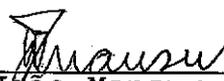


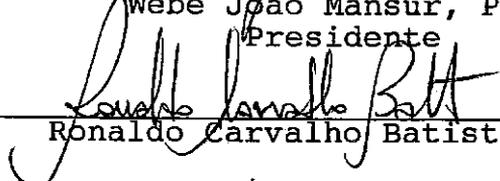
SOLUÇÃO DE SISTEMAS ESTRUTURAIS DINÂMICOS NÃO-LINEARES COM  
AMORTECIMENTOS NÃO-PROPORCIONAL E DEPENDENTE DA FREQUÊNCIA

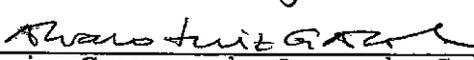
Antonio Maria Claret de Gouvêia

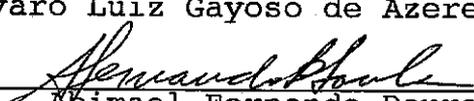
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.) EM ENGENHARIA  
CIVIL.

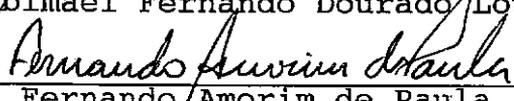
Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Webe João Mansur, Ph.D.  
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Ronaldo Carvalho Batista, Ph.D.

  
\_\_\_\_\_  
Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Abimael Fernando Dourado Loula, D.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Fernando Amorim de Paula, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1991

## AGRADECIMENTOS

*Ao Professor Fernando Venâncio Filho,  
pela orientação desse trabalho, conduzida com competência,  
dedicação e amizade.*

*Aos Professores Webe João Mansur e Ronaldo Carvalho Batista,  
pelo apoio científico e constante incentivo.*

*Aos Amigos.*

*A Tida, Frederico, Clarissa e Isabela,  
pela parcela de sacrifício que lhes coube na realização  
desse trabalho.*

*A meus Pais.*

## RESUMO

Este trabalho descreve um método de superposição modal e pseudoforças para o tratamento de sistemas lineares dotados de amortecimento não-proporcional e, a partir dele, estuda a viabilidade de um método de linearização passo a passo para análise não-linear no domínio da frequência. Descreve, como base do método proposto, uma formulação matricial da resposta dinâmica no domínio da frequência, visando à economia de esforço computacional e de espaço de memória na análise não-linear.

## ABSTRACT

This work proposes a modal superposition pseudo-force method for the treatment of linear dynamic systems with non-proportional damping. Starting with this method, it studies the feasibility of a step-by-step linearization procedure in the frequency domain for nonlinear dynamic analysis of systems with non-proportional or frequency-dependent damping. It also describes, as a basis for the proposed method, a matrix formulation of the dynamic response in frequency domain.

## ÍNDICE

1.	Introdução	3
1.1	Objetivos.	3
1.2	Descrição Sumária.	4
1.3	Revisão Bibliográfica.	6
2.	Modelos de Amortecimento.	14
2.1	Introdução.	14
2.2	Quantificação do Amortecimento.	16
2.3	Equações de Equilíbrio Dinâmico.	23
2.4	Matriz de Amortecimento Viscoso.	28
2.5	Matriz de Amortecimento Dependente da Freqüência.	35
3.	Métodos para Análise de Sistemas Dotados de Amortecimento Não-Proporcional.	45
3.1	Introdução.	45
3.2	Outros Estudos.	46
3.3	Método de Superposição Modal e Pseudoforças.	50
3.3.1	Formulação.	50
3.3.2	Condição de Convergência.	55
3.4	Método dos Coeficientes de Amortecimento Ponderados.	59
3.5	Métodos de Integração Direta.	60
3.6	Análise Modal com Modos Complexos.	62
3.7	Análise Modal Aproximada.	68
4.	Formulação da Resposta Dinâmica de Sistemas de um Grau de Liberdade no Domínio da Freqüência com a Transformada de Fourier Implícita.	70
4.1	Introdução.	70
4.2	Formulação Matricial.	72
4.3	Influência do Número $N$ na Resposta.	81
4.4	Implementação Computacional.	85

5.	Um Método de Linearização Passo a Passo no Domínio da Freqüência para Análise Dinâmica Não-Linear.	101
5.1	Introdução. Outros Estudos.	101
5.2	Formulação do Método SLFD.	104
5.2.1	Sistemas de Um Grau de Liberdade.	104
5.2.2	Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade.	108
5.3	Implementação Computacional.	112
6.	Exemplos Numéricos.	116
6.1	Exemplo 1.	116
6.2	Exemplo 2.	118
6.3	Exemplo 3.	119
6.4	Exemplo 4.	122
6.5	Exemplo 5.	122
6.6	Exemplo 6.	123
6.7	Exemplo 7.	123
6.8	Exemplo 8.	124
6.9	Exemplo 9.	126
6.10	Exemplo 10.	127
7.	Conclusões e Sugestões.	156
7.1	Conclusões.	156
7.2	Sugestões.	158
8.	Referências Bibliográficas.	160
a.	Apêndice: Formulação Matricial da Resposta Dinâmica de Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade no Domínio da Freqüência.	173

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho de pesquisa tem como objetivo propor um método de superposição modal e pseudoforças para o tratamento de sistemas lineares, dotados de amortecimento não-proporcional, e, a partir dele, estudar a viabilidade de um método de linearização passo a passo para análise dinâmica não-linear no domínio da frequência de sistemas dotados de amortecimentos não-proporcional e dependente da frequência. Para atendimento desse objetivo, descreve-se uma formulação matricial da resposta dinâmica no domínio da frequência com as transformadas de Fourier implícitas, visando à economia de esforço computacional e de espaço de memória na análise não-linear.

O desenvolvimento desse procedimento de análise busca fornecer uma alternativa a métodos de integração no domínio do tempo para análises dinâmicas não-lineares. Nesse sentido, dois aspectos foram particularmente estudados nesta proposição, ou seja, a habilidade para o tratamento de sistemas dotados de amortecimentos não-proporcional e dependente da frequência e a redução do custo da análise,

função de variáveis como o tamanho do sistema analisado, a estabilidade do método e a precisão de resultados desejada.

O método proposto, denominado Método de Linearização Passo a Passo no Domínio da Frequência, citado como SLFD (Step-by-Step Linearization in Frequency Domain), consiste em um caminhar no tempo por meio de segmentos nos quais o sistema estrutural é suposto com a rigidez constante do início do segmento. O controle de rigidez é feito passo a passo dentro do segmento, determinando, finalmente, sua dimensão. O amortecimento não-proporcional é tratado por um processo iterativo, dentro do segmento, no domínio do tempo.

O emprego de uma solução no domínio da frequência significa o uso de um algoritmo de integração numérica teoricamente exato. O método de superposição modal é utilizado, permitindo a implementação de técnicas de truncamento modal.

## 1.2 DESCRIÇÃO SUMÁRIA

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo do amortecimento estrutural. Uma síntese dos conceitos básicos envolvidos é feita apenas com a intenção de estabelecer a notação a ser empregada. Atenção maior, entretanto, é dedicada ao amortecimento não-proporcional e ao amortecimento dependente da frequência. No caso particular do amortecimento

dependente da frequência, é proposta uma definição para a matriz de amortecimento.

No Capítulo 3, descreve-se um método para solução de sistemas estruturais lineares, dotados de amortecimento não-proporcional, com o emprego dos modos normais de vibração. Trata-se de um método iterativo, cuja condição de convergência é obtida. Definem-se um coeficiente de acoplamento e um índice de convergência, parâmetros que se propõem para caracterizar o grau da não-proporcionalidade do amortecimento em um sistema.

Uma formulação matricial da resposta dinâmica no domínio da frequência, em sistemas estruturais de um grau de liberdade, é proposta no Capítulo 4. Essa formulação visa a economia de esforço computacional nas análises no domínio da frequência com o emprego de sucessivas transformadas de Fourier. O algoritmo proposto nessa formulação matricial é adequado a análises por meio de segmentos, situação em que, como se demonstra, pode exigir menor esforço computacional que o algoritmo Fast Fourier Transform. Por outro lado, expressiva economia de memória é obtida com a liberação da exigência de um número de termos que seja potência de dois.

No Capítulo 5, expõe-se o método SLFD, tendo em vista a sua aplicação em sistemas de múltiplos graus de liberdade, dotados de amortecimentos não-proporcional e dependente da frequência. A implementação computacional,

levada a efeito para demonstrar a viabilidade do método, é descrita.

O Capítulo 6 apresenta diversos exemplos numéricos dos resultados obtidos com o método proposto. O Capítulo 7 resume as conclusões da pesquisa e apresenta sugestões para novos trabalhos. Em um Apêndice, propõe-se uma generalização da formulação matricial da resposta dinâmica no domínio da frequência, visando a análise de sistemas não-lineares de múltiplos graus de liberdade.

### 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O desenvolvimento de métodos numéricos para análise dinâmica não-linear tem atraído a atenção de pesquisadores em todo o mundo nas últimas quatro décadas. Isso pode ser atribuído, de um lado, à disponibilidade de equipamentos computacionais cada vez mais adequados à abordagem de sistemas mais complexos e, de outro, às necessidades dos engenheiros estruturais de considerarem em suas análises novos materiais e novas formas geométricas, exigindo novas bases na modelação estrutural (Clough e Wilson, 1979). Aspectos de economia e segurança das populações e do meio ambiente têm também exigido em estruturas, como as de usinas nucleares, edifícios altos, plataformas marítimas e de aeronaves, a adoção de modelos estruturais dinâmicos mais realísticos e sofisticados,

levando em conta hipóteses de carregamento, como a interação dinâmica entre estrutura e solo, equipamento e fluido (Noor, 1981).

A análise dinâmica não-linear sempre se fez no domínio do tempo, usando a integração direta das equações de movimento. Entretanto, o custo da análise dinâmica não-linear está diretamente relacionado à grandeza do intervalo de tempo necessário para se garantir a estabilidade e a precisão no processo de integração. Por outro lado, a avaliação de históricos de respostas de sistemas estruturais ditos complexos levou à conclusão que, freqüentemente, a complexidade se devia mais à sua topologia que ao comportamento dos materiais. Coube, então, a pesquisa de métodos de redução de graus de liberdade aplicados à análise não-linear.

O método de superposição modal clássico é empregado em análise dinâmica de sistemas lineares, principalmente pela possibilidade de se representar o comportamento de certos sistemas com a utilização de um número reduzido dos modos de frequências mais baixas. Assim, a sua utilização em sistemas dinâmicos não-lineares dar-se-ia pela mesma razão. Nesse sentido, demonstrou-se que o movimento forçado local pode ser obtido pela superposição de modos de vibração calculados a partir da matriz de rigidez tangente, e que a história de movimentos locais superpostos conduz à resposta do sistema no tempo (Nickell,

1976). Muitos trabalhos (Bathe e Gracewski, 1981; Landau, 1983; Shah et al., 1979; Stricklin e Haisler, 1977; Molnar et al., 1976 e Riead, 1974) abordaram o mesmo tema, particularizando um ou outro aspecto da análise não-linear.

A análise de sistemas complexos no domínio da frequência mostrou-se atrativa, a princípio, por ser esta uma solução teoricamente exata, cuja estabilidade independe da grandeza do intervalo de tempo de integração. Outros aspectos, porém, aconselhariam pesquisas nesse sentido, como a habilidade para o tratamento dos amortecimentos estrutural e dependente da frequência.

Nos últimos anos, poucos métodos foram propostos para análise não-linear no domínio da frequência. Entre os métodos de aplicação geral, Matthees (1982) descreve uma estratégia para a solução de problemas dinâmicos no domínio da frequência a partir do método das tensões iniciais, (Bathe, 1982), envolvendo comportamento plástico do material. Kawamoto (1983) fez o estudo da viabilidade da aplicação de um método híbrido tempo-frequência, em que o sistema original é substituído por um pseudo-sistema linear, as equações de movimento são integradas no domínio da frequência e a não-linearidade é tratada no domínio do tempo, através de pseudoforças. Mais tarde, Darbre e Wolf (1986) descreveram o processo de segmentação do método híbrido, demonstrando também a sua condição de convergência. Venâncio-Filho e Claret (1991) descrevem o método de

linearização passo a passo para análise não-linear dinâmica no domínio da frequência, considerando uma formulação em que as sucessivas transformadas de Fourier são realizadas implicitamente, reduzindo a memória alocada e o esforço computacional.

Aplicações de análise no domínio da frequência para a solução de problemas específicos de interação dinâmica solo-estrutura têm sido propostas. Kobori *et al.* (1984) estudam o levantamento de fundações, considerando as propriedades do solo dependentes da frequência, por um método em que as forças de levantamento são corrigidas no domínio do tempo e as equações de movimento são integradas no domínio da frequência. Hillmer e Schmid (1988) propõem a utilização de transformadas de Laplace na análise no domínio da frequência, visando ao tratamento das condições de contorno e à introdução de distribuições contínuas de massa.

A análise dinâmica linear no domínio da frequência tornou-se de fato uma alternativa para a análise no domínio do tempo após o aparecimento do algoritmo "fast Fourier transform", abreviadamente FFT, devido a Cooley e Tukey (1965). Cooley *et al.* (1970) introduzem inovações no algoritmo original para se calcularem transformadas de Laplace, transformadas em seno e transformadas em cosseno. Hall (1982) propõe uma modificação do algoritmo FFT para uso na dinâmica estrutural, visando otimizar o esforço computacional e o espaço de memória necessários, permutando

a exigência de um número de termos igual a uma potência inteira de 2 pela condição de ser o número de termos uma potência inteira de 2 multiplicada por 2 ou 3.

Venâncio-Filho e Claret (1990) apresentam a formulação matricial da resposta dinâmica de sistemas lineares de um grau de liberdade no domínio da frequência com as transformadas direta e inversa de Fourier implícitas. Essa formulação é aqui descrita pormenorizadamente, demonstrando-se que se pode ter economia considerável de esforço computacional e de memória na análise não-linear. Iniciativa semelhante, porém sem formulação da resposta, encontra-se em Meirovitch (1986).

No aprimoramento dos modelos estruturais que ocorreu nos últimos anos, a partir do aparecimento dos computadores e do método de análise por elementos finitos, a modelação do amortecimento estrutural tem sido relegada a um segundo plano, pela dificuldade que representa em si mesma e para a solução das equações de movimento. Em todas as formulações da análise dinâmica linear citadas que empregam superposição modal, o amortecimento proporcional é admitido no sistema.

O amortecimento dos tipos não-proporcional e dependente da frequência são predominantes em sistemas dinâmicos solo-estrutura, e é em face da necessidade da análise de fundações, enterradas ou apoiadas em solos pouco

rígidos, principalmente a partir dos anos setentas, (Veletsos e Wei, 1971; Sarrazin e Roesset, 1972; Novak e Sachs, 1973; Rosset et al., 1973; Veletsos e Meek, 1974; Novak, 1974 e Bielak, 1975) que pesquisadores em todo o mundo passaram a considerá-lo como variável na modelação dos sistemas estruturais. Modernamente, o estudo do amortecimento desperta grande interesse no controle de vibrações, como ocorre em estruturas de edifícios muito altos e em estruturas de aeronaves.

A introdução de materiais viscoelásticos na engenharia de estruturas exige, com maior razão, a pesquisa de métodos para análise dinâmica não-linear, considerando amortecimentos não-proporcional e dependente da freqüência. O amortecimento não-proporcional é representado por uma matriz de amortecimento viscoso que não é ortogonal à matriz modal. Deste modo, o sistema de equações de movimento não é desacoplável com o emprego da transformação modal. Hurty e Rubinstein (1964) sugerem a utilização de modos complexos para desacoplar as equações de movimento de sistemas dinâmicos dotados de amortecimento não-proporcional. Singh (1980), Veletsos e Ventura (1986), Singh e Ghafory Ashtiany (1986), Borino e Muscolino (1986), Singh e Suarez (1987) e Chen e Taylor (1987) empregam modos complexos na análise desse tipo de sistema, variando entre um e outro autor o processo utilizado na extração dos modos

complexos e na sua superposição para cálculo da resposta.

O método de superposição de modos complexos, além de exigir maior esforço computacional e espaço de memória que o método de superposição de modos normais, dificulta sobremaneira a interpretação física da resposta do sistema. Assim, Rosset et al. (1973), Thomson et al. (1974) e Warburton e Soni (1977) examinam a possibilidade de utilizar o método de superposição modal clássico, seja introduzindo um coeficiente de amortecimento ponderado, seja desprezando os elementos de fora da diagonal da matriz de amortecimento generalizada. Claret e Venâncio-Filho (1988) e, a partir destes, Ibrahimbegovic e Wilson (1988), Chen e Taylor (1990) propõem métodos que preservam a utilização do método de superposição modal clássico, tratando o amortecimento proporcional por um processo iterativo de pseudoforças, apenas diferindo entre si sobre o emprego de modos normais, no primeiro caso, e de vetores de Ritz, no segundo.

Itoh (1973) analisa a resposta permanente de sistemas com amortecimento não-proporcional que emprega a superposição de modos complexos e gera uma rotina de cálculo em álgebra real, empregando o algoritmo FFT. Clough e Mojtahedi (1976) propõem o tratamento do amortecimento não-proporcional pela integração direta em coordenadas modais.

A análise não-linear de sistemas de múltiplos graus de liberdade com amortecimento não-proporcional é

proposta por Chang *et al.* (1989), empregando-se a superposição de modos complexos e o tratamento da não-linearidade por um processo de pseudoforças.

## 2. MODELOS DE AMORTECIMENTO

### 2.1 INTRODUÇÃO

A pesquisa do amortecimento é atualmente um dos domínios de grande interesse na engenharia de estruturas. Esse interesse deve-se ao fato de a vibração ser um fenômeno presente em todo o mundo físico e, essencialmente, ser o amortecimento a remoção de energia de um sistema vibratório. A resposta de um sistema qualquer à vibração que lhe é imposta por uma causa externa depende da natureza e do nível do amortecimento nesse sistema.

Recentemente o amortecimento tornou-se rigorosamente um parâmetro de projeto em engenharia. Hurty e Rubinstein (1964) afirmam literalmente: "*A formulação de expressões para as forças de amortecimento constituem um problema que ainda requer pesquisas intensas*". De fato, durante muitos anos, tanto os modelos de amortecimento foram muito simplificados quanto a sua grandeza apenas grosseiramente estimada. Atualmente, o projeto de sistemas estruturais flexíveis, submetidos a carregamentos elevados de origem sísmica, pelo risco que representam para as populações e o meio ambiente, exige o aprimoramento dos

modelos de amortecimento adotados em sua análise. Este é o caso, por exemplo, das estruturas de usinas nucleares, em que o fenômeno da interação dinâmica solo-estrutura é estudado como solicitação de projeto.

Grande interesse no estudo do amortecimento ocorre, atualmente, na engenharia aeroespacial. Com efeito, os sistemas estruturais de aeronaves são submetidos a níveis elevados de ruído, que transferem vibrações para instrumentos e sistemas estruturais secundários, resultando em problemas de controle de vibração, nos quais os modelos de amortecimento e a sua grandeza têm a maior importância. Equipamentos postos em órbita terrestre estão sujeitos a vibrações de diferentes origens, como as provenientes do impacto de partículas e do gradiente de aceleração gravitacional.

As pesquisas experimentais em controle de vibrações e em caracterização do amortecimento têm levado a um conjunto de conhecimentos aplicados à engenharia, que já é comumente citado na literatura como *tecnologia do amortecimento*. Fazem parte desse conjunto processos de produção de novos materiais viscoelásticos, principalmente compostos, cujas propriedades de amortecimento têm sido intensamente estudadas. O comportamento desses materiais sob intervalos de variação de temperatura de maior amplitude, bem como o seu comportamento em baixas temperaturas, constitui um dos focos da pesquisa atual nesse domínio.

A pesquisa analítica está orientada para a modelação do amortecimento, principalmente nos amortecedores viscoelásticos, e para o desenvolvimento de métodos de integração das equações de movimento. Nesse caso, mediante a necessidade do desenvolvimento de métodos de integração que se adaptem aos diversos softwares, baseados em elementos finitos ou elementos de contorno, já existentes, desenvolveu-se esta pesquisa.

## 2.2 QUANTIFICAÇÃO DO AMORTECIMENTO

Uma medida do amortecimento em um sistema físico vibratório pode ser dada pela razão entre a totalidade da energia nele dissipada em um ciclo da vibração e a energia potencial máxima de deformação armazenada nesse mesmo ciclo. Uma grandeza para medida do amortecimento, definida com base nesse princípio, exige o conhecimento de todos os mecanismos de dissipação de energia no sistema considerado. Mesmo admitindo que a dissipação de energia em um sistema ocorra por meio de mecanismos específicos bem conhecidos, tanto a energia dissipada quanto a energia potencial de deformação nele armazenada são, ainda, funções da amplitude e da frequência do carregamento.

Em razão do exposto, Crandall (1970) define o fator de dissipação de energia,  $\eta$ , em condições bastante particulares: seja um sistema de um grau de liberdade

submetido a um carregamento harmônico, conforme indicado na Fig. 2.1. Seja  $W_d$  a energia média dissipada por radiano durante um período da vibração e  $V_s$  a máxima energia potencial de deformação armazenada no sistema, durante o mesmo ciclo. Define-se o fator de dissipação de energia  $\eta$  pela expressão

$$\eta = \frac{W_d(\rho, \bar{\omega})}{2\pi V_s(\rho, \bar{\omega})}, \quad (2.1)$$

em que  $\rho$  é a amplitude da resposta permanente do sistema e  $\bar{\omega}$  é a frequência da excitação. Essa definição de  $\eta$  pode ser aplicada a qualquer tipo de amortecedor, inclusive aos viscoelásticos, e a sistemas de múltiplos graus de liberdade, desde que a vibração ocorra em uma frequência definida.

A forma como  $W_d$  e  $V_s$  dependem de  $\rho$  e  $\bar{\omega}$  somente é conhecida com a adoção de mecanismos específicos de amortecimento. As forças de amortecimento em um movimento vibratório não são necessariamente funções lineares da velocidade ou do deslocamento da massa em movimento. Experimentos demonstram, por exemplo, que a força de resistência do ar a corpos que nele se movem, em velocidades elevadas, é aproximadamente proporcional ao quadrado da velocidade. Entretanto, a complexidade das equações de movimento depende da natureza das forças de amortecimento,

impondo, para soluções analíticas generalizadas, a necessidade de adoção de modelos lineares de amortecimento. Neste trabalho, apenas os modelos de amortecimento viscoso e de amortecimento estrutural ou histerético serão estudados. Para conceituá-los, o sistema de um grau de liberdade da Fig. 2.1 será utilizado.

O *amortecimento viscoso* é um modelo linear de dissipação de energia, em que a força de amortecimento,  $f_v$ , é proporcional e oposta à velocidade relativa da massa,  $\dot{v}$ . Nesse caso, o amortecimento é caracterizado por uma constante  $c$ , e a força de amortecimento vale

$$f_v = -c\dot{v}. \quad (2.2)$$

Como facilmente se demonstra, o fator de dissipação de energia no mecanismo de amortecimento viscoso é

$$\eta_v = c|\bar{\omega}|k^{-1}, \quad (2.3)$$

que, como se observa, é uma função real, não negativa e par da frequência da excitação (Crandall, 1970).  $\eta_v$  pode ser escrito em função do coeficiente de amortecimento  $\xi$  através da expressão

$$\eta_v = 2\beta\xi, \quad (2.4)$$

em que  $\beta$  é a relação da frequência da excitação,  $\bar{\omega}$ , para a frequência natural de vibração do sistema,  $\omega$ .

Se se admite que um determinado sistema está em movimento vibratório em uma frequência conhecida  $\bar{\omega}$  e que o mecanismo interno de dissipação de energia é predominantemente o de amortecimento viscoso, métodos experimentais (Clough e Penzien, 1975) podem ser empregados na determinação de  $\eta_v$  ou  $\xi$ .

O amortecimento estrutural ou histerético é devido à dissipação de energia dentro dos materiais estruturais e nas conexões dos diversos elementos estruturais. Consequentemente, as forças de amortecimento nesse modelo são funções das deformações impostas aos elementos estruturais. Para um sistema elástico, a força de amortecimento estrutural,  $f_e$ , é proporcional à força elástica,  $f_s$ , mas está em fase com a velocidade, isto é,

$$f_e = i(2D)kv, \quad (2.5)$$

em que  $v$  é o deslocamento da massa,  $D$  é a constante de amortecimento estrutural e  $i$  é a unidade imaginária. Tendo-se em conta a Eq. 2.1, obtém-se (Hurty e Rubinstein, 1964) a expressão do fator de dissipação de energia no amortecimento estrutural ou histerético,  $\eta_e$ ,

$$\eta_e = 2D. \quad (2.6)$$

Costumeiramente, para facilitar as análises no domínio do tempo, define-se um mecanismo de amortecimento viscoso equivalente a um mecanismo de amortecimento hysterético como aquele capaz de dissipar a mesma quantidade de energia em um ciclo da vibração. Nesse caso, deduz-se (Clough e Penzien, 1975) que o amortecedor viscoso equivalente a um amortecedor hysterético de constante  $D$ , vale

$$c_{eq} = 2D|\bar{\omega}|^{-1}k, \quad (2.7)$$

isto é,  $c_{eq}$  é dependente da frequência da excitação. Uma relação entre o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente  $\xi_{eq}$ , correspondente a  $c_{eq}$ , e a constante de amortecimento hysterético  $D$ , pode ser estabelecida a partir da definição de  $\xi$  (Hurty e Rubinstein, 1964 e Clough e Penzien, 1975), ou seja,

$$\xi_{eq} = D\beta^{-1}. \quad (2.8)$$

As equações diferenciais de equilíbrio dinâmico de sistemas dotados de amortecimento viscoso têm processos analíticos e numéricos de integração bastante conhecidos. Deste modo, há uma tendência natural de modelização dos mecanismos de dissipação de energia nos mais diversos sistemas através do modelo de amortecimento viscoso. Mesmo

amortecedores viscoelásticos discretos são (Soong e Lai, 1991), em certo intervalo de deformação, modelados como amortecedores viscosos. Entretanto, no caso do amortecimento estrutural, a Eq. 2.7 mostra que a equação de equilíbrio dinâmico não pode ser escrita no domínio do tempo (Crandall, 1970), porque possui um termo que é função da frequência. Deste modo, uma análise rigorosa da resposta dinâmica de sistemas deste tipo somente pode ser feita no domínio da frequência.

Os mecanismos de dissipação de energia no solo têm sido pesquisados modernamente, em face do interesse na interação dinâmica solo-estrutura como solicitação de projeto. Modelando o solo como meio elástico, semi-infinito, homogêneo e isotrópico, em geral referido apenas como semi-espaço elástico (Richart et al., 1970), a dissipação de energia que nele ocorre é denominada *amortecimento geométrico ou por radiação*. Para conceituá-lo, seja uma fundação em placa vibrando verticalmente sobre um semi-espaço elástico, Fig. 2.2. Da placa, fonte da vibração, propagam-se no semi-espaço elástico ondas de corpo, com uma frente de onda hemisférica, e ondas de Rayleigh com frentes de onda cilíndricas. Esses dois tipos de ondas, à medida que se afastam da fonte, propagam-se em um volume cada vez maior de material. Deste modo, a densidade de energia e, conseqüentemente, a amplitude de vibração decrescem em cada

onda, constituindo-se no amortecimento geométrico ou por radiação.

Na análise dinâmica de sistemas solo-estrutura, a dissipação de energia ocorre predominantemente pelo amortecimento estrutural e pelo amortecimento geométrico.

Para modelação do amortecimento geométrico, observa-se que o sistema cuja resposta se deseja determinar consiste de duas partes distintas, Wolf (1991), com diferentes propriedades: a estrutura generalizada, consistindo da superestrutura, fundação e possivelmente uma região vizinha de solo, Fig. 2.3, e o solo modelado como um domínio semi-infinito. A estrutura generalizada é, em geral, discretizada em elementos finitos; para analisar o solo, é necessário adotar uma superfície de contorno, cujas propriedades sintetizem aquelas do subdomínio de solo em seu exterior. Especificamente, uma condição de radiação deve ser adotada, assegurando que apenas ondas que se propagam da fonte para o exterior existam no domínio. As condições de radiação conduzem a coeficientes de rigidez dinâmicos que, no caso unidimensional, têm a forma de

onde  $a_0$  é um termo denominado frequência adimensional, e  $k_1$  e  $c_1$

$$\bar{S} = k_1 + ia_0 c_1, \quad (2.9)$$

são calculados em função de propriedades físicas e

geométricas do sistema. Multiplicando  $\bar{S}$  pelo deslocamento  $v$  da massa na direção considerada,  $(k_1 v)$  representa uma força elástica, enquanto  $(i a_0 c_1 v)$  é uma força de amortecimento em defasagem de  $\pi/2$  radianos do deslocamento. Conseqüentemente, o amortecimento geométrico no sistema é quantificado pelo termo  $(a_0 c_1)$ . Nos casos bidimensional e tridimensional, a Eq. 2.9 permanece válida, porém  $k_1$ ,  $c_1$  e  $\bar{S}$  transformam-se em matrizes, com o mesmo significado físico antes enunciado.

A consideração do amortecimento histerético na análise dinâmica de sistemas solo-estrutura pode ser feita a partir da Eq. 2.9, utilizando o *Princípio da Correspondência*, através do qual, sendo o amortecimento histerético independente da frequência, é suficiente substituir em todas as expressões o módulo elástico real pelo seu equivalente complexo, ou seja,

$$E^c = E(1 + i2D), \quad (2.10)$$

onde  $D$  é a constante de amortecimento histerético ou estrutural e  $i$  é a unidade imaginária.

### 2.3 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO

As equações de equilíbrio dinâmico de um sistema estrutural discretizado em elementos finitos são deduzidas

em todos os textos básicos de dinâmica. Em geral, parte-se da condição de equilíbrio de forças de inércia,  $\{f_i\}$ , forças de amortecimento,  $\{f_d\}$ , forças elásticas,  $\{f_s\}$  e forças nodais externas,  $\{p(t)\}$ , ou seja,

$$\{f_i\} + \{f_d\} + \{f_s\} = \{p(t)\}. \quad (2.11)$$

Com a definição de coeficientes de rigidez,  $k_{ij}$ , e coeficientes de massa,  $m_{ij}$ , (Clough e Penzien, 1975; Venâncio-Filho, 1975 e Meirovitch, 1986), matrizes de rigidez,  $[k]$ , e de massa,  $[m]$ , são facilmente conceituadas. Assim, a Eq. 2.11 se escreve na forma

$$[m]\{\ddot{v}\} + [k]\{v\} + \{f_d\} = \{p(t)\}, \quad (2.12)$$

onde o vetor de forças de amortecimento depende do modelo de amortecimento no sistema. Caso o amortecimento histerético seja o mecanismo predominante de dissipação de energia no sistema, uma matriz de amortecimento é imediatamente construída a partir da matriz de rigidez, isto é, tendo em vista a Eq. 2.5,

$$[c_e] = 2D [k], \quad (2.13)$$

e a equação de equilíbrio dinâmico torna-se

$$[m]\{\ddot{v}\} + [k](1 + i2D)\{v\} = \{p(t)\}, \quad (2.14)$$

equação esta que somente pode ser tratada rigorosamente no domínio da frequência.

De modo análogo, se o modelo de dissipação de energia no sistema é definido como viscoso, coeficientes de amortecimento viscoso  $c_{ij}$  podem ser formalmente conceituados (Clough e Penzien, 1975) pela expressão, particularizada para um domínio unidimensional,

$$c_{ij} = \int_D c(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad (2.15)$$

onde  $D$  designa o domínio de integração,  $c(x)$  é a propriedade de amortecimento distribuída no domínio e  $\psi_i(x)$  e  $\psi_j(x)$  são funções de forma do elemento considerado. Entretanto, a determinação de  $c(x)$  é impraticável; ainda assim uma matriz de amortecimento viscoso poderá ser construída a partir de coeficientes de amortecimento especificados para todos ou alguns dos modos de vibração. Portanto, a equação de equilíbrio dinâmico, considerando amortecimento viscoso, torna-se

$$[m]\{\ddot{v}\} + [c]\{\dot{v}\} + [k]\{v\} = \{p(t)\}. \quad (2.16)$$

Esta equação pode ser rigorosamente integrada no domínio do tempo.

Tendo em conta a linearidade das transformadas de Fourier, a Eq. 2.11 pode ser escrita no domínio da frequência, isto é,

$$FT(\{f_i\} + \{f_d\} + \{f_s\}) = FT(\{p(t)\}), \quad (2.17)$$

onde FT denota o operador transformada direta de Fourier. Portanto, a condição de equilíbrio do sistema na frequência  $\omega$  é

$$\{F_i(\omega)\} + \{F_d(\omega)\} + \{F_s(\omega)\} = \{P(\omega)\}, \quad (2.18)$$

onde

$$\{F_i(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [m] \{\dot{v}\} e^{-i\omega t} dt, \quad (2.19)$$

$$\{F_s(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [k] \{v\} e^{-i\omega t} dt \quad (2.20)$$

e

$$\{P(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{p(t)\} e^{-i\omega t} dt. \quad (2.21)$$

Para condições iniciais nulas, as Eqs. 2.19 e 2.20 conduzem, respectivamente, a

$$\{F_i(\omega)\} = -\omega^2 [m] \{V(\omega)\} \quad (2.22)$$

e

$$\{F_g(\omega)\} = [k]\{V(\omega)\}, \quad (2.23)$$

onde  $V(\omega)$  é a FT de  $\{v(t)\}$  que, por definição, é

$$\{V(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{v\}e^{-i\omega t} dt. \quad (2.24)$$

Assim, para sistemas elásticos lineares, a equação de equilíbrio dinâmico no domínio da frequência é

$$(-\omega^2[m] + [k]) \{V(\omega)\} + \{F_d(\omega)\} = \{P(\omega)\}. \quad (2.25)$$

Se o amortecimento do sistema é histerético, segue-se imediatamente a equação de equilíbrio dinâmico, tendo-se em vista a Eq. 2.14 e a Eq. 2.24,

$$[-\omega^2[m] + [k](1 + i2D)] \{V(\omega)\} = \{P(\omega)\}. \quad (2.26)$$

Para amortecimento viscoso expresso por uma matriz  $[c]$ , o vetor força de amortecimento é  $[c]\{\dot{v}\}$ , resultando, no domínio da frequência, em um vetor de forças de amortecimento viscoso transformadas dado pela expressão

$$\{F_d(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [c]\{\dot{v}\}e^{-i\omega t} dt. \quad (2.27)$$

Para condições iniciais nulas, a Eq. 2.27 resulta em

$$\{F_d(\omega)\} = i\omega [c]\{V(\omega)\}. \quad (2.28)$$

Portanto, a equação de equilíbrio dinâmico no domínio da frequência, considerando amortecimento viscoso, é

$$[-\omega^2[m] + i\omega [c] + [k]] \{V(\omega)\} = \{P(\omega)\}. \quad (2.29)$$

Nas situações em que o amortecimento histerético é tratado pelo amortecimento viscoso equivalente, a matriz de amortecimento viscoso é dependente da frequência, e expressões do equilíbrio dinâmico como

$$[m]\{\ddot{v}\} + [c(\omega)]\{\dot{v}\} + [k]\{v\} = \{p(\tau)\}$$

têm valor apenas mnemônico (Crandall, 1970). Deste modo, as Eq. 2.12 e Eq. 2.25 são expressões suficientemente gerais do equilíbrio dinâmico do sistema, respectivamente, no domínio do tempo e no domínio da frequência.

#### 2.4 MATRIZ DE AMORTECIMENTO VISCOSO

Seja um sistema estrutural discretizado em elementos finitos totalizando  $N$  graus de liberdade. Sejam  $\{\phi\}_i$ ,  $i = 1, N$ , os modos normais de vibração desse sistema, e

$\omega_i$ , com  $i = 1, N$ , as frequências naturais de vibração correspondentes. Se o amortecimento do sistema é modelado como viscoso, em cada modo de vibração pode-se admitir um coeficiente de amortecimento  $\xi_i$ , relacionado à constante de amortecimento viscoso nesse modo,  $C_{ii}$ , pela conhecida expressão

$$C_{ii} = 2\xi_i M_i \omega_i, \quad (2.30)$$

onde  $M_i$  é a massa generalizada no modo  $i$ . Portanto, uma matriz generalizada de amortecimento viscoso pode ser imediatamente construída com a forma

$$[C] = [C_{ii}]. \quad (2.31)$$

Em coordenadas físicas, sendo  $[\Phi]$  a matriz modal, cujas colunas são os modos de vibração do sistema, tem-se

$$[c] = [\Phi][C][\Phi]^t, \quad (2.32)$$

onde o superescrito  $t$  indica matriz ou vetor transposto. Por essa equação  $[c]$  é obtida através de um triplo produto matricial, que pode consumir elevado esforço computacional em sistemas de grande ordem. Para economia, procura-se construir  $[c]$  apenas com as contribuições dos modos que possuem amortecimento em grandeza significativa.

Considerando que a matriz de massas generalizadas é  $[M] = [\Phi]^t [m] [\Phi]$ , pode-se definir  $[\Phi]^{-1}$  a partir da expressão

$$[I] = [\Phi]^{-1} [\Phi] = [M]^{-1} [M] = ([M]^{-1} [\Phi]^t [m]) [\Phi], \quad (2.33)$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade de ordem  $N$ , cujos elementos têm unidades compatíveis. Portanto, tem-se

$$[\Phi]^{-1} = [M]^{-1} [\Phi]^t [m], \quad (2.34)$$

e a Eq. 2.32 pode ser escrita em nova forma

$$[c] = ([m] [\Phi] [M]^{-1}) [C] ([M]^{-1} [\Phi]^t [m]). \quad (2.35)$$

Nessa equação, o triplo produto matricial  $[M]^{-1} [C] [M]^{-1}$  conduz a uma matriz diagonal cujo  $n$ -ésimo elemento é

$$\zeta_n = 2\xi_n \omega_n M_n^{-1}. \quad (2.36)$$

Assim sendo, a Eq. 2.35 toma a forma seguinte

$$[c] = [m] [\Phi] \left[ 2\xi_n \omega_n M_n^{-1} \right] [\Phi]^t [m], \quad (2.37)$$

onde o símbolo  $\left[ . \right]$  representa uma matriz diagonal, e  $n = 1, N$ . A Eq. 2.37 permite explicitar a contribuição de

cada modo na constituição da matriz  $[c]$ , ou seja, para um modo  $n$  tem-se

$$[c]_n = 2\xi_n \omega_n M_n^{-1} [m] \{\phi\}_n \{\phi\}_n^t [m]. \quad (2.38)$$

Finalmente, a matriz de amortecimento do sistema é formada pela soma das matrizes  $[c]_n$ , ou seja,

$$[c] = \sum [c]_n = [m] \left( \sum 2\xi_n \omega_n M_n^{-1} \{\phi\}_n \{\phi\}_n^t \right) [m], \quad (2.39)$$

onde o somatório deve ser feito sobre todos os modos cujo amortecimento seja significativo.

Um segundo método para a construção de uma matriz de amortecimento viscoso consiste em escrevê-la como a soma parcial da série

$$[c] = [m] \sum_b a_b ([m]^{-1} [k])^b, \quad (2.40)$$

em que  $b$  é tomado em um intervalo qualquer do conjunto de números inteiros. Caughey e O'Kelly (1965) demonstraram que a Eq. 2.40 estabelece uma condição suficiente para a construção de uma matriz de amortecimento diagonalizável pela matriz modal. Esta condição não é, entretanto, necessária. Demonstra-se (Clough e Penzien, 1975), que, se se conhece um conjunto ordenado  $\mathcal{P}$  de  $p$  valores dos coeficientes de amortecimento modais e se em correspondência

são tomados  $p$  valores inteiros de  $b$ , formando o conjunto ordenado  $\mathcal{B}$ , as constantes  $a_b$  podem ser calculadas resolvendo-se o sistema de equações

$$\{\xi\} = 1/2 [G]\{a\}, \quad (2.41)$$

onde  $\{\xi\}$  é o vetor de ordem  $p$  dos coeficientes modais de amortecimento;  $[G]$  é a matriz quadrada, cujo elemento genérico  $G_{rs}$  é assim definido

$$G_{rs} = (\omega_r)^{2b_s - 1}, \quad (2.42)$$

onde  $\omega_r$  é a frequência natural de vibração do  $r$ -ésimo modo do conjunto  $\mathcal{P}$ , e  $b_s$  é o  $s$ -ésimo valor de  $b$  no conjunto  $\mathcal{B}$ .

Quando se tomam valores de  $b$  iguais a 0 e 1, tem-se a matriz de amortecimento expressa por uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez, denominada matriz de amortecimento de Rayleigh, isto é,

$$[c] = a_0 [m] + a_1 [k]. \quad (2.43)$$

Conhecendo-se as constantes  $a_0$  e  $a_1$  pela Eq. 2.41, o coeficiente de amortecimento viscoso no modo  $n$ ,  $\xi_n$ , é calculado pela equação

$$2\xi_n = a_0 \omega_n^{-1} + a_1 \omega_n. \quad (2.44)$$

A Fig. 2.4 mostra uma curva  $\xi(a_0, a_1, \omega)$  típica. Se a distribuição de frequências naturais de vibração do sistema é regular, isto é, se não se observam grandes saltos entre os valores sucessivos de frequências, e se são escolhidos dois valores  $\xi_r$  e  $\xi_s$  convenientes, a curva  $\xi(a_0, a_1, \omega)$  é achatada, conduzindo a valores muito próximos de  $\xi_n$  para  $\omega_r < \omega < \omega_s$ .

As matrizes de amortecimento viscoso definidas pelas Eqs. 2.39, 2.40 e 2.43 expressam um tipo de amortecimento conhecido como amortecimento proporcional. Esta denominação traduz a existência de relativa homogeneidade nos níveis de dissipação de energia, nas várias partes do sistema estrutural. Entretanto, podem ocorrer mecanismos de amortecimento localizados, provocando uma distribuição de forças de amortecimento diferente da distribuição de forças elásticas e de inércia. Este tipo de amortecimento é denominado não-proporcional e é expresso por uma matriz de amortecimento não-ortogonal, isto é,  $[C]$  dada pela expressão

$$[C] = [\Phi]^t [c] [\Phi] \quad (2.45)$$

é uma matriz não-diagonal.

Se há relativa homogeneidade no mecanismo de dissipação de energia no sistema, mas há amortecedores

discretos acoplados a certo número de graus de liberdade, uma matriz de amortecimento viscoso proporcional é construída a partir das Eqs. 2.39, 2.40 ou 2.43, somando-se aos termos da diagonal os respectivos valores das constantes de amortecimento dos amortecedores discretos. Este tipo de geração de uma matriz de amortecimento não-proporcional ocorre, com freqüência, em sistemas solo-estrutura, em que o solo é modelado por um sistema massa-mola-amortecedor equivalente (Novak, 1974). Desse modo, aos graus de liberdade associados à fundação, em geral acrescentam-se as constantes de amortecimento decorrentes do solo.

Quando o sistema estrutural não possui propriedades de amortecimento uniformemente distribuídas, seus elementos podem ser reunidos em subconjuntos de propriedades de amortecimento semelhantes. Para cada subconjunto, uma matriz de amortecimento proporcional é construída, utilizando, por exemplo, a Eq. 2.43. Para isto, especificam-se coeficientes de amortecimento para dois modos, e por meio da Eq. 2.41, as constantes  $a_0$  e  $a_1$  são determinadas. As freqüências empregadas na Eq. 2.41 são as freqüências naturais de vibração da estrutura inteira (Clough e Mojtahedi, 1976). Após a determinação de  $a_0$  e  $a_1$  para todos os subconjuntos de elementos, a matriz de amortecimento viscoso é montada, considerando as suas conectividades. Essa matriz será não-proporcional, sempre

que  $a_0$  e  $a_1$  forem diferentes para dois subconjuntos de elementos.

## 2.5 MATRIZ DE AMORTECIMENTO DEPENDENTE DA FREQUÊNCIA

Uma matriz de amortecimento dependente da frequência pode ser conceituada a partir da definição de fator de dissipação de energia, dada pela Eq. 2.1. Seja um sistema massa-mola-amortecedor que vibra a uma frequência definida  $\bar{\omega}$ . Como faz Crandall (Crandall, 1970), seja definido um amortecedor linear dependente da frequência pela expressão

$$F_d(\bar{\omega}) = c(\bar{\omega})\dot{V}(\bar{\omega}) \quad (2.46)$$

em que  $c(\bar{\omega})$  é o valor particular de uma função  $c(\omega)$  que define a dependência do mecanismo de amortecimento do sistema em relação à frequência de vibração. Tratando-se de uma vibração harmônica, situação usada para definir o fator de dissipação de energia, pode-se escrever

$$v(t) = \rho \exp(i\bar{\omega}t), \quad (2.47)$$

em que  $\rho$  é a amplitude do movimento. Portanto, obtém-se  $\dot{v}(t)$  imediatamente a partir da Eq. 2.47, ou seja,

$$\dot{v}(t) = i\bar{\omega}v(t). \quad (2.48)$$

A transformada de Fourier de  $\dot{v}(t)$  se obtém pela definição, isto é,

$$\dot{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\bar{\omega}\rho \exp(i\bar{\omega}t)\exp(-i\bar{\omega}t)dt = i2\pi\rho. \quad (2.49)$$

A energia dissipada no amortecedor vale, no domínio do tempo,

$$W_d = \int_0^T f_d(t)dv(t), \quad (2.50)$$

onde  $f_d(t)$  é a força de amortecimento no domínio do tempo. Considerando a Eq. 2.47,  $dv(t)$  vale

$$dv(t) = i\bar{\omega}v(t)dt. \quad (2.51)$$

A FT de  $i\bar{\omega}v(t)$  vale, por definição,

$$\text{FT}(i\bar{\omega}v(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\bar{\omega}v(t) \exp(-i\bar{\omega}t)dt, \quad (2.52)$$

ou seja,

$$\text{FT}(i\bar{\omega}v(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\bar{\omega}\rho dt = i2\pi\rho \equiv \dot{V}(\bar{\omega}). \quad (2.53)$$

Com base em propriedade das transformadas de Fourier (Hsu, 1970) pode-se escrever a expressão de  $W_d$  em função de

termos no domínio da frequência, isto é, a partir da Eq. 2.50,

$$W_d = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_d(\bar{\omega}) \dot{V}(-\bar{\omega}) d\omega, \quad (2.54)$$

isto é,

$$W_d = \frac{1}{2\pi} F_d(\bar{\omega}) \dot{V}(-\bar{\omega}) \bar{\omega}. \quad (2.55)$$

Considerando as Eqs. 2.46 e 2.53, tem-se

$$W_d = \frac{1}{2\pi} c(\bar{\omega}) \dot{V}(\bar{\omega}) \dot{V}(-\bar{\omega}) \bar{\omega}, \quad (2.56)$$

ou seja, sendo

$$\dot{V}(\bar{\omega}) \dot{V}(-\bar{\omega}) = 4\pi^2 \rho^2, \quad (2.57)$$

tem-se

$$W_d = 2\pi c(\bar{\omega}) \rho^2 \bar{\omega}. \quad (2.58)$$

A definição do fator de dissipação de energia para um movimento harmônico de frequência  $\bar{\omega}$  é

$$\eta(\bar{\omega}) = W_d / (2\pi V_s), \quad (2.59)$$

em que  $V_s$  é a máxima energia potencial de deformação em um

ciclo da vibração, ou seja,

$$V_s = 1/2 k\rho^2. \quad (2.60)$$

Portanto, tem-se

$$\eta(\bar{\omega}) = 2 c(\bar{\omega})\bar{\omega}/k. \quad (2.61)$$

A função  $\eta(\omega)$  pode ser conhecida por via experimental como em Crandall (1970) e Matla (1991), ou por via analítica como em Wolf e Paronesso (1991) e Parekh e Harris (1991) e pode ser empregada para definir genericamente uma constante de amortecimento dependente da frequência, isto é,

$$c(\omega) = \frac{1}{2\omega} \eta(\omega)k, \quad \omega \neq 0. \quad (2.62)$$

A Eq. 2.46 que define o amortecedor dependente da frequência, diante da Eq. 2.62, para uma vibração cíclica na frequência  $\omega$ , fornece

$$F_d(\omega) = \frac{1}{2\omega} \eta(\omega)k\dot{V}(\omega). \quad (2.63)$$

A transformada inversa de Fourier de  $F_d(\omega)$  é

$$f_d(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\omega} \eta(\omega)k\dot{V}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (2.64)$$

Considerando as Eqs. 2.49 e 2.47, tem-se

$$f_d(t) = ikv(t) \left[ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\omega) / \omega d\omega \right], \quad (2.65)$$

ou seja,  $f_d(t)$  é proporcional à força elástica, mas está em fase com a velocidade.

Crandall (Crandall, 1970) propõe a seguinte expressão para definição de uma constante de amortecimento dependente da frequência

$$c(\omega) = \eta(\omega) |\omega|^{-1} k, \quad \omega \neq 0. \quad (2.66)$$

Essa expressão é igual à aqui obtida a menos do fator multiplicativo  $(1/2)$  que pode ser incorporado na definição de  $\eta(\omega)$ . Na Eq. 2.62,  $\omega$  deve ser também considerado em valor absoluto, porquanto se trata da frequência da vibração em sentido físico. Portanto, a Eq. 2.66 será considerada a definição da constante de amortecimento dependente da frequência.

A dedução aqui seguida para a obtenção da constante de amortecimento dependente da frequência, de modo inteiramente análogo, poderá ser feita para um sistema de múltiplos graus de liberdade, conduzindo à definição de uma matriz de amortecimento dependente da frequência, isto é,

$$[c(\omega)] = \eta(\omega) |\omega|^{-1} [k], \quad \omega \neq 0. \quad (2.67)$$

Em face dessa expressão, tem-se a equação de equilíbrio dinâmico de um sistema com amortecimento dependente da frequência, isto é,

$$[-\omega^2[m] + [k](1 + i \operatorname{sgn}(\omega)\eta(\omega))]\{V(\omega)\} = \{P(\omega)\}, \quad (2.68)$$

onde  $\operatorname{sgn}(\omega)$  é a função que retorna a unidade com o sinal de  $\omega$ .

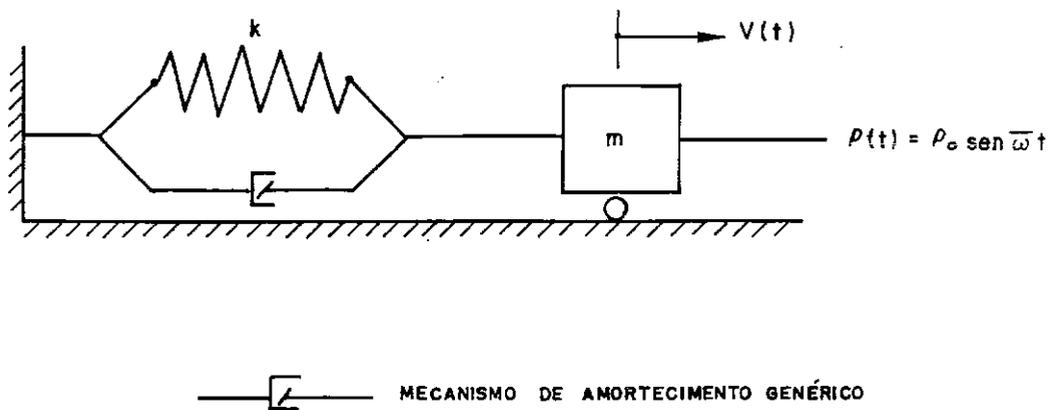


Fig. 2.1 - Sistema de um grau de liberdade.

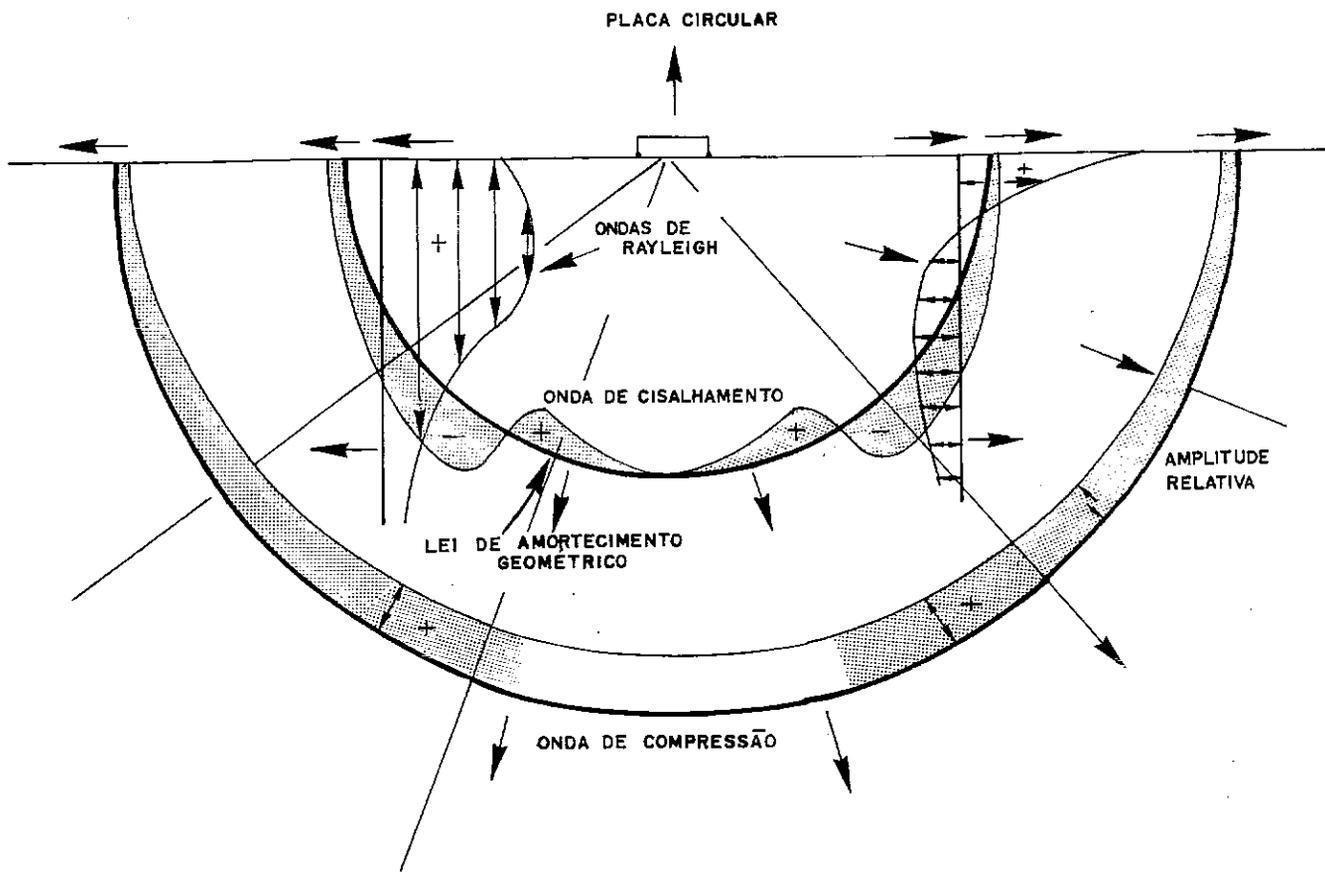


Fig. 2.2 - Conceito do amortecimento geométrico.

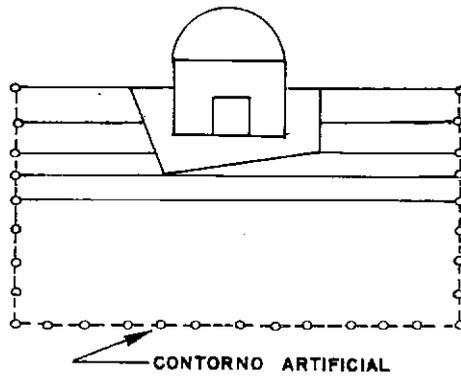
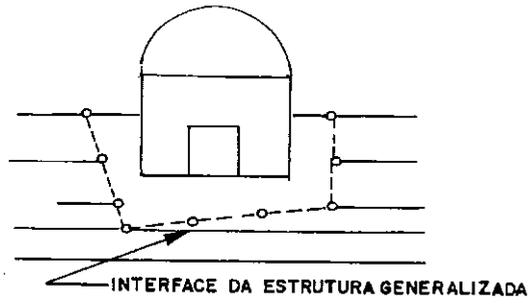


Fig. 2.3 - Modelação da interação solo-estrutura.

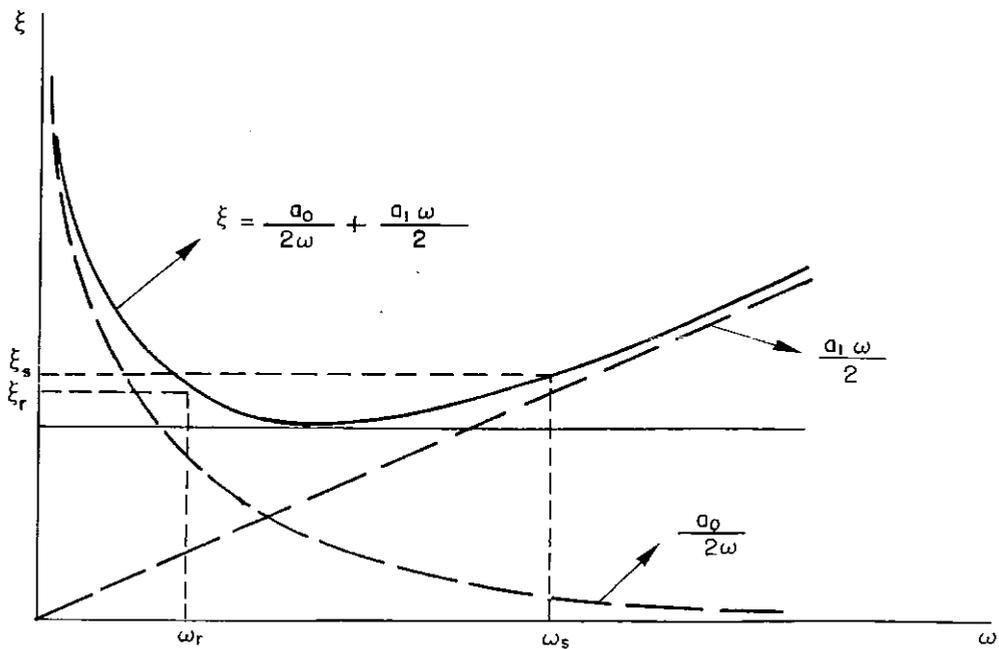


Fig. 2.4 - Curva  $\xi(a_0, a_1, \omega)$ .

### 3. MÉTODOS PARA ANÁLISE DE SISTEMAS DOTADOS DE AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL

#### 3.1 INTRODUÇÃO

A análise da resposta dinâmica de sistemas estruturais pelo método de superposição modal, em sua formulação clássica, apresenta duas vantagens sobre outros métodos de integração no domínio do tempo: uma adequada interpretação do comportamento do sistema, pela análise das frequências naturais de vibração e dos modos normais e a economia de esforço computacional devida à possibilidade de truncamento modal. De acordo com Roesset *et al.* (1973), a interpretação do comportamento físico por meio do método de superposição modal clássico é uma forte motivação para seu uso pelos engenheiros estruturais. Em sistemas complexos, como estrutura-equipamento, solo-estrutura e fluido-estrutura, a análise das frequências naturais e dos modos normais permite avaliar a influência de um elemento do sistema sobre o outro ( a influência da fundação flexível sobre a estrutura, por exemplo ). Deste modo, o modelo empregado na análise desses sistemas pode ser convenientemente avaliado.

A utilização do método de superposição modal exige que a matriz de amortecimento do sistema estrutural seja ortogonal à base modal, isto é, que as propriedades de amortecimento do sistema estrutural possam ser postas sob a forma de uma matriz de amortecimento proporcional. Entretanto, nesse caso, a matriz de amortecimento não necessita ser explicitada, porque a resposta, efetivamente, é calculada em função de coeficientes de amortecimentos modais.

Para muitas estruturas, a hipótese de amortecimento proporcional é satisfatória. Porém, nos sistemas estruturais compostos, quando as propriedades de amortecimento de seus elementos são muito diferentes, em natureza ou em magnitude, o amortecimento é não-proporcional. Sistemas estruturais com amortecimento não-proporcional não têm modos normais de vibração; conseqüentemente, o método de superposição modal clássico não pode ser aplicado em sua análise. As vantagens do método de superposição modal clássico sobre outros métodos no domínio do tempo justificam a pesquisa de variantes desse método para análise de sistemas com amortecimento não-proporcional.

### 3.2 OUTROS ESTUDOS

Roesset *et al.* (1973) têm por objetivo a solução

de um problema típico de interação solo-estrutura, no qual tanto o amortecimento geométrico, expresso por constantes de amortecimento viscoso modais equivalentes, quanto o amortecimento histerético estão presentes, resultando em amortecimento não-proporcional, e sugerem o uso do método de superposição modal clássico definindo um coeficiente de amortecimento modal ponderado. Thomson *et al.* (1974) fazem um estudo numérico profundo da influência do método de construção da matriz de amortecimento não-proporcional na precisão da resposta quando os elementos de fora da diagonal da matriz de amortecimento generalizada são abandonados. Nesse mesmo sentido, Warburton e Soni (1977) propõem empregar o método de superposição modal clássico, desprezando os elementos de fora da diagonal da matriz de amortecimento generalizada, e avaliam sua influência sobre a precisão dos resultados. Os métodos de Roesset e de Warburton-Soni levam a resultados de precisão adequada apenas em sistemas de amortecimento levemente não-proporcional, mas, para sistemas com amortecimento fortemente não-proporcional ( o uso das palavras *levemente* e *fortemente* para quantificar o nível de amortecimento não-proporcional deve-se ao fato da absoluta inexistência de critério científico para este fim; propõe-se, neste capítulo, a definição de duas grandezas que a isto se destinam ), os erros induzidos na resposta são muito significativos.

Clough e Mojtahedi (1976) empregam a transformação de coordenadas físicas em coordenadas modais, usando o truncamento modal para reduzir o tamanho do sistema. As equações de equilíbrio dinâmico resultantes acopladas são então resolvidas no domínio do tempo por meio de métodos de integração direta. Esses métodos têm estabilidade e precisão muito dependentes do intervalo de integração, resultando em dispêndio de elevado esforço computacional, principalmente quando a contribuição de modos de frequências mais elevadas na resposta é significativa. Por outro lado, esse método não elimina a necessidade de se calcularem as frequências naturais de vibração e os respectivos modos normais. No caso da análise linear, esse método não tira proveito do fato de as matrizes de massa e rigidez generalizadas serem diagonais. Na análise não-linear, a necessidade de executar a extração modal a cada atualização da matriz de rigidez, combinada com a necessidade de fixar valores muito reduzidos do intervalo de tempo no processo de integração, tornam esse método praticamente proibitivo para análises de sistemas de grande porte.

O método de superposição modal com modos complexos tem sido aplicado à análise de sistemas dotados de amortecimento não proporcional. Conceitualmente, o método de superposição modal clássico e o método de superposição de modos complexos são idênticos. Entretanto, o método de superposição de modos complexos envolve esforço

computacional significativamente maior, porquanto o problema de autovalor complexo é da ordem  $2N \times 2N$  para um sistema que possui  $N$  graus de liberdade. Esse esforço computacional é cerca de oito vezes o esforço necessário para se calcularem os modos normais de vibração (Wilson, 1989); além disso, a álgebra de complexos deve ser usada no cálculo da resposta do sistema. Por outro lado, como foi visto no passado por Hurty e Rubinstein (1964) e, mais recentemente, por Veletsos e Ventura (1986), os modos complexos são formas de vibração que não apresentam pontos estacionários. Conseqüentemente, em uma definição rigorosa, os autovetores complexos não são modos de vibração. Essa característica dos sistemas dotados de amortecimento não-proporcional dificulta a interpretação física de seu comportamento.

Para minimizar o esforço computacional necessário no método de superposição de modos complexos, alguns processos têm sido propostos. Singh e Ghafory Ashtiany (1986) propõem um processo em que apenas álgebra real é usada no cálculo da resposta, após a extração de modos complexos. Chen e Taylor (1990) e Mau (1988) usam o método de iteração por subespaços para a solução do problema de autovalor complexo.

Apresenta-se, em seguida, uma descrição pormenorizada do método de superposição modal e pseudoforças proposto por Claret e Venâncio-Filho (1988) e aprofundado por Claret e Venâncio-Filho (1991) para análise de sistemas

dotados de amortecimento não-proporcional. Uma proposta idêntica é apresentada por Tsai e Leang (1991). Faz-se uma apresentação sucinta do método dos coeficientes de amortecimento ponderados, do método aproximado de Warburton e Soni, do método de superposição de modos complexos e do método de integração direta em coordenadas generalizadas.

### 3.3 MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL E PSEUDOFORÇAS

#### 3.3.1 FORMULAÇÃO

Seja um sistema estrutural discretizado em elementos finitos, totalizando  $N$  graus de liberdade, dotado de amortecimento viscoso, expresso por uma matriz  $[c]$ . Então, sua equação de movimento é

$$[m]\{\ddot{v}\} + [c]\{\dot{v}\} + [k]\{v\} = \{p(t)\}. \quad (3.1)$$

A solução do problema de autovalor

$$[k]\{\phi\}_i = \omega_i^2 [m]\{\phi\}_i \quad (3.2)$$

conduz às frequências naturais de vibração,  $\omega_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , e aos modos de vibração correspondentes  $\{\phi\}_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Os modos de vibração são normalizados de acordo com

$$\{\phi\}_i^t [m] \{\phi\}_j = \delta_{ij}, \quad (3.3)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. A matriz  $[\Phi]$  cujas colunas são os modos normais de vibração  $\{\phi\}_i$  é a matriz modal e tem as propriedades de ortogonalidade em relação às matrizes de massa e de rigidez. Estas propriedades são expressas por

$$[\Phi]^t [m] [\Phi] = [I], \quad (3.4)$$

e

$$[\Phi]^t [k] [\Phi] = [\Lambda], \quad (3.5)$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade de ordem  $N$ , cujos elementos têm a dimensão de massa, e  $[\Lambda]$  é a matriz diagonal formada pelas frequências naturais de vibração elevadas ao quadrado.

Através da matriz modal, as coordenadas físicas (deslocamentos)  $\{v\}$  são transformadas em coordenadas generalizadas, isto é, fazendo na Eq. 3.1

$$\{v\} = [\Phi] \{Y\}, \quad (3.6)$$

onde  $\{Y\}$  é o vetor de coordenadas generalizadas; pré-multiplicando ambos os lados da Eq. 3.1 por  $[\Phi]^t$  e considerando as Eqs. 3.4 e 3.5, a seguinte equação em coordenadas modais é obtida

$$\{\ddot{Y}\} + [C]\{\dot{Y}\} + [\Lambda]\{Y\} = \{P\}. \quad (3.7)$$

[C] é a matriz de amortecimento generalizada dada por

$$[C] = [\Phi]^t [C] [\Phi] \quad (3.8)$$

e {P} é o vetor de forças generalizadas dado por

$$\{P\} = [\Phi]^t \{p\}. \quad (3.9)$$

Quando o amortecimento do sistema é não-proporcional, [C] não é diagonal. A grandeza relativa dos elementos de fora da diagonal de [C] para os elementos da diagonal de [C] é expressa por

$$\alpha_{ij} = \frac{C_{ij}^2}{C_{ii} C_{jj}}. \quad (3.10)$$

O índice de acoplamento do amortecimento no sistema,  $\alpha$ , é definido como o máximo valor de  $\alpha_{ij}$  e é um dos indicadores de quanto ele é não-proporcional.

A matriz de amortecimento generalizada (não-diagonal) pode ser posta, como a soma de duas matrizes, da seguinte forma

$$[C] = [C_d] + [C_f], \quad (3.11)$$

onde  $[C_d]$  é a matriz diagonal, cujos elementos são os elementos da diagonal de  $[C]$  e  $[C_f]$  tem elementos nulos na diagonal e os correspondentes elementos de fora da diagonal de  $[C]$ . Substituindo  $[C]$  da Eq. 3.11 na Eq. 3.7 obtém-se

$$\{\ddot{Y}\} + [C_d]\{\dot{Y}\} + [A]\{Y\} = \{P\} - [C_f]\{\dot{Y}\}. \quad (3.12)$$

Nesta equação em coordenadas modais, o acoplamento devido ao amortecimento não-proporcional é considerado como um vetor de pseudoforças (  $-[C_f]\{\dot{Y}\}$  ) no segundo membro. Por outro lado, o primeiro membro é desacoplado como ocorre nos sistemas dotados de amortecimento proporcional.

A Eq. 3.12 é resolvida por um processo iterativo, cujo  $k$ -ésimo passo é expresso pela equação

$$\{\ddot{Y}\}^{(k)} + [C_d]\{\dot{Y}\}^{(k)} + [A]\{Y\}^{(k)} = \{P\} - [C_f]\{\dot{Y}\}^{(k-1)}. \quad (3.13)$$

A carga é aproximada por uma poligonal, como foi feito por Ibrahimbegovic e Wilson (1989). Em cada passo, o  $i$ -ésimo elemento de  $\{Y\}^k$ ,  $Y_i^{(k)}$  é calculado exatamente pela integral

$$Y_i^{(k)}(t) = \frac{1}{\omega_{d_i}} \int_0^t \left( P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \dot{Y}_j^{(k-1)} \right) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \sin \omega_{d_i}(t-\tau) d\tau, \quad (3.14)$$

com condições iniciais iguais às condições finais no passo anterior. Na Eq. 3.14,  $\omega_{d_i}$  é a frequência amortecida no  $i$ -ésimo modo de vibração e  $\dot{Y}_j^{(k-1)}$  é a velocidade da  $j$ -ésima coordenada generalizada.

O critério de convergência do processo iterativo estabelecido na Eq. 3.13 para a  $i$ -ésima coordenada é

$$\left| \frac{Y_i^{(k)}(t_j) - Y_i^{(k-1)}(t_j)}{Y_i^{(k)}(t_j)} \right| < \bar{\varepsilon}, \quad (3.15)$$

onde  $\bar{\varepsilon}$  é suficientemente pequeno e  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ) é o tempo discreto no qual a integral é calculada.

Através de diversos exemplos numéricos, observa-se que apenas é necessário verificar a convergência dos valores máximos das coordenadas generalizadas. Assim, o critério de convergência da Eq. 3.15 pode ser mudado para uma condição mais relaxada, expressa por

$$\left| \frac{Y_{i,\max}^{(k)} - Y_{i,\max}^{(k-1)}}{Y_{i,\max}^{(k)}} \right| < \bar{\varepsilon}. \quad (3.16)$$

Por outro lado, uma precisão adequada é obtida no cálculo da

resposta, se o critério de convergência é satisfeito nos modos mais significativos. Esse fato vem reduzir o esforço computacional exigido pelo método. Exemplos numéricos serão apresentados no Capítulo 6.

### 3.3.2 CONDIÇÃO DE CONVERGÊNCIA

Seja  $Y_i^e(t)$  o valor exato da  $i$ -ésima coordenada generalizada no  $k$ -ésimo passo e seja  $Y_i^{a(k)}(t)$  o correspondente valor aproximado no  $k$ -ésimo passo. Os erros na coordenada generalizada aproximada e suas derivadas no  $k$ -ésimo passo do processo iterativo são definidos por

$$\Delta Y_i^{(k)}(t) = Y_i^{a(k)}(t) - Y_i^e(t); \quad (3.17)$$

$$\Delta \dot{Y}_i^{(k)}(t) = \dot{Y}_i^{a(k)}(t) - \dot{Y}_i^e(t); \quad (3.18)$$

$$\Delta \ddot{Y}_i^{(k)}(t) = \ddot{Y}_i^{a(k)}(t) - \ddot{Y}_i^e(t). \quad (3.19)$$

O processo iterativo é convergente se, dado  $\varepsilon$  positivo e arbitrariamente pequeno, existe  $k$ , tal que

$$| \Delta Y_i^{(k)}(t) | < \varepsilon. \quad (3.20)$$

A condição de convergência do processo iterativo é obtida, em seguida, em função das frequências naturais de

vibração e dos elementos das matrizes de massa e de amortecimento generalizadas. A premissa básica para a obtenção da condição de convergência consiste na definição de uma vizinhança de  $Y_i^e(t)$  à qual pertença  $Y_i^{a(k)}(t)$ . A seguinte definição é proposta

$$Y_i^{a(k)}(t) = Y_i^e(t) \pm \zeta_i^{(k)} \text{ sen } (\omega_i t + \theta_k), \quad (3.21)$$

onde  $\zeta_i^{(k)} = | \Delta Y_{i,\max}^{(k)} |$  é o módulo do máximo erro na  $i$ -ésima coordenada generalizada no passo  $k$  e  $\theta_k$  é tal que  $(\omega_i t + \theta_k) = \pi/2$  radianos no instante em que  $\zeta_i^{(k)}$  ocorre. Esta definição é ilustrada na Fig. 3.1 onde é admitido o sinal positivo para o segundo termo da Eq. 3.21.

Considere na Eq. 3.13 a expressão da  $i$ -ésima coordenada generalizada, ou seja,

$$\ddot{Y}_i^{a(k)}(t) + C_{ii} \dot{Y}_i^{a(k)}(t) + \omega_i Y_i^{a(k)}(t) =$$

$$P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \dot{Y}_j^{a(k-1)}(t), \quad (3.22)$$

onde  $P_i$  é a força generalizada no  $i$ -ésimo modo.

A introdução da Eq. 3.21 para o  $(k-1)$ -ésimo passo na Eq. 3.22 conduz a

$$\ddot{Y}_i^{a(k)}(t) + C_{i1} \dot{Y}_i^{a(k)}(t) + \omega_1^2 Y_i^{a(k)}(t) =$$

$$P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \dot{Y}_j^e(t) \mp \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \zeta_j^{(k-1)} \text{sen}(\omega_j t + \theta_{k-1}). \quad (3.23)$$

Por outro lado,  $Y_i^e(t)$  pode ser obtido da Eq. 3.12 como

$$\ddot{Y}_i^e(t) + C_{i1} \dot{Y}_i^e(t) + \omega_1^2 Y_i^e(t) = P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \dot{Y}_j^e(t) \quad (3.24)$$

Subtraindo a Eq. 3.24 da Eq. 3.23 e considerando as Eqs. 3.17, 3.18 e 3.19, obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{Y}_i^{(k)}(t) + C_{i1} \Delta \dot{Y}_i^{(k)}(t) + \omega_1^2 \Delta Y_i^{(k)}(t) = \\ \mp \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \zeta_j^{(k-1)} \text{sen}(\omega_j t + \theta_{k-1}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

A Eq. 3.25 define o histórico de resposta do erro  $\Delta Y_i^{(k)}(t)$ . A resposta permanente da oscilação representada nessa equação é

$$\Delta Y_i^{(k)}(t) = \mp \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{D_{ji}}{\omega_1^2} C_{ij} \zeta_j^{(k-1)} \text{sen}(\omega_j t + \theta_{k-1} + \lambda_k) \quad (3.26)$$

onde  $\lambda_k$  é o ângulo de fase e  $D_{ji}$  é o fator de amplificação dinâmica expresso por

$$D_{ji} = [(1 - \beta_{ji}^2)^2 + (2\xi_1\beta_{ji})^2]^{-1/2} \quad (3.27)$$

e  $\beta_{ji} = \omega_j / \omega_i$  e  $\xi_1 = C_{i1} / (2\omega_i)$ . A resposta transiente desta oscilação decresce rapidamente em face do amortecimento e tem pouco significado na resposta total (Clough e Penzien, 1975). Como o termo em seno na Eq. 3.26 será sempre menor ou igual à unidade, a seguinte condição é deduzida

$$|\Delta Y_i^{(k)}|_{\max} \leq \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{D_{ji}}{\omega_i^2} C_{ij} \zeta_j^{(k-1)} \right|. \quad (3.28)$$

Se  $\zeta^{(k-1)}$  é o maior de todos os erros  $\zeta_j^{(k-1)}$ , a Eq. 3.28 pode ser transformada em

$$|\Delta Y_i^{(k)}|_{\max} = \zeta_i^{(k)} \leq \zeta^{(k-1)} \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{D_{ji}}{\omega_i^2} C_{ij} \right|. \quad (3.29)$$

Consequentemente, o maior erro na resposta aproximada no  $k$ -ésimo passo é menor que o correspondente no  $(k-1)$ -ésimo passo desde que

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{D_{j1}}{\omega_i^2} C_{ij} \right| \leq 1. \quad (3.30)$$

A Eq. 3.30 é a condição de convergência do processo iterativo. A grandeza

$$IC_i = \left[ \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{D_{j1}}{\omega_i^2} C_{ij} \right| \right]^{-1} \quad (3.31)$$

é definida como índice de convergência do modo normal  $i$ . Quanto maior for este índice, maior é a precisão obtida para a  $i$ -ésima coordenada para um dado número de iterações.

### 3.4 MÉTODO DOS COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO PONDERADOS

Roesset et al. (1973) propõem a aplicação do método de superposição modal clássico aos sistemas do tipo solo-estrutura, dotados de amortecimento não-proporcional, conceituando um coeficiente de amortecimento viscoso equivalente no modo  $i$ , assim calculado

$$\xi_{i,eq} = \frac{\sum_j (\xi_j \frac{\omega_1}{\omega_j} + D_j) k_j \Delta_{ij}^2}{\sum_j k_j \Delta_{ij}^2}, \quad (3.32)$$

onde  $\xi_j$  é o coeficiente de amortecimento viscoso do elemento

$j$ ,  $\omega_i$  é a frequência natural de vibração no modo  $i$ ,  $\omega_j$  é a frequência natural de vibração do elemento  $j$ ,  $D_j$  é o coeficiente de amortecimento hysterético do elemento  $j$ ,  $k_j$  é a rigidez do elemento  $j$  e  $\Delta_{ij}$  é a deformação relativa do elemento  $j$  no modo  $i$ . Essa expressão estabelece que o coeficiente de amortecimento equivalente do sistema é obtido pela média ponderada dos coeficientes de amortecimento viscoso e hysterético de seus elementos, tendo como fatores de ponderação as energias de deformação em cada elemento.

### 3.5 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA

A resposta dinâmica de um sistema dotado de amortecimento não-proporcional pode ser obtida por integração direta das equações de movimento. A integração pode ser feita em coordenadas físicas ou em coordenadas modais.

Os métodos de integração direta podem exigir grande esforço computacional, porque a grandeza do intervalo de tempo de integração, da qual depende a estabilidade do método, é função dos períodos de vibração natural do sistema analisado. Ora, em sistemas estruturais em que modos de frequências mais altas sejam significativos na resposta, o intervalo de tempo de integração pode ser de tal ordem reduzido que o esforço computacional envolvido no cálculo da resposta seja muito elevado.

O emprego da integração direta em coordenadas modais permite o uso de truncamento modal, (Clough e Mojtahedi, 1976), reduzindo o custo da análise. Com efeito, considerando-se que apenas os  $q$  primeiros modos de vibração participem significativamente da resposta, faz-se a transformação de coordenadas

$$\{v\} = [\Phi]_q \{Y\}, \quad (3.33)$$

onde  $[\Phi]_q$  é a matriz  $N \times q$ , cujas colunas são as  $q$  primeiras colunas de  $[\Phi]$ .

Considerando as propriedades de ortogonalidade da base modal em relação às matrizes de massa e de rigidez, sendo  $[\Lambda]_q$  a matriz  $q \times q$  diagonal, contendo os quadrados das  $q$  primeiras frequências naturais de vibração, e  $[I]_q$  a matriz identidade de ordem  $q$ , cujos elementos têm a dimensão de massa, a Eq. 3.7 se transforma em

$$[I]_q \{\ddot{Y}\} + [\Phi]_q^t [C] [\Phi]_q \{\dot{Y}\} + [\Lambda]_q \{Y\} = [\Phi]_q^t \{p(t)\} \quad (3.34)$$

onde o superescrito  $t$  indica matriz transposta. A matriz de amortecimento

$$[C] = [\Phi]_q^t [C] [\Phi]_q \quad (3.35)$$

não é diagonal em face do amortecimento não-proporcional. O

sistema de  $q$  equações de movimento acopladas é integrado usando-se um método de integração direta.

### 3.6 ANÁLISE MODAL COM MODOS COMPLEXOS

As equações de movimento de um sistema estrutural, dotado de amortecimento não-proporcional, podem ser desacopladas com uma transformação de coordenadas envolvendo uma base de autovetores complexos. Esse fato deu origem a processos de análise da resposta dinâmica de sistemas estruturais com amortecimento não-proporcional denominados de *análise modal com modos complexos*.

Rigorosamente, os autovetores complexos, extraídos do problema de autovalor associado às equações de movimento do sistema estrutural, não constituem modos de vibração. A interpretação física dos autovetores complexos e das respectivas frequências tem sido objeto de pesquisas recentes, (Veletsos e Ventura, 1986; Chen e Taylor, 1990), visando a tornar esse método mais atrativo para os engenheiros estruturais. Por outro lado, o esforço computacional envolvido na extração de autovetores complexos ( de agora em diante, sempre referidos como modos complexos ) é cerca de oito vezes maior que aquele exigido na extração de modos normais, o que torna a análise modal com modos complexos bastante dispendiosa.

O processo de análise modal com modos complexos,

cuja formulação se dá em seguida, deve-se a Singh e Ghafory-Ashtiany (1986) que tiveram em mente utilizar a álgebra real em lugar da complexa, reduzindo o esforço computacional total exigido pelo método.

A Eq. 3.1, somada à identidade

$$[k]\{\dot{v}\} - [k]\{\dot{v}\} \equiv \{0\}, \quad (3.36)$$

resulta na equação de movimento

$$[A]\{\dot{y}\} - [B]\{y\} = \{P\}, \quad (3.37)$$

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & -[k] \\ [m] & [c] \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [k] & -[0] \\ [0] & [-k] \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

$$\{P\} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{p\} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

e  $\{y\}$  é um vetor de estado de movimento assim definido

$$\{y\} = \begin{bmatrix} \{\dot{v}\} \\ \{v\} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Nesta formulação, utiliza-se, por comodidade, um

vetor de cargas, cuja distribuição temporal é a mesma em todos os graus de liberdade, isto é,

$$\{p(t)\} = \{P\}_o f(t). \quad (3.42)$$

Nesse caso, sendo

$$\{D\} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{P\}_o \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

a equação de movimento do sistema se torna

$$[A]\{\dot{Y}\} - [B]\{Y\} = \{D\}f(t). \quad (3.44)$$

Para desacoplar a Eq. 3.44, resolve-se o problema de autovalor

$$\lambda_j [A]\{\phi\}_j = [B]\{\phi\}_j, \quad j = 1, 2, \dots, 2N, \quad (3.45)$$

onde  $\lambda_j$  é um número complexo e  $\{\phi\}_j$  é um vetor de componentes complexas utilizado na transformação de coordenadas

$$\{Y\} = \sum_1^{2N} \{\phi\}_j Z_j, \quad (3.46)$$

sendo  $Z_j$  a nova coordenada modal complexa. Considerando as propriedades de ortogonalidade das matrizes  $[A]$  e  $[B]$  em relação à base modal, isto é,

$$\{\phi\}_j^t [A] \{\phi\}_j = A_j^*, \quad (3.47)$$

$$\{\phi\}_j^t [B] \{\phi\}_j = B_j^*, \quad (3.48)$$

$$\lambda_j A_j^* = B_j^*, \quad (3.49)$$

a Eq. 3.44, pré-multiplicada por  $\{\phi\}_j^t$ , transforma-se em

$$\dot{Z}_j - \lambda_j Z_j = F_j f(t), \quad (3.50)$$

onde  $F_j$  é o  $j$ -ésimo termo de carga generalizada, dado por

$$F_j = \frac{\{\phi\}_j^t \{D\}}{A_j^*}. \quad (3.51)$$

Singh e Ghafory Asthtiani (1986) propõem um algoritmo pelo qual a solução da Eq. 3.50 é obtida, usando-se apenas álgebra real. A única simplificação introduzida por esse algoritmo refere-se à assimilação da curva  $f(t)$  a uma poligonal, isto é, entre dois instantes  $t_i$  e  $t_{i+1}$  tem-se

$$f(t') = a + bt', \quad (3.52)$$

onde

$$a = f(t_i), \quad (3.53)$$

$$b = \frac{[f(t_i + \Delta t) - f(t_i)]}{\Delta t}, \quad (3.54)$$

sendo  $t' \in [t_i, t_{i+1}]$ . Nesse caso, a Eq. 3.50 é reescrita da seguinte forma

$$\dot{z}_j - \lambda_j z_j = F_j(a + bt'). \quad (3.55)$$

A solução dessa equação diferencial é obtida pela soma de uma solução particular da equação completa,  $z_{jp}$ , com a solução da equação homogênea associada,  $z_{jh}$ . Desse modo, utilizando o método dos coeficientes a determinar na obtenção da solução particular da equação completa, tem-se

$$z_{jp} = -F_j \{ b + \lambda_j ( a + bt' ) \} / \lambda_j^2, \quad (3.56)$$

enquanto a solução da equação homogênea associada é

$$z_{jh} = C_j e^{\lambda_j t}, \quad (3.57)$$

sendo que a constante  $C_j$  é obtida pela condição inicial em cada intervalo, isto é,

$$z_j(t' = 0) = z_j(t_1), \quad (3.58)$$

ou seja,

$$C_j = z_j(t_1) + F_j( b + \lambda_j a ) / \lambda_j^2. \quad (3.59)$$

Desse modo, a Eq. 3.50 tem a seguinte expressão recursiva para o cálculo da resposta em coordenadas generalizadas

$$z_j(t_{i+1}) = \{ z_j(t_i) + F_j( b + \lambda_j a ) / \lambda_j^2 \} e^{\lambda_j t} - F_j \{ b + \lambda_j ( a + b \Delta t ) \} / \lambda_j^2. \quad (3.60)$$

Considerando que o autovalor  $\lambda_j$  pode ser escrito da seguinte forma, (Venâncio-Filho e Claret, 1987),

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_j + s(j) \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}, \quad (3.61)$$

onde  $s(j)$  contém o sinal da parte complexa, e separando as partes real ( índice  $r$  ) e imaginária ( índice  $i$  ), a Eq. 3.60 é escrita em forma matricial

$$\begin{bmatrix} Z_{rj} \\ Z_{ij} \end{bmatrix}_{t_{i+1}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{rj} \\ Z_{ij} \end{bmatrix}_{t_i} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t_i) \\ f(t_{i+1}) \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

onde  $A_{mn}$  e  $B_{mn}$ ,  $m, n = 1, 2$ , são calculados em função do termo de carga generalizada  $F_j$  e do autovalor  $\lambda_j$ , pelas expressões

$$A_{11} = \Gamma \cos(\mu), \quad (3.63)$$

$$A_{12} = -\Gamma s(j) \operatorname{sen}(\mu), \quad (3.64)$$

$$A_{21} = -A_{12}, \quad (3.65)$$

$$B_{11} = \Gamma [(c_j - e_j/\Delta t) \cos(\mu) - (d_j - f_j/\Delta t) \operatorname{sen}(\mu)] + e_j/\Delta t, \quad (3.66)$$

$$B_{12} = \Gamma [(e_j \cos(\mu) - f_j s(j) \operatorname{sen}(\mu)]/\Delta t - c_j - e_j/\Delta t, \quad (3.67)$$

$$B_{21} = \Gamma [(c_j - e_j/\Delta t) s(j) \operatorname{sen}(\mu) - (d_j - f_j/\Delta t) \cos(\mu)] + f_j/\Delta t, \quad (3.68)$$

$$B_{22} = \Gamma [(e_j s(j) \operatorname{sen}(\mu) + f_j \cos(\mu)]/\Delta t - d_j - f_j/\Delta t, \quad (3.69)$$

onde foram tomadas as seguintes definições

$$\Gamma = e^{-\beta_j \omega_j \Delta t}, \quad (3.70)$$

$$\mu = \omega_{dj} \Delta t, \quad (3.71)$$

$$\omega_{dj} = \omega_j (1 - \beta_j^2)^{1/2}, \quad (3.72)$$

$$F_j / \lambda_j = c_j + id_j, \quad (3.73)$$

$$F_j / \lambda_j^2 = e_j + if_j. \quad (3.74)$$

### 3.7 ANÁLISE MODAL APROXIMADA

Warburton e Soni (1977) para aplicar o método de superposição modal aos sistemas dotados de amortecimento não-proporcional, estudam a influência do simples abandono dos termos de fora da diagonal da matriz de amortecimento generalizada na precisão da resposta obtida. Concluem que o coeficiente de amortecimento viscoso em um modo  $r$ ,  $\xi_r$ , deve obedecer a seguinte relação

$$\xi_r < \varepsilon \left| \frac{C_{rr}}{2C_{rs}} \left[ \frac{\omega_s^2}{\omega_r^2} - 1 \right] \right|_{\min}, \quad (3.76)$$

para que a resposta obtida tenha um erro máximo  $\varepsilon$  em relação à resposta obtida por métodos considerados exatos, onde o índice "min" refere-se ao valor mínimo da expressão, enquanto  $s$  toma valores de 1 a  $N$  exceto  $r$ , sendo  $\omega_r$  e  $\omega_s$  as frequências naturais de vibração nos modos  $r$  e  $s$ ;  $C_{rr}$  e  $C_{rs}$  são elementos da matriz de amortecimento generalizada.

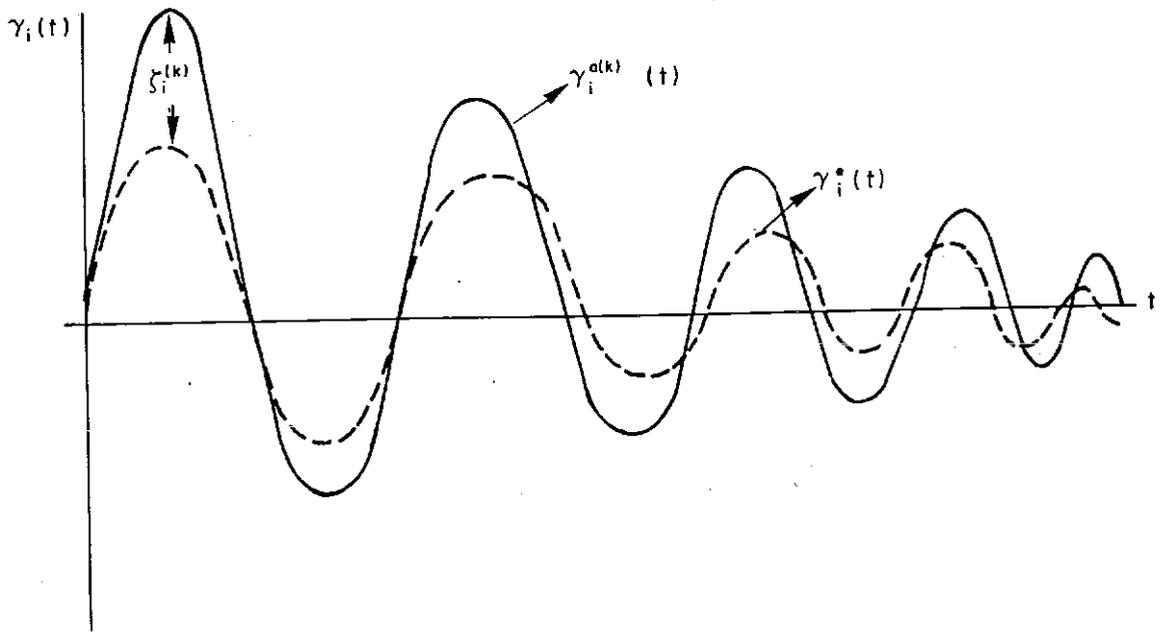


Fig. 3.1 - Respostas exata e aproximada no processo iterativo.

## 4. FORMULAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA DE SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA COM A TRANSFORMADA DE FOURIER IMPLÍCITA

### 4.1 INTRODUÇÃO

A resposta dinâmica no domínio da frequência envolve a transformação de séries temporais discretas em séries frequenciais discretas e vice-versa. Essas transformações são feitas, em geral, com o emprego da transformada de Fourier. O algoritmo "Fast Fourier Transform", abreviadamente FFT, introduzido por Cooley e Tukey (1965), tem largo emprego na análise dinâmica no domínio da frequência. Na verdade, o algoritmo FFT veio tornar a análise linear no domínio da frequência computacionalmente competitiva com a análise no domínio do tempo. Com efeito, o cálculo direto das transformadas discretas de Fourier de uma série temporal com  $n$  termos, envolve um número de operações de adição e multiplicação de complexos da ordem de  $n^2$ , (Newland, 1975), enquanto o algoritmo FFT exige  $n \log_2 n$  operações de cada tipo.

Entretanto, o algoritmo FFT, a despeito de ter otimizado o consumo de tempo na execução da transformada de

Fourier, apresenta a desvantagem de exigir um número de termos na série igual a  $N = 2^n$ ,  $n$  inteiro. Ora, sendo a precisão da resposta uma função do número  $N$ , entre dois valores sucessivos de  $N$ , pode-se ter um acréscimo muito grande na área de armazenamento e no esforço computacional exigido. Por outro lado, o histórico de deslocamentos obtido através da formulação da resposta dinâmica no domínio da frequência com a FFT clássica é necessariamente composto de  $N$  termos, quando, em geral, um número muito menor é suficiente para captar o comportamento físico do sistema.

Nesse Capítulo, apresenta-se uma formulação do cálculo da resposta dinâmica no domínio da frequência na qual o número de termos na resposta é arbitrariamente escolhido e a única condição imposta sobre o número  $N$  é que ele seja ímpar. Como se demonstra, mesmo essa condição, imposta pelo rigor matemático da formulação, será numericamente relaxada.

Uma importante característica da formulação proposta está no fato de as transformadas discretas de Fourier serem executadas implicitamente, no mesmo procedimento que conduz à resposta no domínio da frequência. Esse fato torna a formulação apresentada particularmente vantajosa na análise dinâmica não-linear no domínio da frequência. Se a não-linearidade é tratada por um processo de pseudoforças, (Kawamoto, 1983; Darbre e Wolf, 1986), a cada iteração apenas o vetor de forças nodais será

recalculado, enquanto na formulação clássica, além de recalcular o vetor de forças nodais, a subrotina que executa a FFT seria chamada duas vezes. Se a análise não-linear é feita por um processo de linearização passo a passo (Venâncio-Filho e Claret, 1991), a cada etapa, atualiza-se a rigidez e o vetor de condições iniciais transformadas.

## 4.2 FORMULAÇÃO MATRICIAL

Seja um sistema estrutural de um grau de liberdade, Fig. 4.1, submetido à ação de uma carga  $p(t)$ . Sejam  $v_0$  e  $\dot{v}_0$  as condições iniciais do movimento do sistema. A resposta do sistema consiste na determinação do vetor

$$\{v\} = \{ v_0 \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{N-1} \}^t \quad (4.1)$$

em que o superescrito  $t$  indica vetor transposto. Visando à execução de análise não-linear por segmentação, onde o deslocamento e a velocidade no fim de um segmento são as condições iniciais para o segmento seguinte, inclui-se na formulação o cálculo das velocidades que são as componentes do vetor

$$\{\dot{v}\} = \{ \dot{v}_0 \ \dot{v}_1 \ \dot{v}_2 \ \dots \ \dot{v}_{N-1} \}^t. \quad (4.2)$$

Sendo a função de carga dada em forma discreta pela série

$p_0, p_1, p_2, \dots, p_{N-1}$ , a obtenção da resposta dinâmica no domínio da frequência se inicia pelo cálculo de sua transformada que resulta na série complexa

$$P_m = P(\omega_m) = \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} p_n e^{-i\alpha mn} \quad (4.3)$$

em que  $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $\omega_m$  é a  $m$ -ésima frequência (para facilitar a notação, as frequências do espectro de resposta serão denotadas por  $\omega_m$ ,  $m$  indicando a ordem da frequência, e a frequência natural de vibração será denotada por  $\omega$ ) discreta do espectro dada por

$$\omega_m = \mu \Delta\omega = \mu \frac{2\pi}{N\Delta t}, \quad (4.4)$$

onde  $\mu$  é um multiplicador, função de  $m$ , dado na Tabela 4.1 para  $N$  par, e na Tabela 4.2, para  $N$  ímpar, e  $\alpha$  é

$$\alpha = \frac{2\pi}{N}. \quad (4.5)$$

A introdução das condições iniciais, após integrações por partes, resulta em uma série complexa cujo termo genérico é

$$\bar{P}_m = P_m + M\dot{v}_o + i\omega_m Mv_o + C(\omega_m)v_o, \quad (4.6)$$

sendo  $i$  a unidade imaginária. Em seguida, calcula-se a série

função de resposta complexa em frequência ou função de transferência dada por

$$H_m = \{ K [ (1-\beta_m^2) + i2\xi\beta_m ] \}^{-1}, \quad (4.7)$$

com  $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , onde  $\beta_m$  é a relação da frequência  $\omega_m$  para a frequência natural do sistema,  $\omega$ . Tem-se então a série complexa

$$V_m = H_m \bar{P}_m, \quad m = 0, N-1, \quad (4.8)$$

cuja transformada inversa é o histórico dos deslocamentos

$$v_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} V_m e^{i\alpha_{mn}} \quad (4.9)$$

sendo  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . O histórico de velocidades pode ser determinado tomando-se a transformada inversa da sequência complexa

$$V'_m = i\omega H_m \bar{P}_m, \quad m = 0, N-1, \quad (4.10)$$

ou seja,

$$\dot{v}_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} V'_m e^{i\alpha_{mn}}, \quad n = 0, N-1. \quad (4.11)$$

Considerando a Eq. 4.3, a Eq. 4.6 pode ser escrita na seguinte forma

$$\bar{P}_m = \Delta t ( p_o + p_1 e^{-i\alpha m} + \dots + p_n e^{-i\alpha mn} + \dots + p_{N-1} e^{-i\alpha m(N-1)} ) + M\dot{v}_o + i\omega_m Mv_o + C(\omega_m)v_o. \quad (4.12)$$

Ou seja, a série  $\bar{P}_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , pode ser obtida através das operações matriciais (observando que a barra superior não é necessária na notação vetorial)

$$\{P\} = \Delta t.$$

$$\begin{bmatrix} e^0 & e^0 & \dots & e^0 & \dots & e^0 \\ e^0 & e^{-i\alpha} & \dots & e^{-i\alpha n} & \dots & e^{-i\alpha(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e^0 & e^{-i\alpha m} & \dots & e^{-i\alpha mn} & \dots & e^{-i\alpha m(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e^0 & e^{-i\alpha(N-1)} & \dots & e^{-i\alpha n(N-1)} & \dots & e^{-i\alpha(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o \\ p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_o \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_m \\ \vdots \\ Q_{N-1} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

em que

$$\{Q_m\} = M\dot{v}_o + i\omega_m Mv_o + C(\omega_m)v_o. \quad (4.14)$$

Portanto, em notação compacta, escreve-se

$$\{P\} = \Delta t [E^*] \{p\} + \{Q\} \quad (4.15)$$



$$\{v\} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} [E] \{V\} \quad (4.21)$$

onde  $[E]$  é a matriz

$$[E] = [ E_{nm} ], \quad (4.22)$$

sendo

$$E_{nm} = e^{i\alpha_{nm}} = \text{conjg} ( E_{mn}^* ), \quad (4.23)$$

onde o operador **conjg** retorna o complexo conjugado de seu argumento. Porém, considerando as Eqs. 4.15 e 4.18, o histórico dos deslocamentos é obtido pela expressão

$$\{v\} = \frac{1}{K} \left[ \frac{\Delta\omega}{2\pi} [E][h] ( \Delta t [E^*]\{p\} + \{Q\} ) \right] \quad (4.24)$$

Ora, sendo  $T_N$  o período da função de carga, tem-se

$$\frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{T_N} \quad (4.25)$$

e

$$\frac{\Delta\omega \Delta t}{2\pi} = \frac{1}{N}, \quad (4.26)$$

o que levado na Eq. 4.24 resulta em

$$\{v\} = \frac{1}{K} \left[ \frac{1}{N} [E][h] \left( [E]^* \{p\} + \frac{1}{T_N} Q \right) \right] \quad (4.27)$$

ou seja, definindo-se os vetores

$$\{p^*\} = \{p\} / N \quad (4.28)$$

e

$$\{Q^*\} = \{Q\} / T_N, \quad (4.29)$$

tem-se

$$\{v\} = \frac{1}{K} \left[ [E][h] \left( [E]^* \{p^*\} + \{Q^*\} \right) \right]. \quad (4.30)$$

O histórico de velocidades é obtido de forma análoga pela expressão

$$\{\dot{v}\} = \frac{1}{K} \left[ [E][h'] \left( [E]^* \{p^*\} + \{Q^*\} \right) \right], \quad (4.31)$$

onde  $[h'] = \text{diag} [ i\omega h_m ]$  sendo que o operador **diag** indica matriz diagonal.

Os produtos  $[E][h][E]^*$  e  $[E][h]\{Q^*\}$  resultam em quantidades reais como se demonstra em seguida. Os elementos

$E_{jk}$  de  $[E]$  têm a seguinte definição

$$E_{jk} = e^{i\alpha_j k} \quad (4.32)$$

onde  $j, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Portanto, em uma linha  $j$  de  $[E]$ , o elemento  $E_{j0}$  é igual à unidade. Os demais elementos da linha  $j$ , se  $N$  é ímpar, são tais que

$$E_{j(N-k)} = \text{conjg} ( E_{jk} ). \quad (4.33)$$

Se  $N$  é par, o elemento  $E_{j(N/2)}$  também é real, enquanto os demais satisfazem a Eq. 4.33. Com efeito, por definição tem-se

$$E_{j(N-k)} = \cos(\alpha_j N) \cos(\alpha_j k) + \text{sen}(\alpha_j N) \text{sen}(\alpha_j k) + \\ + i [ \text{sen}(\alpha_j N) \cos(\alpha_j k) - \text{sen}(\alpha_j k) \cos(\alpha_j N) ]. \quad (4.34)$$

Porém, como  $\alpha_j N = 2\pi$ , a Eq. 4.33 simplifica-se para

$$E_{j(N-k)} = \cos(\alpha_j k) - i \text{sen}(\alpha_j k) = \text{conjg} ( E_{jk} ). \quad (4.35)$$

Por outro lado, tendo-se em vista o espectro das  $N$  frequências discretas utilizadas na transformada de Fourier, conforme a Tabela 4.1, para  $N$  par, e conforme a Tabela 4.2, para  $N$  ímpar, conclui-se que  $h_0$  é real e os demais elementos de  $[h]$  são tais que

$$h_{(N-k)} = \text{conjg} ( h_k ). \quad (4.36)$$

Porém, se  $N$  é par,  $h_{N/2}$  não tem complexo conjugado entre os elementos de  $[h]$ .

Adotando-se o superescrito  $c$  para indicar o complexo conjugado de um elemento, o produto  $[E] [h]$  resulta em uma matriz intermediária cuja  $j$ -ésima linha é, para  $N$  par e  $N$  ímpar, respectivamente

$$\{ 1 \ E_{j1} h_{11} \ E_{j2} h_{22} \ \dots \ E_{j(N/2)} h_{N/2} \ \dots \ E_{j2}^c h_{22}^c \ E_{j1}^c h_{11}^c \}, \quad (4.37)$$

$$\{ 1 \ E_{j1} h_{11} \ E_{j2} h_{22} \ \dots \ E_{j2}^c h_{22}^c \ E_{j1}^c h_{11}^c \}. \quad (4.38)$$

Em consequência, o produto da  $j$ -ésima linha de  $[E] [h]$  pela  $k$ -ésima linha de  $[E]^*$  é, se  $N$  é par, vale

$$\{ 1 + E_{j1} h_{11} E_{1k}^* + \dots + E_{j(N/2)} h_{N/2} E_{(N/2)k}^* + \dots + E_{j1}^c h_{11}^c E_{1k}^{*c} \}, \quad (4.39)$$

ou, se  $N$  é ímpar, vale

$$\{ 1 + E_{j1} h_{11} E_{1k}^* + E_{j2} h_{22} E_{2k}^* + \dots + E_{j2}^c h_{22}^c E_{2k}^{*c} + E_{j1}^c h_{11}^c E_{1k}^{*c} \}. \quad (4.40)$$

Os produtos do tipo  $( E_{jm} h_m E_{mk}^* )$  e  $( E_{jm}^c h_m^c E_{mk}^{*c} )$  são complexos conjugados; portanto, se  $N$  é ímpar, todos os elementos do triplo produto  $[E] [h] [E]^*$  são reais; se  $N$  é par, apenas o elemento central  $E_{j(N/2)} h_{N/2} E_{(N/2)k}^*$  é

complexo. As mesmas conclusões se aplicam aos produtos matriciais  $[E] [h] \{Q^*\}$ ,  $[E] [h'] [E]^*$  e  $[E] [h'] \{Q^*\}$ .

### 4.3 INFLUÊNCIA DO NÚMERO $N$ NA RESPOSTA

Observa-se que na formulação proposta o número de termos  $N$  deve ser ímpar. Porém,  $N$  par, e no caso da FFT,  $N$  igual a uma potência inteira de 2, traz ao algoritmo grandes vantagens numéricas. Se  $N$  é par, o termo complexo introduzido na resposta vem de  $h_{N/2}$  que é igual a

$$h_{N/2} = [ (1 - \beta_{N/2}^2) + i2\xi\beta_{N/2} ]^{-1}, \quad (4.41)$$

onde

$$\beta_{N/2} = \frac{(N/2)\Delta\omega}{\omega} = \frac{N}{2\omega} \frac{2\pi}{N\Delta t} = \frac{\pi}{\omega \Delta t}. \quad (4.42)$$

Seja, para o sistema em análise e para o valor  $\Delta t$  utilizado, definido o produto

$$\theta = \omega \Delta t. \quad (4.43)$$

Nesse caso,  $h_{N/2}$  se transforma em

$$h_{N/2} = \frac{[1 - (\pi^2/\theta^2)] - i2\xi(\pi/\theta)}{[1 - (\pi^2/\theta^2)]^2 + 4\xi^2(\pi^2/\theta^2)}. \quad (4.44)$$

Verifica-se que a grandeza da parte complexa de  $h_{N/2}$  depende da grandeza relativa de  $\theta$  e  $\pi$ , e do coeficiente de amortecimento  $\xi$ . Sendo T o período de vibração natural do sistema, pode-se escrever

$$\theta = 2\pi \frac{\Delta t}{T} . \quad (4.45)$$

Portanto, na Eq. 4.44, é razoável admitir-se que podem ocorrer duas situações de interesse do ponto de vista numérico, a saber:

a)-  $\theta \ll \pi$ , isto é,  $(\Delta t/T) \ll 1/2$ . Então, o denominador da Eq. 4.44 simplifica-se para

$$[1 - (\pi^2/\theta^2)]^2 + 4\xi^2(\pi/\theta^2) \cong \frac{\pi^4}{\theta^4} . \quad (4.46)$$

Logo,  $h_{N/2}$  simplifica-se para

$$h_{N/2} \cong \frac{\theta^4}{\pi^4} - \frac{\theta^2}{\pi^2} - i2\xi \frac{\theta^3}{\pi^3} . \quad (4.47)$$

Como  $\theta/\pi$  é pequeno,  $h_{N/2}$  é numericamente nulo.

b)-  $\theta \cong \pi$ , isto é,  $(\Delta t/T) \cong 1/2$ . Nesse caso, tem-se

$$h_{N/2} \cong \frac{-i2\xi(\pi/\theta)}{4\xi^2(\pi^2/\theta^2)} = \frac{-i}{2\xi} \quad (4.48)$$

ou seja,  $h_{N/2}$  é um número complexo cuja grandeza pode ser significativa dependendo do valor de  $\xi$ . Entretanto, a relação  $\Delta t/T \cong 1/2$  é muito elevada, deixando de ter significado prático.

Outro aspecto da influência de  $N$  sobre a precisão da resposta é o seu efeito sobre a função de transferência, isto é, em módulo,

$$| H_m | = \{ K [(1-\beta_m^2) + (2\xi\beta_m)^2] \}, \quad (4.49)$$

isto é,  $| H_m |$  é uma função de  $\beta_m$  e  $\xi$  e, de modo semelhante ao fator de amplificação dinâmica (Clough e Penzien, 1975), é muito sensível a uma variação de  $\beta$  nas vizinhanças da frequência de ressonância, para pequenos valores de  $\xi$ . Escrevendo  $\beta_m$  em função dos números  $N$  e  $m$ , tem-se

$$\beta_m = m \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{m T}{N\Delta t} . \quad (4.50)$$

Definindo  $\sigma$  como a relação entre o intervalo de tempo adotado na análise e o período natural de vibração da estrutura, ou seja,

$$\Delta t/T = \sigma, \quad (4.51)$$

tem-se, para número de termos iguais a  $N-1$ ,  $N$  e  $N+1$ , respectivamente,

$$\beta_{m1} = \frac{m}{(N-1)\sigma}, \quad (4.52a)$$

$$\beta_{m2} = \frac{m}{N\sigma}, \quad (4.52b)$$

$$\beta_{m3} = \frac{m}{(N+1)\sigma}. \quad (4.52c)$$

Os valores de  $\beta_{m1}$  e  $\beta_{m3}$  não são equidistantes de  $\beta_{m2}$  o que se observa calculando as diferenças

$$|\Delta\beta_{12}| = |\beta_{m1} - \beta_{m2}| = \frac{m}{N(N-1)\sigma}, \quad (4.53a)$$

$$|\Delta\beta_{32}| = |\beta_{m3} - \beta_{m2}| = \frac{m}{N(N+1)\sigma}. \quad (4.53b)$$

Logo, os valores absolutos de  $H_m$  calculados com números de termos  $N-1$ ,  $N$  e  $N+1$ , sendo  $N$  par, apresentarão diferenças, Fig. 4.2, que podem ser significativas nas proximidades da frequência de ressonância, dependendo da grandeza do coeficiente de amortecimento viscoso.

Para verificar este fato numericamente, toma-se um sistema linear de um grau de liberdade com as seguintes propriedades: rigidez  $K = \pi^3$  N/m e massa  $M = \pi$  kg. O sistema tem frequência natural  $\omega = \pi$  rad/s e período  $T = 2.0$  s.

Analisa-se a influência de  $n$  sobre a função de transferência  $H(\omega)$ . Como faz Kawamoto (Kawamoto, 1983), a função de transferência  $H(\omega)$  é adimensionalizada, multiplicando-a por  $(4\pi^2/\Delta t^2)M$ , gerando  $H(\Omega)$ , sendo  $\Omega = \omega\Delta t$ . Gráficos da amplitude da função de transferência e de seu argumento são apresentados nas Figs. 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 para diferentes valores da relação  $\Delta t/T$ ,  $T$  período natural de vibração,  $\xi$  e  $n$ . Em geral, observa-se que, para porcentagens de amortecimento maiores que 10%, os módulos e argumentos de  $H(\Omega)$  não se alteram significativamente com  $n$ . Para  $\xi \leq 1\%$  observa-se um afastamento acentuado entre os valores do módulo e do argumento da função  $H(\Omega)$ , obtidos considerando  $n$ ,  $n-1$  e  $n+1$  frequências. Em termos práticos, para  $n \geq 1000$  e  $\xi \geq 1\%$ , já não se observam diferenças significativas em  $ABS(H)$  para  $n$ ,  $n-1$  e  $n+1$ .

### 4.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A Eq. 4.30 representa um processo de cálculo da resposta dinâmica no domínio da frequência em que as transformadas discretas de Fourier, tanto no sentido direto quanto no sentido inverso, são executadas implicitamente. Desse fato decorre a principal vantagem numérica dessa formulação, quando aplicada à análise não-linear, porquanto evita a repetição de cálculos de números complexos do tipo  $\cos(\alpha mn) \pm i \sin(\alpha mn)$ .

A implementação computacional da formulação proposta consiste no estabelecimento de uma rotina para a execução das Eqs. 4.30 e 4.31. Inicialmente, seja  $S$  o número de deslocamentos  $v(t_n)$  que se deseja na resposta. Nesse caso, o vetor  $\{v\}$  é de ordem  $(S \times 1)$ ; em consequência,  $[E]$  é uma matriz retangular de ordem  $(S \times N)$ ,  $[h]$  é uma matriz diagonal de ordem  $(N \times N)$  e  $[E]^*$  é uma matriz retangular de ordem  $(N \times S)$ ; o vetor de cargas  $\{p^*\}$  é de ordem  $(S \times 1)$  e o vetor de condições iniciais transformadas  $\{Q^*\}$  é de ordem  $(N \times 1)$ .

As matrizes  $[E]$  e  $[E]^*$  têm propriedades notáveis como mostram as Eqs. 4.23 e 4.33. Da Eq. 4.33, conclui-se que a matriz  $[E]$  compõe-se das submatrizes  $[E]_1$  e de sua conjugada  $[E]_1^c$ ; a Eq. 4.23, estabelece que a matriz  $[E]^*$  é formada pelas submatrizes  $([E]_1^c)^t$  e  $[E]_1^t$ , conforme ilustra a Fig. 4.15.

A adoção de  $N$  par traz muitas vantagens do ponto de vista da implementação computacional do método proposto. No caso de  $N$  múltiplo de 4, uma propriedade importante na geração da matriz  $[E]$  é

$$E_{j(N/2-k)} = (-1)^j \text{conjg}(E_{jk}). \quad (4.54)$$

Portanto, adotando-se  $N$  par, a geração da matriz  $[E]$  pode ser feita apenas para  $j = 1, 2, \dots, S$  e  $k = 1, 2, \dots, N/4$ , conforme se observa no seguinte programa em FORTRAN:

```

      PI = 3.14159265
      ALFA = 2*PI/N
      NP = N/4
      DO 10 J = 1, NP
      E(1,J) = CMPLX(1.0, 0.0)
10  CONTINUE
      DO 20 K = 1, S
      E(K,1) = CMPLX(1.0, 0.0)
20  CONTINUE
      AUX = ( COS(ALFA), SEN(ALFA) )
      DO 30 K = 2, NP
      E(2,K) = AUX * E(2, K-1)
30  CONTINUE
      DO 40 J = 3, S
      AUX = E(2,J)
      DO 40 K =2, NP
      E(J,K) = AUX * E(J, K-1)
40  CONTINUE

```

Como se observa, as funções  $\text{sen}$  e  $\text{cos}$  são chamadas uma única vez, reduzindo sensivelmente o esforço computacional. Com efeito, nessa etapa o número de produtos de complexos realizado é da ordem de  $N S / 4$ .

O cálculo da resposta do sistema, Eqs. 4.30 e 4.31, é mostrado no seguinte trecho de programa para  $N$  par, cuja notação é análoga à empregada no texto, sendo  $C_1$  e  $C_2$  constantes complexas auxiliares e  $W(j)$  a  $j$ -ésima frequência do espectro ( $j=1,2,\dots,N$ ):

```

C1 = (0.0, 0.0)
C2 = (0.0, 0.0)
L = 1
DO 60 J = 1, NP
L = -1 * L
DO 50 K = 1, S
CS = CONJG(E(K,J)) * P(K)
C1 = C1 + CS
C2 = C2 + L * CS
50 CONTINUE
H(J) = (C1/N + Q/T) * H(J)
H(J+N/2) = (C2/N + Q/T) * H(J+N/2)
60 CONTINUE
L = 1
DO 80 J = 1, S
L = -1 * L
AUX = CMPLX(0.0, W(J))
DO 70 K = 1, NP
CC = E(J,K) * H(K)
C1 = C1 + CC
C2 = C2 + CC
70 CONTINUE
UU = C1 + L * C2
U(J) = 2.0 * REAL(UU)
V(J) = 2.0 * REAL(UU * AUX)
80 CONTINUE

```

Para implementar computacionalmente a propriedade dada pela Eq. 4.54, faz-se  $L = -1 * L$  a cada incremento de  $J$  o que vai corresponder ao termo  $(-1)^J$  naquela equação.

Na formulação proposta as funções seno e cosseno

são calculadas apenas uma vez, enquanto na geração da matriz [E] são necessários  $(S + 1)N/4$  produtos de complexos. Na sequência de produtos matriciais para cálculo da resposta, estão envolvidas  $(5S + 2)N/2$  operações de multiplicação e soma de complexos. Portanto, o número total de operações é  $(11S + 5)N/4$ .

Em um processo equivalente de cálculo da resposta de um sistema dinâmico linear, usando a FFT, o número de operações de multiplicação e de adição de complexos é, seguindo Newland (1975),  $N(1 + 4 \log_2 N)$ . Mas, neste processo, as funções seno e cosseno são chamadas  $4N \log_2 N$  vezes. Seja  $\nu$  a relação entre o tempo de processamento necessário para calcular  $N$  senos e cossenos e o tempo para efetuar  $N$  produtos ou adições de complexos. Assim, o número total de operações de produtos ou adições equivalentes na formulação clássica é  $N + 4(1 + \nu)N \log_2 N$ . Considerando  $N = 2^m$ ,  $m$  inteiro, para que o cálculo da resposta linear com o algoritmo proposto seja mais rápido que o correspondente com o algoritmo FFT, é necessário que

$$(11S + 5)N/4 \leq [1 + 4m(1 + \nu)]N \quad (4.55)$$

ou seja, o número de termos  $S$  na resposta deve ser em ordem de grandeza

$$S \leq 1.5 (1 + \nu)m. \quad (4.56)$$

Como  $n$  é grande, em geral essa expressão conduz a um número de termos na resposta suficiente para captar o comportamento do sistema estrutural.

Tabela 4.1 - Frequências discretas ( $N$  par).

$m$	$\mu$	$\omega_m$
0	0	0
1	1	$\Delta\omega$
2	2	$2\Delta\omega$
...	...	...
$(N/2 - 1)$	$(N/2 - 1)$	$(N/2 - 1)\Delta\omega$
$N/2$	$N/2$	$(N/2)\Delta\omega$
$(N/2 + 1)$	$-(N/2 - 1)$	$-(N/2 - 1)\Delta\omega$
...	...	...
$N - 2$	-2	$-2\Delta\omega$
$N - 1$	-1	$-\Delta\omega$

Tabela 4.2 - Frequências discretas ( $N$  ímpar).

$m$	$\mu$	$\omega_m$
0	0	0
1	1	$\Delta\omega$
2	2	$2\Delta\omega$
...	...	...
$(N - 1)/2$	$(N - 1)/2$	$[(N - 1)/2]\Delta\omega$
$(N + 1)/2$	$-(N - 1)/2$	$[-(N - 1)/2]\Delta\omega$
...	...	...
$(N-2)$	-2	$-2\Delta\omega$
$(N-1)$	-1	$-\Delta\omega$

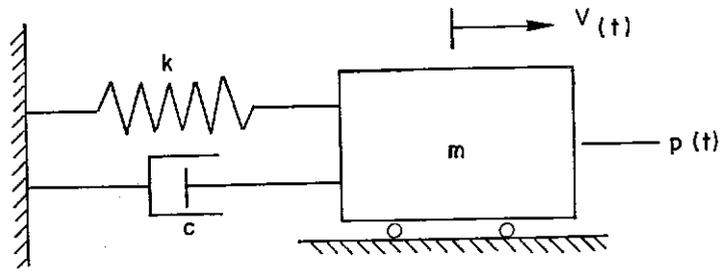


Fig. 4.1 - Sistema de um grau de liberdade.

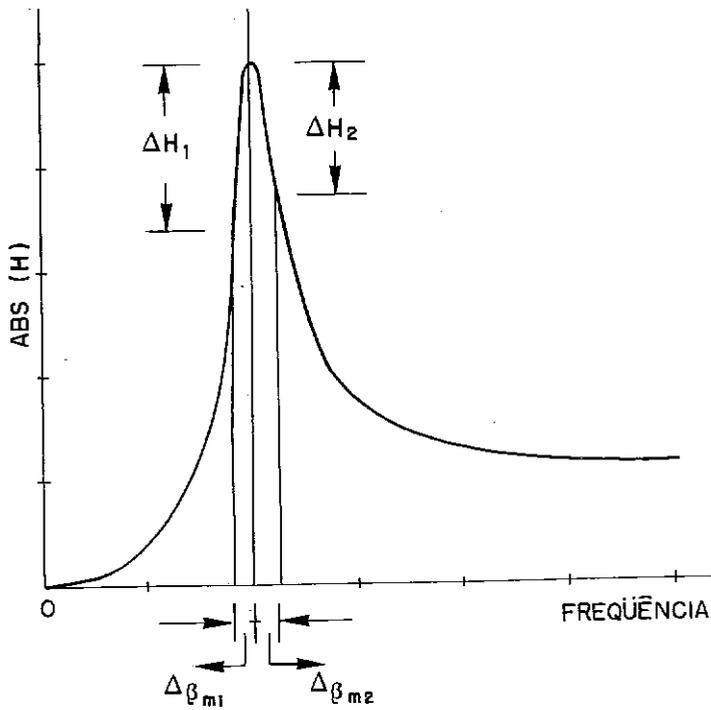


Fig. 4.2 - Diferenças em  $|H(\Omega)|$  em função do número de termos na série.

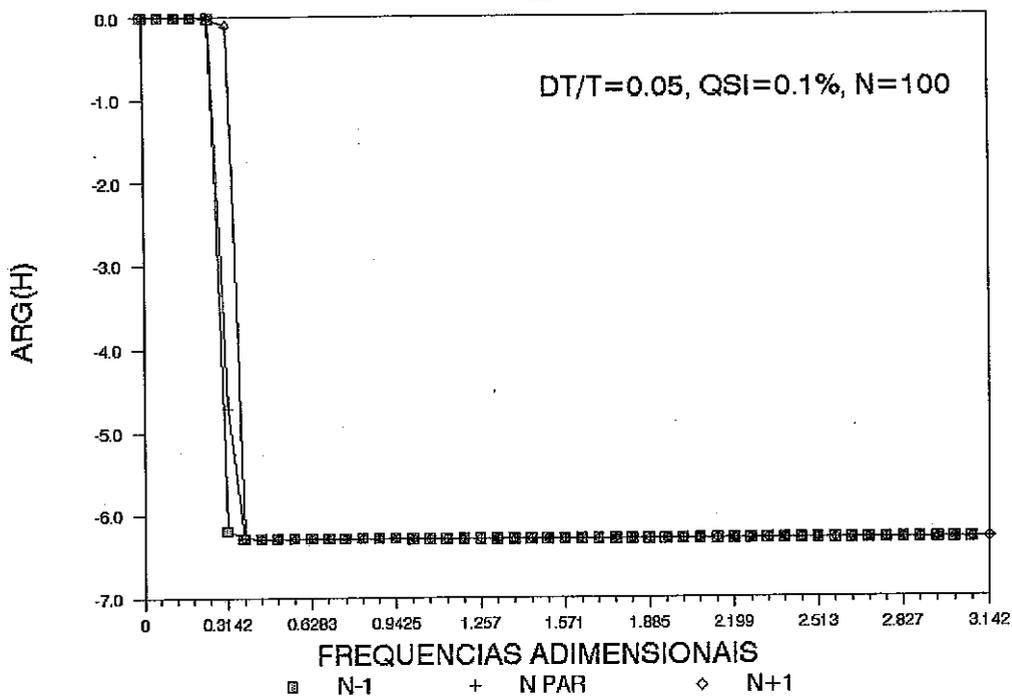
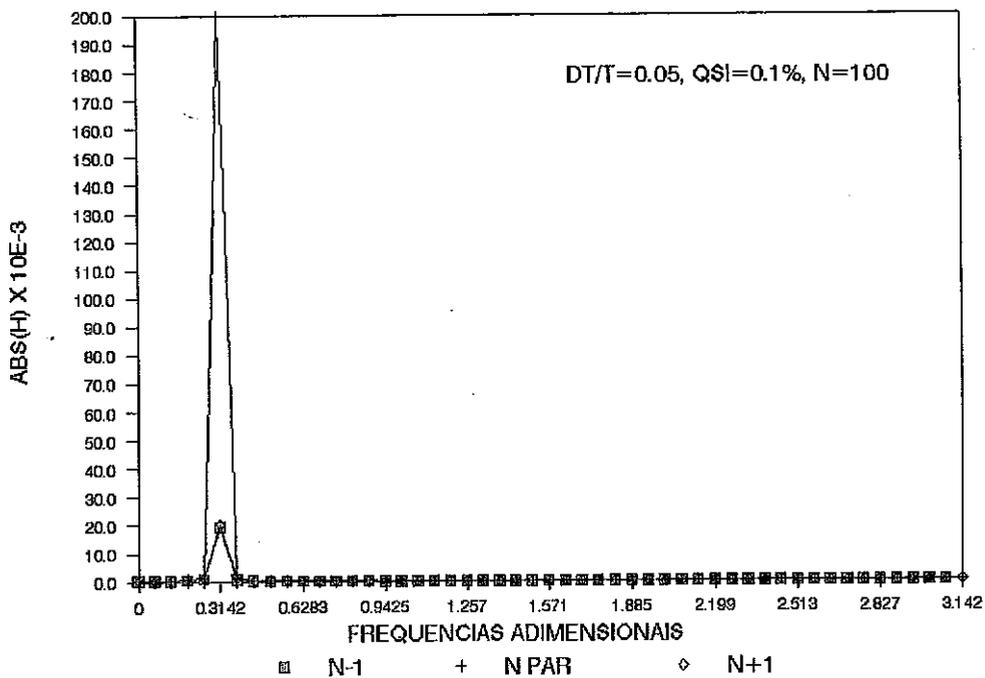


Fig. 4.3 - Amplitude e argumento de  $H(\Omega)$  para  $\Delta t/T = 0.05$ ,  $n = 100$  e 0.1% de amortecimento viscoso.

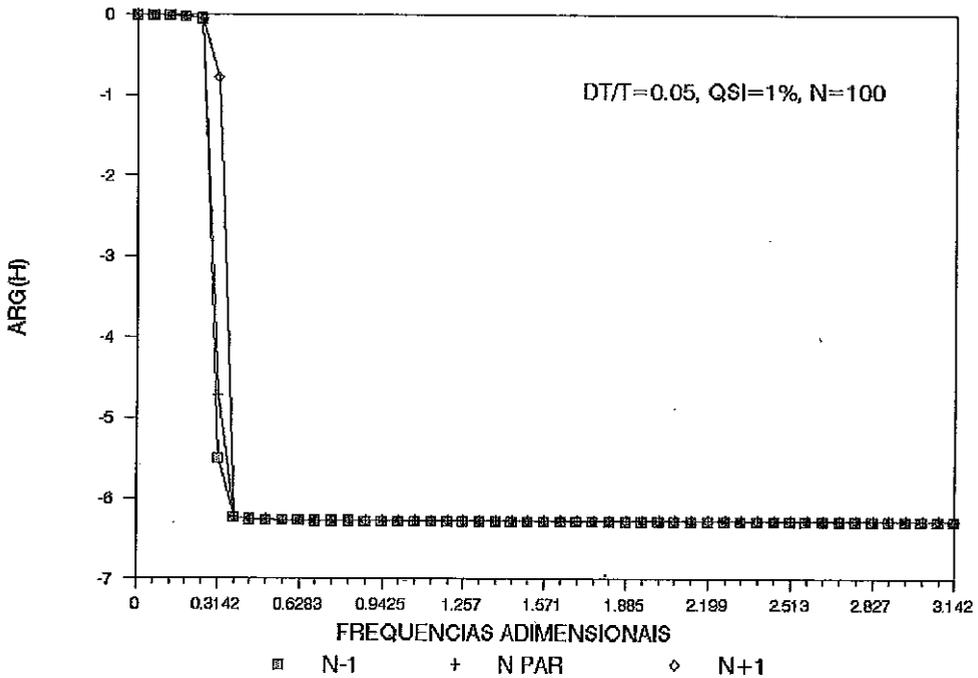
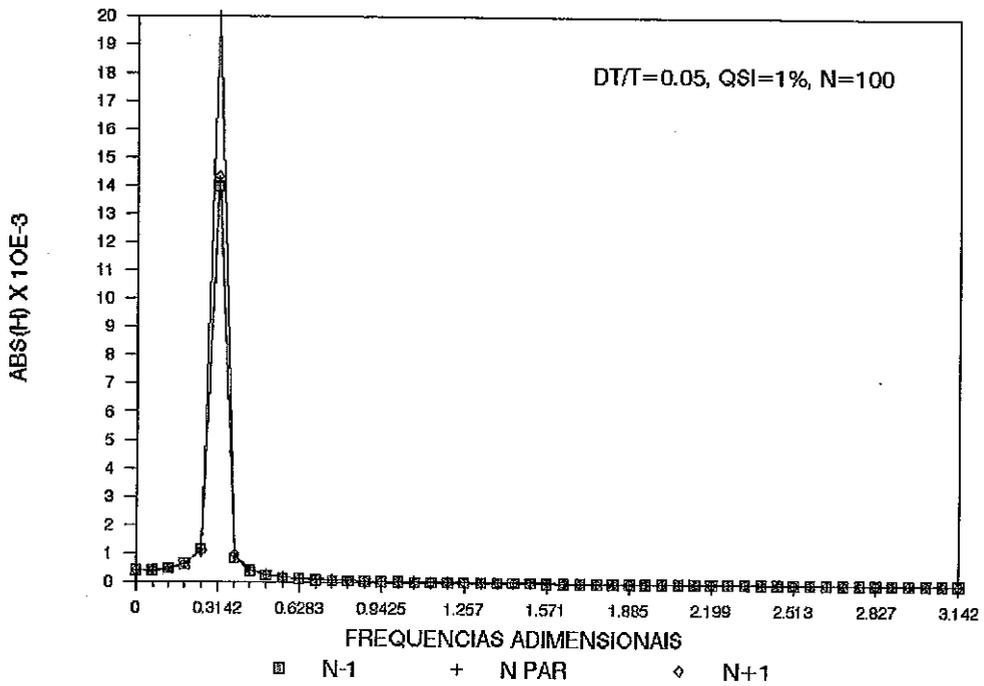


Fig. 4.4 - Amplitude e argumento de  $H(\Omega)$  para  $\Delta t/T = 0.05$ ,  
 $n = 100$  e 1% de amortecimento viscoso.

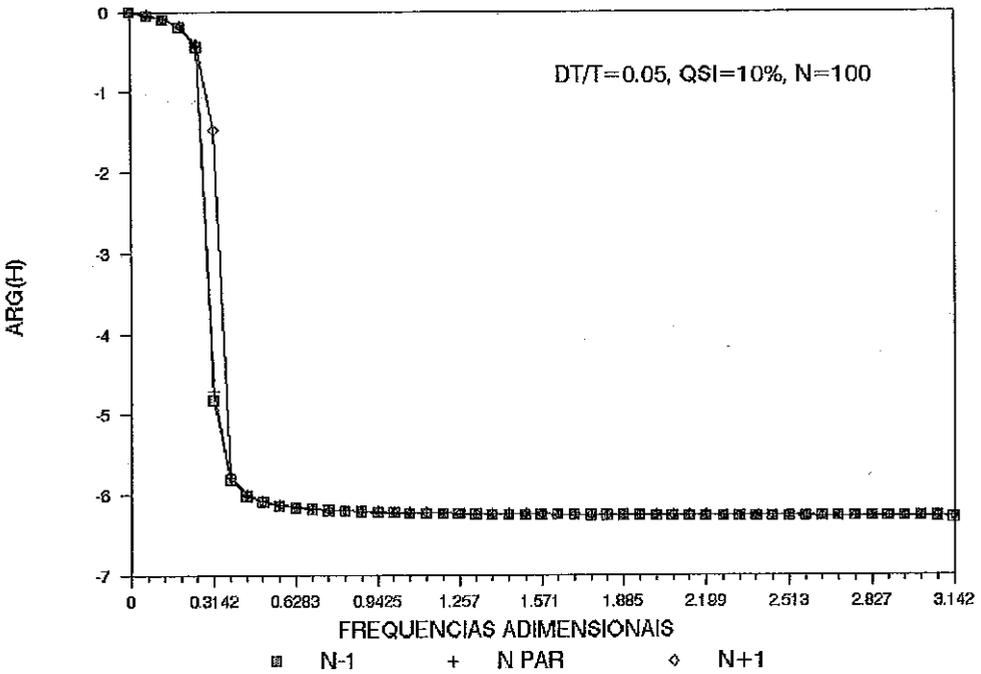
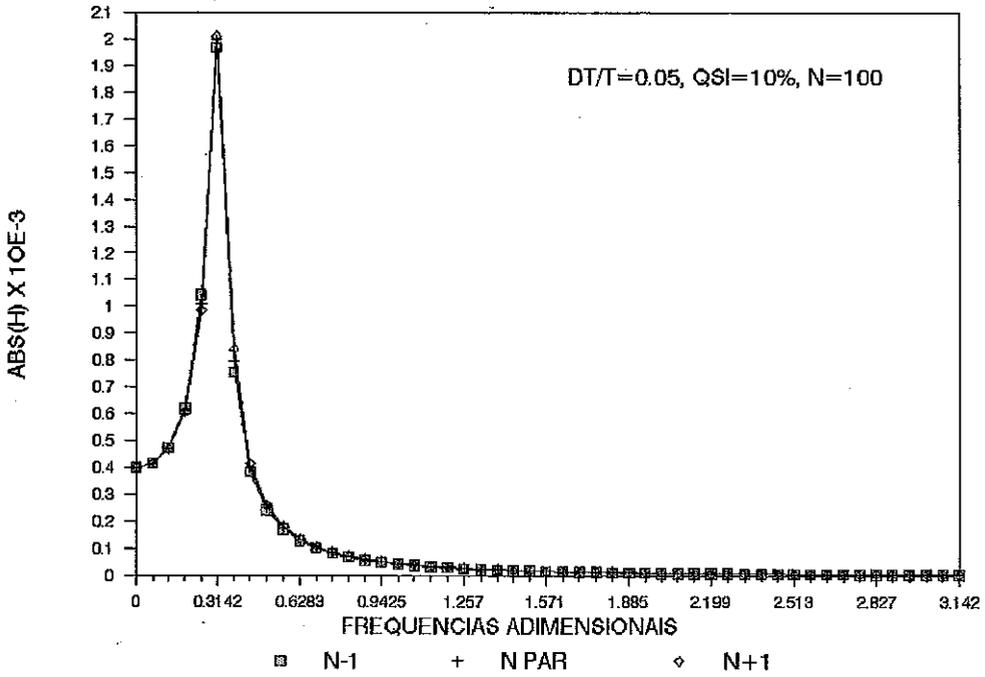


Fig. 4.5 - Amplitude e argumento de  $H(\Omega)$  para  $\Delta t/T = 0.05$ ,  $N = 100$  e 10% de amortecimento viscoso.

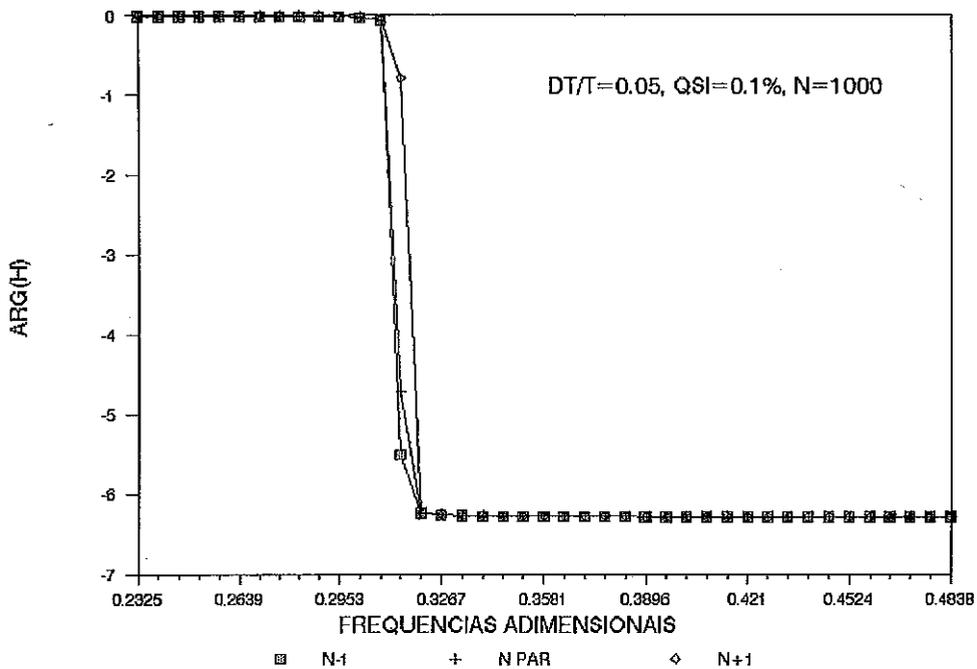
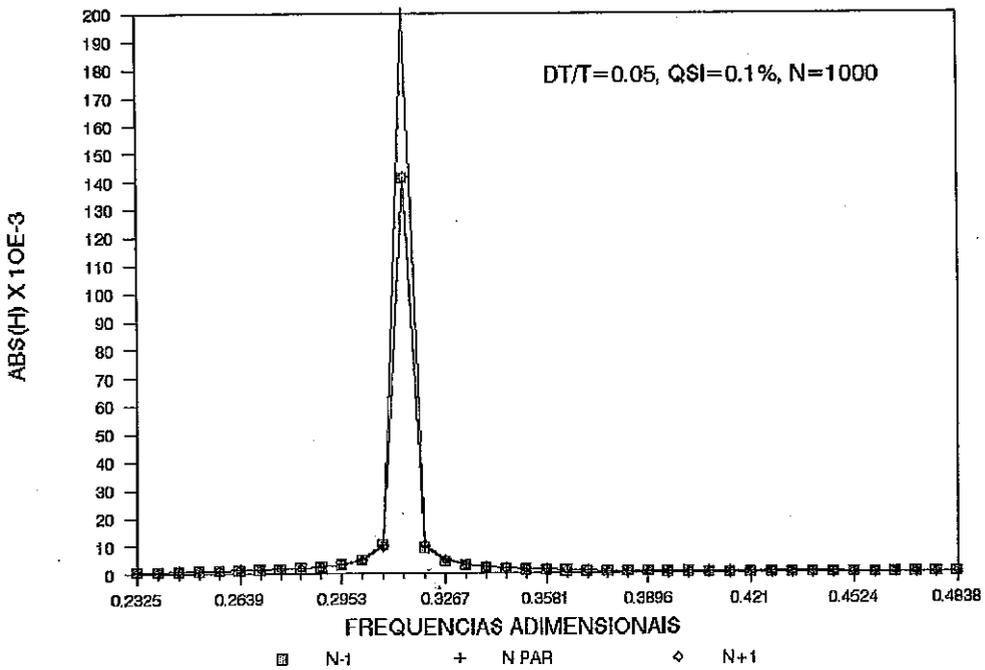
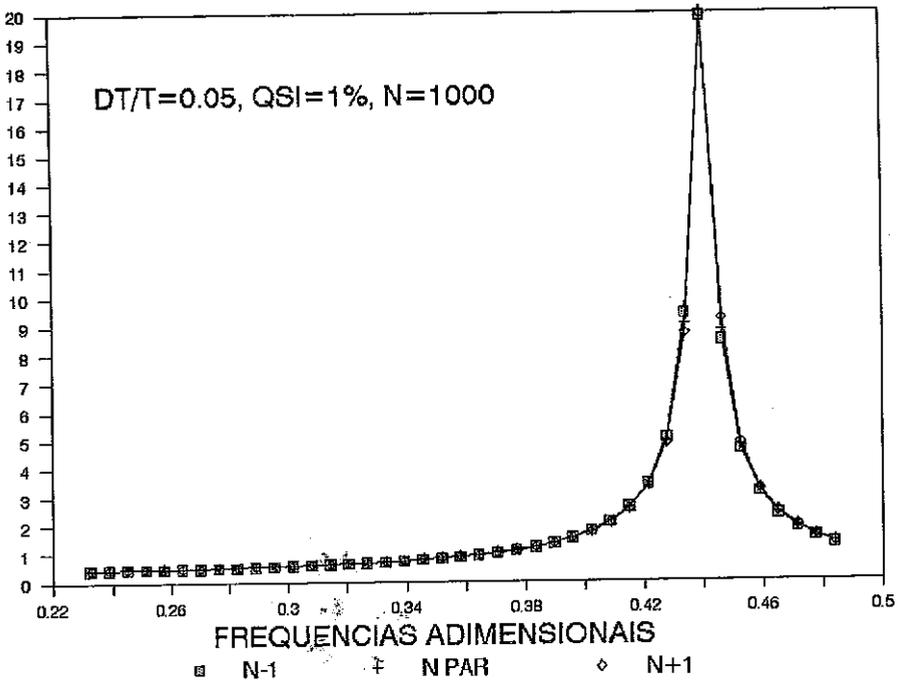


Fig. 4.6 - Amplitude e argumento de  $H(\Omega)$  para  $\Delta t/T = 0.05$ ,  $n = 1000$  e 0.1% de amortecimento viscoso.

ABS(H) X 10E-3



ARG(H)

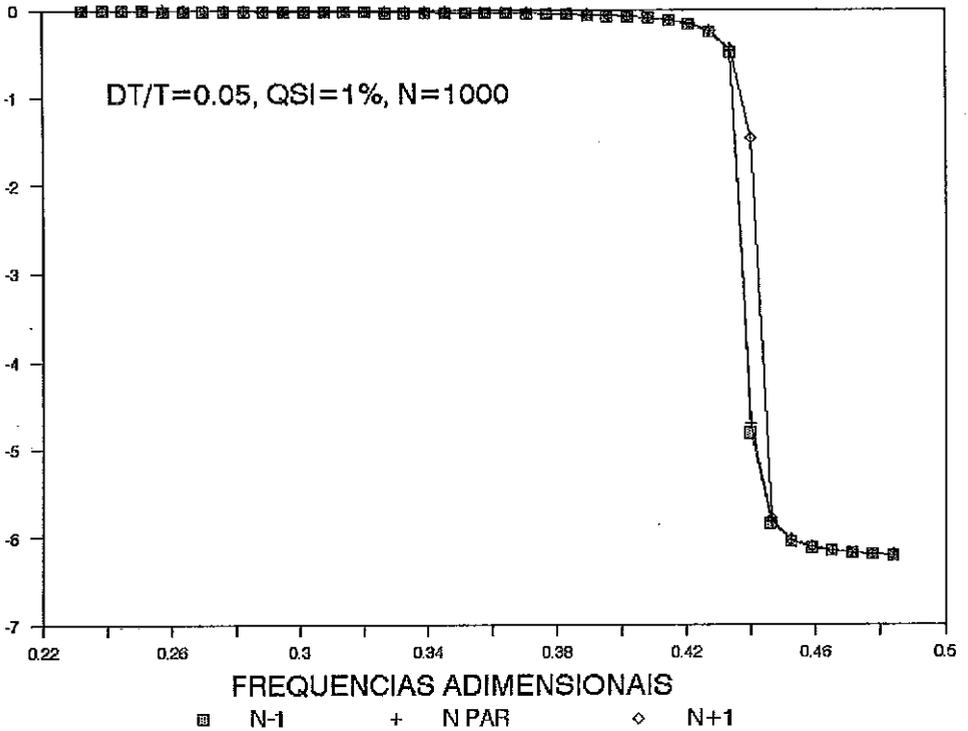


Fig. 4.7 - Amplitude e argumento de  $H(\Omega)$  para  $\Delta t/T = 0.05$ ,  $N = 1000$  e 1% de amortecimento viscoso.

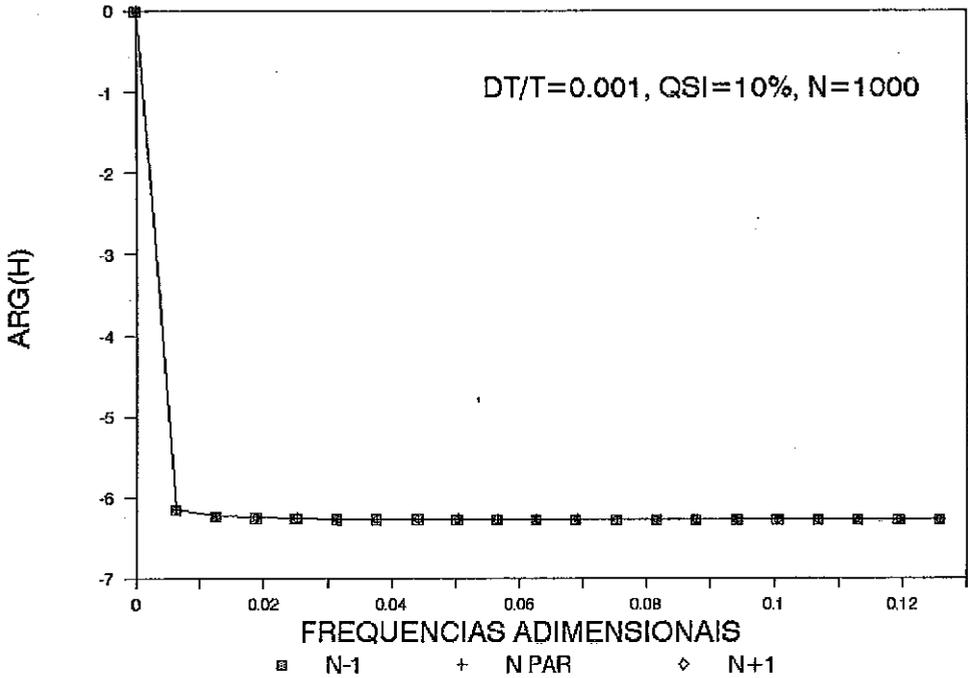
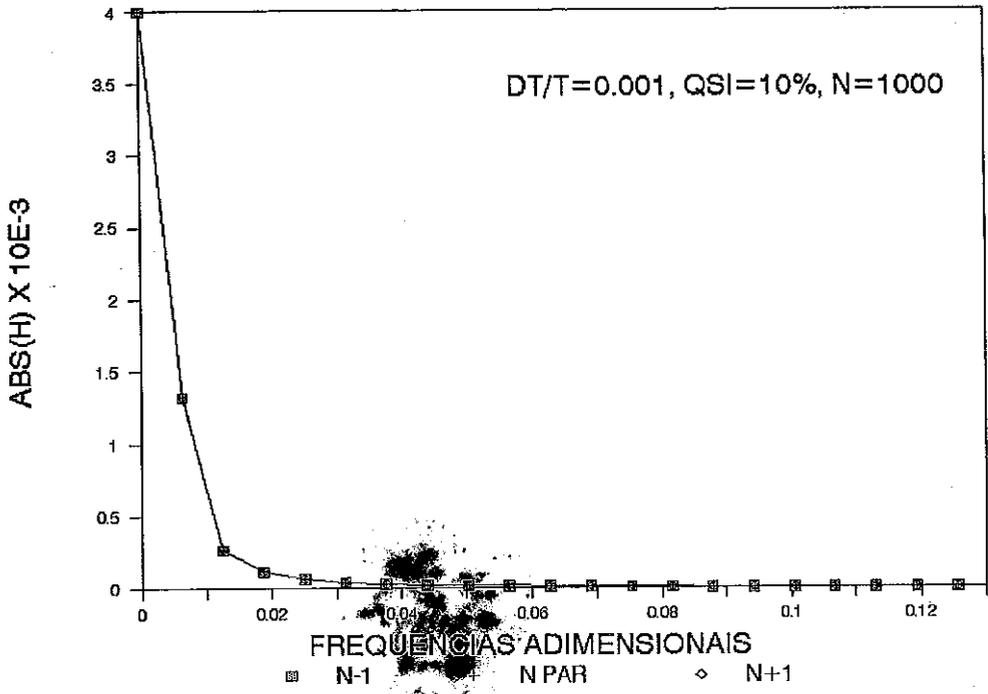


Fig. 4.8 - Amplitude e argumento de  $H(\Omega)$  para  $\Delta t/T = 0.001$ ,  $n = 1000$  e 10% de amortecimento viscoso.

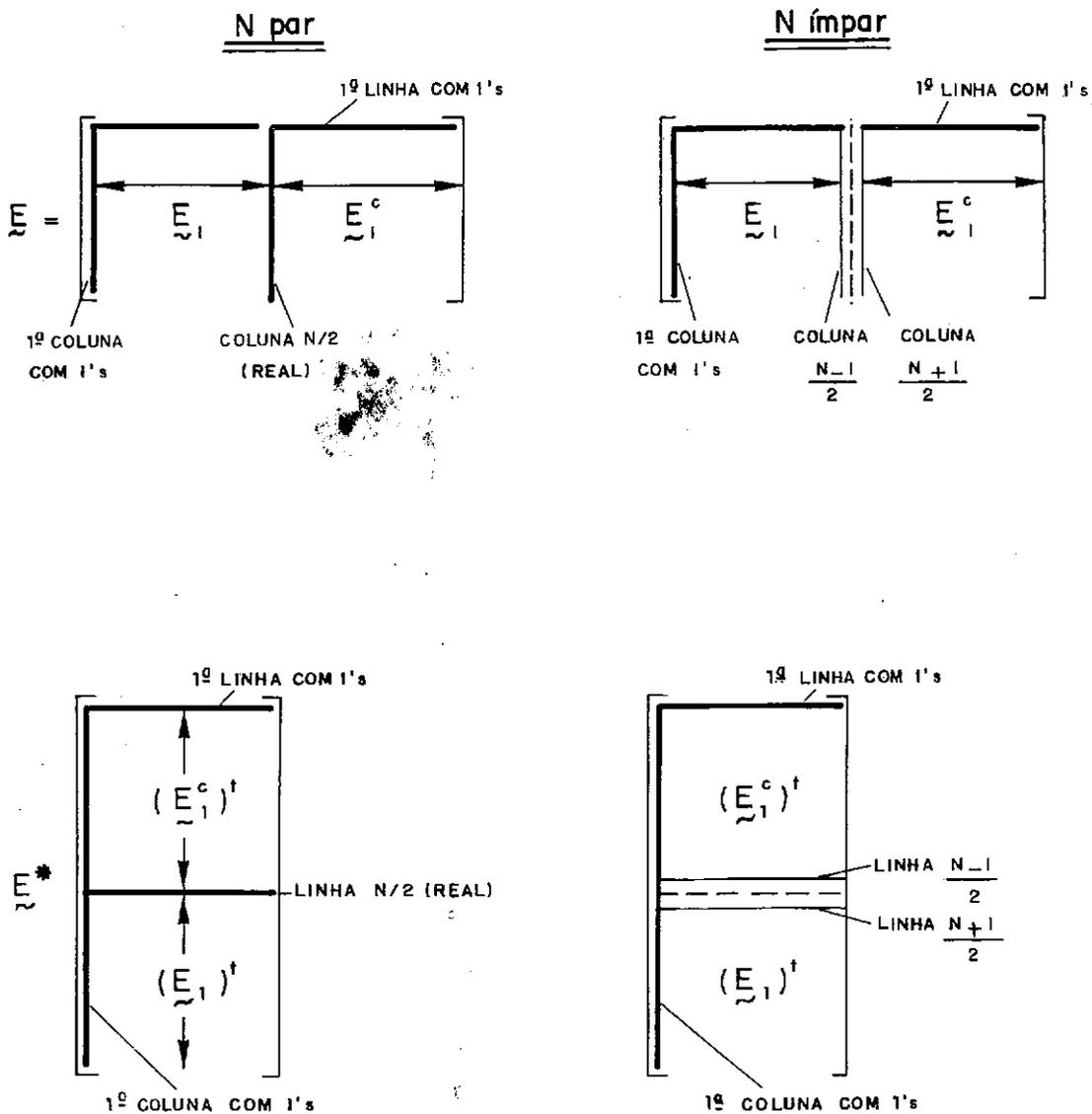


Fig. 4.9 - Composição da matriz [E].

## 5. UM MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO PASSO A PASSO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR

### 5.1 INTRODUÇÃO. OUTROS ESTUDOS.

A análise dinâmica no domínio da frequência é o único método rigorosamente aplicável a sistemas estruturais, cujas propriedades de amortecimento sejam dependentes da frequência. Uma situação típica de aplicação deste método ocorre em sistemas compostos onde há interação dinâmica solo-estrutura, quando tanto o solo, quanto a estrutura são considerados em regime linear (Wolf, 1991). Isto se deve ao fato de que a expressão analítica da condição de radiação da propagação de ondas em meios semi-infinitos é melhor conhecida em função da frequência. Por outro lado, a análise dinâmica no domínio da frequência permite o tratamento do amortecimento histerético da estrutura na mesma formulação.

Apenas recentemente a aplicação do método de análise no domínio da frequência em sistemas não-lineares tem sido pesquisada. Kawamoto (1983) descreve o método híbrido domínio do tempo-domínio da frequência no qual o sistema não-linear é modelado por um pseudo-sistema linear,

cujas equações de movimento são integradas no domínio da frequência. Neste caso, a não-linearidade é tratada no domínio do tempo, gerando pseudoforças que se superpõem iterativamente às forças aplicadas. Em essência, este método difere do método das tensões iniciais para análise não-linear estática (Molnar et al. 1976), apenas pelo fato de as equações de movimento serem resolvidas no domínio da frequência. Wolf e Darbre (1986) apresentam o processo de segmentação do método híbrido domínio do tempo-domínio da frequência. Nesse processo, as pseudoforças são estimadas em um número limitado de intervalos de tempo e, então, transformadas para o domínio da frequência, onde as equações de movimento são resolvidas. A resposta é transformada inversamente para o domínio do tempo, atualizando-se as pseudoforças. Esta seqüência de operações se repete até que a convergência é atingida. A condição de convergência é deduzida no referido trabalho.

Hillmer e Schmid (1988) descrevem um método para análise dinâmica não-linear no domínio da frequência semelhante àquele apresentado por Wolf e Darbre (1986), diferindo apenas no fato de empregarem a transformada de Laplace em lugar da transformada de Fourier. Computacionalmente, apenas o tratamento das condições iniciais a cada segmento é diferente nesses dois métodos.

Os métodos anteriormente referidos apresentam limitações quanto a sua aplicação na engenharia de

estruturas. Uma destas limitações é constituída pelo esforço computacional exigido em uma análise não-linear em que, considerando a formulação clássica, sucessivas transformações domínio do tempo-domínio da frequência de séries complexas, com grande número de termos, são necessárias. Por outro lado, a quantidade de memória alocada em uma análise no domínio da frequência é função do número de termos utilizado nas transformadas de Fourier ou de Laplace. Para a adequada representação de carregamentos angulosos, como os de origem sísmica, em geral, o número de termos empregado excede a  $2^{10}$ .

No processo de análise por segmentação, um problema adicional é a dificuldade de tratamento das condições iniciais a cada novo segmento. O tratamento de condições iniciais não-nulas através de transformadas de Fourier ou de Laplace é numericamente inconveniente, porque funções do tipo salto sempre são representadas com grandes erros nas funções transformadas em face do fenômeno de Gibbs (Kreider *et al.*, 1970). Wolf e Darbre (1986) contornam este problema calculando a transformada de Fourier em todo o período, mas corrigindo iterativamente as pseudoforças apenas em cada segmento onde também é calculada a resposta. Hillmer e Schmid (1988) utilizam o processo conhecido como passo total, em que, a cada segmento, as cargas são corrigidas em função das condições iniciais, e a resposta é calculada sob condições iniciais nulas.

O método descrito neste capítulo consiste na linearização passo a passo da função  $[k(v)]$ , integrando-se as equações de equilíbrio dinâmico no domínio da frequência. O tratamento das condições iniciais a cada segmento é feito por via analítica. O tratamento do amortecimento não-proporcional é incluído na formulação, por meio do método de superposição modal e pseudoforças, ampliando as aplicações do método proposto.

## 5.2 FORMULAÇÃO DO MÉTODO SLFD

### 5.2.1 SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE

Seja um sistema de um grau de liberdade submetido a uma excitação  $p(t)$ . A constante de mola  $k$  depende dos deslocamentos  $v$  em face da não-linearidade do sistema e o coeficiente de amortecimento viscoso depende da frequência da excitação. O problema consiste então na integração da equação de movimento

$$m\ddot{v} + k(v)v + f_d(t) = p(t), \quad (5.1)$$

onde  $f_d(t)$  é a força de amortecimento, transformada inversa de  $F_d(\omega)$ . Esta equação pode ser representada mnemônicamente (Crandall, 1970), por

$$m\ddot{v} + c(\omega)\dot{v} + k(v)v = p(t).$$

Como o coeficiente de amortecimento é dependente da frequência, uma análise no domínio da frequência deve ser realizada, e como a rigidez depende do deslocamento, uma técnica de linearização deve ser empregada. Consequentemente, o presente método é um método de linearização passo a passo no domínio da frequência. Em cada passo linearizado, a rigidez secante é empregada.

Para calcular a resposta do sistema governado pela Eq. 5.1 duas aproximações são feitas. A primeira é a aproximação da carga dada por uma poligonal. O intervalo de tempo total no qual a resposta é calculada é dividido em intervalos  $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ ;  $p_j$  e  $p_{j-1}$  são os valores de  $p(t)$  nos instantes  $t_j$  e  $t_{j-1}$ , respectivamente, e  $\Delta p_j = p_j - p_{j-1}$ , Fig. 5.1. A variação da carga no intervalo de tempo  $\Delta t_j$  é dada por

$$p(\tau) = p_{j-1} + \frac{\Delta p_j}{\Delta t_j} \tau \quad (5.2)$$

em que  $\tau$  é o tempo corrente no intervalo  $\Delta t_j$  ( $0 \leq \tau \leq \Delta t_j$ ). A segunda aproximação refere-se à curva rigidez em função de deslocamento. Esta curva também é aproximada por uma poligonal, uma vez que, em cada segmento, a rigidez secante é adotada, como indicado na Fig. 5.2.

A resposta do sistema é calculada através de segmentos linearizados, ou seja, subconjuntos de  $S$

intervalos de tempo  $\Delta t_j$ , do conjunto que forma o histórico de resposta, nos quais a mola é considerada linear com uma constante  $k_s$ . A equação de equilíbrio dinâmico no domínio do tempo no segmento  $s$  é

$$m\ddot{v} + k_s v + f_d(t) = p(t), \quad (5.3)$$

com as condições iniciais  $v_{os}$  e  $\dot{v}_{os}$ . A resposta do sistema à carga aplicada é obtida utilizando a formulação matricial, isto é,

$$\{v\}_{s1} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} [E] [H]_s [E^*] \{p\}_{s1} \quad (5.4)$$

onde  $\{p\}_{s1}$  é o vetor de cargas no segmento  $s$ . O histórico de resposta devido ao deslocamento inicial é equivalente à resposta do sistema à força constante dada por

$$\{p\}_{sd} = -k_s v_{os} \{1\}, \quad (5.5)$$

em que  $\{1\}$  é o vetor de elementos unitários, com a mesma ordem que  $\{v\}_s$ . Consequentemente, a resposta é obtida da Eq. 5.4 pela expressão

$$\{v\}_{sd} = - \frac{\Delta\omega}{2\pi} [E] [H]_s [E^*] k_s v_{os} \{1\}, \quad (5.6)$$

onde  $[H]_s$  é calculado considerando as propriedades físicas do sistema no segmento  $s$ . O histórico de resposta devido à velocidade inicial  $\dot{v}_{os}$  é a resposta ao impulso  $m\dot{v}_{os}$  que é obtida da função de resposta a um impulso unitário, isto é,

$$v_j = m\dot{v}_{os} h_s(t_j), \quad (5.7)$$

sendo  $h_s(t)$  a transformada inversa da função de resposta complexa em frequência  $H_s(\omega)$ , dada por

$$h_s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_s(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.8)$$

Considerando as Eqs. 5.4, 5.7 e 5.8, a resposta devida à velocidade inicial  $\dot{v}_{os}$  é obtida por

$$\{v\}_{sv} = \frac{m\dot{v}_{os} \Delta\omega}{2\pi} [E] [H]_s \{1\}. \quad (5.9)$$

A resposta total no segmento  $s$  é dada pela superposição das respostas devidas à carga, ao deslocamento inicial e à velocidade inicial, ou seja,

$$\{v\}_s = \frac{\Delta\omega}{2\pi} [E] [H]_s \left[ [E^*] (\{p\}_{s1} - k_s v_{os} \{1\}) - m\dot{v}_{os} \{1\} \right], \quad (5.10)$$

observando que o vetor  $\{1\}$  deve ter ordem compatível com as operações matriciais indicadas.

Após o cálculo do vetor de respostas  $\{v\}_s$  no segmento  $s$ , verifica-se se existe  $J$  tal que  $k(v_j)$  seja diferente de  $k_s$ , mediante um critério adotado previamente. Caso exista,  $v_j$ , com  $j = 1, J-1$ , deve ser considerado o histórico de resposta no segmento  $s$ . Atualiza-se  $k(v)$  em função de  $v_j$ ;  $v_{j-1}$  e  $\dot{v}_{j-1}$  são as condições iniciais do segmento seguinte.

### 5.2.2 SISTEMAS DE MÚTIPLAS GRAUS DE LIBERDADE

Seja um sistema estrutural dinâmico discretizado em elementos finitos, totalizando  $N$  graus de liberdade, sujeito a um carregamento arbitrário  $\{p(t)\}$ . A matriz de rigidez do sistema  $[k]$  depende do deslocamento  $\{v\}$ . A matriz de amortecimento viscoso  $[c]$  pode ser do tipo proporcional, não-proporcional ou dependente da frequência. O problema é, portanto, integrar o sistema de equações de equilíbrio dinâmico

$$[m]\{\ddot{v}\} + [k(v)]\{v\} + \{f_d(t)\} = \{p(t)\}, \quad (5.11)$$

onde  $\{f_d(t)\}$  é a função de forças de amortecimento. De modo análogo ao que ocorre em sistemas de um grau de liberdade, a carga atuante na direção  $i$  é assimilada a uma poligonal resultando na seguinte expressão

$$p_{ij}(\tau) = p_{i,j-1} + \frac{\Delta p_{ij}}{\Delta t} \tau, \quad (5.12)$$

onde  $\tau$  é o tempo no intervalo  $\Delta t$ . A curva força restitutiva versus deslocamento para cada um dos elementos estruturais do sistema também é assimilada a uma poligonal.

Considere um segmento  $s$  no qual as condições iniciais do sistema sejam  $\{v_o\}_s$  e  $\{\dot{v}_o\}_s$ . Em função dos deslocamentos e velocidades iniciais, a matriz de rigidez  $[k]_s$  é determinada. O problema de autovalor

$$[k]_s [\Phi]_s = [m][\Phi]_s [\Lambda]_s \quad (5.13)$$

conduz aos modos de vibração normais não amortecidos do sistema que formam as colunas da matriz modal  $[\Phi]_s$ , enquanto as frequências correspondentes são os elementos da matriz diagonal  $[\Lambda]_s$ . Supondo  $[\Phi]_s$  e  $[\Lambda]_s$  normalizadas em relação à matriz de massa, a transformação de coordenadas

$$\{v\}_s = [\Phi]_s \{Y\}_s \quad (5.14)$$

levada à Eq. 5.11, pré-multiplicada por  $[\Phi]_s^t$ , conduz à equação de equilíbrio dinâmico do sistema em coordenadas generalizadas

$$[I]\{\ddot{Y}\}_s + [\Lambda]_s \{Y\}_s + [\Phi]_s^t \{f_d\} = \{P\}_s, \quad (5.15)$$

sendo  $\{P\}_s$  o vetor de forças generalizadas no segmento  $s$ . Se o amortecimento do sistema é viscoso e independente da frequência, então o vetor de forças de amortecimento generalizadas é

$$[\Phi]_s^t \{f_d\} = [\Phi]_s^t [c] [\Phi]_s \{\dot{Y}\}_s = [C] \{\dot{Y}\}_s, \quad (5.16)$$

onde  $[C]$  é a matriz de amortecimento generalizada, diagonal, se o amortecimento é do tipo proporcional, ou cheia, se o amortecimento é não-proporcional. Se o amortecimento do sistema é dependente da frequência, a transformada de Fourier de  $[\Phi]_s^t \{f_d\}$  é conhecida e vale

$$FT([\Phi]_s^t \{f_d\}) = [\Phi]_s^t \{F_d\} = [\Phi]_s^t (i\omega [c(\omega)]_s \{V(\omega)\}_s); \quad (5.17)$$

portanto, tomando a transformada de Fourier da Eq. 5.15 tem-se

$$(-\omega^2 [I] + i\omega [C(\omega)]_s + [\Lambda]_s) \{Z(\omega)\}_s = \{W(\omega)\}_s, \quad (5.18)$$

onde se definem

$$\{W(\omega)\}_s = [\Phi]_s^t \{P(\omega)\}_s, \quad (5.19)$$

$$\{Z(\omega)\}_s = FT(\{Y(\omega)\}_s). \quad (5.20)$$

A matriz  $[C(\omega)]_s$ , a partir da sua definição em coordenadas físicas na Eq. 2.67, pode ser dada por

$$[C(\omega)]_s = \eta(\omega) \operatorname{sgn}(\omega) [\Lambda]_s, \quad (5.21)$$

em que  $\operatorname{sgn}(\omega)$  é a função que retorna o sinal de  $\omega$ , o que resulta

$$(-\omega^2[I] + [\Lambda]_s(1 + i\eta(\omega) \operatorname{sgn}(\omega))) \{Z(\omega)\}_s = \{W(\omega)\}_s. \quad (5.22)$$

As Eqs. 5.15 e 5.22 são as equações de movimento do sistema no segmento  $s$  em coordenadas generalizadas, no domínio do tempo e no domínio da frequência, respectivamente. A Eq. 5.22 é desacoplada e pode ser integrada segundo a rotina já descrita no item anterior. A Eq. 5.15 é tratada por um processo iterativo cujo  $k$ -ésimo passo para a coordenada generalizada  $Y_i$  é

$$\ddot{Y}_{is}^k + C_{ii} \dot{Y}_{is}^k + \lambda_{is} Y_{is}^k = P_{is} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} C_{ij} \dot{Y}_{js}^{k-1}, \quad (5.23)$$

equação válida para todos os instantes  $t_j$ ,  $j = 1, J$ , do segmento considerado, onde  $\lambda_{is}$  é o quadrado da frequência natural de vibração do  $i$ -ésimo modo. A Eq. 5.22 é integrada no domínio da frequência pela rotina descrita no item anterior. Como se observa, durante o processo iterativo, as

matrizes  $[E]$ ,  $[E^*]$  e  $[H]_s$  permanecem inalteradas, reduzindo o esforço computacional no tratamento do amortecimento não-proporcional.

### 5.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O fluxograma da Fig. 5.3 ilustra a rotina básica seguida no método SLFD. A implementação computacional levada a efeito tem o objetivo de verificar a viabilidade do método proposto, produzindo quantidade suficiente de resultados numéricos que permitam a sua comparação a outros métodos.

Tratando-se de uma demonstração de viabilidade, a implementação computacional é muito simples. Apenas materiais bilineares são admitidos. Para simplificar a etapa de atualização da matriz de rigidez, a cada segmento, apenas estruturas do tipo "shear building" foram analisadas.

Antes de fazer uma medição do esforço computacional exigido pelo método proposto, muitos outros recursos numéricos devem ser implementados, como a extração modal, usando métodos adequados a grandes sistemas, e a redução modal. Entretanto, a generalidade analítica (análise não-linear, com amortecimentos não-proporcional e dependente da frequência) conseguida e a qualidade dos resultados obtidos podem ser comprovados com a implementação computacional básica descrita.

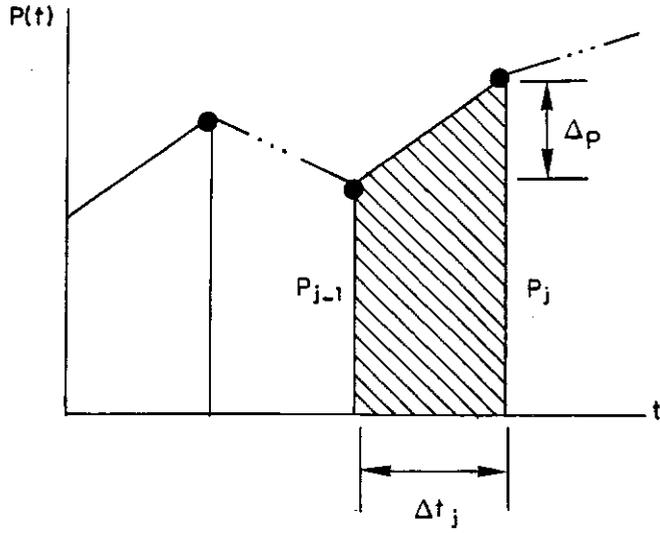


Fig. 5.1 - Aproximação da carga..

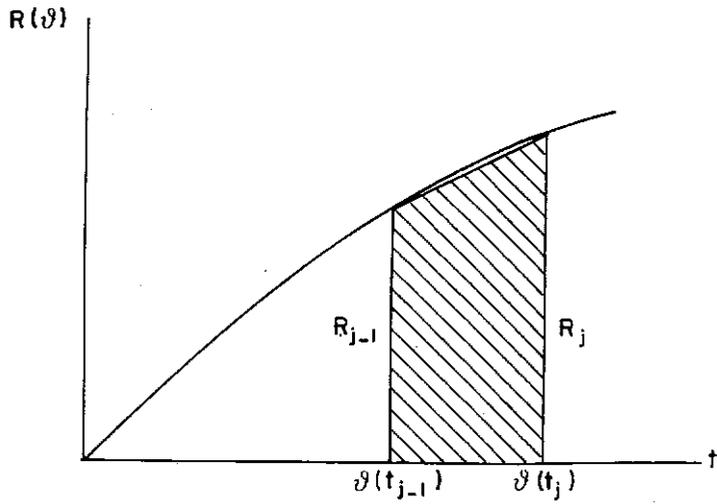
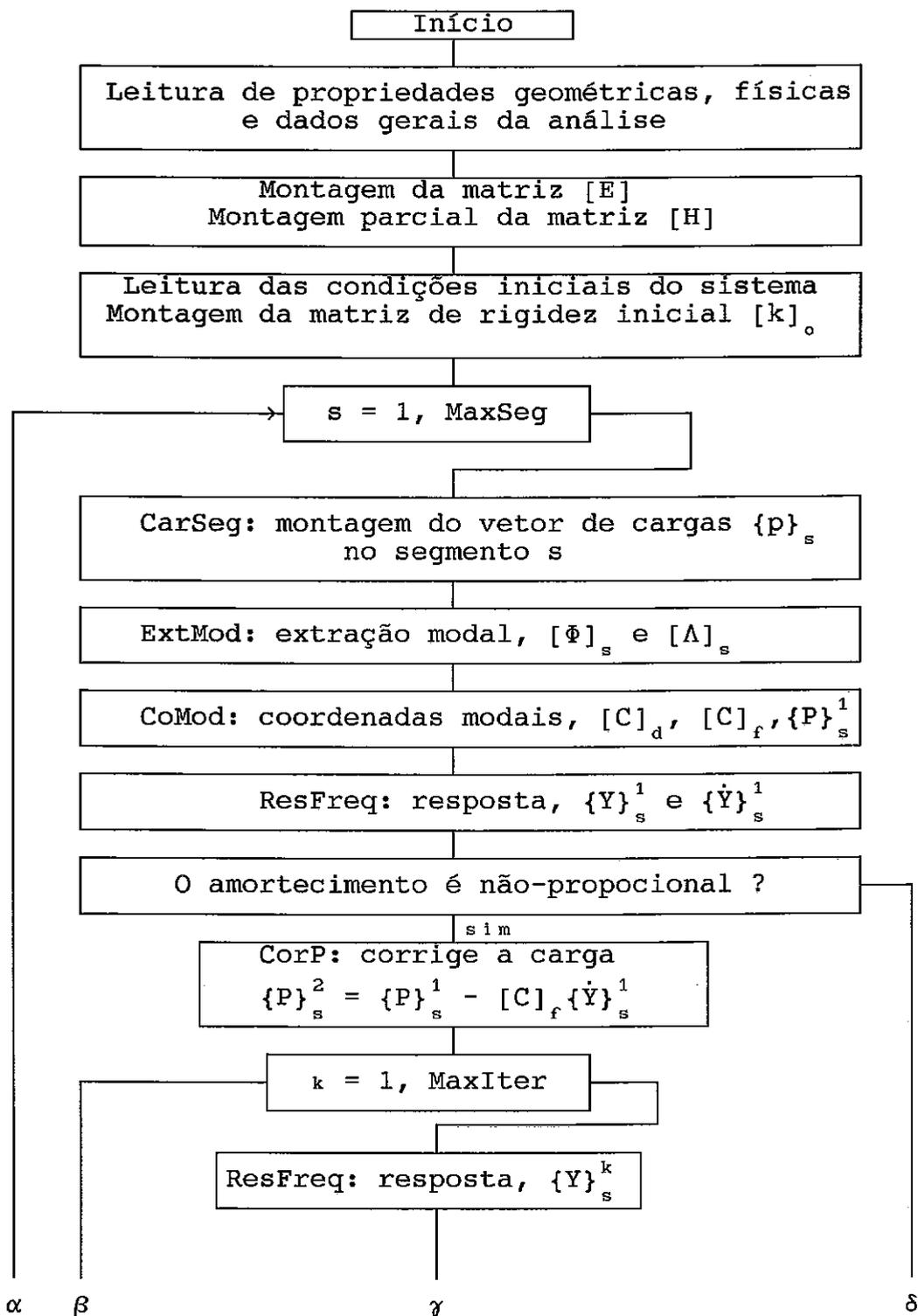


Fig. 5.2 - Aproximação da curva força restitutiva versus deslocamento



(cont.)

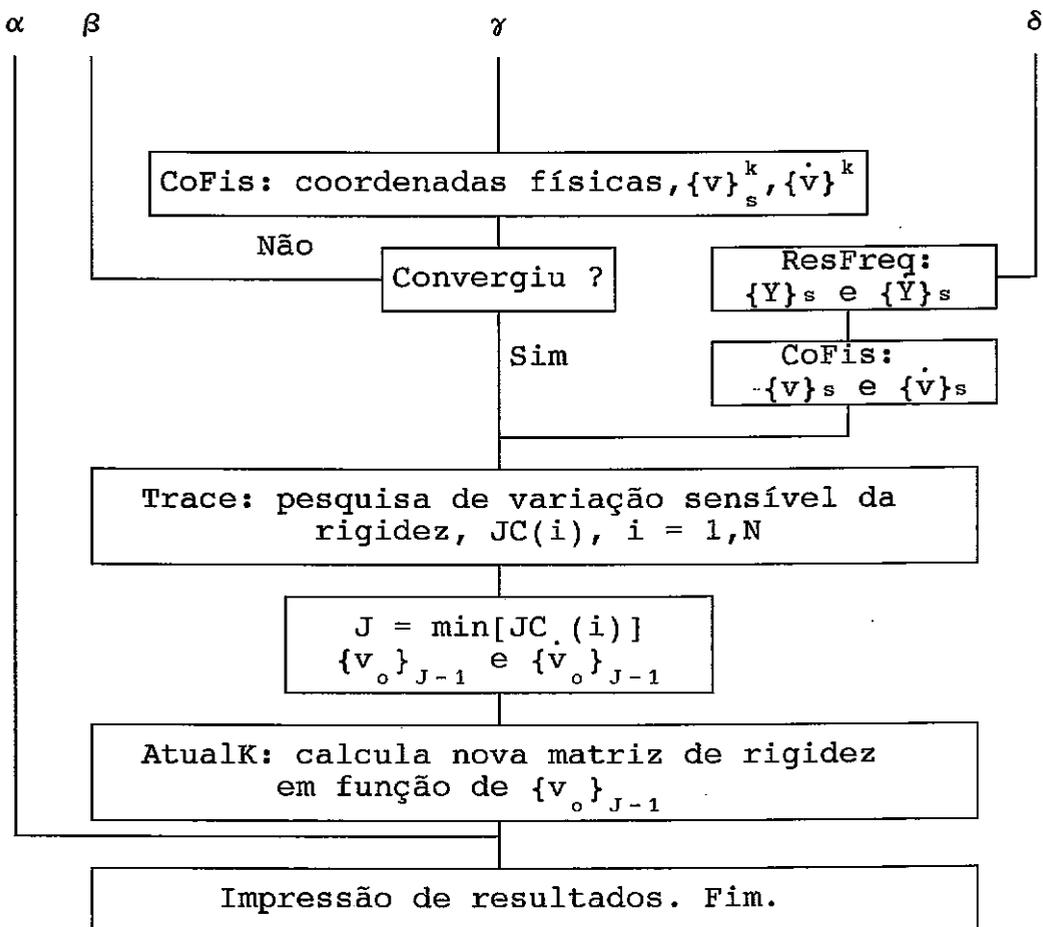


Fig. 5.3 - Fluxograma do método SLFD.

## 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

### 6.1 EXEMPLO 1

O sistema estrutural mostrado na Fig. 6.1 é formado por uma viga em balanço com um amortecedor discreto associado a sua extremidade. Este sistema estrutural é analisado em Chen e Taylor (1990) de onde são extraídas as seguintes propriedades físicas e geométricas: módulo de Young  $E = 500 \text{ N/m}^2$ ; massa específica do material  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ; constante de amortecimento viscoso do amortecedor discreto  $c = 1 \text{ Ns/m}$ . A viga é modelada com 5 elementos finitos iguais de acordo com a teoria elementar de vigas. A matriz de massa do sistema é consistente e a matriz de amortecimento tem apenas um elemento diferente de zero que corresponde ao amortecedor discreto.

A matriz de amortecimento generalizada é obtida através da matriz modal dada pela Eq. 3.8, e o índice de acoplamento, Eq. 3.10, é  $\alpha = 1.0$ . Isto indica que o sistema tem amortecimento fortemente não-proporcional. A Tabela 6.1 mostra os índices de convergência para os modos normais.

A viga é solicitada por uma carga do tipo salto unitário, Fig. 6.2, aplicada no ponto 5. O histórico de

deslocamentos verticais do ponto 5 é mostrado na Fig. 6.3. O índice de acoplamento do sistema é alto, mas o índice de convergência é também elevado, e os resultados são perfeitamente concordantes com aqueles apresentados por Chen e Taylor (1990). Em relação ao método descrito por esses autores, a análise realizada com o método de superposição modal e pseudo-forças mostrou-se mais econômica, tendo gasto 0.02 vezes o tempo referido por eles. Por outro lado, fica eliminada qualquer possibilidade de divergência devida a modos de Ritz instáveis como se observou no trabalho referido de Chen e Taylor.

Para comprovar o desempenho computacional do presente método, análises do sistema descrito foram feitas usando integração direta das equações de movimento acopladas pelo método de Wilson- $\theta$  (Clough e Mojtahedi, 1976), aqui referido por DIRECT, superposição modal clássica, referido por CM, e o método aqui descrito para o tratamento do amortecimento não-proporcional, referido por PFORCE. Para os métodos CM e PFORCE, as equações de movimento foram reduzidas a 6 e 4 modos. A relação  $\alpha = t/t_D$  onde  $t_D$  e  $t$  são, respectivamente, os tempos de processamento para DIRECT e para o método com ele comparado são apresentados na Tabela 6.2. Os resultados nesta tabela demonstram que o custo da solução por PFORCE é muito menor que o de DIRECT e cerca de 30% menor que o de CM, mesmo considerando que o sistema tem amortecimento fortemente não-proporcional.

## 6.2 EXEMPLO 2.

O sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade mostrado na Fig. 6.4 foi extensivamente analisado por Warburton e Soni (1977). Aqui as mesmas propriedades do sistema são consideradas, mas a carga é modificada para aquela mostrada na Fig 6.5 que é ressonante e é aplicada à massa  $m_2$ . As constantes de mola são  $k_1 = k_2 = 10 \text{ MN/m}$  e as massas são  $m_1 = m_2 = 10000 \text{ kg}$ . Para obter amortecimento variável em grandeza, as constantes de amortecimento viscoso relacionam-se pela expressão:  $c_1 = \delta c_2$ . As frequências naturais de vibração desse sistema são  $\omega_1 = 19.54 \text{ rad/s}$  e  $\omega_2 = 51.17 \text{ rad/s}$ .

Esse sistema é analisado pelo método proposto ( resultados referidos por PFORCE ) e por integração direta das equações de movimento através do método de Wilson- $\theta$  ( resultados referidos por DIRECT ). Os deslocamentos máximos das massas  $m_1$  e  $m_2$ , as porcentagens de erros de PFORCE em relação a DIRECT, os índices de acoplamento e de convergência, para diversos casos analisados, são apresentados na Tabela 6.3.

A concordância dos resultados de PFORCE e DIRECT é excelente com exceção dos casos VI e VII, e pode-se observar claramente como a precisão dos resultados de PFORCE depende dos índices de acoplamento e de convergência. Os erros observados nos casos VI e VII indicam fraca convergência

para aquelas propriedades do sistema ( índices de acoplamento muito elevado e índices de convergência muito baixos, além de amortecimento da ordem de 70% do amortecimento crítico, desprezados os termos de fora da diagonal na matriz de amortecimento generalizada) e não divergência do método. Por outro lado, a carga é ressonante com a frequência do primeiro modo. Todos esses fatores podem ter contribuído para a fraca convergência observada nesses dois casos.

### 6.3 EXEMPLO 3.

O sistema estrutural analisado neste exemplo é também analisado em Itoh (1976) e Mau (1988). Trata-se de um modelo simplificado da estrutura de uma usina nuclear, consistindo de núcleo, vaso de pressão em concreto protendido, citado como PCPV, fundação e edifício. Cada um desses elementos tem movimentos de translação e de rotação, totalizando 8 graus de liberdade no sistema estrutural. As matrizes de massa, rigidez e amortecimento são, respectivamente:

$$[m] = \begin{bmatrix} .5400E+01 & .0000E+00 \\ .0000E+00 & .1680E+07 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & .5220E+02 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .8710E+08 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .5780E+02 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .2350E+09 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .1600E+02 & .0000E+00 \\ .0000E+00 & .2140E+08 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} .1160E+05 & -.8700E+07 & -.1160E+05 & .1137E+08 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ -.8700E+07 & .1522E+11 & .8700E+07 & -.1723E+11 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ -.1160E+05 & .8700E+07 & .5296E+06 & -.9334E+09 & -.5180E+06 & -.5180E+06 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ .1137E+08 & -.1723E+11 & -.9334E+09 & .9461E+13 & .9220E+09 & -.6878E+13 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & -.5180E+06 & .9220E+09 & .6862E+06 & .3622E+09 & -.6170E+04 & .1172E+08 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & -.5180E+06 & -.6878E+13 & .3622E+09 & .9953E+13 & -.6170E+07 & -.2553E+12 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & -.6170E+04 & -.6170E+07 & .6170E+04 & -.1172E+08 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .1172E+08 & -.2553E+12 & -.1172E+08 & .2893E+12 \end{bmatrix}$$

e

$$[c] = \begin{bmatrix} .9990E+01 & -.7492E+04 & -.9990E+01 & .9790E+04 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ -.7492E+04 & .1045E+08 & .7492E+04 & -.1221E+08 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ -.9990E+01 & .7492E+04 & .5480E+03 & -.9674E+06 & -.5380E+03 & -.5380E+06 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ .9790E+04 & -.1221E+08 & -.9674E+06 & .4329E+10 & .9576E+06 & -.1652E+10 & .0000E+00 & .0000E+00 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & -.5380E+03 & .9576E+06 & .6178E+04 & -.5042E+07 & -.3000E+02 & .5700E+05 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & -.5380E+06 & -.1652E+10 & -.5042E+07 & .4343E+11 & -.3000E+05 & -.1820E+09 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & -.3000E+02 & -.3000E+05 & .3000E+02 & -.5700E+05 \\ .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .0000E+00 & .5700E+05 & -.1820E+09 & -.5700E+05 & .3473E+09 \end{bmatrix}$$

As frequências naturais de vibração são comparadas na Tabela 6.4 com as frequências amortecidas fornecidas por Mau (1988). A matriz de amortecimento generalizada é:

$$[c] = \begin{bmatrix} .2085E+01 & .2871E+01 & .4463E+01 & .5739E+01 & .6256E+00 & -.7553E-01 & .1324E+01 & .2447E+01 \\ .2871E+01 & .1783E+02 & .2607E+02 & .3137E+02 & .3208E+01 & .1257E+02 & .1936E+01 & .1569E+02 \\ .4463E+01 & .2607E+02 & .4061E+02 & .4901E+02 & .5720E+01 & .1895E+02 & .1008E+01 & .2512E+02 \\ .5739E+01 & .3137E+02 & .4901E+02 & .9260E+02 & .5017E+01 & .2274E+02 & -.4105E+02 & .5766E+02 \\ .6256E+00 & .3208E+01 & .5720E+01 & .5017E+01 & .8172E+01 & .2578E+01 & .3024E+01 & .2180E+01 \\ -.7553E-01 & .1257E+02 & .1895E+02 & .2274E+02 & .2578E+01 & .2535E+02 & -.1033E+01 & .1668E+02 \\ .1324E+01 & .1936E+01 & .1008E+01 & -.4105E+02 & .3024E+01 & -.1033E+01 & .9668E+02 & -.2423E+02 \\ .2447E+01 & .1569E+02 & .2512E+02 & .5766E+02 & .2180E+01 & .1668E+02 & -.2423E+02 & .9418E+02 \end{bmatrix}$$

O valor máximo do índice de acoplamento ocorre entre as direções 2 e 3 fornecendo  $\alpha_{23} = 0.9405$ . O índice de acoplamento do sistema  $\alpha = 0.9405$  indica que o sistema tem amortecimento fortemente não-proporcional. Os índices de convergência para os modos normais são mostrados na Tabela 6.5.

O modelo estrutural é solicitado pelo histórico de acelerações de base mostrado na Fig. 6.5. A resposta é calculada pelo método de integração direta de Wilson- $\theta$  ( resultados referidos por DIRECT ) e pelo método de superposição modal e pseudo-forças ( resultados referidos por PFORCE ). O histórico de deslocamentos horizontais do PCPV é mostrado na Fig. 6.7 onde a precisão dos resultados de PFORCE em relação aos de DIRECT é verificada.

Para comprovar a importância da consideração rigorosa do amortecimento não-proporcional, os elementos de fora da diagonal da matriz de amortecimento generalizada foram desprezados, e o sistema foi analisado através do método de superposição modal clássico ( resultados referidos por MODAL ). Os valores máximos de deslocamentos MODAL e PFORCE são comparados na Tabela 6.6, onde os erros percentuais são tomados em relação aos valores PFORCE. Verifica-se claramente a necessidade de tratamento rigoroso do amortecimento não-proporcional.

#### 6.4 EXEMPLO 4.

Para comparar o esforço computacional exigido pela formulação da resposta dinâmica no domínio da frequência com a transformada de Fourier implícita e aquele exigido pela formulação que emprega o algoritmo "Fast Fourier Transform", calculou-se a resposta de um sistema linear de um grau de liberdade, tomando-se  $N = 2^{12}$  termos nas séries discretas. A Fig. 6.8 mostra os tempos de processamento gastos em um microcomputador compatível com IBM-PC-XT para as duas formulações em função do número de termos  $S$  na resposta.

No sentido de obter o valor de  $\nu$ , um experimento numérico foi montado, calculando-se  $N$  valores das funções seno e cosseno, bem como  $N$  produtos de complexos. Concluiu-se que  $\nu$  varia ligeiramente com  $N$ , podendo-se adotar um valor médio igual a 1.37. Nesse caso, a Eq. 4.56 fornece  $S \leq 42.66$ , valor concordante com aquele mostrado na Fig. 6.8.

#### 6.5 EXEMPLO 5.

Para verificar a qualidade dos resultados obtidos com o método SLFD, a resposta do sistema de um grau de liberdade da Fig. 6.9, analisado por Clough e Penzien (Clough e Penzien, 1975, página 125), foi calculada, supondo a mola linear com rigidez  $k = 5$  kips/in, e bilinear com a

curva força restitutiva versus deslocamentos indicada na Fig. 6.9. A carga é mostrada na Fig. 6.10. Os históricos de deslocamentos da massa são mostrados na Fig. 6.11. Os resultados no caso linear são idênticos aos obtidos no exemplo citado de Clough e Penzien, indicando que o algoritmo proposto é adequado para o tratamento das condições iniciais em cada segmento.

## 6.6 EXEMPLO 6.

Seguindo um exemplo descrito por Wilson *et al.* (1973), a viga em balanço da Fig. 6.12 é analisada sob a ação da carga indicada. Supõe vibração livre; admite-se massa específica  $\gamma = 1 \text{ kg/m}^3$ . Os deslocamentos da extremidade da viga, obtidos pelo método de integração direta e pelo método SLFD, são mostrados na Fig. 6.13. A resposta é tipicamente aquela mostrada por Wilson *et al.* (1973), confirmando a adequação do método, mesmo considerando o tipo desfavorável de carregamento utilizado. foram empregados 4000 termos nas transformadas de Fourier.

## 6.7 EXEMPLO 7.

O sistema de dois graus de liberdade indicado na Fig. 6.14 representa a fundação e o edifício de uma usina nuclear, sendo a massa da fundação  $m_f = 1.E+8 \text{ kg}$  e a massa

do edifício  $m_s = 3.E+7$  kg. A rigidez da estrutura é  $k_s = 0.6E+11$  N/m. A mola que representa o solo tem rigidez  $k_f = 1.55E+11$  N/m e constante de amortecimento viscoso  $c_f = 3.79E+9$  N/m, calculadas segundo as expressões fornecidas por Richart et al. (1970), em função das propriedades do solo.

Uma análise é conduzida supondo a carga de impacto da Fig. 6.15, extraída de Wolf (1985). Os deslocamentos do edifício, obtidos pelo método SLFD e pelo método de Wilson, são comparados na Fig. 6.16. A mesma estrutura é analisada sob o carregamento de origem sísmica da Fig 6.17, supondo a mola linear, com a rigidez indicada, e bilinear com a curva força versus deslocamentos indicada na Fig. 6.14. Os históricos de deslocamentos do edifício e da fundação são mostrados nas Figs. 6.18 e 6.19. Essas análises mostram a aplicabilidade do método SLFD às análises de sistemas fisicamente não-lineares, dotados de amortecimento não-proporcional.

## 6.8 EXEMPLO 8.

Um sistema formado pela massa  $m = 1$  kg e por uma mola bilinear de constantes  $k_1 = 10000$  N/mm e  $k_2 = 10$  N/mm foi analisado por Kawamoto (1983) considerando vibrações não amortecidas. O mesmo sistema é analisado aqui considerando os seguintes casos: I)- sistema não amortecido; II)-

amortecimento dependente da frequência de acordo com a função  $c(\omega)$  mostrada na Fig 6.20; III)- amortecimento dependente da frequência de acordo com a função  $c(\omega)$  mostrada na Fig. 6.21. A função de carga, mostrada na Fig. 6.22, é  $p(t) = 50 \text{ sen}(1.5t) + 100 \text{ sen } 0.005t$ . O período natural da vibração é  $T = 0.063 \text{ s}$ . Kawamoto (1983) considerou  $\Delta t = 1 \text{ s}$  para calcular a resposta desse sistema usando o método híbrido domínio do tempo-domínio da frequência, e  $\Delta t = 0.02 \text{ s}$  usando integração direta das equações de equilíbrio dinâmico.

No caso I, usando o método de linearização incremental passo a passo, com a formulação da resposta com a formulação apresentada, um intervalo de tempo  $\Delta t = 25 \text{ s}$  foi usado, e a resposta do sistema é mostrada na Fig. 6.23. Comparando esta resposta com aquela fornecida por Kawamoto, [Kawamoto (1983), Figura 6.94, página 341], é evidente que o método aqui proposto é eficiente na previsão dos deslocamentos extremos do sistema. Além disso, esse método é mais eficiente que o método híbrido domínio do tempo-domínio da frequência na obtenção da verdadeira resposta do sistema, particularmente quando se considera um acentuado "softening" como ocorre neste exemplo.

As respostas nos casos II e III, Figs. 6.24 e 6.25, mostram que o amortecimento viscoso dependente da frequência é convenientemente tratado pelo método proposto. Uma diferença muito pequena é observada nos módulos dos

deslocamentos extremos nos casos I, II e III. Uma das razões para isto é que a resposta permanente foi calculada e a amplitude estática  $p(t)/k_2$ , para um valor tão pequeno de  $k_2$ , é predominante na resposta do sistema.

## 6.9 EXEMPLO 9.

Seja um sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade com a primeira mola linear com  $k_1 = 10000$  N/mm e a segunda mola não-linear com rigidezes  $k' = 10000$  N/mm e  $k'' = 10$  N/mm. Seja a carga triangular, mostrada na Fig. 6.26, aplicada à massa 2. Para verificar a influência do amortecimento dependente da frequência na resposta, as seguintes funções  $\eta(\omega)$  são adotadas: a) caso I -  $\eta(\omega)$  linear, conforme a Fig. 6.27; b)- caso II -  $\eta(\omega)$  proporcional a  $\omega^2$ , Fig 6.28; c)- caso III - função  $\eta(\omega)$  dada na Fig. 6.29; d)- caso IV - função  $\eta(\omega)$  dada na Fig. 6.30. Os deslocamentos das massas 1 e 2, respectivamente, para o caso I, são mostrados nas Figs. 6.31 e 6.32; para o caso II, nas Figs. 6.33 e 6.34; para o caso III, nas Figs. 6.35 e 6.36; para o caso IV, nas Figs. 6.37 e 6.38. Observa-se o mesmo padrão de comportamento da resposta permanente do sistema para as diferentes funções de dissipação de energia, embora haja uma variação muito pequena entre os valores máximos observados. Isto se deve ao fato de as funções  $\eta(\omega)$  terem sido adotadas para corresponder, na frequência máxima,

a 40 % do amortecimento crítico, supondo o sistema em vibração com a rigidez  $k = 10000$  N/mm. Quando o sistema atinge os deslocamentos máximos, sob a rigidez  $k = 10$  N/mm, a sua constante de amortecimento (que é proporcional à rigidez) é muito reduzida, não permitindo assim, observar a influência das diversas funções  $\eta(\omega)$  sobre a resposta.

#### 6.10 EXEMPLO 10.

Toma-se o mesmo sistema do exemplo anterior, sob a ação do mesmo carregamento, porém adotando-se funções  $c(\omega)$  assim discriminadas: a)- caso I -  $c(\omega)$  linear, Fig 6.39; b)- caso II -  $c(\omega)$  proporcional a  $\omega^2$ , Fig 6.40; c)- caso III,  $c(\omega)$  dada pela função da Fig. 6.41. Os deslocamentos das massas 1 e 2, respectivamente, para o caso I, são mostrados nas Figs. 6.42 e 6.43; para o caso II, nas Figs. 6.44 e 6.45; para o caso III, nas Figs. 6.46 e 6.47. Observam-se diferenças acentuadas entre as respostas no caso III para os casos I e II, tanto na grandeza dos deslocamentos máximos em cada caso quanto no número de oscilações entre os dois domínios de linearidade física do material. Comparando-se essas respostas com as correspondentes do Exemplo 9, observam-se também diferenças acentuadas, embora o valor da constante de amortecimento na frequência mais alta do espectro seja o mesmo.

Tabela 6.1 - Índices de Convergência modais(Ex. 1).

Modo <sub>i</sub>	IC <sub>i</sub>
1	4.0E+2
2	4.0E+2
3	2.0E+3
4	4.0E+3
5	2.0E+4
6	3.0E+4
7	5.0E+4
8	8.0E+4
9	1.0E+5
10	2.0E+6

Tabela 6.2 - Tempos de CPU relativos (Ex. 1).

Método	$\alpha = t/t_D$
DIRECT	1.00
CM (6 modos)	0.56
PFORCE (6 modos)	0.40
CM (4 modos)	0.37
PFORCE (4 modos)	0.27

$t_D$  = tempo de CPU para DIRECT

t = tempo de CPU para o método comparado.

Tabela 6.3- Precisão de resultados do Exemplo 2.

Caso	$c_2$ (Ns/m)	$\delta$	$\alpha_{12}$	IC	Del.Máximo( $\times 10^{-3}$ m)			Erro (%)
					Ponto	PFORCE	DIRECT	
I	$10^2$	10	0.62	5.5E+0	1	0.3566	0.3580	0.39
					2	0.5921	0.5942	0.35
II	$10^2$	$10^2$	0.95	5.1E+3	1	0.3385	0.3395	0.29
					2	0.5688	0.5711	0.40
III	$10^2$	$10^3$	0.99	5.0E+2	1	0.2304	0.2315	0.48
					2	0.3843	0.3876	0.85
IV	$10^3$	10	0.62	5.6E+3	1	0.3380	0.3390	0.29
					2	0.5678	0.5700	0.39
V	$10^3$	$10^2$	0.95	5.0E+2	1	0.2302	0.2313	0.48
					2	0.3837	0.3870	0.85
VI	$10^3$	$10^3$	1.00	6.0E+1	1	0.0747	0.0837	11.10
					2	0.1437	0.2074	30.70
VII	$10^4$	$10^2$	0.95	6.0E+1	1	0.0744	0.0829	10.30
					2	0.1435	0.2047	29.90

Tabela 6.4 - Frequências naturais do sistema do Ex. 3.

Modo	Frequências Naturais (Hz)	
	Não Amortecidas	Amortecidas
1	2.931	2.809
2	4.864	4.255
3	5.970	5.430
4	12.540	10.970
5	16.020	16.000
6	18.802	18.510
7	26.895	27.250
8	58.698	57.540

Tabela 6.5 - Índices de Convergência modais (Ex.3).

Mode <sub>1</sub>	IC <sub>1</sub>
1	1.0E+2
2	3.0E+1
3	2.0E+1
4	5.0E+1
5	5.0E+2
6	2.0E+2
7	7.0E+2
8	1.0E+3

Tabela 6.6 - Erros de MODAL em relação a PFORCE no Ex. 3.

Ponto	Deslocamentos Máximos (cm)		Erro (%)
	MODAL	PFORCE	
1	0.5917E-01	0.3169E-01	86.72
2	0.3389E-04	0.1576E-04	115.04
3	0.2389E-01	0.9034E-02	164.45
4	0.1001E-05	0.1585E-06	531.55
5	0.2528E-01	0.8489E-02	197.80
6	0.1350E-05	0.2639E-06	411.56
7	0.2752E+00	0.3779E-01	628.24
8	0.1115E-04	0.1750E-05	537.14

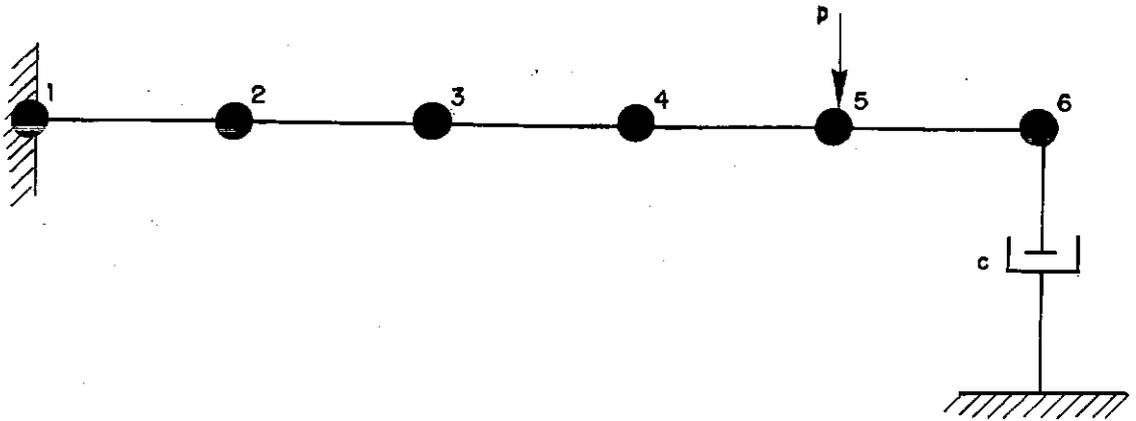


Fig. 6.1 - Viga em balanço com amortecedor discreto  
(Exemplo 1)

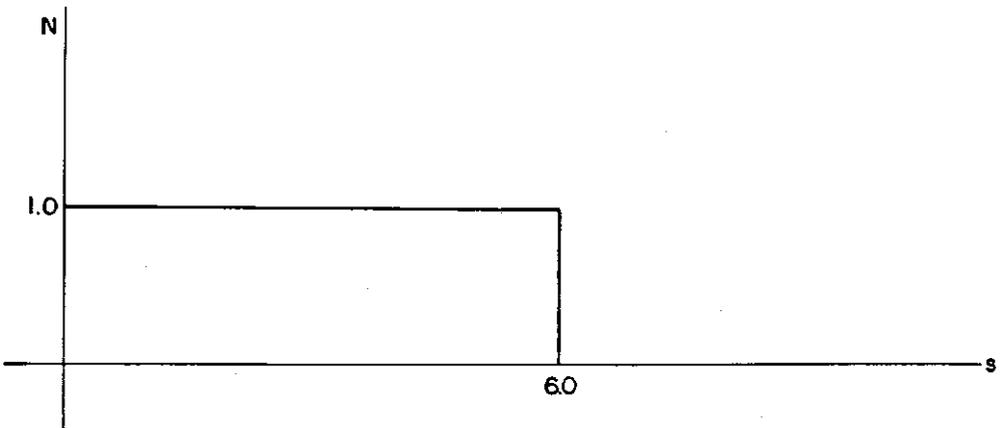


Fig. 6.2 - Carga (Exemplo 1).

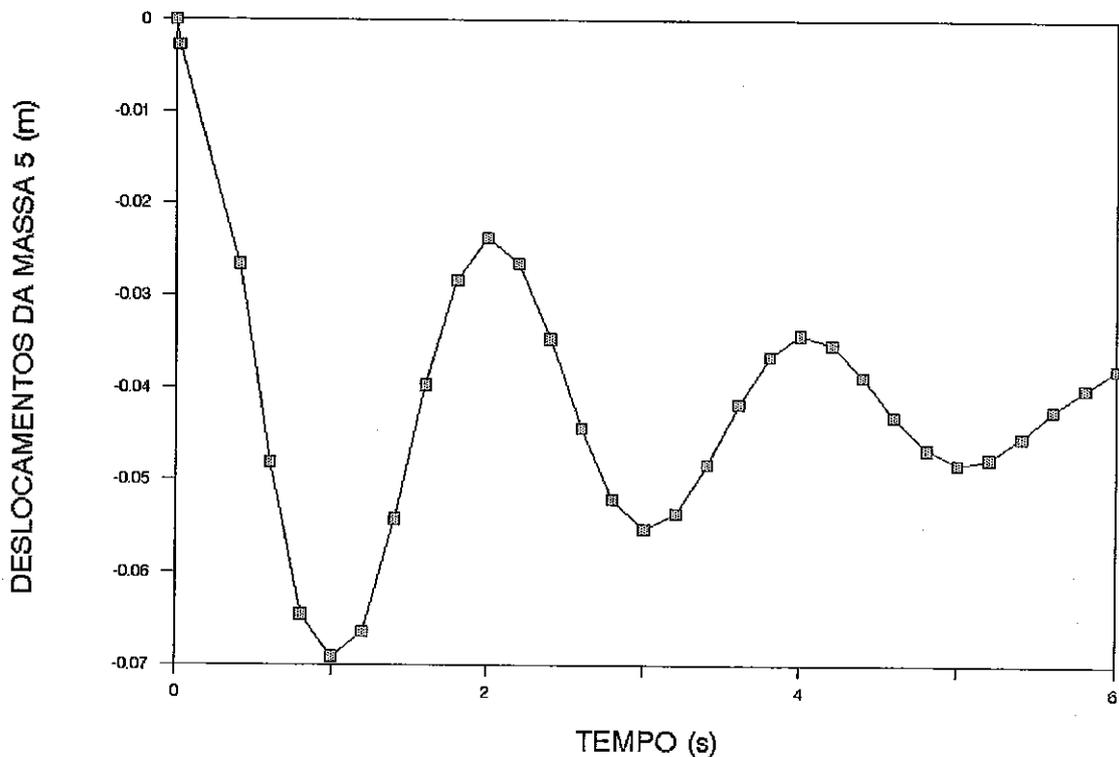


Fig. 6.3 - Deslocamentos do ponto 5 (Exemplo 1).

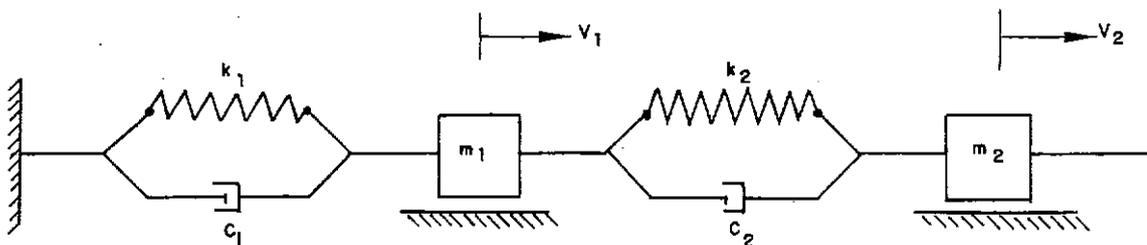


Fig. 6.4 - Sistema de dois graus de liberdade (Exemplo 2).

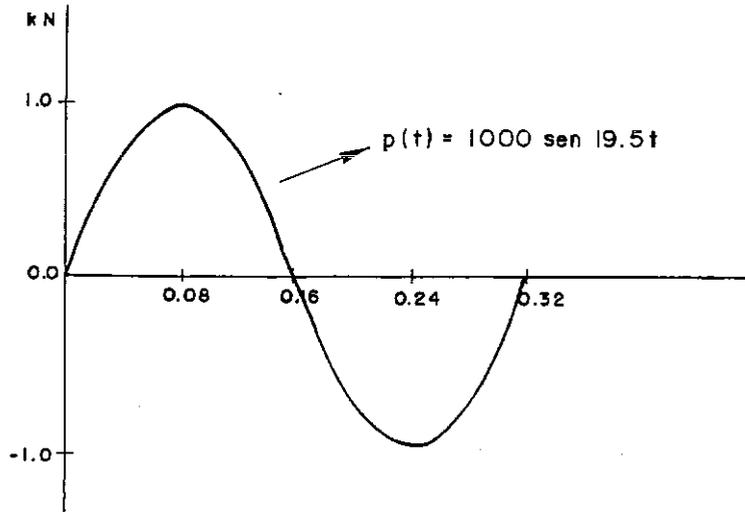


Fig. 6.5 - Carga ressonante aplicada à massa 2 (Exemplo 2).

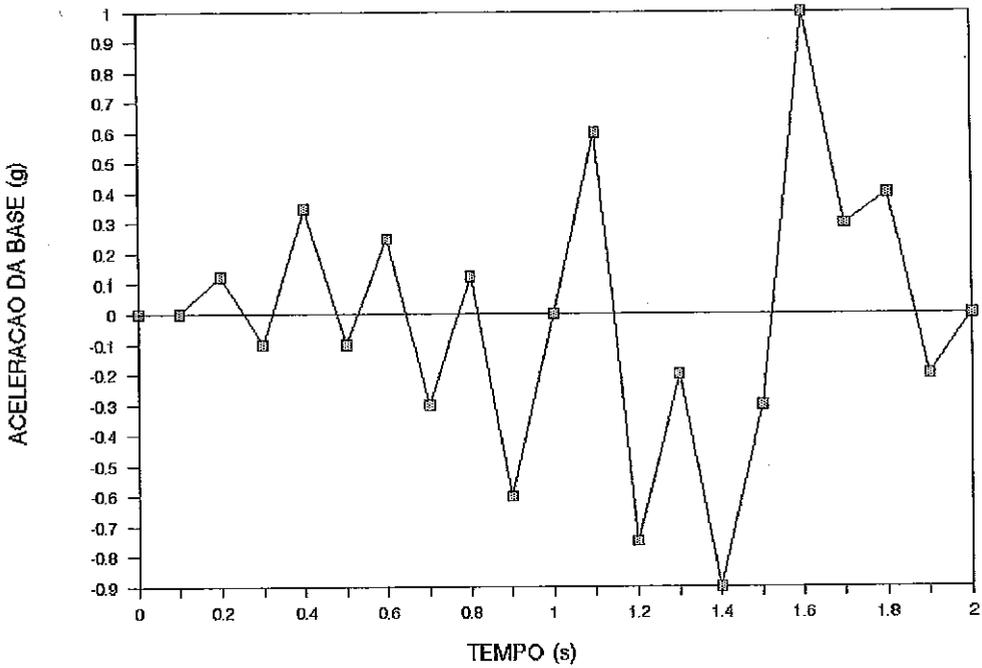


Fig. 6.6 - Histórico de acelerações de base (Exemplo 3).

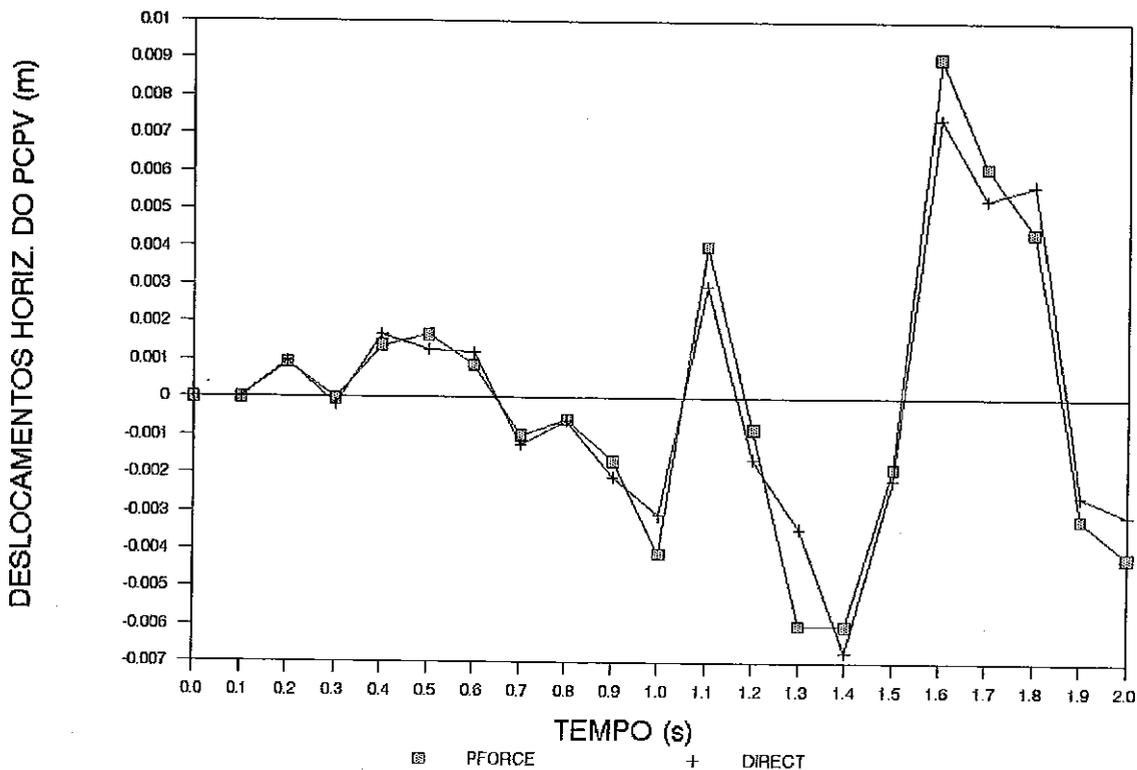


Fig. 6.7 - Deslocamentos Horizontais do PCPV (Exemplo 3).

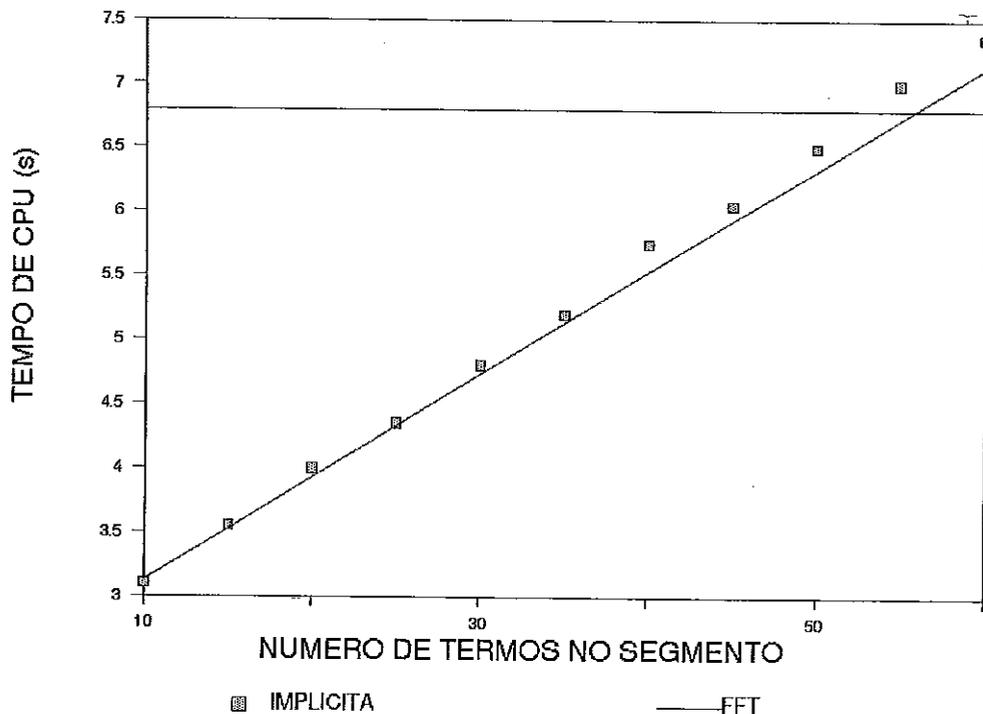


Fig. 6.8 - Comparação do Esforço computacional entre FFT e a formulação matricial (Exemplo 4).

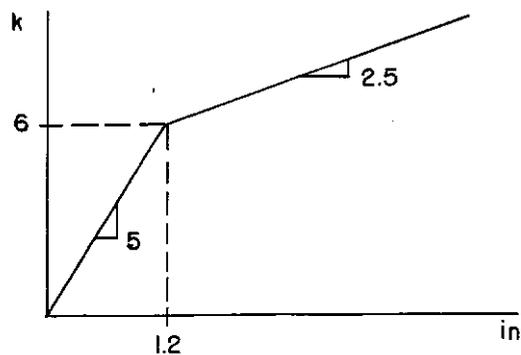
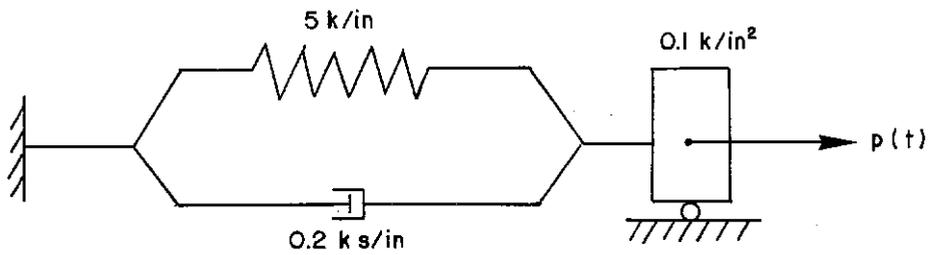


Fig. 6.9 - Sistema de um grau de liberdade (Exemplo 5).

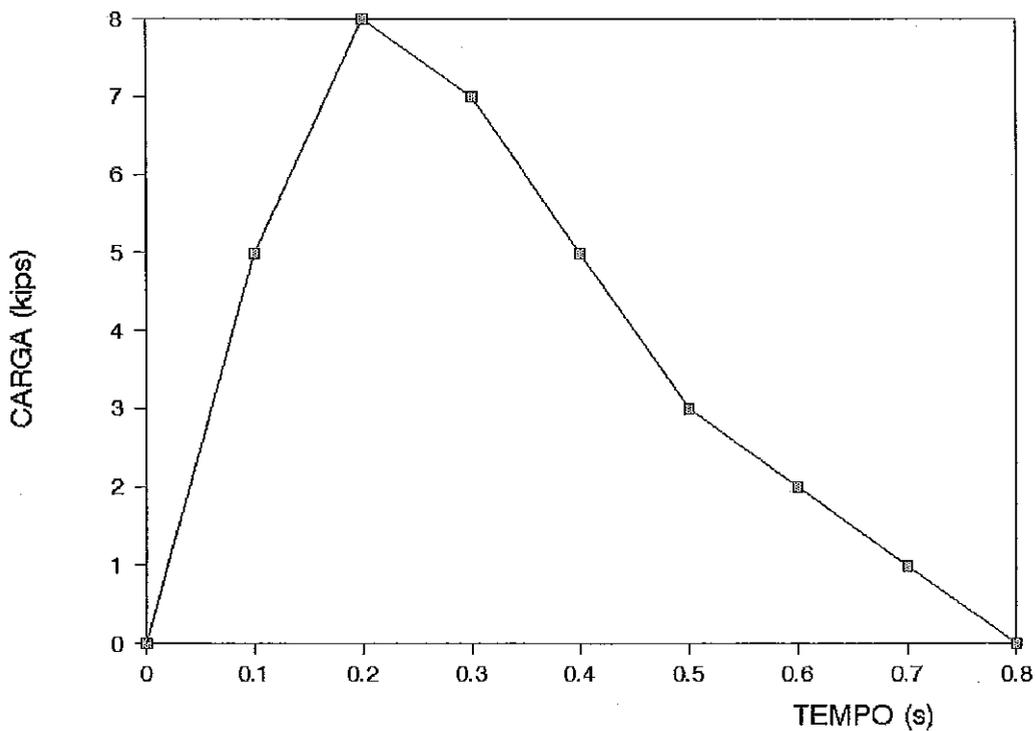


Fig. 6.10 - Carga (Exemplo 5).

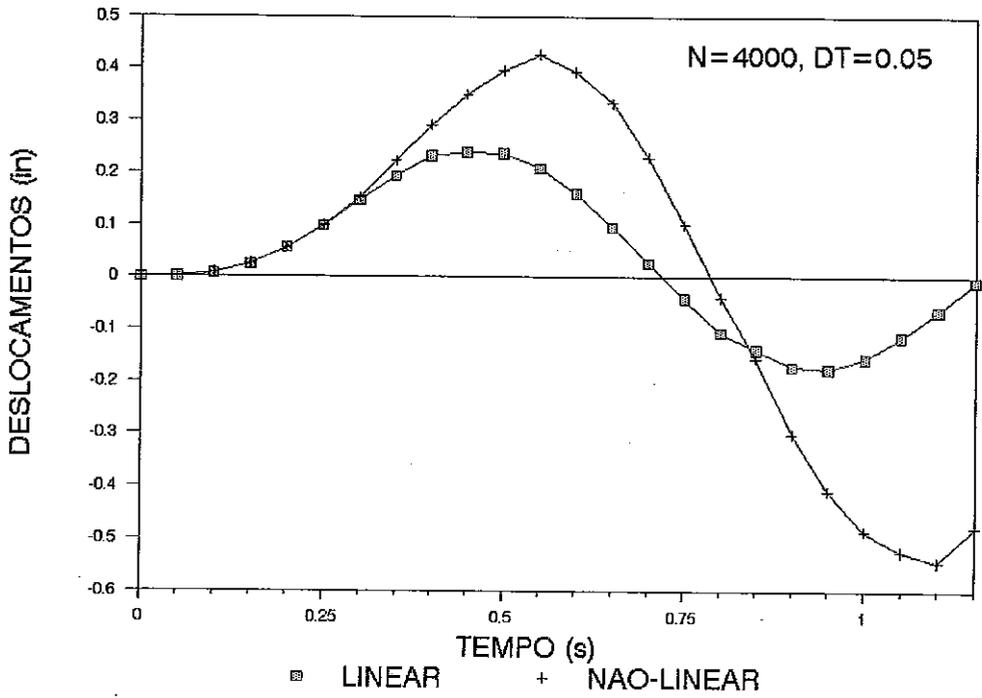


Fig.. 6.11 - Deslocamentos da massa no Exemplo 5.

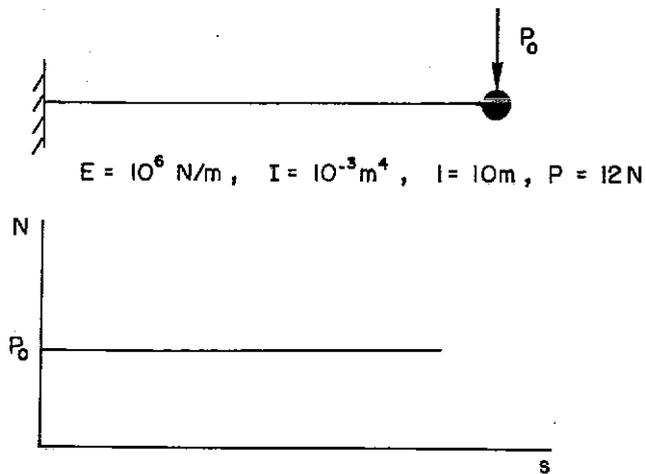


Fig. 6.12 - Viga em balanço e carga (Exemplo 6).

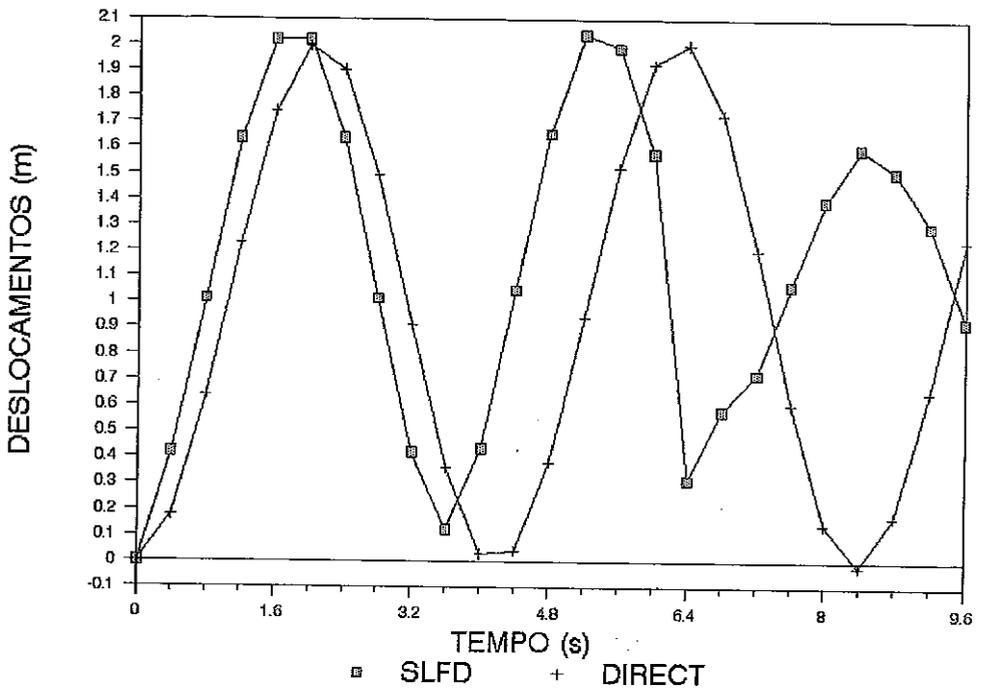


Fig. 6.13 - Deslocamentos da extremidade da viga em balanço (Exemplo 6).

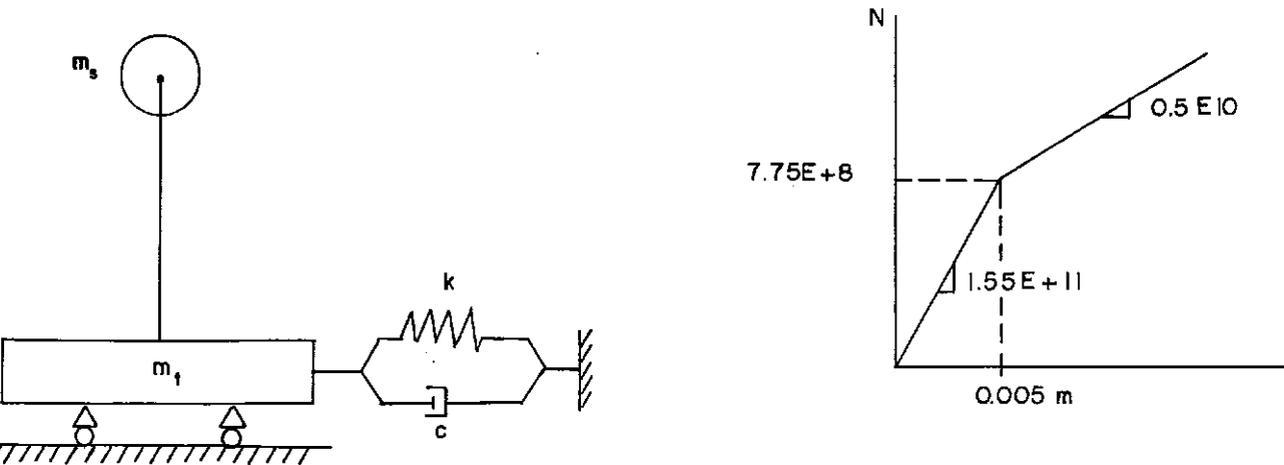


Fig. 6.14 - Sistema de dois graus de liberdade do Exemplo 7.

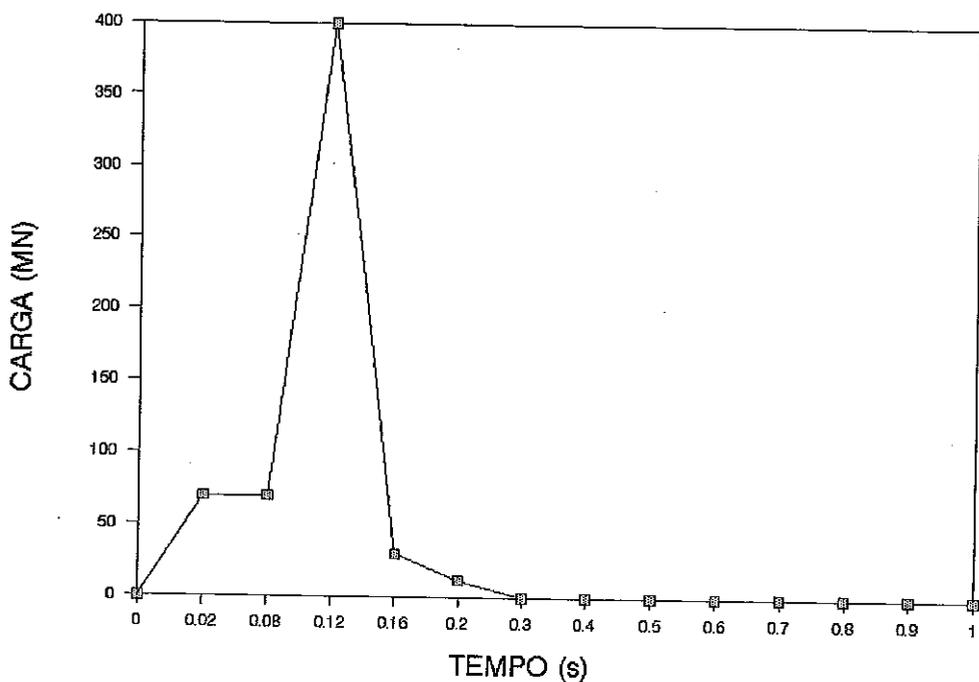


Fig. 6.15 - Carga de impacto atuante sobre o edifício (Exemplo 7)

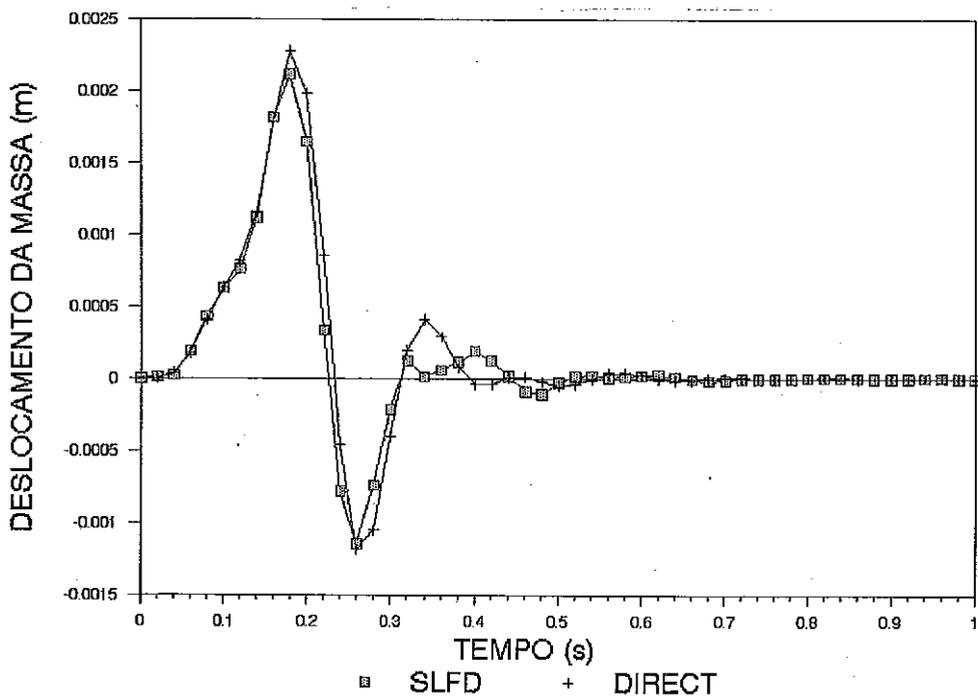


Fig. 6.16 - Deslocamentos do edifício (Exemplo 7).

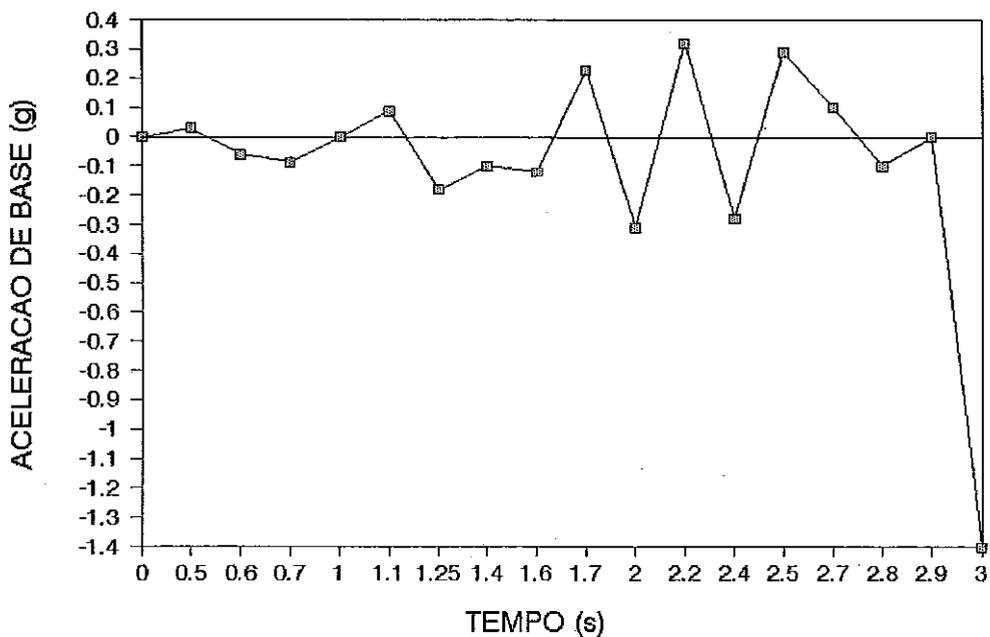


Fig. 6.17 - Carga sísmica (Exemplo 7).

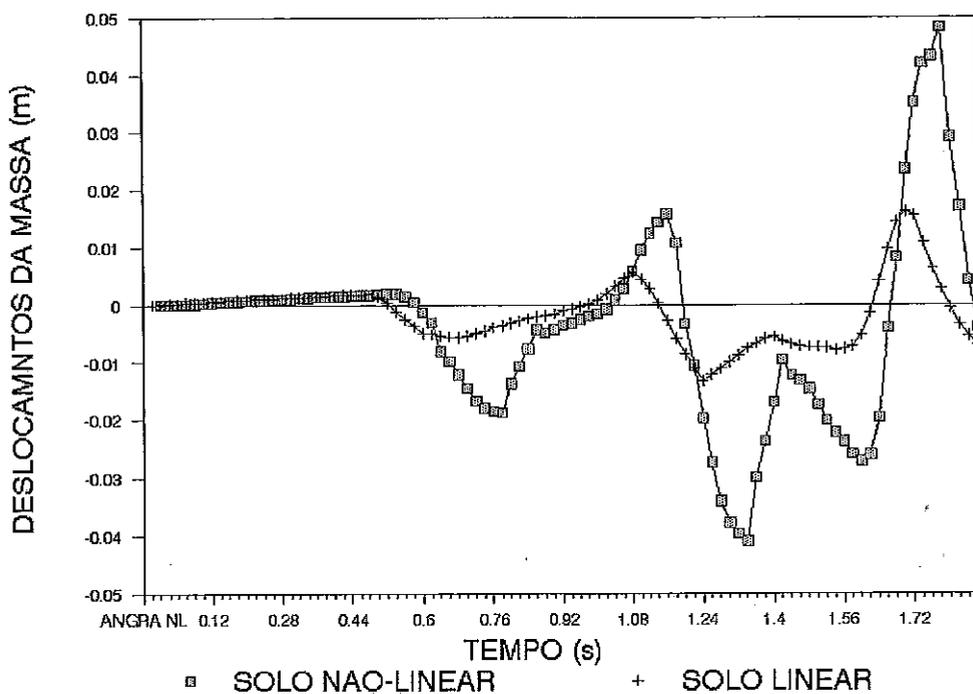


Fig. 6.18 - Deslocamentos do edifício sob carga sísmica (Exemplo 7).

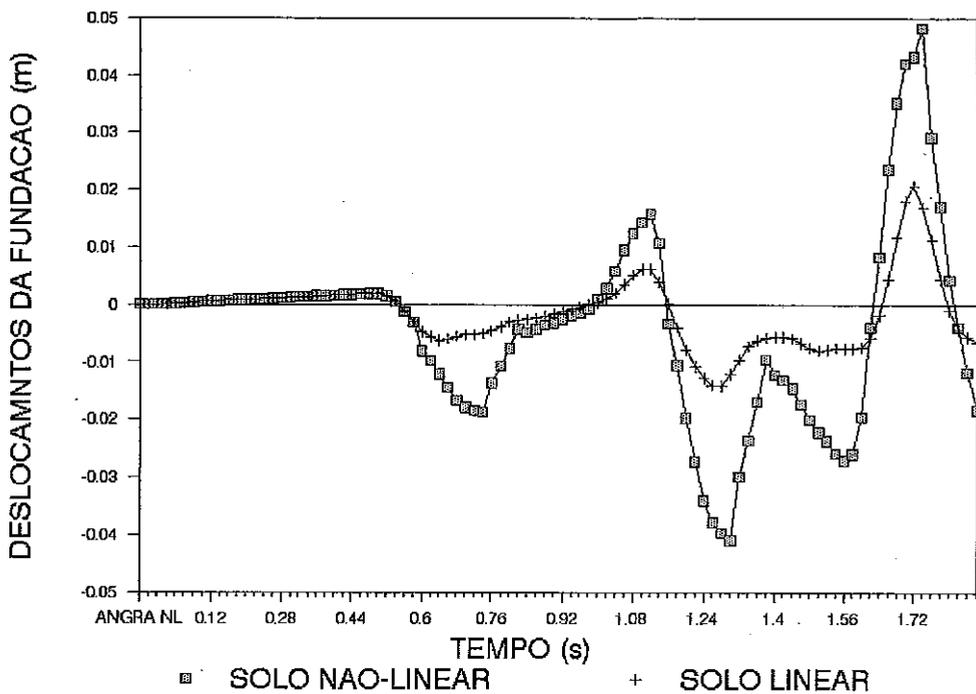


Fig. 6.19 - Deslocamentos da fundação sob carga sísmica (exemplo 7)

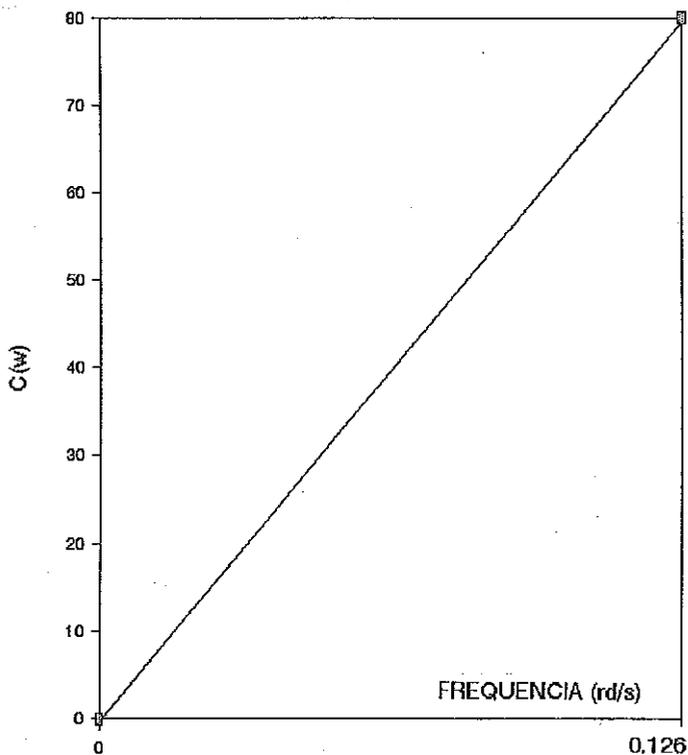


Fig. 6.20 - Função  $c(\omega)$  para o caso II (Exemplo 8).

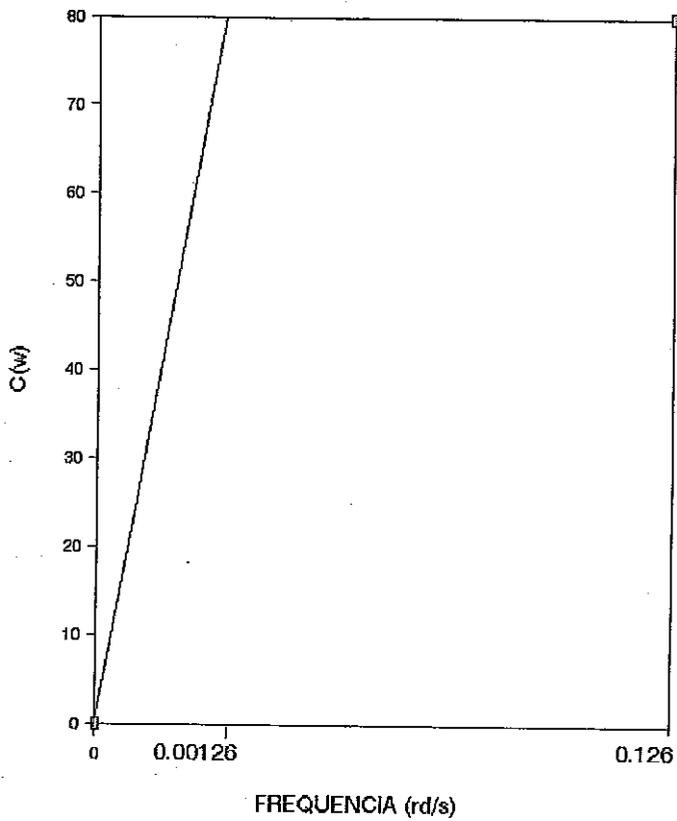


Fig. 6.21 - Função  $c(\omega)$  para o caso III (Exemplo 8).

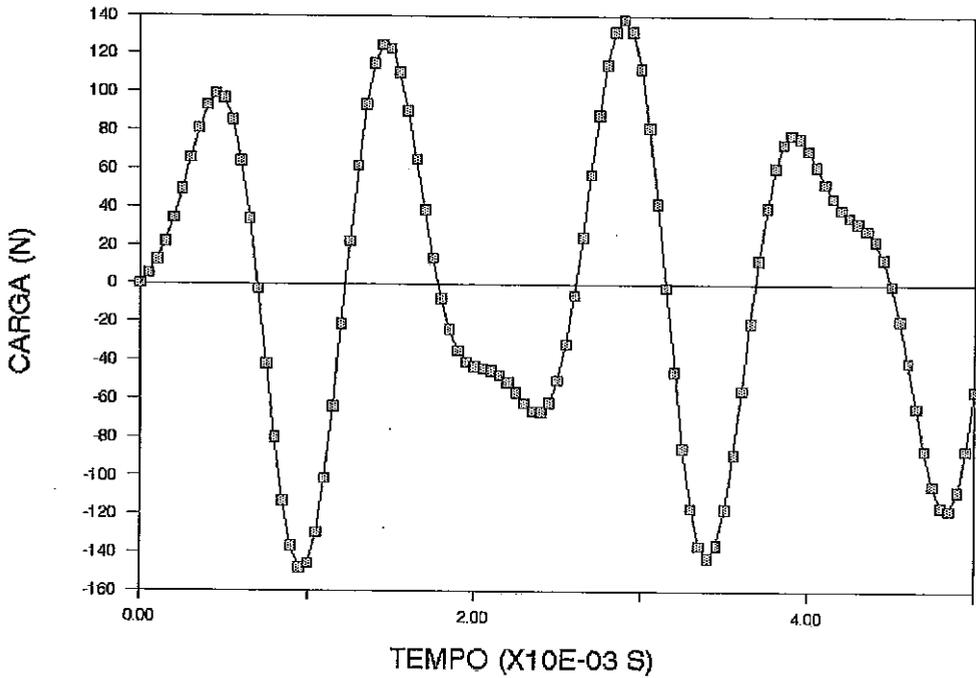


Fig. 6.22 - Função de carga (Exemplo 8).

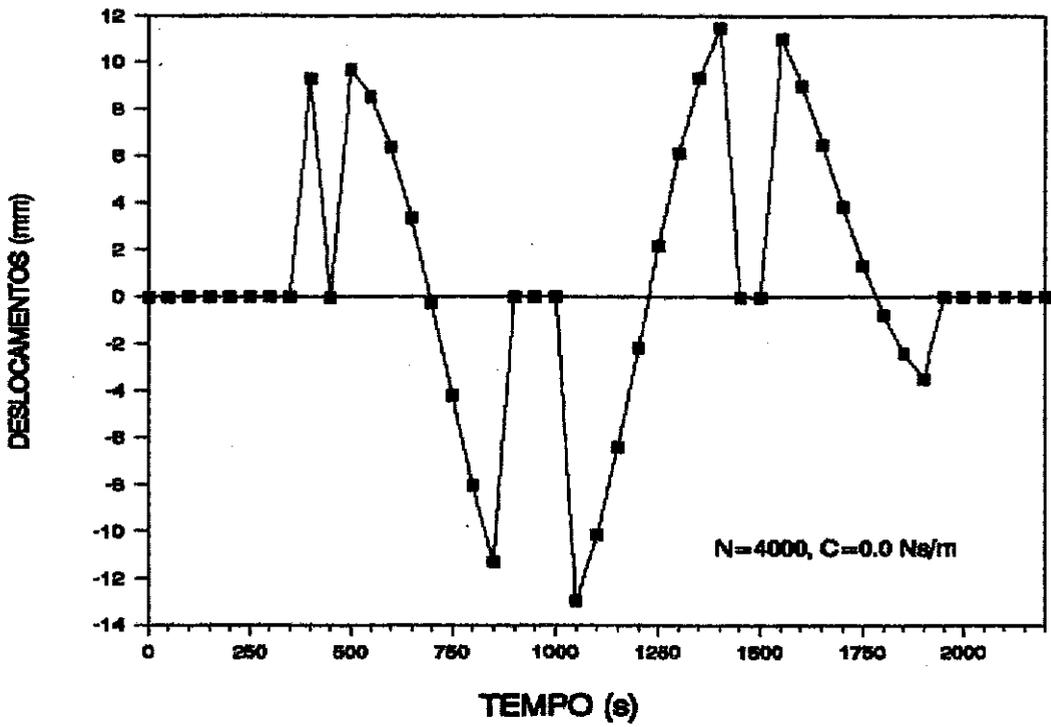


Fig. 6.23 - Deslocamentos da massa no caso I (Exemplo 8).

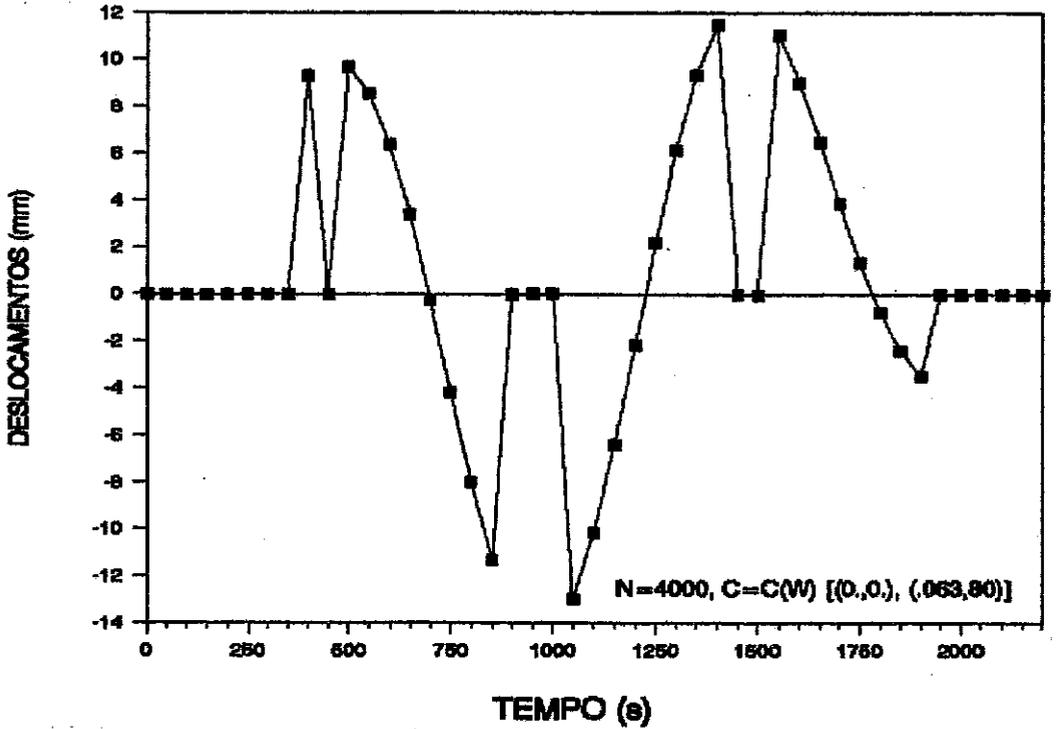


Fig. 6.24 - Desloamentos da massa no caso II (Exemplo 8)

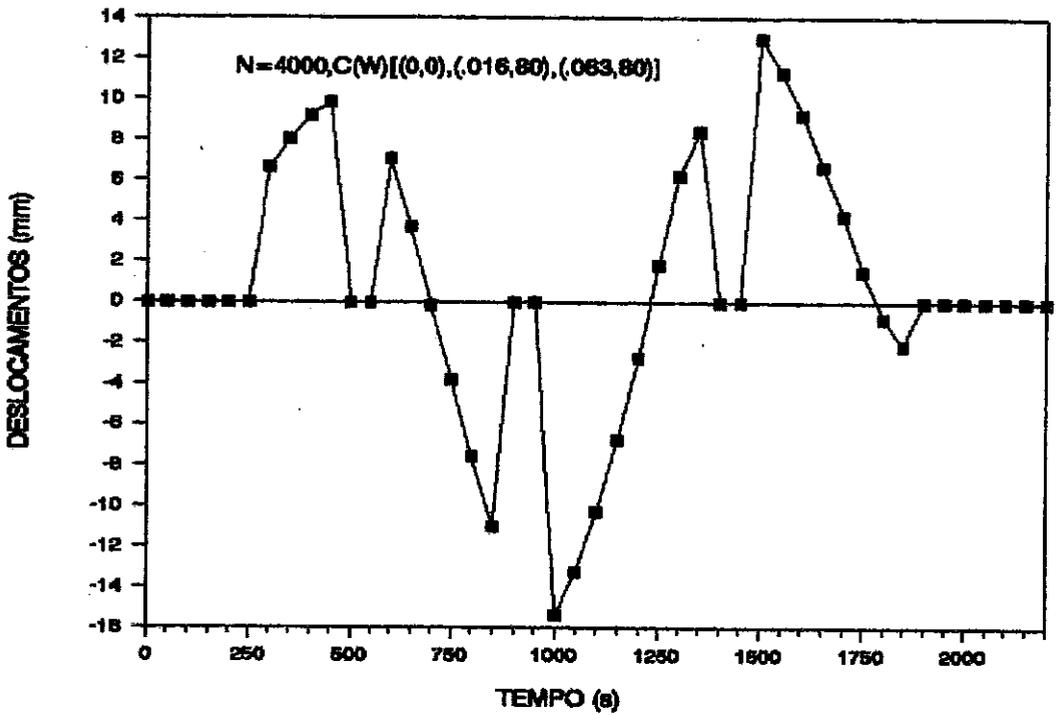


Fig. 6.25 - Deslocamentos da massa no caso III (Exemplo 8).

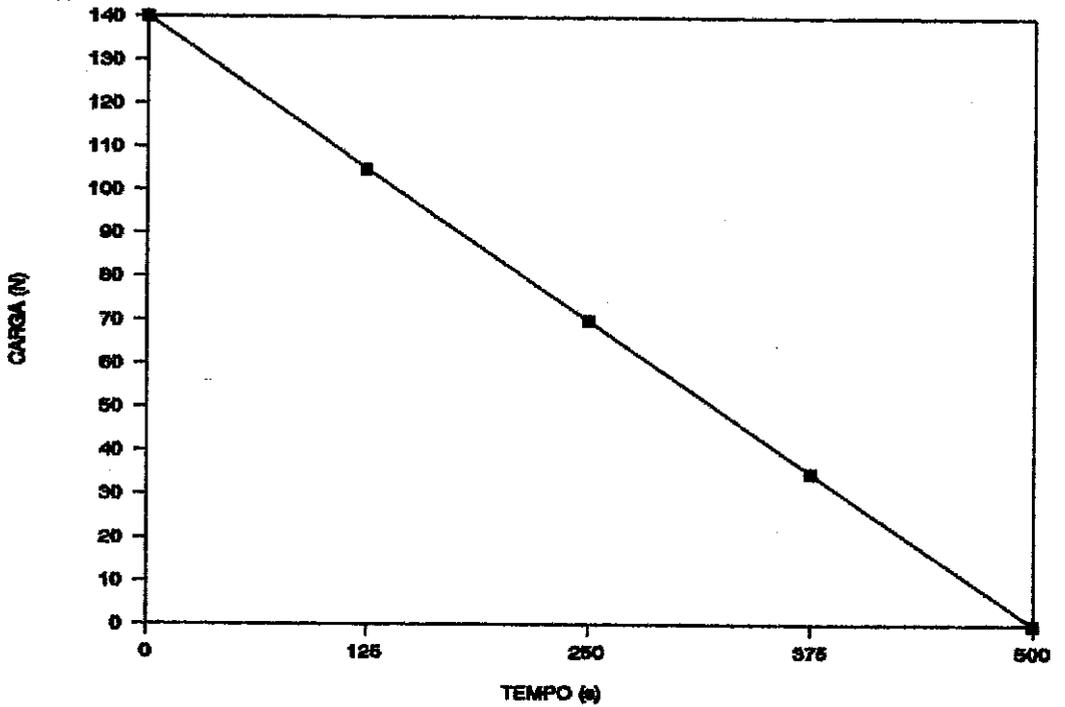


Fig. 6.26 - Carga triangular (Exemplo 9).

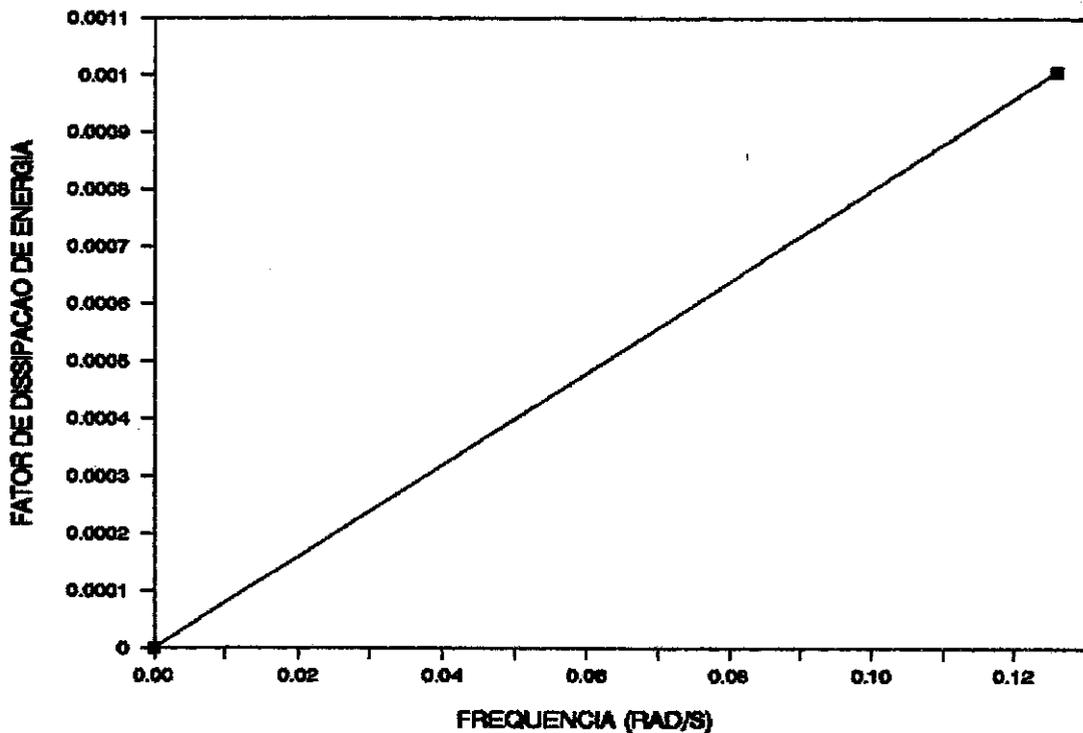


Fig. 6.27 - Função  $\eta(\omega)$  linear (Exemplo 9).

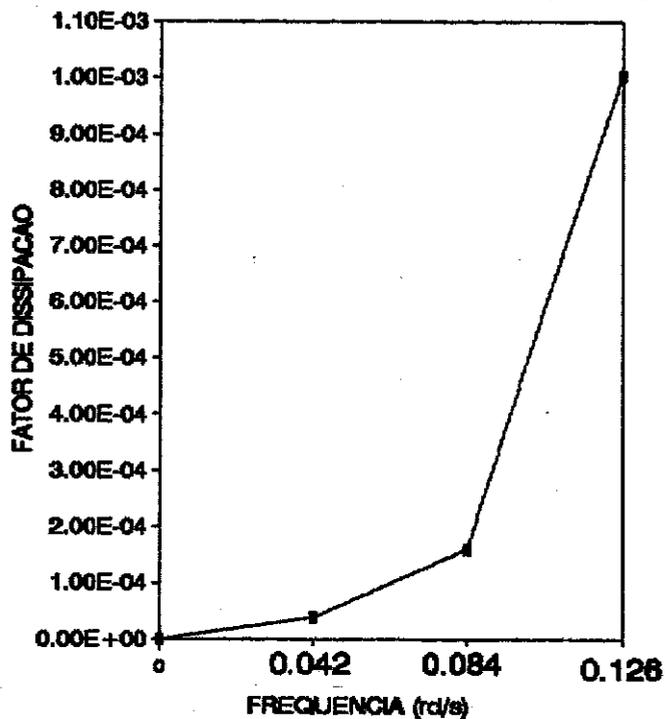


Fig. 6.28 - Função  $\eta(\omega)$  proporcional a  $\omega^2$  (Exemplo 9).

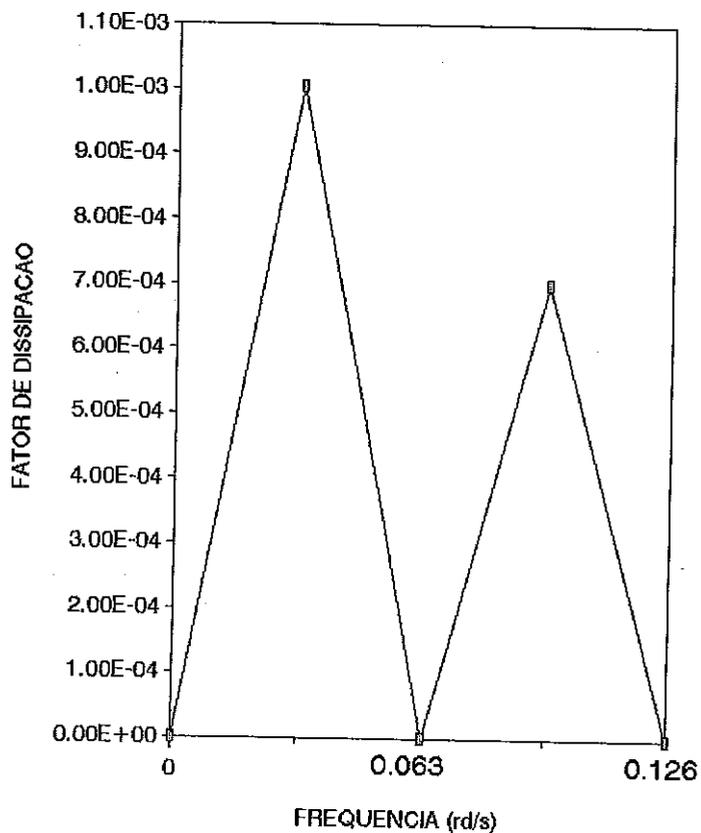


Fig. 6.29 - Função  $\eta(\omega)$  no caso III (Exemplo 9).

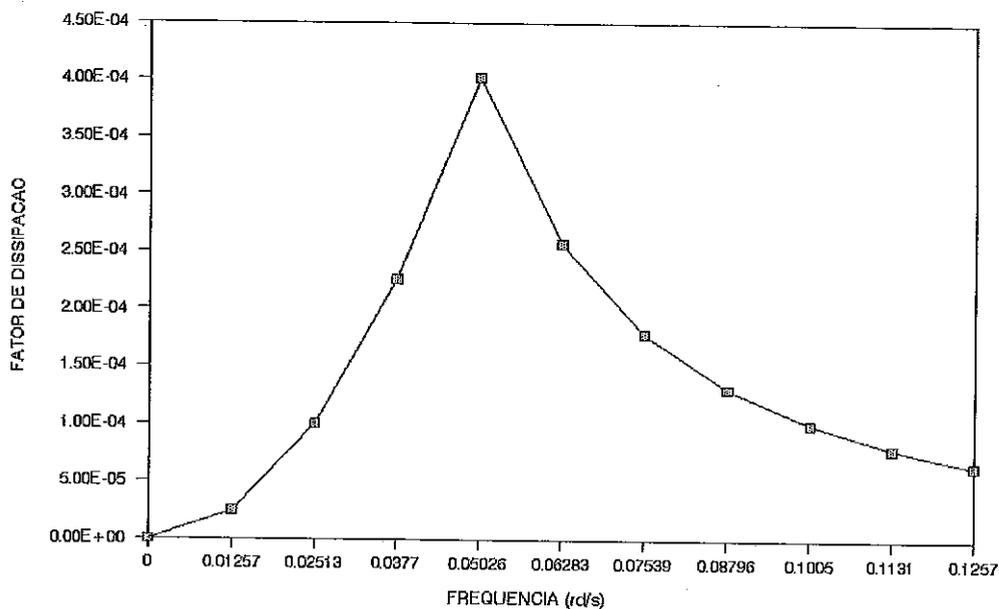


Fig. 6.30 - Função  $\eta(\omega)$  no caso IV (Exemplo 9).

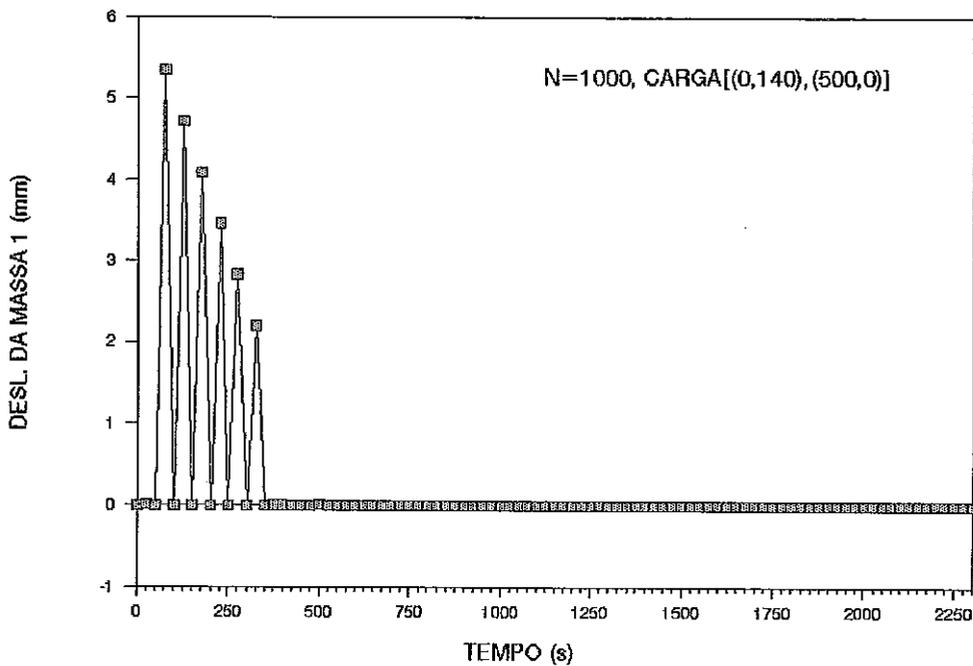


Fig. 6.31 - Deslocamentos da massa 1 no caso I (Exemplo 9).

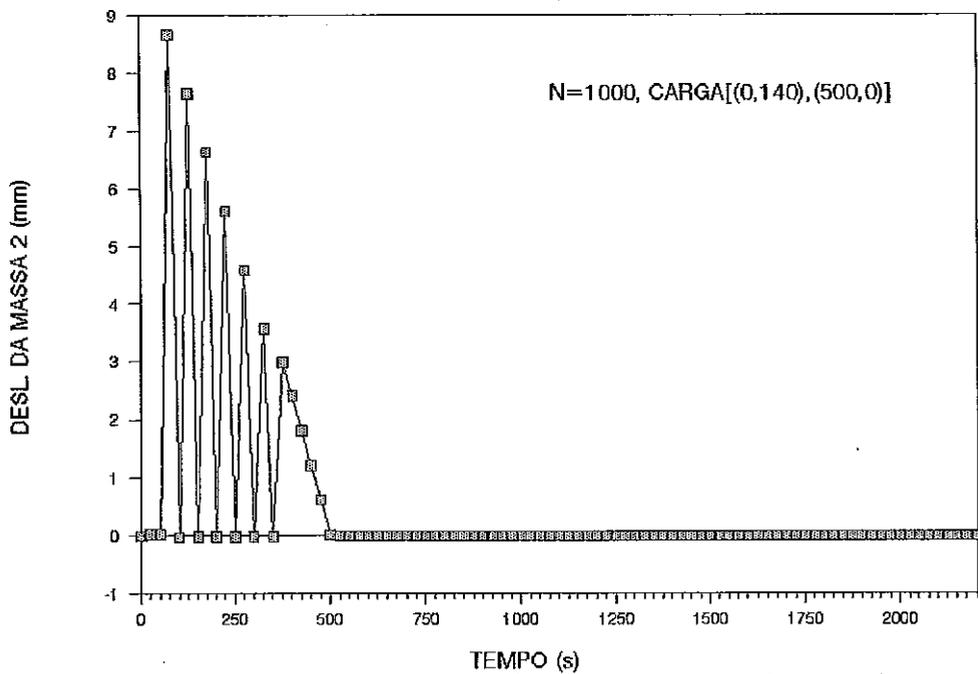


Fig. 6.32 - Deslocamentos da massa 2 no caso I (Exemplo 9).

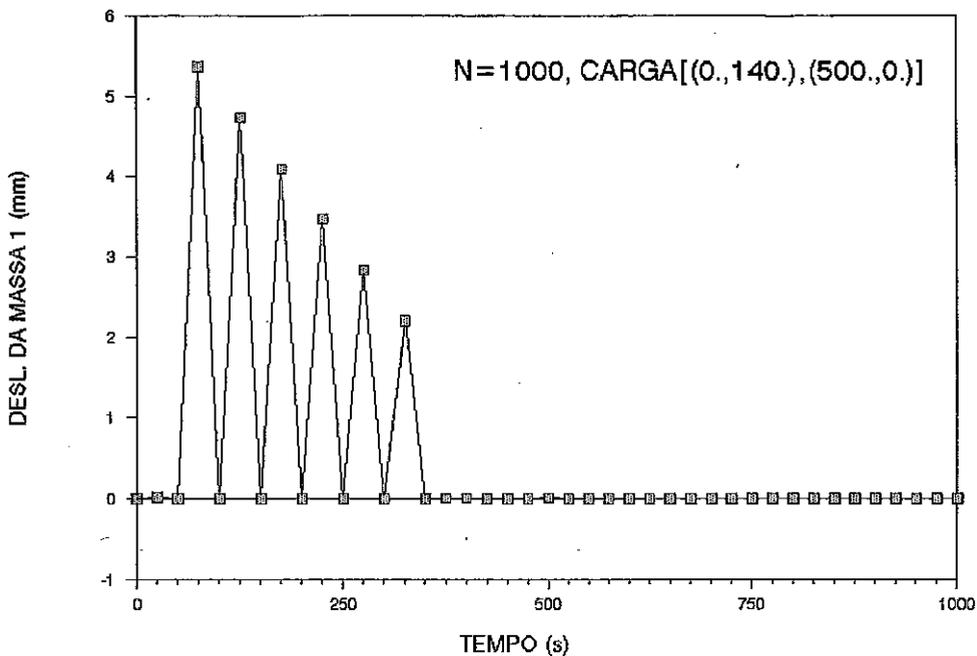


Fig. 6.33 - Deslocamentos da massa 1 no caso II (Exemplo 9).

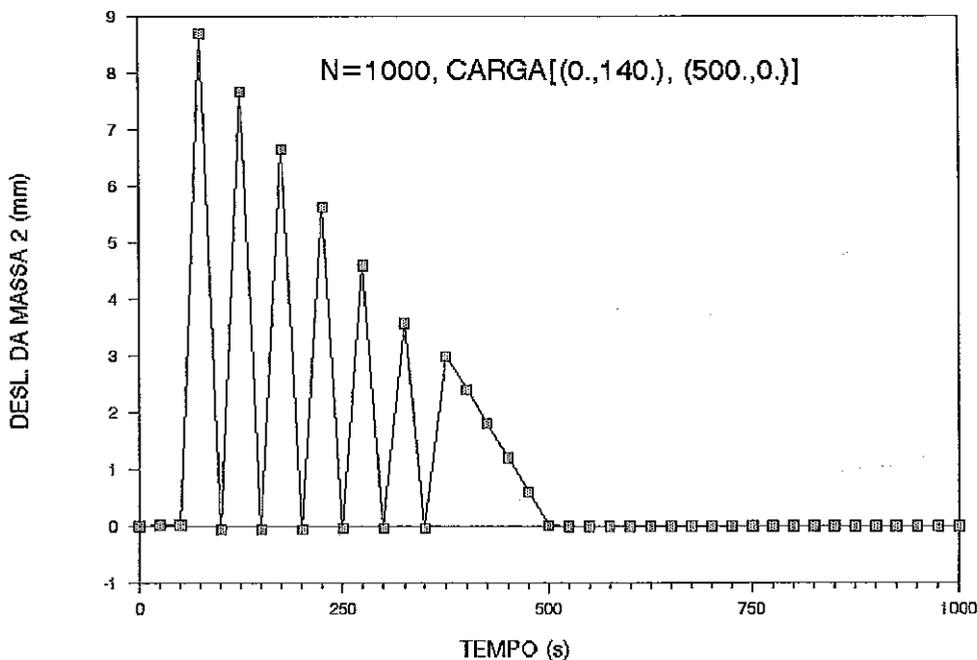


Fig. 6.34 - Deslocamentos da massa 2 no caso II (Exemplo 9).

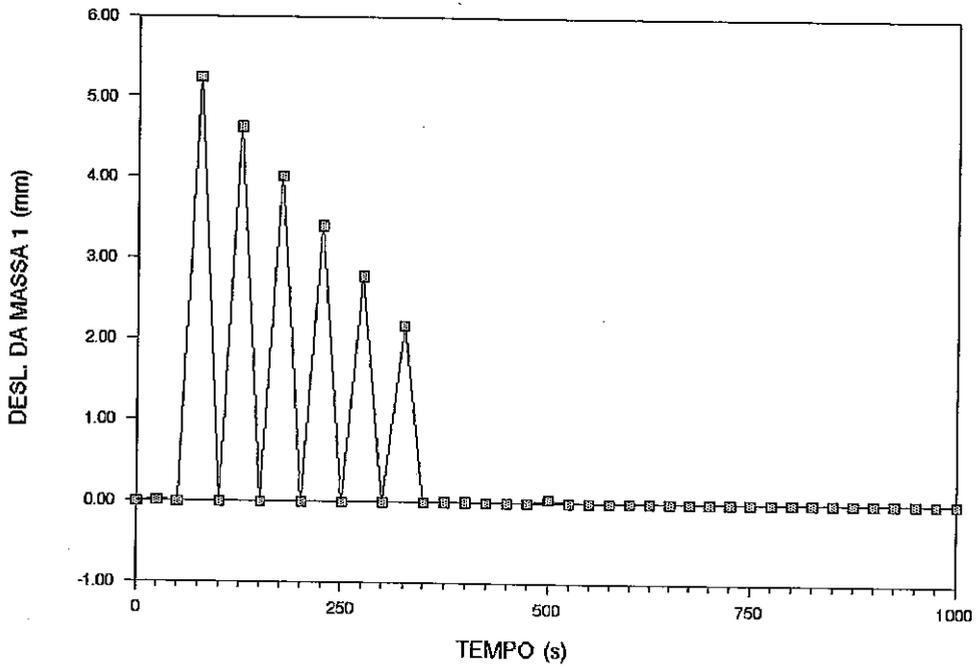


Fig. 6.35 - Deslocamentos da massa 1 no caso III

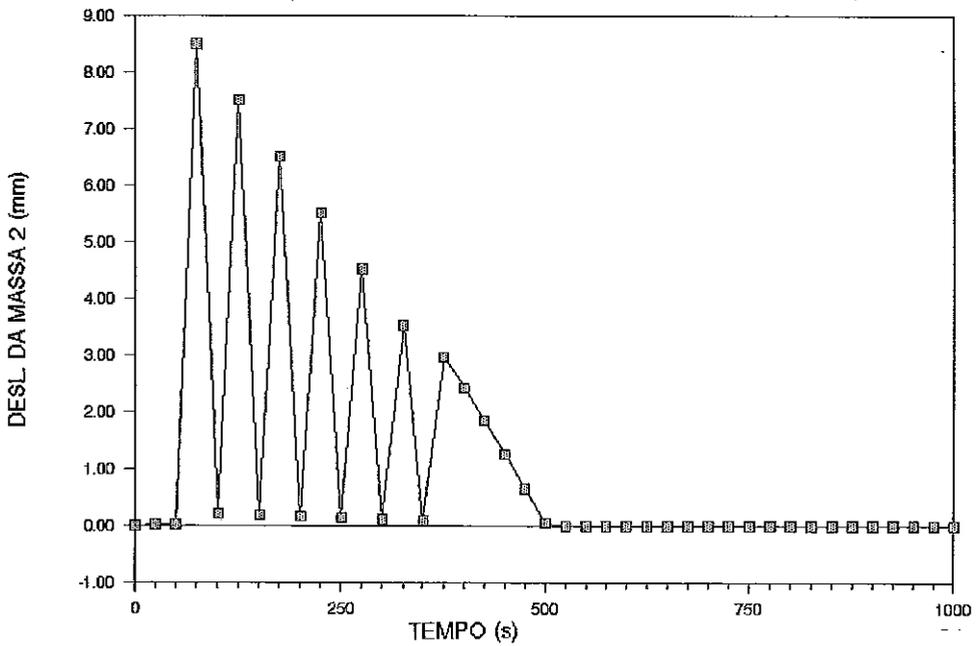


Fig. 6.36 - Deslocamentos da massa 2 no caso III

(Exemplo 9)

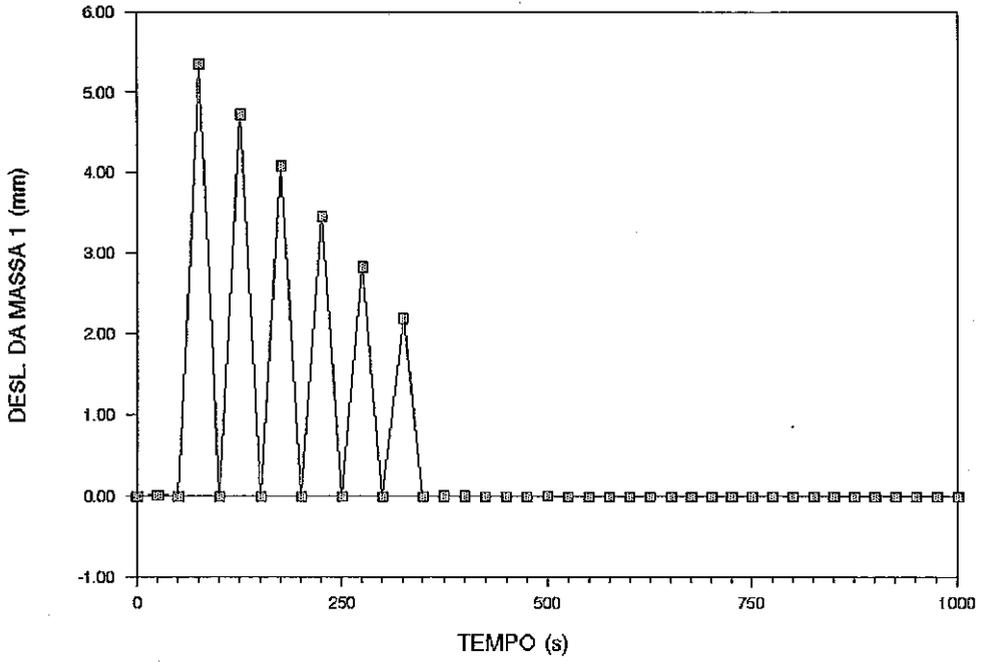


Fig. 6.37 - Deslocamentos da massa 1 no caso IV (Exemplo 9).

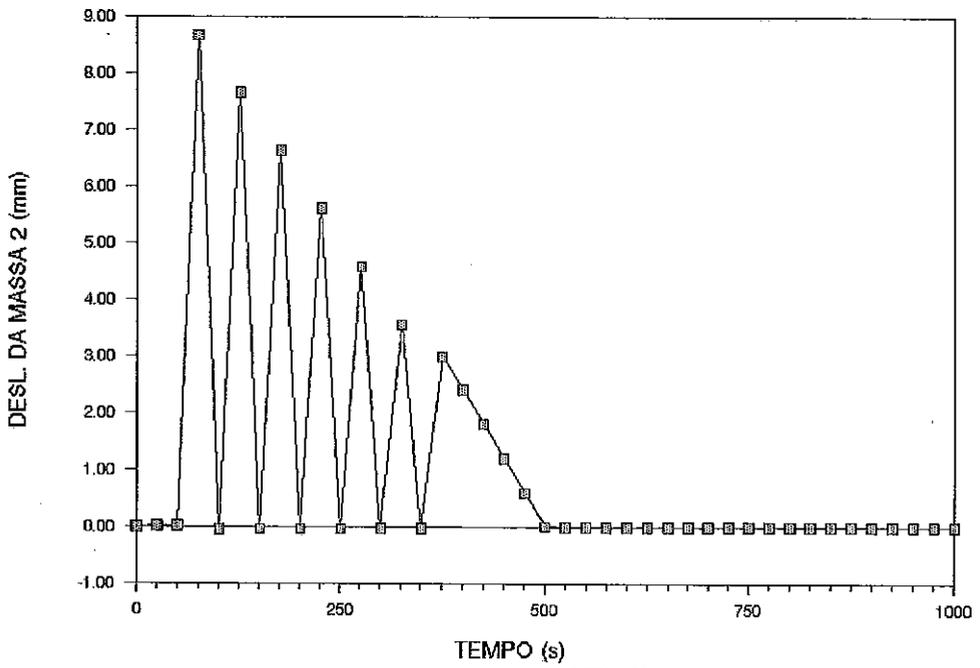


Fig. 6.38 - Deslocamentos da massa 2 no caso IV (Exemplo 9).

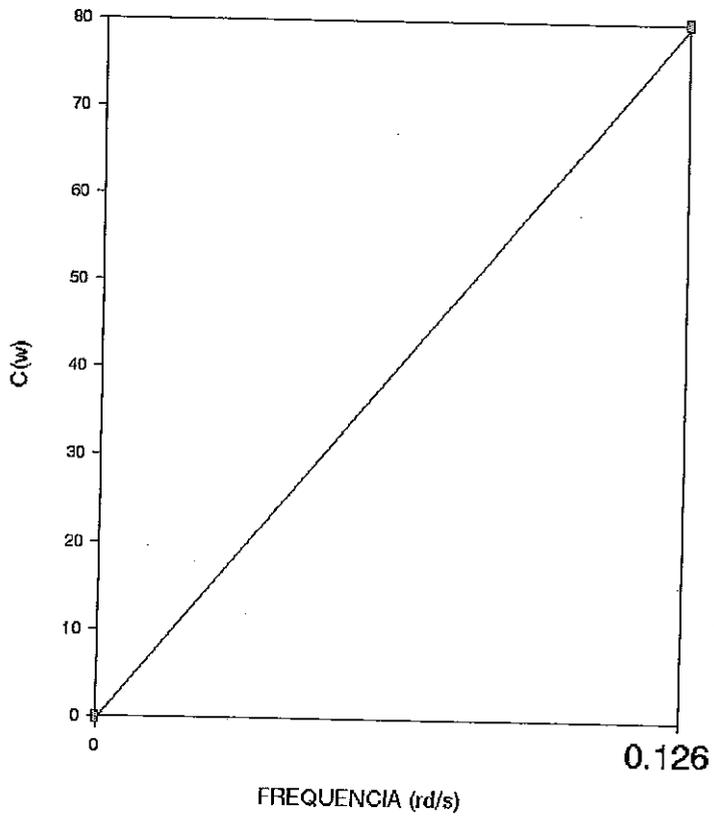


Fig. 6.39 - Função  $c(\omega)$  linear.

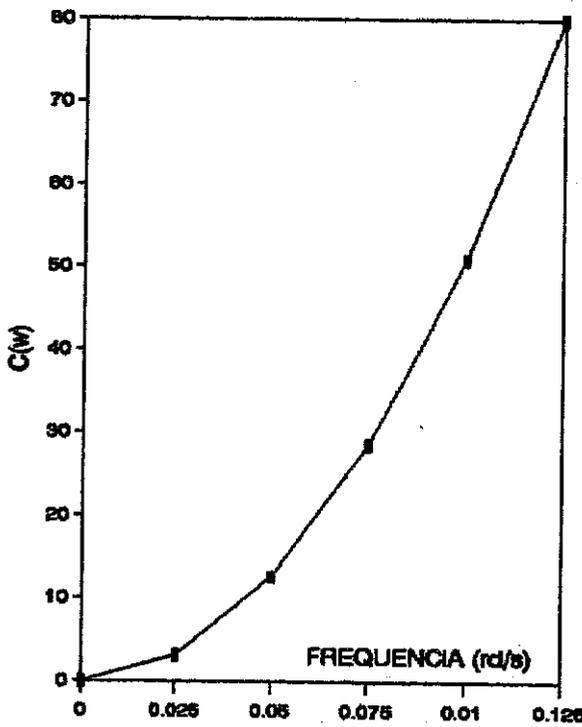


Fig. 6.40 - Função  $c(\omega)$  proporcional a  $\omega^2$ .

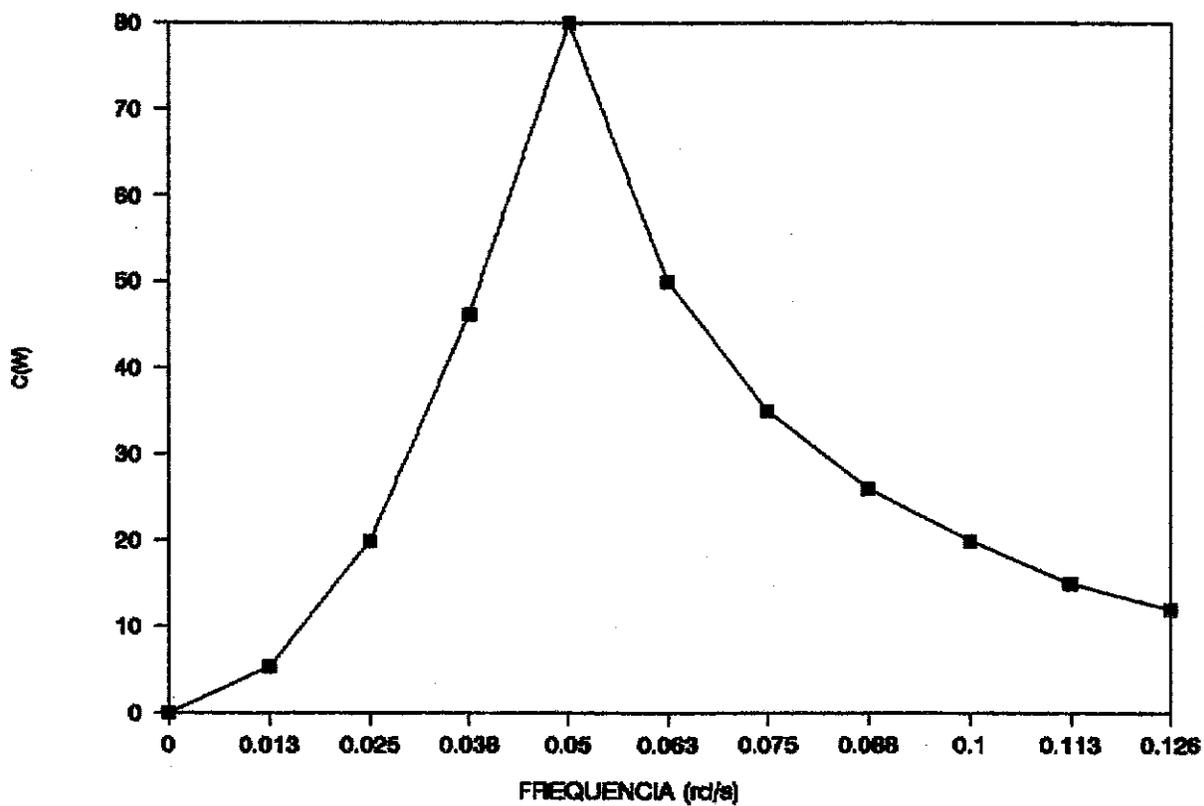


Fig.6.41 - Função  $c(\omega)$  para o caso III (Exemplo 10).

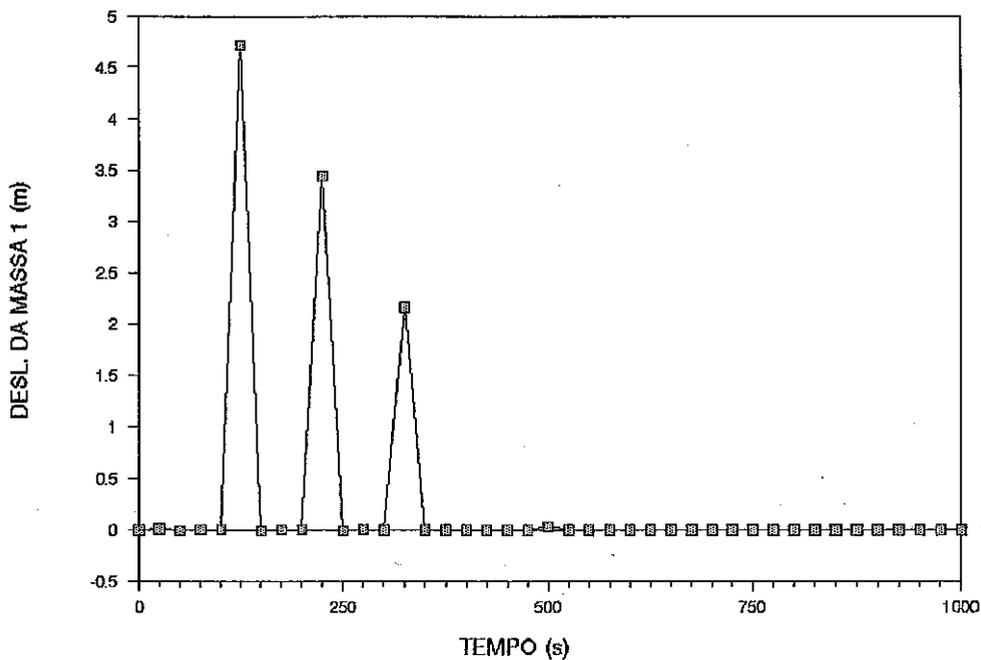


Fig.6.42 - Deslocamentos da massa 1 no caso I (Exemplo 10).

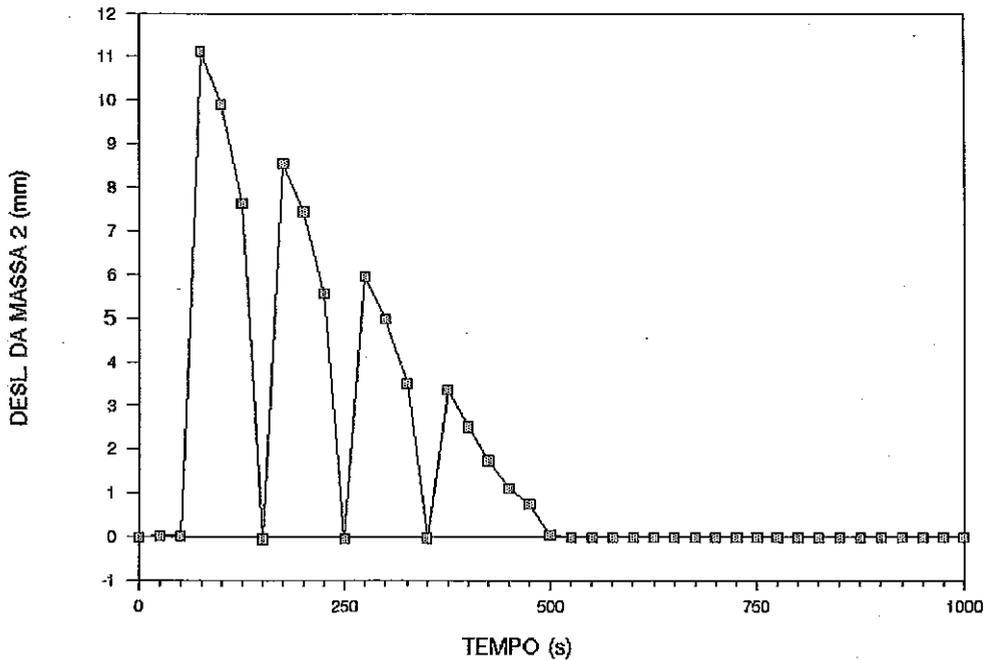


Fig.6.43 - Deslocamentos da massa 2 no caso I (Exemplo 10).

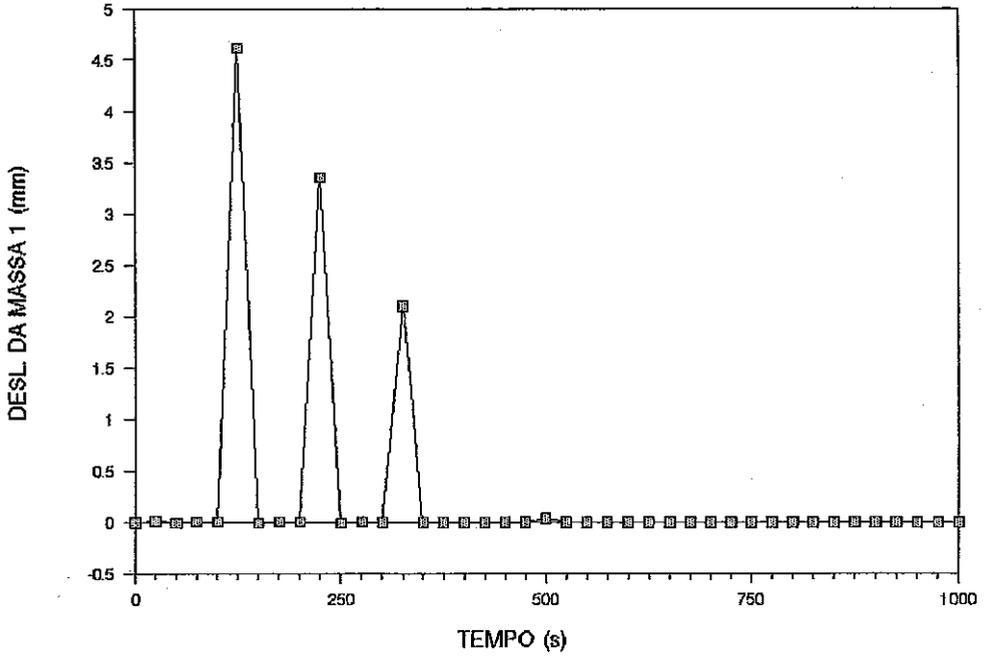


Fig.6.44 - Deslocamentos da massa 1 no caso II (Exemplo 10).

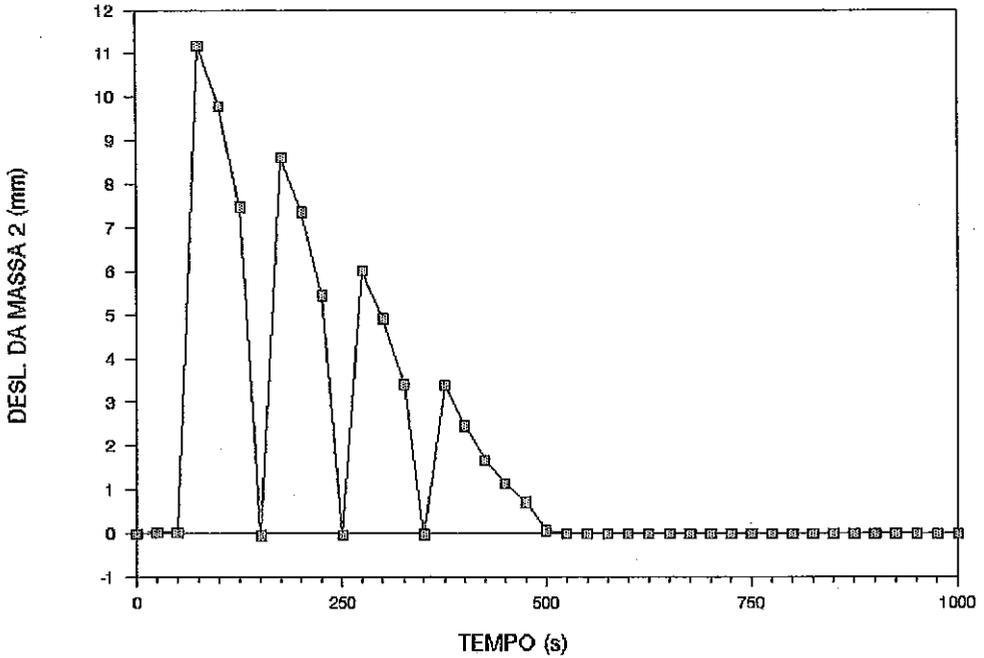


Fig.6.45 - Deslocamentos da massa 2 no caso II (Exemplo 10).

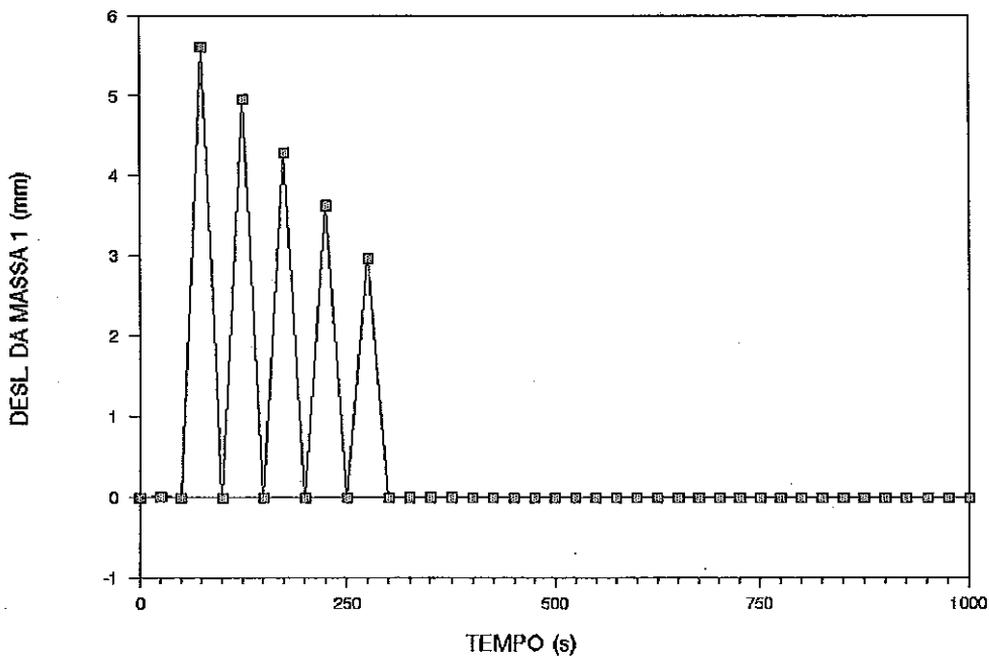


Fig.6.46 - Deslocamentos da massa 1 no caso III

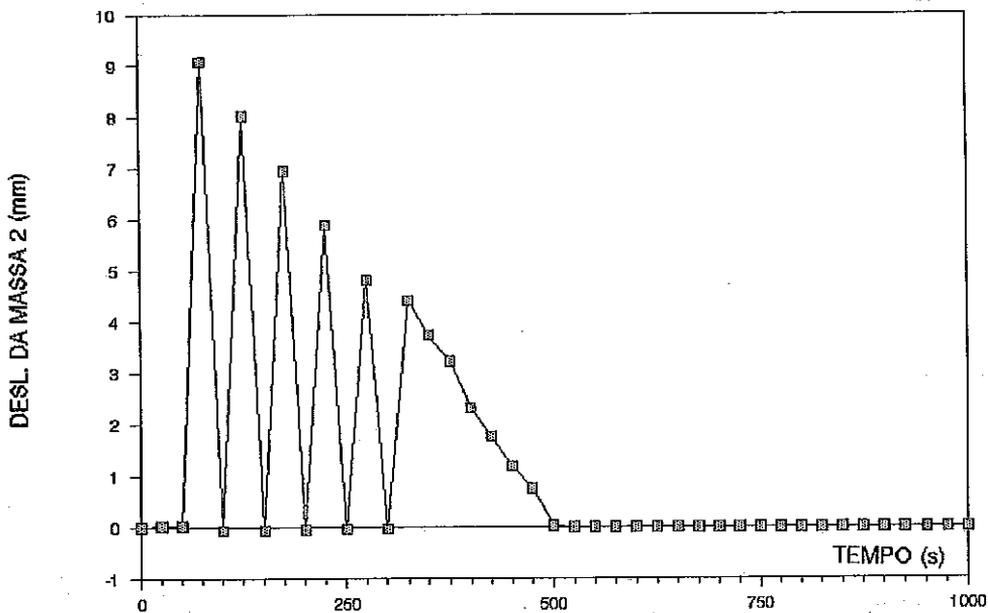


Fig.6.47 - Deslocamentos da massa 2 no caso III  
(Exemplo 10).

## 7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 7.1 CONCLUSÕES

A proposição de um método de análise deve ser seguida de número suficiente de avaliações numéricas, antes que a sua aplicação seja adotada em problemas práticos de engenharia de estruturas, não só para absoluta segurança em relação aos resultados obtidos como para verificar as características que se pretendeu adquirir com o seu desenvolvimento. Nesse caso, a implementação computacional efetuada visou apenas demonstrar a viabilidade numérica do método proposto.

A concepção do método SLFD tem o propósito de reunir a economicidade do método de superposição modal clássico, que permite trabalhar em um espaço vetorial de dimensão reduzida, e a precisão de um processo de integração teoricamente exato. As características do método SLFD decorrem destes dois métodos básicos.

O método de superposição modal é adequado para solução de problemas dinâmicos em geral, mas elimina os problemas típicos de propagação de ondas onde todos os modos

são excitados. Portanto, as aplicações esperadas para o método SLFD são respostas transientes a excitações sísmicas, carregamentos dinâmicos generalizados e forças de vento. Efeitos localizados, em geral, analisados tendo em vista processos de fadiga, podem também envolver grande número de modos, tornando o método potencialmente inadequado.

A utilização de coordenadas generalizadas permite a identificação dos modos dominantes na resposta, o que possibilita estudar a transição da resposta linear para a resposta não-linear.

A análise no domínio da frequência é precisa sempre que um número suficiente de frequências é adotado no espectro, de modo a captar picos de frequências nos carregamentos. Problemas como alongamento de período e amortecimento artificial são completamente afastados. Por outro lado, a escolha do intervalo de tempo de integração deve considerar a frequência de Nyquist,  $f_N$ , que corresponde à maior frequência presente no histórico de carga, ou seja,  $\Delta t < 1/(2f_N)$  (Newland, 1975). Kawamoto (1983) menciona que um intervalo de tempo adequado para análise no domínio da frequência, em geral, é cerca de 5 a 10 vezes maior que o correspondente adequado para integração direta. Espera-se, portanto, economia de esforço computacional com esse método.

Para dar maior generalidade ao método proposto, foi desenvolvido o tratamento de sistemas dinâmicos lineares, dotados de amortecimento não-proporcional, por

meio do método de superposição modal clássico. Com a mesma finalidade, a definição de uma matriz de amortecimento dependente da frequência foi proposta. Nessa definição, o acoplamento é devido à matriz de rigidez. Desse modo, a utilização de modos normais na formulação do método proposto não restringe a sua aplicabilidade na dinâmica estrutural.

O esforço computacional exigido em uma análise não-linear por meio de um método de linearização passo a passo no domínio da frequência é potencialmente muito elevado. A formulação matricial da resposta dinâmica no domínio da frequência, com as transformadas de Fourier implícitas, é adequada a este tipo de análise, conduzindo à economia de esforço computacional, o que pode aumentar a economicidade do método proposto.

## 7.2 SUGESTÕES

O aprofundamento da pesquisa aqui iniciada deverá considerar a adaptação do algoritmo proposto a programas de elementos finitos. A generalidade do método proposto, sensivelmente expandida no que se refere ao tratamento do amortecimento, deve ser estendida para abordagem de outras formas de comportamento não-linear. Materiais viscoelásticos têm sido muito pesquisados para o controle de vibrações, resultando em complexas funções de dissipação de energia, em geral dependentes da frequência.

A formulação matricial da resposta dinâmica, com as transformadas de Fourier implícitas, deve ser utilizada em sistemas de múltiplos graus de liberdade, já que potencialmente pode representar maior economia de esforço computacional, viabilizando definitivamente a análise não-linear no domínio da frequência. Nesse mesmo sentido, técnicas de redução modal devem ser empregadas, principalmente considerando que a verificação de convergência do processo iterativo, para tratamento do amortecimento não-proporcional, pode ser feita em coordenadas generalizadas (Claret e Venâncio-Filho, 1991), em lugar de coordenadas físicas, como foi implementado.

Outros métodos de extração modal, bem como técnicas de estimativa da variação das frequências naturais, antes da atualização das matrizes modais (Landau, 1983), devem ser empregadas, visando à análise de sistemas de grande porte.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATHE, K. J., GRACEWSKI, S., On nonlinear dynamic analysis using substructuring and mode superposition. *Computer and Structures*, v. 13, p. 699-707, 1981.
- BATHE, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1982.
- BIELAK, J., Dynamic behaviour of structures with embedded foundations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 3, p. 259-274, 1975.
- BORINO, G., MUSCOLINO, G., Mode superposition methods in dynamic analysis of classically and non-classically damped linear systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 14, p. 705-717, 1986.
- CAUGHEY, T. K. , O'KELLY, J. , Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME*, v. 32, p. 583-88, 1960

CHANG, C. J., ELGHADAMSI, F. E. , MOHRAZ, B. , Modal analysis of nonlinear systems with nonclassical damping. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, n. 89-1198-CP, 1989.

CHEN, T. , TAYLOR, R. L. , Properties and solutions of eigensystem of nonproportionally damped linear dynamic systems. In: NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING THEORY AND APPLICATIONS (NUMETA 87), n. t5/1, 1987.

---

., , Solution of viscouly damped linear systems using a set of load-dependent vectors. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 19, p. 653-665, 1990.

CLARET, A. M. , VENÂNCIO-FILHO, F. , A Modal Superposition Pseudo-Force Method for Dynamic Analysis of Structural Systems With Non-proportional Damping. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 20, p. 303-315, 1991.

---

., A pseudo-force method for the treatment of non-proporcional damping. In: SPECIALTY CONFERENCE OF ASCE, 7, Blacsburg, Virginia, USA, 1988.

CLOUGH, R. W. , MOJTAHEDI, S. , Earthquake response analysis considering non-proportional damping. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 4, p. 489-496, 1979.

CLOUGH, R. W. , PENZIEN, J. , *Dynamics of Structures*. New York, McGraw-Hill International Book Company, USA, 1975.

CLOUGH, R. W. , WILSON, E. L. , Dynamic analysis of large structural systems with local nonlinearities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 17, n. 18, p. 107-129, 1979.

COOLEY, J. W. , TUKEY, J. M. , An algorithm for the machine calculation of complex fourier series., *Mathematical Computations*, v. 19, p. 297-301, 1965.

COOLEY, J. W. , LEWYS, P. A. W. , WELCH, P. D. , The fast Fourier transform; programming considerations in the calculation of sine, cosine and Laplace Transforms. *Journal of Sound and vibration*, v. 12, n. 3, p. 315-337, 1970.

CRANDALL, S. H. , The role of damping in vibration theory.  
*Journal of Sound and Vibration*, v. 11, p. 3-18, 1970.

DARBRE, G. R. WOLF, J. P. , Criterion stability and implementation issues of hybrid frequency-time domain procedure for nonlinear dynamic analysis. In: CONFERENCE ON STRUCTURAL MECHANICS IN REACTOR TECHNOLOGY, 9, (Transactions), Lausanne, 1986.

DEN HARTOG, J. P. , *Mechanical Vibrations*, 5. ed. New York, Dover Publications, Inc., 1985.

HALL, J. F. , An FFT algorithm for structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 10, p. 797-811, 1982.

HILMER, P. , SCHMID, G. , Calculation of Foundation Uplift Effects Using a Numerical Laplace Transform. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 16, p. 789-801, 1988.

HSU, H. P., *Fourier Analysis*, New York, Simon and Schuster Tech Outline, 1970.

HURTY, W. C. , RUBINSTEIN, M. F. , *Dynamics of Structures*.  
New Jersey, Prentice Hall, Inc., 1964.

IBRAHIMBEGOVIC, A. , WILSON, E. L. , Simple numerical algorithms for the mode superposition analysis of linear structural systems with non-proportional damping. *Computer and Structures*, v. 33, p. 523-531, 1989.

ITOH, T. , Damped vibration mode superposition method for dynamic response analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 2, p. 47-57, 1973.

KAWAMOTO, J. D. , Solution of nonlinear dynamic structural systems by a hybrid frequency-time domain approach. Cambridge, 385 p. (MIT Research Report R83-5, Dept. of Civil Engineering), 1983.

KOBORI, T., HISATOKU, T. , NAGASE, T. , Nonlinear uplift behaviour of soil-structure system with frequency-dependent characteristics. In: WORLD CONFERENCE IN EARTHQUAKE ENGINEERING, 8, San Francisco, CA, 1984. (Proceedings), v. 2, p. 897-904.

KREIDER, D., KULLER, R., OSTBERG, D. , PERKINS, F. , *An introduction to linear analysis*. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1966.

LANDAU, L. , *Comportamento Dinâmico Não-Linear de Estruturas pelo Método de Superposição Modal*, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.

MATLA, J. M. , *Passive damping design methods using Nastran*. 23 p. In: DAMPING 89 CONFERENCE, Flórida, 1989. (Proceedings), n. CCA.

MATTHEES, W. , *A strategy for the solution of soil dynamic problems involving plasticity by transform*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 18, p. 1601-1611, 1982.

MAU, S. T. , *A subspace modal superposition method for non-classically damped systems*. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 16, p. 931-942, 1988.

MEIROVITCH, L. , *Elements of vibration analysis*. 2. ed. New York, McGraw-Hill International Editions, 1986.

MOLNAR., A. J., VASHI, K. M. , GAY, C. W. , Application of Normal Mode Theory and Pseudo-Force Methods to Solve Problems With Nonlinearities. *Journal of Pressure Vessel Thecnology*, v. 98, p. 151-156, 1976.

NEWLAND, D. E. , *Random Vibrations and Spectral Analysis*. London, Longman Group Limited, 1975.

NICKELL, R. E , Nonlinear Dynamics by Mode Superposition. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 7, p. 107-129, 1976.

NOOR, A. K. , Recent advances in reduction methods for nonlinear problems. *Computer and Structures*, v. 13, p. 31-44, 1981.

NOVAK, M. , HIFNAWY, L. , Effect of soil-structure interaction on damping of structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 11, p. 595-621, 1973.

NOVAK, M. , Dynamic stiffness and damping of piles. *Canadian Geotechnical Journal*, v. 11, p. 574-598, 1974.

- NOVAK, M. , SACHS, K. , Torsional and coupled vibrations of embedded footings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 2, p. 11-33, 1973.
- PAREKH, J. C. , HARRIS, S. G. , Application of the Ritz procedure to damping prediction using a modal strain approach. 28 p. In: DAMPING 89 CONFERENCE, Florida. (Proceedings), n. CCB.
- RICHART, F. E., HALL, J. R. , WOODS, R. D. , *Vibrations of Soils and Foundations*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1970.
- RIEAD, H. D. , Nonlinear response using normal modes. *American Institute of Aeronautics and Astronautics* n. 74-138, 1974. (12th Aerospace Science Meeting, Washington DC).
- ROESSET, J. M., WHITMAN, R. V. , R. DOBRY , Modal analysis of structures with foundation interaction. *Journal of The Structural Division*, v. ST3, p. 399-416, 1973.

SARRAZIN, M. A. , ROSSET, J. M. , Dynamic soil-structure interaction., *Journal of the Structural Division*, v. ST7, p. 1541-1544, 1972. (Proceedings of the American Society of Civil Engineers).

SHAH, V. N., BOHM, G. J. , NAHAVANDI, A. N. , Modal superposition method for computationally economical nonlinear structural analysis. *Journal of Pressure Vessel Technology*, v. 101, p. 134-141, 1979. (Transactions fo ASME).

SINGH, M. P. , GHAFORY-ASHTIANY, M. , Modal time hystory analysis of non-classically damped structures for seismic motions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 14, p. 133-146, 1986.

SINGH, M. P. , Seismic response by SRSS for nonproportional damping. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. EM6, p. 1405-1419, 1980.

SINGH, M. , SUAREZ, L. E. , Seismic response analysis of structure-equipment systems with non-classical damping effects. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 15, p. 871-888, 1980.

SOONG, T. T. , LAI, M. L. , Correlation of experimental results with predictions of viscoelastic damping for a model structure. 9 p. In: DAMPING 89 CONFERENCE. Florida, 1989. (Proceedings), n FCB.

STOKER, J. J. , *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*. New York, Interscience Publishers, 1950.

STRICKLIN, J. A. , HAISLER, W. E. , Formulations and solution procedures for nonlinear structural analysis. *Computer and Structures*, v. 7, p. 125-136, 1977.

THOMSON, W. T., CALKINS, T. E CARAVANI, P. , A numerical study of damping. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 3, p. 97-103, 1974.

TSAI, W. T. , LEANG, J. T. , An iterative method in dynamic structural analysis with nonproportional damping. 17 p. In: DAMPING 89 CONFERENCE, Florida, 1991. (Proceedings), n. JCB.

VELETOSOS, A. S. , MEEK, J. W. , Dynamic behaviour of building-foundation systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 3, p. 121-138, 1974.

VELETSOS, A. S. , VENTURA, C. E. , Modal analysis of non-classically damped linear systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 14, p. 217-243, 1976.

VELETSOS, A. S. , WEI, Y. T. , Lateral and Rocking Vibration of Footings. *Journal of The Soil Mechanics and Foundations Division*, v. SM9, p. 1227-1248, 1971.

VENÂNCIO-FILHO, F. , *Análise matricial de estruturas - estática, estabilidade, dinâmica*. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Almeida Neves Editores Ltda, 1975.

VENÂNCIO-FILHO, F. , CLARET, A. M. , Resposta dinâmica no domínio do tempo de sistemas dotados de amortecimento não-proporcional. 16 p. In: COLLOQUIA-87, Porto Alegre, 1987. (Anais), v. 5, p. 1-16.

---

Non-linear dynamic analysis with frequency-dependent damping. 11 p. In: DAMPING 89 CONFERENCE, Florida, 1989. (Proceedings), n. FDD.

---

Matrix Formulation of the Dynamic Analysis of SDOF Systems in the Frequency Domain. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, v. 16, n. 1, p. 1-9, 1990.

---

An Implicit Fourier Transform Method for Nonlinear Dynamic Analysis With Frequency Dependent Damping. 16 p. In: DAMPING 91 CONFERENCE, San Diego, CA, 1991. (Proceedings), n. BCB.

WARBURTON, G. B. , SONI, S. R. , Errors in response calculations for non-classically damped structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 5, p. 365-376, 1977.

WILSON, E. L. , Carta ao Prof. Fernando Venâncio Filho, 1989.

WILSON, E. L., FARHOOMAND, I. , BATHE, K. J. , Nonlinear dynamic analysis of complex structures. *Earthquake Enginee. Structural Dynamics*, v. 1, p. 241-252, 1973.

WOLF, J. P. , Classification of analysis methods for dynamic soil-structure interaction. 11 p. In: SECOND INTERNATIONAL CONFERENCE ON RECENT ADVANCES IN GEOTECHNICAL EARTHQUAKE ENGINEERING AND SOIL DYNAMICS, St. Louis, Missouri, 1991. (Proceedings), n. SOA9, p. 1821-1832.

WOLF, J. P. , PARONESSO, A. , Lumped-parameter model for foundation on a layer. 10 p. In: SECOND INTERNATIONAL CONFERENCE ON RECENT ADVANCES IN GEOTECHNICAL EARTHQUAKE ENGINEERING AND SOIL DYNAMICS, St. Louis, Missouri, 1991. (Proceedings) n. 5.57, p. 895-905.

**A. FORMULAÇÃO MATRICIAL DA RESPOSTA DINÂMICA  
DE SISTEMAS DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE  
NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA**

**A.1 EQUACÕES DE MOVIMENTO**

Sejam as equações de movimento de um sistema dinâmico fisicamente não linear, dotado de amortecimento não proporcional, discretizado em elementos finitos, totalizando  $N$  graus de liberdade

$$[m]\{\ddot{v}\} + [c]\{\dot{v}\} + [k(v)]\{v\} = \{p(t)\}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $[m]$ ,  $[k(v)]$  e  $[c]$  são respectivamente as matrizes de massa, rigidez e amortecimento;  $\{v\}$ ,  $\{\dot{v}\}$ ,  $\{\ddot{v}\}$  são respectivamente os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações;  $\{p(t)\}$  é o vetor de ações nodais externas.

Se o amortecimento do sistema estrutural é modelado como dependente da frequência, a sua equação de movimento é

$$\{V_o\} = [L(\omega)] \{P_o\}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $[L(\omega)]$  é uma matriz de resposta complexa em frequência cujo termo genérico  $L_{ij}$  é assim definido

$$L_{ij} = \left[ -\omega^2 m_{ij} + [1 + i\eta(\omega) \operatorname{sgn}(\omega)] k_{ij} \right]^{-1}, \quad (\text{A.3})$$

sendo  $\eta(\omega)$  o fator de dissipação de energia, função da frequência e  $\operatorname{sgn}(\omega)$  a função que retorna o sinal de  $\omega$ ; o vetor de cargas nodais é escrito na forma

$$\{p(t)\} = \{P_0\} e^{i\omega t}. \quad (\text{A.4})$$

O deslocamento no domínio do tempo se relaciona com o vetor de amplitudes  $\{V_0\}$  através da expressão

$$\{v(t)\} = \{V_0\} e^{i\omega t}. \quad (\text{A.5})$$

Em uma análise da resposta dinâmica pelo método SLFD, no segmento  $i$  os deslocamentos e velocidades iniciais são dados pelos vetores  ${}^i\{v\}_0$  e  ${}^i\{\dot{v}\}_0$ , respectivamente. Em função do vetor de deslocamentos iniciais  ${}^i\{v\}_0$ , a matriz de rigidez para o cálculo da resposta no segmento  $i$ ,  ${}^i[k]$ , é obtida; nesse segmento, o vetor de cargas é  ${}^i\{p(t)\}$ .

A resposta total do sistema dinâmico no segmento  $i$  será obtida pela superposição da resposta ao carregamento

externo  ${}^i[p(t)]$  com as respostas aos deslocamentos iniciais  ${}^i\{v\}_0$  e às velocidades iniciais  ${}^i\{\dot{v}\}_0$ .

## A.2 RESPOSTA À CARGA EXTERNA

### A.2.1 SISTEMA COM AMORTECIMENTO NÃO PROPORCIONAL

O problema de autovalor associado ao sistema dinâmico no segmento  $i$  é

$${}^i[k] {}^i[\Phi] = [m] {}^i[\Phi] {}^i[\Lambda] \quad (\text{A.6})$$

onde  ${}^i[\Phi]$  é a base modal no segmento  $i$ , relativa à matriz de rigidez  ${}^i[k]$  e  ${}^i[\Lambda]$  é a matriz diagonal cujos elementos são os quadrados das frequências naturais de vibração do sistema, enquanto  ${}^i[k]$  for uma boa aproximação para sua matriz de rigidez. Supõe-se  ${}^i[\Phi]$  normalizada em relação às matrizes de massa e rigidez, isto é, são válidas as seguintes propriedades

$${}^i[\Phi]^t [m] {}^i[\Phi] = [I], \quad (\text{A.7})$$

$${}^i[\Phi]^t {}^i[k] {}^i[\Phi] = {}^i[\Lambda]. \quad (\text{A.8})$$

Seja  ${}^i[\Phi]_r$  a matriz  $N \times r$  formada pelas  $r$  primeiras colunas de  ${}^i[\Phi]$ . Admitindo-se que os  $r$  primeiros modos de vibração sejam predominantes na resposta do sistema no segmento  $i$ , faz-se a transformação de coordenadas

$${}^i\{v(t)\} = {}^i[\Phi]_r {}^i\{y(t)\} \quad (\text{A.9})$$

onde  ${}^i\{y(t)\}$  é o vetor de coordenadas generalizadas de ordem  $(rx1)$ . Levando-se a Eq. A.9 à Eq. A.1, pré-multiplicada por  ${}^i[\Phi]_r^t$ , tem-se

$$[I]_r {}^i\{\dot{Y}\} + [C]_r {}^i\{Y\} + {}^i[\Lambda]_r {}^i\{Y\} = {}^i\{P\} \quad (\text{A.10})$$

onde

$${}^i\{P\} = {}^i[\Phi]_r^t {}^i\{p(t)\}. \quad (\text{A.11})$$

O sistema de equações (A.10) não é desacoplado em face do amortecimento não proporcional, porque, nesse caso,  $[C]_r$  é não diagonal. Decompondo  $[C]_r$  em uma matriz diagonal  $[C]_{rd}$  com os elementos da diagonal de  $[C]_r$  e uma matriz  $[C]_{rf}$  que possui diagonal nula e os elementos de fora da diagonal de  $[C]_r$ , isto é,

$$[C]_r = [C]_{rd} + [C]_{rf}, \quad (\text{A.12})$$

a Eq. A.10 pode ser reescrita da forma seguinte

$$[I]_r \ddot{\{Y\}} + [C]_{rd} \dot{\{Y\}} + [A]_r \{Y\} = \{P\} - [C]_{rf} \dot{\{Y\}}. \quad (A.13)$$

A Eq. (A.13) é resolvida por um processo iterativo, cujo  $k$ -ésimo passo é

$$[I]_r \ddot{\{Y\}}^{(k)} + [C]_{rd} \dot{\{Y\}}^{(k)} + [A]_r \{Y\}^{(k)} = \{F\}^{(k)}(t), \quad (A.14)$$

onde  $\{F\}^{(k)}(t)$  é a carga generalizada atuante no segmento  $i$ , no passo  $k$ , no instante  $t$ , definida por

$$\{F\}^{(k)} = \{P\} - [C]_{rf} \dot{\{Y\}}^{(k-1)}. \quad (A.15)$$

A integração da Eq. A.14 pode ser feita totalmente no domínio do tempo, utilizando a Integral de Duhamel, ou no domínio da frequência, conforme se formula no item 3.3, sendo, nesse caso, a carga generalizada dada pela Eq. A.15, calculada no domínio do tempo.

#### A.2.2 SISTEMA COM AMORTECIMENTO DEPENDENTE DA FREQUÊNCIA

A transformação de coordenadas dada pela Eq. A.9 levada à Eq. A.5 conduz a

$${}^i\{y(t)\} = \{Y_o\} e^{i\omega t}. \quad (\text{A.16})$$

Pré-multiplicando a Eq. A.2 por  ${}^i[\Phi]_r^t$  e considerando a Eq. A.16, tem-se

$${}^i\{Y_o\} = {}^i[H(\omega)] {}^i\{F\}, \quad (\text{A.17})$$

onde o vetor de cargas generalizadas no segmento  $i$  é

$${}^i\{F\} = {}^i[\Phi]_r^t {}^i\{P_o\} \quad (\text{A.18})$$

e a matriz generalizada de funções de transferência, para a frequência  $\omega$ , é

$${}^i[H(\omega)] = {}^i[\Phi]_r^t {}^i[L(\omega)] {}^i[\Phi]_r, \quad (\text{A.19})$$

cujo elemento genérico é

$$h_q(\omega) = \left[ -\omega^2 + [1 + i\eta(\omega) \operatorname{sgn}(\omega)] \bar{\omega}_q^2 \right]^{-1}, \quad (\text{A.20})$$

sendo  $\bar{\omega}_q$  a frequência de vibração do  $q$ -ésimo modo não amortecido no segmento  $i$ . Nesse caso, a solução é obtida no domínio da frequência conforme a formulação apresentada no item A.2.3. Não sendo iterativo o processo, a referência que

se faz ao passo  $k$  de iteração no item A.2.3 deve ser considerada apenas para  $k = 1$ .

### A.2.3 CÁLCULO DA RESPOSTA

Seja o histórico de resposta na coordenada generalizada  $Y_{jq}$  composto de  $S$  valores em instantes discretos  $t_j = (j-1)\Delta t$ ,  $j = 1, \dots, S$ . Portanto, no passo  $k$  do processo iterativo, o histórico de resposta na  $q$ -ésima coordenada generalizada pode ser visto como a sequência

$${}^i Y_{1q}^{(k)}, {}^i Y_{2q}^{(k)}, \dots, {}^i Y_{jq}^{(k)}, \dots, {}^i Y_{Sq}^{(k)} \quad (\text{A.21})$$

que pode ser organizada na forma de um vetor-coluna  ${}^i \{Y\}_q^{(k)}$ , isto é,

$${}^i \{Y\}_q^{(k)} = \begin{bmatrix} {}^i Y_{1q}^{(k)} \\ {}^i Y_{2q}^{(k)} \\ \vdots \\ {}^i Y_{jq}^{(k)} \\ \vdots \\ {}^i Y_{Sq}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

A carga atuante na direção da coordenada generalizada  $q$  nos  $S$  instantes do histórico forma a sequência

$${}^i F_{1q}^{(k)}, {}^i F_{2q}^{(k)}, \dots, {}^i F_{jq}^{(k)}, \dots, {}^i F_{sq}^{(k)} \quad (\text{A.23})$$

que pode ser organizada na forma do vetor-coluna  ${}^i \{F\}_q^{(k)}$ , isto é,

$${}^i \{F\}_q^{(k)} = \begin{bmatrix} {}^i F_{1q}^{(k)} \\ {}^i F_{2q}^{(k)} \\ \vdots \\ {}^i F_{jq}^{(k)} \\ \vdots \\ {}^i F_{sq}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Ora, conforme a formulação da resposta dinâmica no domínio da frequência com a Transformada de Fourier Implícita (Venâncio-Filho e Claret, 1990), e supondo um número  $N$  par de frequências discretas, tem-se

$${}^i \{Y\}_q^{(k)} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} [E] {}^i [H]_q [E^*] {}^i \{F\}_q^{(k)}, \quad (\text{A.25})$$

onde a matriz  $[E]$ , de ordem  $S \times N$ , e  $[E^*]$ , de ordem  $N \times S$ , independem do segmento considerado.  ${}^i [H]_q$  é a matriz de termos de resposta complexa em frequência no segmento  $i$ , para a coordenada generalizada  $q$ , isto é,



Analogamente, a matriz de forças generalizadas é

$${}^i\{\mathcal{F}\}^{(k)} = \begin{bmatrix} {}^iF_{11}^{(k)} & {}^iF_{12}^{(k)} & \dots & {}^iF_{1r}^{(k)} \\ {}^iF_{21}^{(k)} & {}^iF_{22}^{(k)} & \dots & {}^iF_{2r}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^iF_{j1}^{(k)} & {}^iF_{j2}^{(k)} & \dots & {}^iF_{jr}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^iF_{s1}^{(k)} & {}^iF_{s2}^{(k)} & \dots & {}^iF_{sr}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Para esse fim, é necessário definir nova matriz de resposta complexa em frequência. Seja a matriz  ${}^i[H]_q$  transformada em uma coluna da matriz  ${}^i[\mathcal{H}]$  de tal modo que

$${}^i\mathcal{H}_{sq} = {}^i(H_s)_q, \quad s = 1, N \text{ e } q = 1, r, \quad (\text{A.31})$$

onde o índice  $q$  refere-se à  $q$ -ésima coordenada generalizada. Então, a matriz-histórico de resposta pode ser obtida pela expressão

$${}^i\{y\}^{(k)} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} ( [ \mathcal{E} ] ) {}^i\{\mathcal{F}\}^{(k)}, \quad (\text{A.32})$$

onde a matriz  $[ \mathcal{E} ]$  é assim definida

$$\mathcal{E}_{ik} = \sum_{j=1}^N E_{ij} {}^i\mathcal{H}_{jk} E_{jk}^*. \quad (\text{A.33})$$

### A.3 RESPOSTA AO DESLOCAMENTO INICIAL

No segmento  $i$ , o vetor de deslocamentos iniciais em coordenadas físicas é  ${}^i\{v\}_o$ . Fazendo a transformação de coordenadas com o emprego da base modal  ${}^i[\Phi]_r$ , tem-se

$${}^i\{y\}_o = {}^i[\Phi]_r {}^i\{v\}_o. \quad (\text{A.34})$$

O efeito dos deslocamentos iniciais pode ser introduzido na resposta do sistema estrutural somando-se à matriz de forças generalizadas, dada na Eq. A.30, a matriz  ${}^i\{F\}_o$  cujo elemento genérico é

$${}^iF_{js}^o = -{}^i\omega_s^{-2} {}^iY_{os}, \quad j = 1, S. \quad (\text{A.35})$$

Portanto, a resposta do sistema em coordenadas generalizadas no segmento  $i$ , no passo  $k$ , sob a ação da carga aplicada e do deslocamento inicial é

$${}^i\{y\}^{(k)} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} ([\varepsilon]) ({}^i\{F\}_o + {}^i\{F\}^{(k)}). \quad (\text{A.36})$$

### A.4 RESPOSTA À VELOCIDADE INICIAL

O vetor de velocidades iniciais no segmento  $i$  é  ${}^i\{\dot{v}\}_o$ . Em coordenadas generalizadas tem-se

$${}^i\{\dot{Y}\}_o = {}^i[\Phi]_r {}^i\{\dot{v}\}_o. \quad (\text{A.37})$$

O efeito das velocidades iniciais na resposta pode ser fisicamente introduzido, considerando-se a resposta a um impulso  $[m]{}^i\{\dot{v}\}_o$ , ou em coordenadas generalizadas, a um impulso  $[I]_r{}^i\{\dot{Y}\}_o$ . Considerando-se que  $[I]_r$  é uma matriz (rxr) diagonal, a resposta ao impulso  $I_s{}^i\dot{Y}_{so}$  é

$${}^i\{\dot{Y}_v(t)\}_s = I_s{}^i\dot{Y}_{so} h_s(t), \quad (\text{A.38})$$

onde  $h_s(t)$  é a transformada de Fourier de  $H(\omega)$ , ou seja,

$$h_s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{A.39})$$

Em forma discreta, a resposta a um impulso unitário transforma-se em

$$h(t_m) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} H(\omega_n) e^{i\alpha nm}, \quad (\text{A.40})$$

onde  $\alpha = (2\pi/N)$ . Portanto, a resposta à velocidade inicial no segmento  $i$  pode ser escrita na seguinte forma

$${}^i\{Y_v(t)\}_s = \frac{I_s \dot{Y}_{so}}{2\pi} \Delta\omega \sum_{n=0}^{N-1} H(\omega_n) e^{i\alpha nm}. \quad (\text{A.41})$$

Para todas as coordenadas generalizadas, as respostas às velocidades iniciais generalizadas podem assumir a forma matricial seguinte

$${}^i\{y_v\} = \begin{bmatrix} (Y_v)_{11} & (Y_v)_{12} \cdots (Y_v)_{1r} \\ (Y_v)_{21} & (Y_v)_{22} \cdots (Y_v)_{2r} \\ \vdots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ (Y_v)_{s1} & (Y_v)_{s1} \cdots (Y_v)_{sr} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

Considerando que a matriz  $[E]$ , de ordem  $S \times N$ , é definida por

$$[E] = [E_{nm}] = [e^{i\alpha(n-1)(m-1)}], \quad (\text{A.43})$$

com  $\alpha = 2\pi/N$ , e sendo  ${}^i[\mathcal{H}]$  definida pela Eq. A.31, a matriz de resposta às velocidades iniciais generalizadas pode ser calculada por

$${}^i\{y_v\} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} ({}^i[G]) [I]_r {}^i\{y\}_o, \quad (\text{A.45})$$

onde a matriz  ${}^i[G]$  é assim definida

$$G_{ik} = \sum_{s=1}^N E_{is} \mathcal{H}_{sk}. \quad (\text{A.45})$$

A resposta do sistema, em coordenadas generalizadas, no segmento  $i$ , na iteração  $k$ , é obtida pela soma  ${}^i\{y\}^{(k)}$  dado pela Eq. A.36 e  ${}^i\{y_v\}$ , dado pela Eq. A.44.