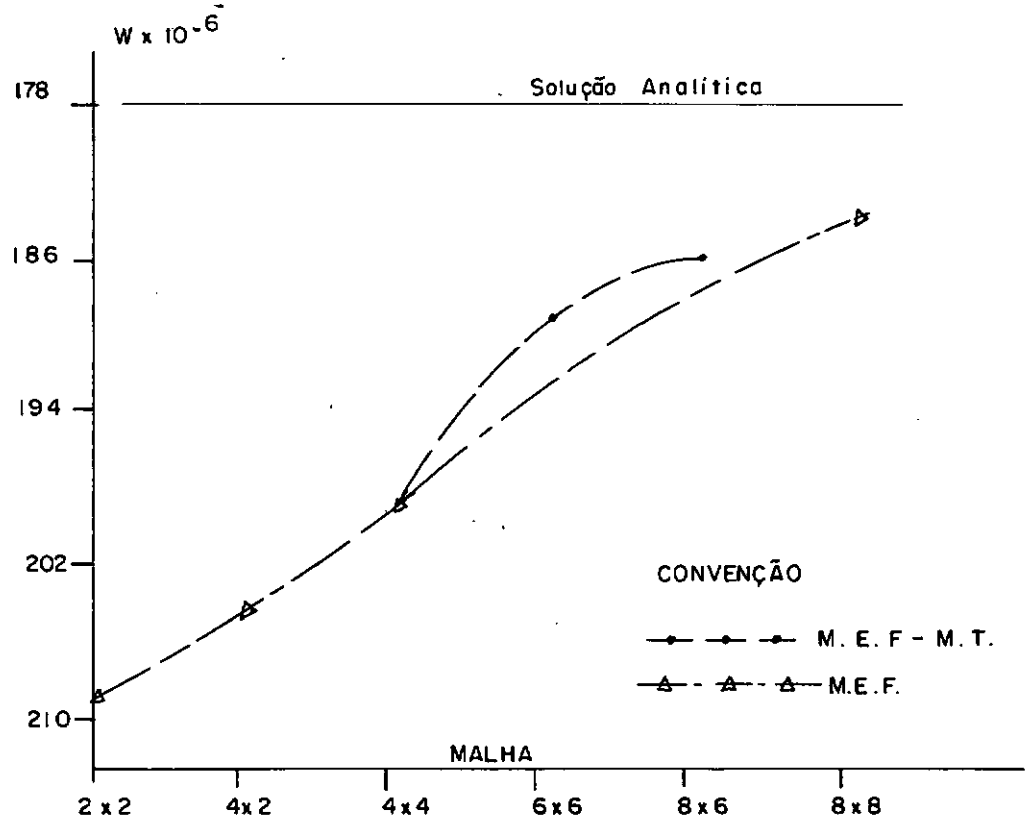


Figura (VII.2)

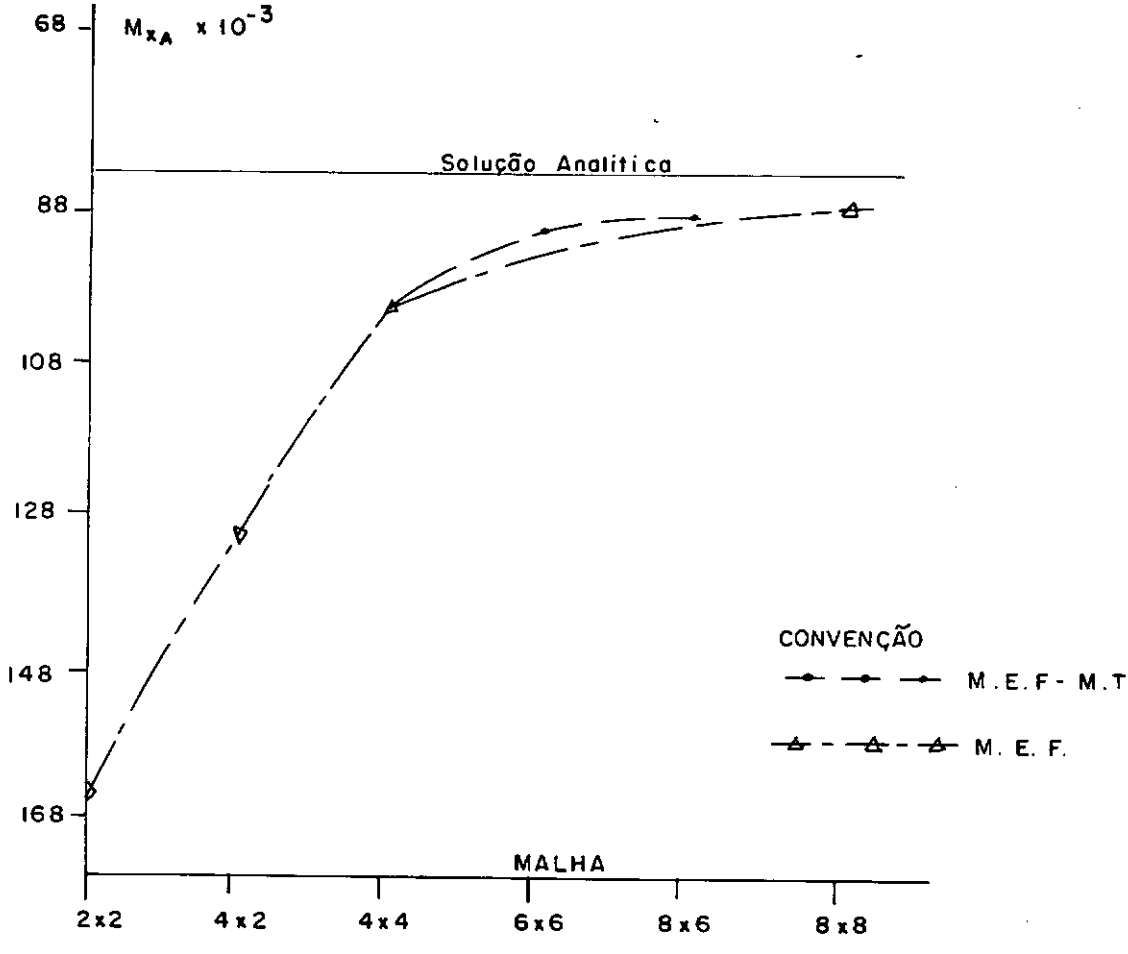


Figura (VII.3)

Utilizando as tabelas e gráficos, observa-se que os resultados encontrados concordam com aqueles obtidos pelo método dos elementos finitos. Ambos os métodos tendem à solução analítica à medida que se refina a malha.

Os resultados, para o traçado dos gráficos e elaboração das tabelas, foram obtidos com o uso da precisão dupla no microcomputador, que corresponde a 14 algarismos significativos na representação na base decimal das variáveis. Inicialmente, utilizou-se a precisão simples e verificou-se que os resultados eram bons quando comparados ao método método dos elementos finitos, só para a divisão da estrutura em um número reduzido de faixas. Com o aumento do número de faixas, a precisão dos resultados era afetada, afastando-se os seus valores cada vez mais da solução analítica. Já na malha (6x6), os resultados até a seção 3 eram bons, porém para as seções em diante o erro crescia gradativamente até a última seção, perdendo- se a simetria nos valores dos deslocamentos e momentos fletores que deveriam ocorrer na estrutura analisada. Explica-se este fato da seguinte maneira: com o aumento do número de faixas cresce o número de produtos de matrizes e estes produtos sucessivos acarretam erros nas operações aritméticas, devido aos truncamentos dos dígitos considerados não significativos pelo computador.

EXEMPLO 2

Como segundo exemplo, apresenta-se uma placa submetida a uma carga concentrada no seu centro. Utilizou-se uma malha (6x6) na análise e compararam-se os resultados com os obti

dos pelo método dos elementos finitos no programa STRUDL.

Características da Placa Analisada: Placa quadrada de 4m x 4m totalmente engastada no contorno.

Módulo de Elasticidade: 2×10^6 tf/m^2

Coeficiente de Poisson: 0,3

Espessura da Placa: 0,1 m

Carga concentrada no centro da placa: 12,8 tf

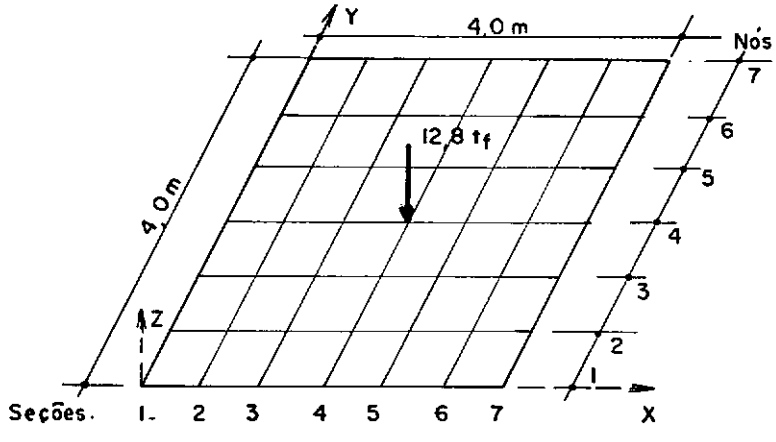


Figura (VII.4) - Placa 2

Na tabela (VII.4) mostra-se a ordem das matrizes obtidas pelo método dos elementos finitos (E.F.) e pelo método combinado elementos finitos - matriz de transferência (E.F.-M.T.). Devido à dupla simetria considerou-se no método dos elementos finitos que seria resolvida apenas 1/4 da estrutura.

MALHA	ORDEM DA MATRIZ RIGIDEZ GLOBAL (E.F.)	ORDEM DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA (E.F.-M.T.)
6x6	48 x 48	31 x 31

Tabela (VII.4)

Constata-se que a ordem da matriz de transferência ainda é menor que a matriz de rigidez global de 1/4 da estrutura. O método combinado elementos finitos - matriz de transferência é eficiente quanto à economia de memória.

Os resultados obtidos para o deslocamento transversal W na seção central da placa (seção 4) e o momento fletor M_x nas seções extremas (seção 1 = seção 7) são apresentados nas tabelas (VII.5) e (VII.6).

Nós	Valores de W ($x\ 10^{-3}$ m)	
	E.F.	E.F. - M.T.
1	0,00	0,0000
2	-1,47	-1,4732
3	-4,43	-4,4252
4	-6,61	-6,6090
5	-4,43	-4,4252
6	-1,47	-1,4732
7	0,00	0,0000

Tabela (VII.5)

Nós	Valores de M_x ($\frac{tf \cdot m}{m}$)	
	Seção 1 = Seção 7	
	E.F.	E.F. - M.T.
1	0,0000	0,0000
2	-0,3679	-0,3679
3	-1,1815	-1,1815
4	-1,5542	-1,5542
5	-1,1815	-1,1815
6	-0,3679	-0,3679
7	0,0000	0,0000

Tabela (VII.6)

Mais uma vez comprova-se a eficiência do método estudado quanto à precisão dos resultados.

Obteve-se momento de torção (M_{xy}) nulo nos nós da seção 4 e nos nós de numeração 4 das outras seções,como era esperado.

EXEMPLO 3

Resolve-se, neste exemplo, uma placa retangular submetida a um carregamento uniformemente distribuído e tendo no centro uma coluna representada por um apoio elástico, conforme mostra a figura (VII.5).

Características da Placa Analisada: Placa retangular de 8m x 6m totalmente engastada no contorno.

Módulo de Elasticidade:	2×10^6 tf/m²
Coeficiente de Poisson:	0,3
Espessura da Placa:	0,1 m
Carga uniformemente distribuída:	1,0 tf/m²
Apoio elástico (k) :	10^4 tf/m²

Também, neste exemplo, contou-se com o programa STRUDL para obtenção dos resultados pelo método dos elementos finitos.

A ordem das matrizes obtidas pelo método dos elementos finitos e o método combinado é mostrada na tabela (VII.7),considerando-se no método dos elementos finitos apenas 1/4 da estrutura.

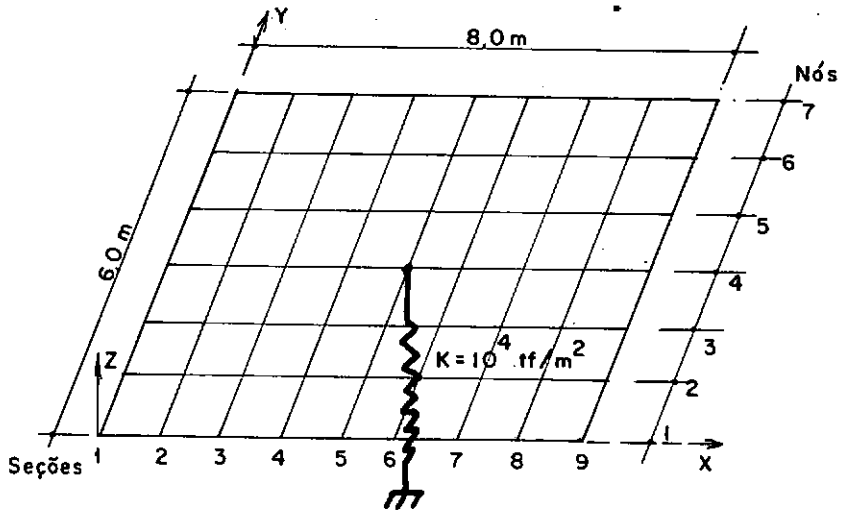


Figura (VII.5) - Placa 3

MALHA	ORDEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL (E.F.)	ORDEM DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA (E.F. - M.T.)
8x6	60 x 60	31 x 31

Tabela (VII.7)

Nas tabelas que se seguem, mostram-se os resultados obtidos para o deslocamento transversal (W) no centro (seção 5) e momento fletor M_x na seção inicial (seção 1).

Nós	Valores de W ($x\ 10^{-3}m$)	
	Seção 5	
	E.F.	E.F. - M.T.
1	0,000	0,0000
2	-1,523	-1,5295
3	-2,288	-2,2891
4	-0,965	-0,9655
5	-2,288	-2,2891
6	-1,523	-1,5295
7	0,000	0,0000

Tabela (VII.8)

Nós	Valores de M_x $(\frac{t_f \cdot m}{m})$	
	Seção 1 = Seção 9	
	E.F.	E.F. - M.T.
1	0,0000	0,0000
2	-0,5096	-0,5096
3	-1,0834	-1,0835
4	-1,2694	-1,2694
5	-1,0834	-1,0835
6	-0,5096	-0,5096
7	0,0000	0,0000

Tabela (VII.9)

7.3 - CONCLUSÕES

O método combinado elementos finitos - matriz de transferência tem como principal vantagem a redução das matrizes obtidas na análise das estruturas, comparativamente com as obtidas pelo método dos elementos finitos, permitindo assim, a utilização de computadores que possuam quantidades pequenas de memória.

Dos exemplos mostrados, viu-se que, mesmo no caso de estruturas simétricas, em que a análise no método dos elementos finitos é feita apenas para 1/4 da estrutura, a ordem da matriz de rigidez global da malha de elementos finitos ainda é maior que a da matriz de transferência que relaciona os vetores de estado extremos, quando do uso do método combinado. Particularmente, quando se trata de estruturas não simétricas, esta vantagem do método combinado é bastante relevante. Assim, para uma placa retangular não-simétrica de 49 pontos nodais (malha de 6 x 6), tem-se uma matriz de rigidez global de 147 x 147 contra uma matriz de transferência que relaciona os vetores de estado extremos de 31 x 31.

Como principal desvantagem do método estudado, salienta-se a perda de precisão dos resultados com o aumento do número de faixas na estrutura. Isto se deve, como mencionado no exemplo 1, ao acúmulo de erros, com o aumento dos produtos sucessivos das matrizes de transferência, nas operações aritméticas, devido aos truncamentos dos dígitos considerados não significativos pelo computador. Para contornar tal problema, recomenda-se a utilização de uma adequada precisão na representação das variáveis do programa. Nos exemplos implementados, esta preci-

são foi conseguida com quatorze algarismo significativos.

Nos exemplos apresentados não houve a preocupação em mostrar o tempo de processamento na análise, uma vez que quando se trabalha com computador de uso pessoal, o fator tempo tem caráter secundário. As limitações são, na realidade, as quantidades de memória RAM e auxiliares. E quanto a este fator, o método estudado mostrou-se muito eficiente.

APÊNDICE

A - Notação Utilizada no Desenvolvimento Teórico

$\begin{bmatrix} W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}$ = deslocamentos em um ponto do elemento de placa

$\begin{bmatrix} f_z \\ f_x \\ f_y \end{bmatrix}$ = forças associadas aos deslocamentos em ponto do elemento de placa

$\{d_p\}$ = vetor de deslocamentos do nó p

$\{f_p\}$ = vetor de forças nodais para o nó p

$\{V^e\}_i$ = vetor de estado da seção esquerda da faixa i

$\{V^d\}_i$ = vetor de estado da seção direita da faixa i

$|T|_i$ = matriz de transferência da faixa i

$|F|_i$ = matriz fronteira da seção i

$\{d^d\}_i$ = vetor de deslocamentos nodais da seção direita da faixa i

$\{d^e\}_i$ = vetor de deslocamentos nodais da seção esquerda da faixa i

$\{f^d\}_i$ = vetor de forças nodais associado aos deslocamentos nodais da seção direita da faixa i

$\{f^e\}_i$ = vetor de forças nodais associado aos deslocamentos nodais da seção esquerda da faixa i

$|S|_i$ = matriz de rigidez reduzida da faixa i

$|K^e|_i$ = matriz de rigidez do elemento de placa

$|K|_i$ = matriz de rigidez global da faixa i

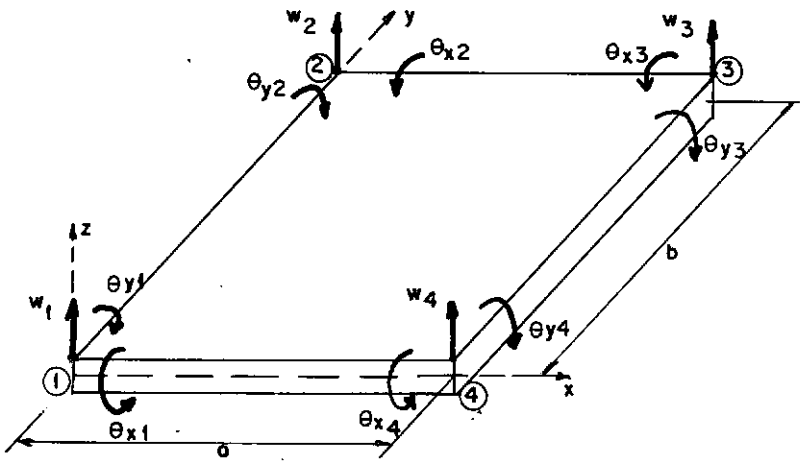
$\{F^{ext}\}$ = vetor de forças nodais externas da seção i

$|k|$ = matriz que introduz os apoios elásticos

$|P|$ = produto das matrizes de transferências e matrizes fronteiras da estrutura $(T_m . F_m . T_{m-1} \cdots F_2 T_1)$

$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}$ = matriz de tensões (momentos fletores e de torção em um ponto da placa)

B - Matriz de Rigidez do elemento retangular isotrópico de placa



elemento retangular de placa

$$K = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 6 \\ 7 \\ \vdots \\ 12 \end{array} \left[\begin{array}{c|c} k_{11} & \text{Simetria} \\ \hline k_{21} & k_{22} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & . & . & . & 6 & 7 & . & . & . & 12 \end{array}$$

As submatrizes k_{11}, k_{21}, k_{22} são apresentadas separadamente nas tabelas (B.1) a (B.3), onde

E = módulo de elasticidade

t = espessura do elemento

ν = coeficiente de Poisson

β = b/a

Tabela (B.1) - SUBMATRIZ K_{11} (TODOS OS COEFICIENTES DEVEM SER MULTIPLICADOS POR $Et^3/12(1-\nu^2)ab$

	1	2	3	4	5	6
1	$4(\beta^2+\beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14-4\nu)$					
2	$\lvert 2\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\rvert b$	$\lvert\frac{4}{3}\beta^{-2}+\frac{4}{15}(1-\nu)\rvert b^2$			Simetria	
3	$-\lvert 2\beta^{2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\rvert a$	$-\nu ab$	$\lvert\frac{4}{3}\beta^{2}+\frac{4}{15}(1-\nu)\rvert a^2$			
4	$2(\beta^2-2\beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14-4\nu)$	$-\lvert 2\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert a$	$\lvert -\beta^{2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\rvert a$	$4(\beta^2+\beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14-4\nu)$		
5	$\lvert 2\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert b$	$\lvert\frac{2}{3}\beta^{-2}-\frac{1}{15}(1-\nu)\rvert b^2$	0	$-\lvert 2\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\rvert b$	$\lvert\frac{4}{3}\beta^{-2}+\frac{4}{15}(1-\nu)\rvert b^2$	
6	$\lvert -\beta^{2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\rvert a$	0	$\lvert\frac{2}{3}\beta^{2}-\frac{4}{15}(1-\nu)\rvert a^2$	$-\lvert 2\beta^{2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\rvert a$	νab	$\lvert\frac{4}{3}\beta^{2}+\frac{4}{15}(1-\nu)\rvert a^2$

TABELA (B.2) - SUBMATRIZ K_{21} (TODOS OS COEFICIENTES DEVEM SER MULTIPLICADOS POR $Et^3/12(1-\nu^2)ab$)

7	$-2(\beta^2+\beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14-4\nu)$	$\lvert -\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert b$	$\lvert \beta^2-\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert a$	$-2(2\beta^2-\beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14-4\nu)$	$\lvert -\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\rvert b$	$\lvert 2\beta^2+\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert a$
8	$\lvert \beta^{-2}-\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert b$	$\lvert \frac{1}{3}\beta^{-2}+\frac{1}{15}(1-\nu)\rvert b^2$	0	$\lvert -\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\rvert b$	$\lvert \frac{2}{3}\beta^{-2}-\frac{4}{15}(1-\nu)\rvert b^2$	0
9	$\lvert -\beta^2+\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert a$	0	$\lvert \frac{1}{3}\beta^2+\frac{1}{15}(1-\nu)\rvert a^2$	$-\lvert 2\beta^2+\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert a$	0	$\lvert \frac{2}{3}\beta^2-\frac{1}{15}(1-\nu)\rvert a^2$
10	$-2(2\beta^2-\beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14-4\nu)$	$\lvert \beta^{-2}-\frac{1}{5}(1+4\nu)\rvert b$	$\lvert 2\beta^2+\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert a$	$-2(\beta^2+\beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14-4\nu)$	$\lvert \beta^{-2}-\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert b$	$\lvert \beta^2-\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert a$
11	$\lvert \beta^{-2}-\frac{1}{5}(1+4\nu)\rvert b$	$\lvert \frac{2}{3}\beta^{-2}-\frac{4}{15}(1-\nu)\rvert b^2$	0	$\lvert -\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert b$	$\lvert \frac{1}{3}\beta^{-2}+\frac{1}{15}(1-\beta)\rvert b^2$	0
12	$-\lvert 2\beta^2+\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert a$	0	$\lvert \frac{2}{3}\beta^2-\frac{1}{15}(1-\nu)\rvert a^2$	$\lvert -\beta^2+\frac{1}{5}(1-\nu)\rvert a$	0	$\lvert \frac{1}{3}\beta^2+\frac{1}{15}(1-\nu)\rvert a^2$
	1	2	3	4	5	6

TABELA (B.3) - SUBMATRIZ K_{22} (TODOS OS COEFICIENTES DEVEM SER MULTIPLICADOS POR $Et^3/12(1-\nu^2)ab$)

	7	8	9	10	11	12
7	$4(\beta^2+\beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14-4\nu)$					
8	$-\left\|2\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\right\|b$	$\left\|\frac{4}{3}\beta^{-2}+\frac{4}{15}(1-\nu)\right\|b^2$			Simetria	
9	$\left\|2\beta^{2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\right\|a$	$-\nu ab$	$\left\|\frac{4}{3}\beta^{2}+\frac{4}{15}(1-\nu)\right\|a^2$			
10	$2(\beta^2-2\beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14-4\nu)$	$\left\|2\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1-\nu)\right\|b$	$\left\|\beta^{2}-\frac{1}{5}(1+4\nu)\right\|a$	$4(\beta^2+\beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14-4\nu)$		
11	$-\left\|2\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1-\nu)\right\|b$	$\left\|\frac{2}{3}\beta^{-2}-\frac{1}{15}(1-\nu)\right\|b^2$	0	$\left\|2\beta^{-2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\right\|b$	$\left\|\frac{4}{3}\beta^{2}+\frac{4}{15}(1-\nu)\right\|b^2$	
12	$\left\|\beta^{2}-\frac{1}{5}(1+4\nu)\right\|a$	0	$\left\|\frac{2}{3}\beta^{2}-\frac{4}{15}(1-\nu)\right\|a^2$	$\left\|2\beta^{2}+\frac{1}{5}(1+4\nu)\right\|a$	νab	$\left\|\frac{4}{3}\beta^{2}+\frac{4}{15}(1-\nu)\right\|a^2$

C - Matriz de tensões do elemento retangular isotrópico de placa

$$
\begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{xy1} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{xy2} \\ M_{x3} \\ M_{y3} \\ M_{xy3} \\ M_{x4} \\ M_{y4} \\ M_{xy4} \end{Bmatrix}
= \frac{1}{ab}
\begin{bmatrix}
-6D/p - 6pD_1 & -4aD_1 & 4bD & 6pD_1 & -2aD_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6D/p & 0 & 2bD \\
-6D_1/P - 6pD & -4aD & 4bD_1 & 6pD & -2aD & 0 & 0 & 0 & 0 & 6D_1/P & 0 & 2bD_1 \\
2D_{xy} & 2bD_{xy} & -2aD_{xy} & -2D_{xy} & 0 & 2aD_{xy} & 2D_{xy} & 0 & 0 & -2D_{xy} & -2bD_{xy} & 0 \\
6pD_1 & 2aD_1 & 0 & -6D/P - 6pD_1 & 4aD_1 & 4bD & 6D/P & 0 & 2bD & 0 & 0 & 0 \\
6pD & 2aD & 0 & -6D_1/P - 6pD & 4aD & 4bD_1 & 6D_1/P & 0 & 2bD_1 & 0 & 0 & 0 \\
2D_{xy} & 0 & -2aD_{xy} & -2D_{xy} & 2bD_{xy} & 2aD_{xy} & 2D_{xy} & -2bD_{xy} & 0 & -2D_{xy} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6D/P & 0 & -2bD & -6D/P - 6pD_1 & 4aD_1 & -4bD & 6pD_1 & 2aD_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6D_1/P & 0 & -2bD_1 & -6D_1/P - 6pD & 4aD & -4bD_1 & 6pD & 2aD & 0 \\
2D_{xy} & 0 & 0 & -2D_{xy} & 2bD_{xy} & 0 & 2D_{xy} & -2bD_{xy} & 2aD_{xy} & -2D_{xy} & 0 & -2aD_{xy} \\
6D/P & 0 & -2bD & 0 & 0 & 0 & 6pD_1 & -2aD_1 & 0 & -6D/P - 6pD_1 & -4aD_1 & -4bD \\
6D_1/P & 0 & -2bD_1 & 0 & 0 & 0 & 6pD & -2aD & 0 & -6D_1/P - 6pD & -4aD & -4bD_1 \\
2D_{xy} & 2bD_{xy} & 0 & -2D_{xy} & 0 & 0 & 2D_{xy} & 0 & 2aD_{xy} & -2D_{xy} & -2bD_{xy} & -2aD_{xy}
\end{bmatrix}
\{d^e\}
$$

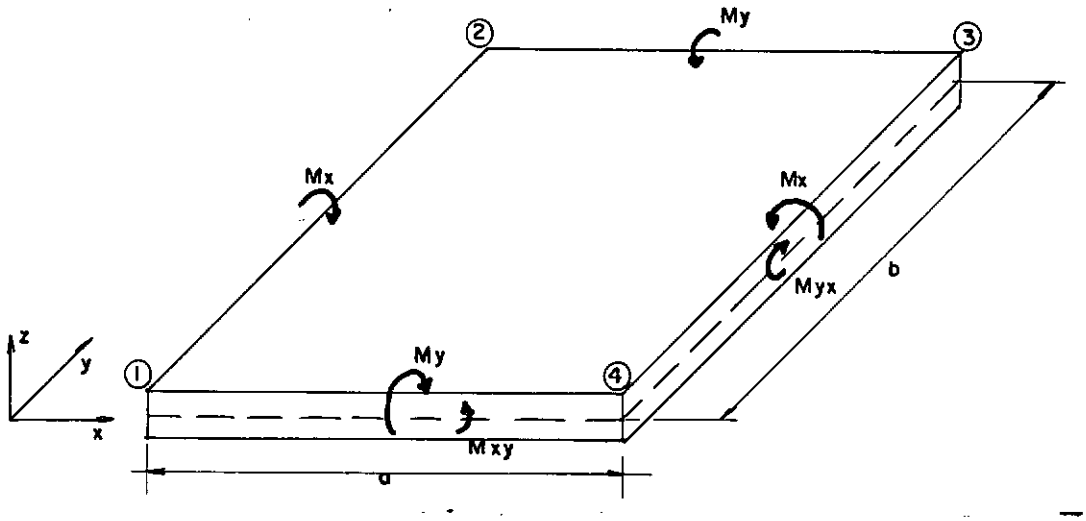
onde:

$$D = Et^3/12(1-\nu^2)$$

$$D_1 = Et^3\nu/12(1-\nu^2)$$

$$D_{xy} = Et^3/24(1+\nu)$$

O sentido dos momentos positivos para o elemento estão representados na figura abaixo:



```
1000 REM ******************************************************
1010 REM * PROGRAMA PARA ANALISE ESTATICA DE PLACAS            *
1020 REM * COMBINACAO DOS METODOS :                            *
1030 REM *     ELEMENTOS FINITOS - MATRIZ DE TRANSFERENCIA     *
1040 REM ******************************************************
1050 REM ------------------------------------------------------
1060 REM   MAGNOLIA CAMPELO - COPPE/UFRJ - TESE MSc - 1986
1070 REM ------------------------------------------------------
1080 REM
1090 REM ******************************************************
1100 REM  PROGRAMA PRINCIPAL
1110 REM ******************************************************
1120 DEFINT I,J,K,L,M,N
1130 DEFDBL A-H,O-Z
1140 POKE 16916,0 : CLS
1150 INPUT "TITULO DO PROBLEMA: ";T1$
1160 INPUT "SISTEMA DE UNIDADE: ";T2$
1170 CLS
1180 PRINT "ANALISE ESTATICA DE PLACAS PELA COMBINACAO DOS METODOS"
1190 PRINT "ELEMENTOS FINITOS - MATRIZ DE TRANSFERENCIA"
1200 PRINT "TITULO:";T1$;"   UNIDADES:";T2$
1210 PRINT "------------------------------------------------------------------------"
1220 POKE 16916,4
1230 REM ** ENTRADA DAS INFORMACOES GERAIS **
1240 PRINT "INFORMACOES GERAIS"
1250 PRINT
1260 INPUT "Comprimento da Placa, A ....................= ";A
1270 INPUT "Largura da Placa, B ........................= ";B
1280 INPUT "Numero de Faixas, NF........................= ";NF
1290 INPUT "Numero de Elementos por Faixa, NEF .........= ";NEF
1300 INPUT "Numero de Tipos de Elementos ...............= ";NTE
1310 INPUT "Numero de Cargas Concentradas ..............= ";NCC
1320 INPUT "Numero de Elementos com Carga no Bordo ....= ";N1CB
1330 INPUT "Numero de Vinculacoes Intermediarias ......= ";NVI
1340 INPUT "Numero de Faixas Semelhantes................= ";N2FS
1350 NUDF=(NEF-1)*6
1360 N3UDTF=((NEF*2)+2)*3
1370 DX=A/NF
1380 DY=B/NEF
1390 REM ** DIMENSIONAMENTO DE VETORES E MATRIZES **
```

```
1400 DIM SG(12,12),SF(NUDF+1,NUDF+1),JK(12),FF(NUDF+1),F(12)
1410 DIM ELM(NTE,4),IA(NEF*NF)
1420 IF N2FS=0 THEN GOTO 1440
1430 DIM IB(NF)
1440 IF NCC=0 THEN GOTO 1460
1450 DIM IC(NCC),ID(NCC),C(NCC)
1460 IF NVI=0 THEN GOTO 1480
1470 DIM R(NVI),IE(NVI),IG(NVI)
1480 DIM G(N3UDTF/2),H(N3UDTF/2),FV(NUDF+1)
1490 REM ** CONTROLE DE ROTINAS **
1500 POKE 16916,4 : CLS
1510 PRINT "ROTINAS:"
1520 PRINT
1530 PRINT "          (1) DADOS"
1540 PRINT "          (2) CALCULO DOS VETORES DE ESTADO EXTREMOS"
1550 PRINT "          (3) CALCULO DOS DESLOCAMENTOS E TENSOES"
1560 PRINT
1570 INPUT "OPCAO: ";I
1580 ON I GOSUB 1600 ,3480 ,7220
1590 GOTO 1500
1600 REM ******************************************************
1610 REM  MODULO I: DADOS DA ESTRUTURA
1620 REM ******************************************************
1630 POKE 16916,4 : CLS
1640 PRINT " ## ROTINA : DADOS"
1650 POKE 16916,5 : CLS
1660 PRINT
1670 PRINT "      #(1) TIPOS DE ELEMENTOS"
1680 PRINT "      #(2) SEMELHANCA DE FAIXA"
1690 PRINT "      #(3) CARGAS CONCENTRADAS"
1700 PRINT "      #(4) VINCULACOES INTERMEDIARIAS"
1710 PRINT "      #(5) IMPRESSAO"
1720 PRINT "      #(6) RETORNO AO PROGRAMA PRINCIPAL"
1730 PRINT
1740 INPUT " Escolha a Subrotina: ";I
1750 ON I GOSUB 1780 ,2050 ,2200 ,2330 ,2460
1760 IF I=6 THEN RETURN
1770 GOTO 1650
1780 REM ------------------------------------------------------
1790 REM  ENTRADA DOS TIPOS DE ELMENTOS
1800 REM ------------------------------------------------------
1810 POKE 16916,5 : CLS
1820 PRINT " CARACTERISTICAS DOS ELEMENTOS"
1830 POKE 16916,6 : CLS
1840 PRINT
1850 INPUT " Numero do Tipo do Elemento.............= ";I
1860 IF I=0 THEN RETURN
1870 PRINT " Tipo ";I
1880 INPUT " Modulo de Elasticidade, E .............= ";ELM(I,1)
1890 INPUT " Coeficiente de Poisson, v .............= ";ELM(I,2)
```

```
1900 INPUT " Espessura, t ............................= ";ELM(I,3)
1910 INPUT " Peso Especifico, p ......................= ";ELM(I,4)
1920 INPUT " Carga Distribuida Total, q ..............= ";AUX
1930 ELM(I,4)=ELM(I,4)+AUX/ELM(I,3)
1940 IF (ELM(I,4)<(1.E-20)) THEN ELM(I,4)=0.
1950 INPUT " Intervalo de Elementos deste Tipo .....= ";IAUX,JAUX
1960 IF IAUX=0 AND JAUX=0 THEN GOTO 2010
1970 FOR K=IAUX TO JAUX
1980 IA(K)=I
1990 NEXT K
2000 GOTO 1830
2010 INPUT " Numero do Elemento ......................= ";IAUX
2020 IF IAUX=0 THEN GOTO 1830
2030 IA(IAUX)=I
2040 GOTO 2010
2050 REM ------------------------------------------------------------
2060 REM  SEMELHANCA DE FAIXAS
2070 REM ------------------------------------------------------------
2080 POKE 16916,5 : CLS
2090 PRINT " SEMELHANCA DE FAIXAS"
2100 POKE 16916,6 : CLS
2110 FOR I=1 TO NF
2120 IB(I)=0
2130 NEXT I
2140 FOR I=1 TO N2FS
2150 PRINT " Numero da Faixa Semelhante ";I;".......= ";
2160 INPUT K
2170 IB(K)=1
2180 NEXT I
2190 RETURN
2200 REM ------------------------------------------------------------
2210 REM  CARGAS CONCENTRADAS
2220 REM ------------------------------------------------------------
2230 POKE 16916,5 : CLS
2240 PRINT " CARGAS CONCENTRADAS"
2250 POKE 16916,6 : CLS
2260 FOR I=1 TO NCC
2270 INPUT " Valor da Carga.......................= ";C(I)
2280 INPUT " Numero da Faixa......................= ";IC(I)
2290 INPUT " Numero do No.........................= ";ID(I)
2300 CLS
2310 NEXT I
2320 RETURN
2330 REM ------------------------------------------------------------
2340 REM  VINCULACOES INTERMEDIARIAS
2350 REM ------------------------------------------------------------
2360 POKE 16916,5 : CLS
2370 PRINT " VINCULACOES INTERMEDIARIAS"
2380 POKE 16916,6 : CLS
2390 FOR I=1 TO NVI
```

```
2400 INPUT " Rigidez da Mola, K ......................= ";R(I)
2410 INPUT " Numero da Faixa ..........................= ";IE(I)
2420 INPUT " Numero do No .............................= ";IG(I)
2430 CLS
2440 NEXT I
2450 RETURN
2460 REM ------------------------------------------------------------
2470 REM  IMPRESSAO DE DADOS
2480 REM ------------------------------------------------------------
2490 LPRINT "*****************************************************************"
2500 LPRINT "*                                                               *"
2510 LPRINT "* ANALISE ESTATICA DE PLACAS PELA COMBINACAO DOS METODOS        *"
2520 LPRINT "* ELEMENTOS FINITOS - MATRIZ DE TRANSFERENCIA                   *"
2530 LPRINT "*                                                               *"
2540 LPRINT "* Tese M.Sc. - COPPE/UFRJ - Magnolia Campelo - 1986             *"
2550 LPRINT "*                                                               *"
2560 LPRINT "*****************************************************************"
2570 LPRINT
2580 LPRINT "TITULO............: ";T1$
2590 LPRINT "UNIDADES..........: ";T2$
2600 LPRINT "DATA..............: ";TIME$
2610 LPRINT
2620 LPRINT "-----------------------------------------------------------------"
2630 LPRINT
2640 LPRINT "INFORMACOES GERAIS"
2650 LPRINT
2660 LPRINT "Comprimento da Placa........................ ";A
2670 LPRINT "Largura da Placa............................ ";B
2680 LPRINT "Numero de Faixas............................ ";NF
2690 LPRINT "Numero de Elementos por Faixa............... ";NEF
2700 LPRINT "Numero de Tipos de Elementos................ ";NTE
2710 LPRINT "Numero de Cargas Concentradas............... ";NCC
2720 LPRINT "Numero de Cargas em Bordo de Elemento...... ";N1CB
2730 LPRINT "Numero de Vinculacoes Intermediarias....... ";NVI
2740 LPRINT "Numero de Faixas Semelhantes................ ";N2FS
2750 LPRINT
2760 LPRINT "-----------------------------------------------------------------"
2770 LPRINT
2780 LPRINT "TIPOS DE ELEMENTOS"
2790 LPRINT
2800     F$="   #       ##.###EEEE       ##.##       ##.##EEEE       ##.###EEEE"
2810 LPRINT "TIPO           E                 v                 t                 Q"
2820 LPRINT
2830 FOR I=1 TO NTE
2840 LPRINT USING F$;I,ELM(I,1),ELM(I,2),ELM(I,3),ELM(I,4)
2850 NEXT I
2860 LPRINT
2870 IF NTE>1 THEN GOTO 2910
2880 LPRINT "TODOS OS ELEMENTOS SAO DO TIPO 1"
2890 LPRINT
```

```
2900 GOTO 3050
2910 FOR I=1 TO NTE
2920 LPRINT "ELEMENTOS DO TIPO: ";I
2930 LPRINT
2940 IAUX=0
2950 FOR J=1 TO NF*NEF
2960 IF IA(J)<>I THEN GOTO 3020
2970 IAUX=IAUX+1
2980 IF IAUX<14 THEN GOTO 3010
2990 IAUX=1
3000 LPRINT : LPRINT
3010 LPRINT J;
3020 NEXT J
3030 LPRINT : LPRINT
3040 NEXT I
3050 LPRINT "-----------------------------------------------------------------------"
3060 IF N2FS=0 THEN GOTO 3230
3070 LPRINT
3080 LPRINT "SEMELHANCA DE FAIXAS"
3090 LPRINT
3100 LPRINT "FAIXAS:"
3110 LPRINT
3120 IAUX=0
3130 FOR I=1 TO NF
3140 IF IB(I)=0 THEN GOTO 3200
3150 IAUX=IAUX+1
3160 IF IAUX<14 THEN GOTO 3190
3170 IAUX=0
3180 LPRINT : LPRINT
3190 LPRINT I;
3200 NEXT I
3210 LPRINT : LPRINT
3220 LPRINT "-----------------------------------------------------------------------"
3230 IF NCC=0 THEN GOTO 3350
3240 LPRINT
3250 LPRINT "CARGAS CONCENTRADAS"
3260 LPRINT
3270     F$="  ##           ##           ##.####^^^^"
3280 LPRINT "FAIXA          NO                CARGA"
3290 LPRINT
3300 FOR I=1 TO NCC
3310 LPRINT USING F$;IC(I),ID(I),C(I)
3320 NEXT I
3330 LPRINT
3340 LPRINT "-----------------------------------------------------------------------"
3350 IF NVI=0 THEN GOTO 3470
3360 LPRINT
3370 LPRINT "VINCULACOES INTERMEDIARIAS"
3380 LPRINT
3390     F$="  ##           ##           ##.####^^^^"
```

```
3400 LPRINT "FAIXA          NO            RIGIDEZ(K)"
3410 LPRINT
3420 FOR I=1 TO NVI
3430 LPRINT USING F$;IE(I),IG(I),R(I)
3440 NEXT I
3450 LPRINT
3460 LPRINT "-----------------------------------------------------------------------------------------"
3470 RETURN
3480 REM ******************************************************
3490 REM MODULO II: CALCULO DOS VETORES DE ESTADO EXTREMOS
3500 REM ******************************************************
3510 POKE 16916,4 : CLS
3520 PRINT "PRIMEIRA PASSAGEM: CALCULO DOS VETORES EXTREMOS"
3530 POKE 16916,5
3540 OPEN "O",2,"ARQ2:1"
3550 PRINT
3560 PRINT "FAIXA :";
3570 FOR L=1 TO NF
3580 PRINT L;
3590 IF IB(L)=1 THEN GOTO 3620
3600 GOSUB 3670
3610 IF NVI<>0 THEN GOSUB 6020
3620 GOSUB 6160
3630 NEXT L
3640 CLOSE
3650 GOSUB 6580
3660 RETURN
3670 REM ---------------------------------------------------------
3680 REM MONTAGEM DA MATRIZ DE TRANSFERENCIA DA FAIXA(TRANSF.)
3690 REM ---------------------------------------------------------
3700 REM ** MONTAGEM MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA FAIXA **
3710 FOR I=1 TO NUDF+1
3720 FF(I)=0
3730 FOR J=1 TO NUDF+1
3740 SF(I,J)=0
3750 NEXT J,I
3760 FOR I=1 TO NEF
3770 GOSUB 4080
3780 IAUX=0
3790 FOR J=1 TO 2
3800 FOR K=1 TO 3
3810 IAUX=IAUX+1
3820 M=3*(I+J-3)+K
3830 JK(IAUX)=0
3840 IF M<1 OR M>3*(NEF-1) THEN GOTO 3860
3850 JK(IAUX)=M
3860 NEXT K,J
3870 FOR J=2 TO 1 STEP -1
3880 FOR K=1 TO 3
3890 IAUX=IAUX+1
```

```
3900 M=(NEF+I+J-4)*3+K
3910 JK(IAUX)=0
3920 IF M<3*NEF-2 OR M>(6*(NEF-1)) THEN GOTO 3940
3930 JK(IAUX)=M
3940 NEXT K,J
3950 FOR J=1 TO 12
3960 IF JK(J)=0 THEN GOTO 4020
3970 FOR K=1 TO 12
3980 IF JK(K)=0 THEN GOTO 4000
3990 SF(JK(J),JK(K))=SF(JK(J),JK(K))+SG(J,K)
4000 NEXT K
4010 FF(JK(J))=FF(JK(J))+F(J)
4020 NEXT J
4030 NEXT I
4040 GOSUB 5140
4050 IF NCC<>0 THEN GOSUB 5790
4060 GOSUB 5860
4070 RETURN
4080 REM ** MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE PLACA **
4090 IAUX=IA((L-1)*NEF+I)
4100 IF L=1 AND I=1 THEN GOTO 4120
4110 IF IAUX=IA((L-1)*NEF+I-1) THEN GOTO 5130
4120 RIG=(ELM(IAUX,1)*ELM(IAUX,3)[3)/(12*(1-ELM(IAUX,2)[2)*DX*DY)
4130 V1=(DY/DX)[2
4140 V2=1/((DY/DX)[2)
4150 V3=14-4*ELM(IAUX,2)
4160 V4=1+4*ELM(IAUX,2)
4170 V5=1-ELM(IAUX,2)
4180 SG(1,1)=(4*(V1+V2)+(1/5)*V3)*RIG
4190 SG(2,1)=(2*V2+(1/5)*V4)*DY*RIG
4200 SG(2,2)=(((4/3)*V2+(4/15)*V5)*DY[2)*RIG
4210 SG(3,1)=-(2*V1+(1/5)*V4)*DX*RIG
4220 SG(3,2)=-ELM(IAUX,2)*DX*DY*RIG
4230 SG(3,3)=(((4/3)*V1+(4/15)*V5)*DX[2)*RIG
4240 SG(4,1)=(2*(V1-2*V2)-(1/5)*V3)*RIG
4250 SG(4,2)=-(2*V2+(1/5)*V5)*DY*RIG
4260 SG(4,3)=(-V1+(1/5)*V4)*DX*RIG
4270 SG(4,4)=(4*(V1+V2)+(1/5)*V3)*RIG
4280 SG(5,1)=(2*V2+(1/5)*V5)*DY*RIG
4290 SG(5,2)=(((2/3)*V2-(1/15)*V5)*DY[2)*RIG
4300 SG(5,3)=0
4310 SG(5,4)=-(2*V2+(1/5)*V4)*DY*RIG
4320 SG(5,5)=((4/3)*V2+(4/15)*V5)*(DY[2)*RIG
4330 SG(6,1)=(-V1+(1/5)*V4)*DX*RIG
4340 SG(6,2)=0
4350 SG(6,3)=((2/3)*V1-(4/15)*V5)*(DX[2)*RIG
4360 SG(6,4)=-(2*V1+(1/5)*V4)*DX*RIG
4370 SG(6,5)=ELM(IAUX,2)*DX*DY*RIG
4380 SG(6,6)=((4/3)*V1+(4/15)*V5)*(DX[2)*RIG
4390 SG(7,1)=(-2*(V1+V2)+(1/5)*V3)*RIG
```

```
4400 SG(7,2)=(-V2+(1/5)*V5)*DY*RIG
4410 SG(7,3)=(V1-(1/5)*V5)*DX*RIG
4420 SG(7,4)=(-2*(2*V1-V2)-(1/5)*V3)*RIG
4430 SG(7,5)=(-V2+(1/5)*V4)*DY*RIG
4440 SG(7,6)=(2*V1+(1/5)*V5)*DX*RIG
4450 SG(7,7)=(4*(V1+V2)+(1/5)*V3)*RIG
4460 SG(8,1)=(V2-(1/5)*V5)*DY*RIG
4470 SG(8,2)=((1/3)*V2+(1/15)*V5)*(DY[2)*RIG
4480 SG(8,3)=0
4490 SG(8,4)=(-V2+(1/5)*V4)*DY*RIG
4500 SG(8,5)=((2/3)*V2-(4/15)*V5)*(DY[2)*RIG
4510 SG(8,6)=0
4520 SG(8,7)=-(2*V2+(1/5)*V4)*DY*RIG
4530 SG(8,8)=((4/3)*V2+(4/15)*V5)*(DY[2)*RIG
4540 SG(9,1)=(-V1+(1/5)*V5)*DX*RIG
4550 SG(9,2)=0
4560 SG(9,3)=((1/3)*V1+(1/15)*V5)*(DX[2)*RIG
4570 SG(9,4)=-(2*V1+(1/5)*V5)*DX*RIG
4580 SG(9,5)=0
4590 SG(9,6)=((2/3)*V1-(1/15)*V5)*(DX[2)*RIG
4600 SG(9,7)=(2*V1+(1/5)*V4)*DX*RIG
4610 SG(9,8)=-ELM(IAUX,2)*DX*DY*RIG
4620 SG(9,9)=((4/3)*V1+(4/15)*V5)*(DX[2)*RIG
4630 SG(10,1)=(-2*(2*V1-V2)-(1/5)*V3)*RIG
4640 SG(10,2)=(V2-(1/5)*V4)*DY*RIG
4650 SG(10,3)=(2*V1+(1/5)*V5)*DX*RIG
4660 SG(10,4)=(-2*(V1+V2)+(1/5)*V3)*RIG
4670 SG(10,5)=(V2-(1/5)*V5)*DY*RIG
4680 SG(10,6)=(V1-(1/5)*V5)*DX*RIG
4690 SG(10,7)=(2*(V1-2*V2)-(1/5)*V3)*RIG
4700 SG(10,8)=(2*V2+(1/5)*V5)*DY*RIG
4710 SG(10,9)=(V1-(1/5)*V4)*DX*RIG
4720 SG(10,10)=(4*(V1+V2)+(1/5)*V3)*RIG
4730 SG(11,1)=(V2-(1/5)*V4)*DY*RIG
4740 SG(11,2)=((2/3)*V2-(4/15)*V5)*(DY[2)*RIG
4750 SG(11,3)=0
4760 SG(11,4)=(-V2+(1/5)*V5)*DY*RIG
4770 SG(11,5)=((1/3)*V2+(1/15)*V5)*(DY[2)*RIG
4780 SG(11,6)=0
4790 SG(11,7)=-(2*V2+(1/5)*V5)*DY*RIG
4800 SG(11,8)=((2/3)*V2-(1/15)*V5)*(DY[2)*RIG
4810 SG(11,9)=0
4820 SG(11,10)=(2*V2+(1/5)*V4)*DY*RIG
4830 SG(11,11)=((4/3)*V2+(4/15)*V5)*(DY[2)*RIG
4840 SG(12,1)=-(2*V1+(1/5)*V5)*DX*RIG
4850 SG(12,2)=0
4860 SG(12,3)=((2/3)*V1-(1/15)*V5)*(DX[2)*RIG
4870 SG(12,4)=(-V1+(1/5)*V5)*DX*RIG
4880 SG(12,5)=0
4890 SG(12,6)=((1/3)*V1+(1/15)*V5)*(DX[2)*RIG
```

```
4900 SG(12,7)=(V1-(1/5)*V4)*DX*RIG
4910 SG(12,8)=0
4920 SG(12,9)=((2/3)*V1-(4/15)*V5)*(DX[2)*RIG
4930 SG(12,10)=(2*V1+(1/5)*V4)*DX*RIG
4940 SG(12,11)=ELM(IAUX,2)*DX*DY*RIG
4950 SG(12,12)=((4/3)*V1+(4/15)*V5)*(DX[2)*RIG
4960 FOR J=1 TO 11
4970 FOR K=J+1 TO 12
4980 SG(J,K)=SG(K,J)
4990 NEXT K,J
5000 REM ** MONTAGEM DO VETOR DE CARGA NODAL EQUIVALENTE **
5010 F(1)=-(ELM(IAUX,4)*DX*DY*ELM(IAUX,3))/4
5020 F(2)=-(ELM(IAUX,4)*DX*(DY[2)*ELM(IAUX,3))/24
5030 F(3)=(ELM(IAUX,4)*(DX[2)*DY*ELM(IAUX,3))/24
5040 F(4)=F(1)
5050 F(5)=-F(2)
5060 F(6)=F(3)
5070 F(7)=F(1)
5080 F(8)=-F(2)
5090 F(9)=-F(3)
5100 F(10)=F(1)
5110 F(11)=F(2)
5120 F(12)=-F(3)
5130 RETURN
5140 REM ** CALCULO DA MATRIZ DE TRANSFERENCIA **
5150 K1=NUDF/2+1
5160 JAUX=NUDF/2-1
5170 SF(1,K1)=1.0/SF(1,K1)
5180 FOR M=1 TO JAUX
5190 FOR I=1 TO M
5200 G(I)=0
5210 FOR J=1 TO M
5220 G(I)=G(I)+SF(I,K1+J-1)*SF(J,K1+M)
5230 NEXT J,I
5240 V1=0
5250 FOR I=1 TO M
5260 V1=V1+SF(M+1,K1+I-1)*G(I)
5270 NEXT I
5280 V2=SF(M+1,M+K1)-V1
5290 SF(1+M,K1+M)=1.0/V2
5300 FOR I=1 TO M
5310 SF(I,M+K1)=-G(I)*SF(1+M,K1+M)
5320 NEXT I
5330 FOR J=1 TO M
5340 H(J)=0
5350 FOR I=1 TO M
5360 H(J)=H(J)+SF(1+M,K1+I-1)*SF(I,K1+J-1)
5370 NEXT I,J
5380 FOR I=1 TO M
5390 SF(M+1,K1+I-1)=-H(I)*SF(1+M,K1+M)
```

```
5400 NEXT I
5410 FOR I=1 TO M
5420 FOR J=1 TO M
5430 SF(I,K1+J-1)=SF(I,K1+J-1)-G(I)*SF(1+M,K1+J-1)
5440 NEXT J,I
5450 NEXT M
5460 REM  MULTIPLICACAO DE MATRIZES / T(11),T(21),T(22)
5470 IAUX=1
5480 K2=K1
5490 K3=1
5500 K4=K1
5510 GOSUB 5640
5520 IAUX=3
5530 K4=K3
5540 K5=K1
5550 K6=K3
5560 GOSUB 5640
5570 IAUX=2
5580 K1=1
5590 K2=NUDF/2+1
5600 K3=K1
5610 K4=K1
5620 GOSUB 5640
5630 RETURN
5640 FOR I=1 TO NUDF/2
5650 FOR J=1 TO NUDF/2
5660 G(J)=0
5670 FOR K=1 TO NUDF/2
5680 IF IAUX=1 OR IAUX=3 THEN G(J)=G(J)+SF(I+K1-1,K2+K-1)*SF(K3+K-1,K4+J-1)
5690 IF IAUX=2 THEN G(J)=G(J)+SF(J+K1-1,K2+K-1)*SF(K3+K-1,K4+I-1)
5700 NEXT K
5710 NEXT J
5720 FOR J=1 TO NUDF/2
5730 IF IAUX=1 THEN SF(I+K1-1,K2+J-1)=-G(J)
5740 IF IAUX=2 THEN SF(K3+J-1,K4+I-1)=-G(J)
5750 IF IAUX=3 THEN SF(I+K5-1,K6+J-1)=-SF(I+K5-1,K6+J-1)-G(J)
5760 NEXT J
5770 NEXT I
5780 RETURN
5790 REM ** ITRODUCAO DAS CARGAS CONCENTRADAS **
5800 FOR I=1 TO NCC
5810 IF IC(I)<>L THEN GOTO 5840
5820 IAUX=NUDF/2+(ID(I)-2)*3+1
5830 FF(IAUX)=FF(IAUX)-C(I)
5840 NEXT I
5850 RETURN
5860 REM ** INTROD. DO VETOR DE CARGA NA MATRIZ DE TRANSF. **
5870 FOR I=1 TO NUDF
5880 SF(NUDF+1,I)=0
5890 SF(I,NUDF+1)=0
```

```
5900 NEXT I
5910 SF(NUDF+1,NUDF+1)=1
5920 FOR I=1 TO NUDF/2
5930 IF L=1 THEN GOTO 5990
5940 FOR J=1 TO NUDF/2
5950 SF(I,NUDF+1)=SF(I,NUDF+1)+SF(I,J+NUDF/2)*FF(J)
5960 SF(I+NUDF/2,NUDF+1)=SF(I+NUDF/2,NUDF+1)+SF(I+NUDF/2,J+NUDF/2)*FF(J)
5970 NEXT J
5980 IF L=NF THEN GOTO 6000
5990 SF(I+NUDF/2,NUDF+1)=SF(I+NUDF/2,NUDF+1)+FF(I+NUDF/2)
6000 NEXT I
6010 RETURN
6020 REM ------------------------------------------------------------
6030 REM  INTROD. DAS VINCULACOES INTERMEDIARIAS
6040 REM ------------------------------------------------------------
6050 FOR I=1 TO NVI
6060 IF IE(I)<>L THEN GOTO 6140
6070 IAUX=IG(I)
6080 AUX=-R(I)
6090 J=(IAUX-2)*3+1
6100 K=(NEF-1)*3+J
6110 FOR M=1 TO NUDF+1
6120 SF(K,M)=SF(K,M)+AUX*SF(J,M)
6130 NEXT M
6140 NEXT I
6150 RETURN
6160 REM ------------------------------------------------------------
6170 REM GRAVA E MULTIPLICA AS MATRIZES DE TRANSF. (GRAVA)
6180 REM ------------------------------------------------------------
6190 REM ............................................................
6200 IF IB(L)=1 THEN GOTO 6330
6210 FOR I=1 TO NUDF+1
6220 FOR J=1 TO NUDF+1
6230 PRINT #2,SF(J,I)
6240 NEXT J,I
6250 IF L<>1 THEN GOTO 6330
6260 OPEN "O",1,"ARQ1:1"
6270 FOR I=1 TO NUDF+1
6280 FOR J=1 TO NUDF+1
6290 PRINT #1,SF(J,I)
6300 NEXT J,I
6310 CLOSE 1
6320 GOTO 6560
6330 OPEN "I",1,"ARQ1:1"
6340 OPEN "O",3,"ARQ3:1"
6350 FOR I=1 TO NUDF+1
6360 FOR J=1 TO NUDF+1
6370 INPUT #1,FF(J)
6380 NEXT J
6390 FOR K=1 TO NUDF+1
```

```
6400 AUX=0
6410 FOR M=1 TO NUDF+1
6420 AUX=AUX+SF(K,M)*FF(M)
6430 NEXT M
6440 PRINT #3,AUX
6450 NEXT K
6460 NEXT I
6470 CLOSE 1,3
6480 OPEN "I",3,"ARQ3:1"
6490 OPEN "O",1,"ARQ1:1"
6500 FOR I=1 TO NUDF+1
6510 FOR J=1 TO NUDF+1
6520 INPUT #3,AUX
6530 PRINT #1,AUX
6540 NEXT J,I
6550 CLOSE 1,3
6560 RETURN
6570 REM ------------------------------------------------------------
6580 REM MONTAGEM E SOLUCAO DO SISTEMA (RESIS)
6590 REM ------------------------------------------------------------
6600 OPEN "I",1,"ARQ1:1"
6610 FOR I=1 TO NUDF+1
6620 FOR J=1 TO NUDF+1
6630 INPUT #1,SF(J,I)
6640 NEXT J,I
6650 CLOSE 1
6660 FOR I=1 TO NUDF/2
6670 FF(I)=-SF(I,NUDF+1)
6680 NEXT I
6690 REM ORDENACAO
6700 FOR I=1 TO NUDF/2
6710 FOR J=1 TO NUDF/2
6720 SF(I,J)=SF(I,J+NUDF/2)
6730 NEXT J,I
6740 REM SOLUCAO DO SISTEMA POR GAUSS
6750 IAUX=NUDF/2
6760 VMIN=1E-20
6770 REM FASE DE TRIANGULARIZACAO
6780 FOR L=1 TO IAUX-1
6790 PIVO=SF(L,L)
6800 REM TESTE DO ELEMENTO PIVO
6810 IF (ABS(PIVO)>VMIN) THEN GOTO 7010
6820 REM PESQUISA DO MAIOR ELEMENTO NA COLUNA L
6830 FOR I=L+1 TO IAUX
6840 IF (ABS(SF(I,L)))<=ABS(PIVO) THEN GOTO 6870
6850 PIVO=SF(I,L)
6860 LL=I
6870 NEXT I
6880 REM TESTE DE SINGULARIDADE DO SISTEMA
6890 IF (ABS(PIVO)>VMIN) THEN GOTO 6930
```

```
6900 PRINT "SISTEMA SINGULAR"
6910 STOP
6920 REM TROCA DAS POSICOES DAS LINHAS
6930 FOR I=L TO IAUX
6940 AUX=SF(L,I)
6950 SF(L,I)=SF(LL,I)
6960 SF(LL,I)=AUX
6970 NEXT I
6980 AUX=FF(L)
6990 FF(L)=FF(LL)
7000 FF(LL)=AUX
7010 FOR I=L+1 TO IAUX
7020 AUX=SF(I,L)/PIVO
7030 FOR J=L+1 TO IAUX
7040 SF(I,J)=SF(I,J)-AUX*SF(L,J)
7050 NEXT J
7060 REM FASE DE SUBSTITUICAO
7070 FF(I)=FF(I)-AUX*FF(L)
7080 NEXT I
7090 NEXT L
7100 IF (ABS(SF(IAUX,IAUX))<=VMIN) THEN GOTO 6900
7110 REM FASE DE RETROSUBSTITUICAO
7120 FF(IAUX)=FF(IAUX)/SF(IAUX,IAUX)
7130 FOR J=1 TO IAUX-1
7140 I=IAUX-J
7150 AUX=FF(I)
7160 FOR K=I+1 TO IAUX
7170 AUX=AUX-SF(I,K)*FF(K)
7180 NEXT K
7190 FF(I)=AUX/SF(I,I)
7200 NEXT J
7210 RETURN
7220 REM ***********************************************************
7230 REM MODULO III: CALCULO DOS VETORES DE ESTADO DAS SECOES
7240 REM INTERMEDIARIAS E DAS TENSOES
7250 REM ***********************************************************
7260 POKE 16916,4 : CLS
7270 PRINT "SEGUNDA PASSAGEM : DESLOCAMENTOS E TENSOES"
7280 POKE 16916,0
7290 FOR I=1 TO N3UDTF/2
7300 G(I)=0 : H(I)=0
7310 NEXT I
7320 OPEN "I",2,"ARQ2:1"
7330 FOR I=1 TO NUDF/2
7340 FF(I+NUDF/2)=FF(I)
7350 FF(I)=0
7360 NEXT
7370 FF(NUDF+1)=1
7380 PRINT
7390 PRINT "FAIXA :";
```

```
7400 FOR L=1 TO NF
7410 PRINT L,
7420 GOSUB 7630
7430 FOR M=1 TO NEF
7440 GOSUB 7790
7450 GOSUB 8860
7460 GOSUB 9190
7470 GOSUB 9330
7480 NEXT M
7490 GOSUB 9470
7500 GOSUB 9690
7510 FOR I=1 TO N3UDTF/2
7520 G(I)=H(I)
7530 H(I)=0
7540 NEXT I
7550 FOR I=1 TO NUDF+1
7560 FF(I)=FV(I)
7570 NEXT I
7580 NEXT L
7590 L=NF+1
7600 GOSUB 9690
7610 RETURN
7620 REM ----------------------------------------------------------
7630 REM VETOR DE ESTADO DA FRONTEIRA A DIREITA
7640 REM ----------------------------------------------------------
7650 IF IB(L)=1 THEN GOTO 7700
7660 FOR I=1 TO NUDF+1
7670 FOR J=1 TO NUDF+1
7680 INPUT #2,SF(J,I)
7690 NEXT J,I
7700 FOR I=1 TO NUDF+1
7710 G=0
7720 FOR J=1 TO NUDF+1
7730 G=G+SF(I,J)*FF(J)
7740 NEXT J
7750 FV(I)=G
7760 NEXT I
7770 RETURN
7780 REM ----------------------------------------------------------
7790 REM MONTAGEM DA MATRIZ PARA CALCULO DE TENSOES
7800 REM ----------------------------------------------------------
7810 I=(L-1)*NEF+M
7820 FOR K=1 TO 12
7830 FOR J=1 TO 12
7840 SG(J,K)=0
7850 NEXT J,K
7860 IAUX=IA(I)
7870 RIG=ELM(IAUX,1)*(ELM(IAUX,3)[3)/(12*(1-(ELM(IAUX,2)[2)))
7880 V1=DY/DX
7890 V2=DX/DY
```

```
7900 V3=RIG*ELM(IAUX,2)
7910 V4=RIG*(1-ELM(IAUX,2))/2
7920 SG(1,1)=-6*RIG*V1-6*V2*V3
7930 SG(1,2)=-4*DX*V3
7940 SG(1,3)=4*DY*RIG
7950 SG(1,4)=6*V2*V3
7960 SG(1,5)=-2*DX*V3
7970 SG(1,10)=6*V1*RIG
7980 SG(1,12)=2*DY*RIG
7990 SG(2,1)=-6*V1*V3-6*V2*RIG
8000 SG(2,2)=-4*DX*RIG
8010 SG(2,3)=4*DY*V3
8020 SG(2,4)=6*V2*RIG
8030 SG(2,5)=-2*DX*RIG
8040 SG(2,10)=6*V1*V3
8050 SG(2,12)=2*DY*V3
8060 SG(3,1)=2*V4
8070 SG(3,2)=2*DY*V4
8080 SG(3,3)=-2*DX*V4
8090 SG(3,4)=-2*V4
8100 SG(3,6)=2*DX*V4
8110 SG(3,7)=2*V4
8120 SG(3,10)=-2*V4
8130 SG(3,11)=-2*DY*V4
8140 SG(4,1)=SG(1,4)
8150 SG(4,2)=-SG(1,5)
8160 SG(4,4)=SG(1,1)
8170 SG(4,5)=4*DX*V3
8180 SG(4,6)=4*DY*RIG
8190 SG(4,7)=SG(1,10)
8200 SG(4,9)=SG(1,12)
8210 SG(5,1)=6*V2*RIG
8220 SG(5,2)=2*DX*RIG
8230 SG(5,4)=SG(2,1)
8240 SG(5,5)=4*DX*RIG
8250 SG(5,6)=4*DY*V3
8260 SG(5,7)=6*V1*V3
8270 SG(5,9)=2*DY*V3
8280 SG(6,1)=2*V4
8290 SG(6,3)=-2*DX*V4
8300 SG(6,4)=-2*V4
8310 SG(6,5)=2*DY*V4
8320 SG(6,6)=2*DX*V4
8330 SG(6,7)=2*V4
8340 SG(6,8)=-2*DY*V4
8350 SG(6,10)=-2*V4
8360 SG(7,4)=6*V1*RIG
8370 SG(7,6)=-2*DY*RIG
8380 SG(7,7)=SG(1,1)
8390 SG(7,8)=4*DX*V3
```

```
8400 SG(7,9)=-4*DY*RIG
8410 SG(7,10)=6*V2*V3
8420 SG(7,11)=2*DX*V3
8430 SG(8,4)=6*V1*V3
8440 SG(8,6)=-2*DY*V3
8450 SG(8,7)=SG(2,1)
8460 SG(8,8)=4*DX*RIG
8470 SG(8,9)=-4*DY*V3
8480 SG(8,10)=6*V2*RIG
8490 SG(8,11)=2*DX*RIG
8500 SG(9,1)=2*V4
8510 SG(9,4)=-2*V4
8520 SG(9,5)=2*DY*V4
8530 SG(9,7)=2*V4
8540 SG(9,8)=-2*DY*V4
8550 SG(9,9)=2*DX*V4
8560 SG(9,10)=-2*V4
8570 SG(9,12)=-2*DX*V4
8580 SG(10,1)=6*V1*RIG
8590 SG(10,3)=-2*DY*RIG
8600 SG(10,7)=6*V2*V3
8610 SG(10,8)=-2*DX*V3
8620 SG(10,10)=SG(1,1)
8630 SG(10,11)=-4*DX*V3
8640 SG(10,12)=-4*DY*RIG
8650 SG(11,1)=6*V1*V3
8660 SG(11,3)=-2*DY*V3
8670 SG(11,7)=6*V2*RIG
8680 SG(11,8)=-2*DX*RIG
8690 SG(11,10)=SG(2,1)
8700 SG(11,11)=-4*DX*RIG
8710 SG(11,12)=-4*DY*V3
8720 SG(12,1)=2*V4
8730 SG(12,2)=2*DY*V4
8740 SG(12,4)=-2*V4
8750 SG(12,7)=2*V4
8760 SG(12,9)=2*DX*V4
8770 SG(12,10)=-2*V4
8780 SG(12,11)=-2*DY*V4
8790 SG(12,12)=-2*DX*V4
8800 FOR J=1 TO 12
8810 FOR K=1 TO 12
8820 SG(J,K)=SG(J,K)*NEF*NF/(A*B)
8830 NEXT K,J
8840 RETURN
8850 REM ----------------------------------------------------------------
8860 REM MONTAGEM DO VETOR DE DESLOCAMENTO DO ELEMENTO
8870 REM ----------------------------------------------------------------
8880 FOR J=1 TO 12
8890 F(J)=0
```

```
8900 NEXT J
8910 IAUX=3*(M-2)
8920 IF M=1 OR M=NEF THEN GOTO 9030
8930 FOR J=1 TO 6
8940 F(J)=FF(IAUX+J)
8950 NEXT J
8960 FOR J=1 TO 3
8970 F(9+J)=FV(IAUX+J)
8980 NEXT J
8990 FOR J=1 TO 3
9000 F(6+J)=FV(IAUX+3+J)
9010 NEXT J
9020 GOTO 9170
9030 IF M=NEF GOTO 9110
9040 FOR J=1 TO 3
9050 F(J+3)=FF(J)
9060 NEXT J
9070 FOR J=1 TO 3
9080 F(6+J)=FV(J)
9090 NEXT J
9100 GOTO 9170
9110 FOR J=1 TO 3
9120 F(J)=FF(IAUX+J)
9130 NEXT J
9140 FOR J=1 TO 3
9150 F(J+9)=FV(IAUX+J)
9160 NEXT J
9170 RETURN
9180 REM ------------------------------------------------------
9190 REM CALCULO DAS TENSOES
9200 REM ------------------------------------------------------
9210 FOR J=1 TO 12
9220 G=0
9230 FOR K=1 TO 12
9240 G=G+SG(J,K)*F(K)
9250 NEXT K
9260 SG(1,J)=G
9270 NEXT J
9280 FOR J=1 TO 12
9290 F(J)=SG(1,J)
9300 NEXT J
9310 RETURN
9320 REM ------------------------------------------------------
9330 REM ACUMULADOR DE TENSOES
9340 REM ------------------------------------------------------
9350 IAUX=(M-1)*3
9360 FOR J=1 TO 6
9370 G(IAUX+J)=G(IAUX+J)+F(J)
9380 NEXT J
9390 FOR J=1 TO 3
```

```
9400 H(IAUX+J)=H(IAUX+J)+F(9+J)
9410 NEXT J
9420 FOR J=1 TO 3
9430 H(IAUX+3+J)=H(IAUX+3+J)+F(6+J)
9440 NEXT J
9450 RETURN
9460 REM ------------------------------------------------------------
9470 REM MEDIA DAS TENSOES
9480 REM ------------------------------------------------------------
9490 IAUX=2
9500 JAUX=4
9510 IF L<>1 THEN GOTO 9540
9520 IAUX=1
9530 JAUX=2
9540 FOR J=4 TO NEF*3
9550 G(J)=G(J)/JAUX
9560 NEXT J
9570 FOR J=1 TO 3
9580 G(J)=G(J)/IAUX
9590 NEXT J
9600 FOR J=NEF*3+1 TO 3*(NEF+1)
9610 G(J)=G(J)/IAUX
9620 NEXT J
9630 IF L<>NF THEN GOTO 9670
9640 FOR J=4 TO NEF*3
9650 H(J)=H(J)/2
9660 NEXT J
9670 RETURN
9680 REM ------------------------------------------------------------
9690 REM IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS E TENSOES
9700 REM ------------------------------------------------------------
9710     F$="##      ##.#####EEEE      ##.#####EEEE      ##.#####EEEE"
9720 LPRINT
9730 LPRINT "FRONTEIRA : ";L
9740 IF L=1 THEN GOTO 9860
9750 IF L=NF+1 THEN GOTO 9970
9760 LPRINT
9770 LPRINT "DESLOCAMENTOS"
9780 LPRINT
9790 LPRINT "NO          W                RX                RY"
9800 LPRINT
9810 IAUX=1
9820 FOR I=1 TO NUDF/2 STEP 3
9830 IAUX=IAUX+1
9840 LPRINT USING F$;IAUX,FF(I),FF(I+1),FF(I+2)
9850 NEXT I
9860 LPRINT
9870 LPRINT "TENSOES"
9880 LPRINT
9890 LPRINT "NO         MX                MY                MXY"
```

```
9900 LPRINT
9910 IAUX=0
9920 FOR I=1 TO N3UDTF/2 STEP 3
9930 IAUX=IAUX+1
9940 LPRINT USING F$;IAUX,G(I),G(I+1),G(I+2)
9950 NEXT I
9960 GOTO 10070
9970 IAUX=0
9980 LPRINT
9990 LPRINT "TENSOES"
10000 LPRINT
10010 LPRINT "NO          MX                  MY                  MXY"
10020 LPRINT
10030 FOR I=1 TO N3UDTF/2 STEP 3
10040 IAUX=IAUX+1
10050 LPRINT USING F$;IAUX,G(I),G(I+1),G(I+2)
10060 NEXT I
10070 LPRINT
10080 LPRINT "-----------------------------------------------------------------------"
10090 RETURN
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. OHGA, M., SHIGEMATSU, T. e HARA, I., "Structural Analysis by a Combined Finete Element-Transfer Matrix Method". Computers & Structures, vol. 17, pp. 321-326, (1983).

2. DOKAINISH, M.A., "A New Approach for Plate Vibrations : Combination of Transfer Matrix and Finite Element Technique". Trans. ASME, J. Engineering Industry, vol.94, pp. 526-530, (1972).

3. MELLO, E.L., "Análise de Estruturas Reticuladas pelo Método das Matrizes de Transferência". Tese apresentada na COPPE/UFRJ em fevereiro de 1975.

4. PESTEL, E.C. e LECKIE, F.A., "Matrix Methods in Elastomechanics". McGraw-Hill Book Company, New York (1963).

5. LECKIE, F. A., "The Application of Transfer Matrices to Plate Vibrations". Ingenieur-Archiv, vol. 32, pp. 100-111, (1962).

6. ROCKEY, K.C., EVANS, H.R., GRIFFITHS, D.W. e NETHERCOT, D.A., "The Finite Element Method". William Clowes & Sons, Great Britain, (1975).

7. BELLUZZI, O., "Scienza delle Construzioni". Vol. 3, Nicola Zanichelli, Bologne, (1960).

8. TIMOSHENKO, S.P. e WOINOWSKY-KRIEGER, S., "Theory of Plates and Shells". 2ª edição, McGraw-Hill, New York.

9. SORIANO, H.L., "Sistemas de Equações Algébricas Lineares em Problemas Estruturais". Seminário apresentado no LNEC, Lisboa, (1981).

10. PRZEMIENIECKI, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill Book Company, New York, (1968).

11. VASCONCELLOS, A.F., "O Método dos Elementos Finitos: Fundamentos Teóricos - Automatização - Aplicações a Proble - mas de Placas e de Elasticidade Plana". Tese apresentada na COPPE/UFRJ em maio de 1970.

12. WANG, P.C., "Numerical and Matrix Methods in Strucutural Mechanics". John Wiley & Sons, New York, (1965).

13. ZIENKIEWICZ, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science". McGraw-Hill Book Company, (1971).