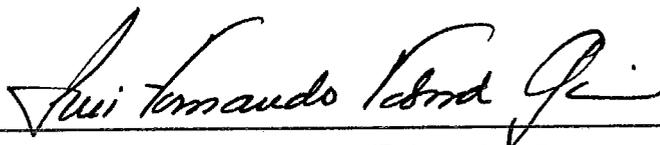


ANÁLISE DINÂMICA DA FLEXO-TORÇÃO DE HASTES DE
PAREDES DELGADAS COM NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

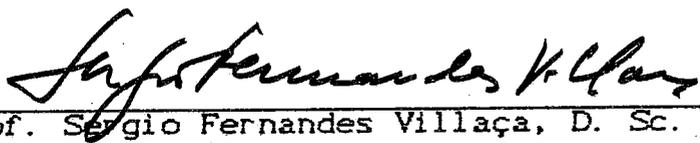
Vera Regina Polillo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



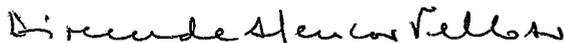
Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia, D.Sc.
(Presidente)



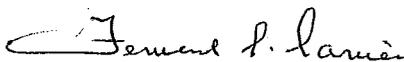
Prof. Sergio Fernandes Villaca, D. Sc.



Prof. Benjamin Ernani Diaz, Dr. Ing.



Prof. Dirceu de Alencar Velloso,
Livre Docente



Prof. Fernando Luiz Lobo Barboza Carneiro,
Doutor Honoris Causa

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1991

POLILLO, VERA REGINA

Análise Dinâmica da Flexo-Torção de Hastes de Paredes Delgadas com Não-Linearidade Geométrica [Rio de Janeiro] 1991

xxiii, 258 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D. Sc., Engenharia Civil, 1991)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Análise dinâmica não-linear da flexo-torção

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

.iii.

Aos meus pais

e

ao meu irmão

AGRADECIMENTOS

Aos Professores *Luiz Fernando Taborda Garcia* e *Sergio Fernandes Villaça* pela amizade, dedicação e esclarecida orientação.

Ao Professor *Fernando Luiz Lobo Barboza Carneiro* pelo estímulo e carinho desde os tempos de Mestrado.

À *Maria José Caetano de Mendonça* pelo trabalho de editoração e ao *Gilmar Fernandes* pela confecção dos desenhos.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

**ANÁLISE DINÂMICA DA FLEXO-TORÇÃO DE HASTES DE
PAREDES DELGADAS COM NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

Vera Regina Polillo

Abril, 1991

Orientadores: Luiz Fernando Taborda Garcia e
Sergio Fernandes Villaça

Programa : Engenharia Civil

Neste trabalho são instituídas as equações diferenciais gerais que governam, no âmbito das rotações moderadas, a flexo-torção de hastes prismáticas de paredes delgadas com seção aberta sob solicitação dinâmica (sem levar em conta o amortecimento) através de dois procedimentos distintos. Deduzidas inicialmente pela consideração do equilíbrio dinâmico, são posteriormente confirmadas mediante enfoque variacional com a utilização do princípio dos trabalhos virtuais. Este último enfoque apresenta a vantagem de conduzir também às condições de contorno (cinemáticas e naturais) de forma consistente, ou seja, como decorrência do próprio procedimento utilizado.

A teoria é desenvolvida a partir das equações da Elasticidade Não-linear (geométrica) mediante a introdução de hipóteses simplificadoras inerentes ao problema, com ênfase para as hipóteses de Kirchhoff e de Vlassov.

Apresenta-se ainda a particularização da formulação para a análise linear bem como algumas considerações a respeito de formulações desenvolvidas por outros autores e, ao final do trabalho, uma proposta de tratamento numérico por diferenças finitas, já que a complexidade das equações instituídas inviabiliza a sua resolução por procedimento analítico.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

DYNAMIC ANALYSIS OF COMBINED TORSION AND FLEXURE OF
THIN WALLED BARS WITH GEOMETRICAL NON-LINEARITY

Vera Regina Polillo

April, 1991

Thesis Supervisors: Luiz Fernando Taborda Garcia and
Sergio Fernandes Villaça

Department : Civil Engineering

In this work the general non-linear dynamic equations for combined torsion and flexure of thin walled prismatic bars with open cross sections, under moderately large rotations, are derived (without considering damping) through two procedures. They are initially obtained by the dynamic equilibrium consideration and afterwards checked by a variational approach using the principle of virtual work. The latter presents the advantage of leading to the (kinematic and natural) boundary conditions in a consistent way, i.e., as a consequence of the procedure itself.

The development of the theory starts from the Non-linear Elasticity basic equations by introducing a few assumptions that are inherent to the problem, with emphasis to the Kirchhoff and the Vlassov hypotheses.

This work also includes a particularization of the formulation to linear analysis as well as critically reviews some other formulations in the literature. At last a numerical treatment is suggested using the finite difference technique once that an analytical solution is not feasible due to the complex nature of the derived equations.

ÍNDICE

	Página
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - FUNDAMENTOS DA TEORIA	10
II.1 - REFERENCIAIS E CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO	11
II.2 - HIPÓTESES BÁSICAS	20
II.3 - GEOMETRIA DA DEFORMAÇÃO	22
II.3.1 - Campo de deslocamentos e relações defor- mação-deslocamento	22
II.3.2 - Orientação das fibras na configuração de- formada da barra	48
II.4 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	50
II.5 - TENSÕES	51
II.5.1 - Tensão normal e suas integrais na seção .	51
II.5.2 - Tensões de cisalhamento e suas integrais na seção	55

	Página
II.5.3 - Componentes das tensões nos referenciais x n s e x y z	62
II.6 - PARTICULARIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO PARA A ANÁLISE LINEAR	69
CAPÍTULO III - DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PELA CONSIDERAÇÃO DO EQUILÍBRIO DINÂMICO	76
III.1 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO DE UM ELE- MENTO DE HASTE DE SEÇÃO ABERTA DE PAREDES DELGADAS	77
III.2 - EXPRESSÕES DE V_y , V_z , $T^{(2)}$ E R EM FUNÇÃO DOS DESLOCAMENTOS	116
III.3 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE GOVERNAM O PROBLEMA DA FLEXO-TORÇÃO	125
III.4 - FLUXO DE CISALHAMENTO	133
III.5 - AVALIAÇÃO DA COMPONENTE $\tau_{xn}^{(2)}$, DESCONSIDE- RADA NAS INTEGRAIS DAS TENSÕES DE CISALHA- MENTO SOBRE A ÁREA DA SEÇÃO	138
III.6 - ESFORÇOS SOLICITANTES NA SEÇÃO TRANSVERSAL DA BARRA E EFEITO WAGNER	141

III.7 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO A PARTIR DA IGUALDADE ENTRE ESFORÇOS SECCIONAIS EXTERNOS E INTERNOS	152
III.8 - PARTICULARIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO PARA A ANÁLISE LINEAR	165
CAPÍTULO IV - DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS MEDIANTE ENFOQUE VARIACIONAL COM A UTILIZAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	173
IV.1 - PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	174
IV.2 - TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS INTERNAS	174
IV.3 - TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS EXTERNAS	180
IV.4 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE FLEXO-TORÇÃO	190
IV.5 - CONDIÇÕES DE CONTORNO	193
IV.6 - CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA FORMULAÇÃO APRESENTADA POR CHEN E ATSUTA (1977, p.541-550)	205
IV.7 - PARTICULARIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO PARA A ANÁLISE LINEAR	215

	Página
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS ...	223
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	238
APÊNDICE A - PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE PERFIS ABERTOS DE PAREDES DELGADAS	244
A.1 - INTRODUÇÃO	244
A.2 - ÁREA SETORIAL	247
A.3 - CARACTERÍSTICAS SETORIAIS	252
A.4 - CENTRÓIDES SETORIAIS	256
A.5 - ÁREA SETORIAL PRINCIPAL	257

NOMENCLATURA

- A - área da seção transversal da barra
- $A_{\mathcal{L}}$ - área da superfície lateral da barra
- B - integral, definida na equação (II.61d), envolvendo as tensões normais numa seção genérica da barra e a grandeza ω ; bimomento na análise linear
- C, K - integrais, definidas nas equações (II.61f,e), envolvendo as tensões normais numa seção genérica da barra e as grandezas r e $\lambda = \frac{r^2}{2}$
- E - centro de cisalhamento da seção
módulo de elasticidade longitudinal do material
- E_x, E_n, E_s - deformações específicas de fibras que, antes da deformação, eram paralelas às direções x, n, s respectivamente
- E_x^*, E_n^*, E_s^* - deformações específicas de fibras que, após a deformação, se tornam paralelas às direções x, n, s respectivamente

- $F_{x'}$, $F_{y'}$, F_z - componentes segundo x y z da força resultante numa seção genérica da barra, dadas nas equações (III.11), (III.20) e (III.31); esforço normal e esforços cortantes na análise linear.
- $\mathcal{F}_{x'}$, $\mathcal{F}_{y'}$, $\mathcal{F}_{z'}$, $\mathcal{F}_{xy'}$, $\mathcal{F}_{xz'}$, $\mathcal{F}_{yz'}$, $\mathcal{F}_{\omega'}$, \mathcal{F}_{λ} - forças generalizadas de inércia, definidas nas equações (III.16), (III.25), (III.36), (III.46), (III.54), (III.63), (III.79) e (III.87) respectivamente
- G - módulo de elasticidade transversal do material
- I_e - momento de inércia polar (pólo E)
- $I_{y'}$, I_z - momentos de inércia da área da seção em relação aos eixos y e z respectivamente
- I_{yz} - produto de inércia da área da seção em relação aos eixos y e z
- I_{ω} - momento setorial de inércia
- $I_{\omega y'}$, $I_{\omega z}$ - produtos setoriais de inércia

- J_T - constante de torção da seção
- L - comprimento do *contour*
- \mathcal{L} - perímetro da seção
- $M_{Y'}, M_{Z'} (M_{\eta'}, M_{\zeta'})$ - integrais, definidas nas equações (II.61b,c) ((III.21) e (III.32)), envolvendo as tensões normais numa seção genérica da barra e as coordenadas \hat{z} e \hat{y} ($\hat{\zeta}$ e $\hat{\eta}$); momentos fletores na análise linear.
- M_{ξ} - integral, definida na equação (III.58), envolvendo as componentes ρ_y e ρ_z do vetor tensão numa seção genérica da barra e as coordenadas ζ e η ; momento torsor na análise linear.
- N - integral, definida na equação (II.61a), envolvendo as tensões normais numa seção genérica da barra; esforço normal na análise linear.
- $Q_{Y'}, Q_{Z'}, Q_{\omega}$ - propriedades geométricas da seção, definidas nas equações (II.12)

- R_e - propriedade geométrica da seção, definida na equação (II.14)
- R - integral, definida na equação (II.67d), envolvendo as tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} (ou τ_{xs} , τ_{xn}) numa seção genérica da barra e as coordenadas η , ζ (ou r_s , r_n e n)
- S - ponto genérico da linha do perfil
- S_o - ponto setorial inicial
-
- S_y , S_z - momentos estáticos da área da seção em relação aos eixos y e z respectivamente
- S_ω - momento estático setorial
- T - integral, definida na equação (II.67c), envolvendo as tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} (ou τ_{xs} , τ_{xn}) numa seção genérica da barra e as coordenadas ζ , η (ou r_n e n , r_s); momento torsor na análise linear.
- $T^{(1)}$ - primeira parcela de T , definida na equação (II.69a)

- $T^{(2)}$ - segunda parcela de T , definida na equação (II.69b)
- $T_{\tilde{x}n\tilde{s}}$ - matriz de transformação do sistema $\tilde{x} \tilde{n} \tilde{s}$ para o referencial $x n s$
- $T_{\tilde{x}yz}$ - matriz de transformação do sistema $\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z}$ para o referencial $x y z$
- V - volume da barra
- V_y, V_z - integrais, definidas nas equações (II.67a,b), envolvendo as tensões de cisalhamento τ_{xy}, τ_{xz} numa seção genérica da barra; esforços cortantes na análise linear.
- X, N, S - componentes nas direções x, n, s das forças de volume
- X, Y, Z - componentes segundo x, y, z das forças de volume

Letras romanas minúsculas

- b, c - integrais, definidas nas equações (III.78) e (III.86), envolvendo a componente X das forças de volume e as grandezas ω e $\lambda = \frac{r^2}{2}$
- $e_{x'}$, $e_{n'}$, $e_{s'}$, $e_{xn'}$, $e_{xs'}$, e_{ns} - parâmetros de deformação
- f - fluxo de cisalhamento
- l - comprimento da barra
- m_y , m_z - integrais, definidas nas equações (III.70e,d), envolvendo a componente X das forças de volume e as coordenadas \hat{z} e \hat{y} .
- m_ξ - soma de integrais, definidas nas equações (III.70f), envolvendo as componentes Y e Z das forças de volume e as componentes \bar{p}_{iy} e \bar{p}_{iz} ($i = 1,2$) das forças prescritas na superfície lateral da barra, além das coordenadas ζ e η
- n - coordenada mensurada na direção normal à linha média

- P_{ix}, P_{in}, P_{is} - componentes segundo x, n, s do vetor tensão na face de um elemento de normal i ($i = 1, 2$) na geometria inicial
- P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} - idem segundo x, y, z
- q_x, q_y, q_z - componentes das forças por unidade de comprimento atuando ao longo dos eixos x (q_x) e ξ (q_y e q_z) da barra, dadas nas equações (III.70a,b,c)
- r - distância do centro de cisalhamento E a um ponto genérico S da linha do perfil
- r_n, r_s - coordenadas de um ponto genérico S da linha do perfil em relação a um par de eixos com origem no centro de cisalhamento E da seção e orientados tal como n, s .
- s - coordenada medida ao longo da linha do perfil, a partir de uma de suas extremidades
- s_i, s_{i+1} - coordenadas s dos pontos da linha do perfil localizados nas extremidades inicial e final, respectivamente, de um trecho genérico i da seção

- t_i - espessura da parede de um trecho genérico i da seção
- t - instante genérico
- u - translação da linha média da seção na direção x
- u_x, u_n, u_s - componentes segundo x n s do deslocamento de um ponto genérico da barra
- u_x, u_y, u_z - idem segundo x y z
- v, w - componentes do deslocamento do centro de cisalhamento da seção nas direções y e z
- x y z - sistema cartesiano ortogonal com origem no centróide de uma das seções extremas da haste
- x^*, n^*, s^* - direções dos segmentos elementares que, após a deformação, se orientam segundo x, n, s
- $\tilde{x}, \tilde{n}, \tilde{s}$ - direções dos segmentos elementares que, antes da deformação, se orientavam segundo x, n, s

y, z - coordenadas de um ponto genérico da seção em relação aos eixos y e z

y_e, z_e - coordenadas segundo os eixos y e z do centro de cisalhamento E da seção

Letras gregas minúsculas

α - ângulo que mede a inclinação de um trecho da seção transversal

$\gamma_{xn}, \gamma_{xs}, \gamma_{ns}$ - distorções

$\gamma_{xs}^{(1)}$ - primeira parcela de γ_{xs}

$\delta W_e, \delta W_i$ - trabalhos virtuais das forças externas e internas respectivamente

$\varepsilon_x, \varepsilon_n, \varepsilon_s, \varepsilon_{xn}, \varepsilon_{xs}, \varepsilon_{ns}$ - componentes de deformação

η, ζ - coordenadas de um ponto genérico da seção em relação aos eixos η e ζ

θ_y, θ_z - grandezas definidas pelas expressões (II.57a,b)

- λ - coordenada generalizada de um ponto genérico S da linha do perfil, definida na equação (II.44)
- μ - massa específica do material
- ν - coeficiente de Poisson
- $\xi \ \eta \ \zeta$ - sistema cartesiano ortogonal com origem no centro de cisalhamento de uma das seções extremas da haste
- ρ_x, ρ_n, ρ_s - componentes segundo $x \ n \ s$ do vetor tensão na face de um elemento de normal x na geometria inicial
- ρ_x, ρ_y, ρ_z - idem segundo $x \ y \ z$
- $\sigma_x, \sigma_n, \sigma_s$ - componentes normais de tensão
- $\tau_{xn}, \tau_{xs}, \tau_{ns}$ - componentes tangenciais de tensão
- $\tau_{xs}^{(i)}$ - parcela i ($i = 1, 2$) da tensão τ_{xs}
- $\tau_{xn}^{(i)}$ - parcela i ($i = 1, 2$) da tensão τ_{xn}
- ϕ - ângulo de torção

- ψ - grandeza definida pela expressão (II.57c)
- ω - área setorial
- $\omega_x, \omega_n, \omega_s$ (ou $\omega_x, \omega_y, \omega_z$) - parâmetros de rotação

Símbolos

- ($\hat{\dots}$) - designação para as grandezas avaliadas em $n = 0$
- ($\bar{\dots}$) - designação para as grandezas prescritas na superfície lateral ou nas extremidades da barra
- (\dots)' - designação para as derivadas das grandezas em relação a x
- ($\dot{\dots}$) - designação para as derivadas das grandezas em relação a t

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Cada vez mais são utilizadas, em diversos campos da Engenharia - civil, naval, mecânica, aeronáutica - estruturas constituídas de hastes de paredes delgadas, que oferecem a vantagem de permitir a obtenção de elevada rigidez com peso próprio relativamente pequeno. Tais barras se caracterizam pelo fato de que a espessura da parede do perfil é pequena em relação às dimensões características da seção transversal (altura e largura da seção).

Por razões construtivas e de fabricação, é freqüentemente necessário utilizar hastes de seção aberta, que diferem fundamentalmente, quanto ao comportamento estrutural, das barras de seção fechada. Assim, visando a estabelecer procedimentos para a análise e projeto de estruturas formadas de hastes de paredes delgadas com seção aberta, torna-se imprescindível desenvolver formulações adequadas ao estudo do problema da flexo-torção nestas estruturas, abrangendo sobretudo o campo ainda relativamente pouco explorado do comportamento não-linear.

Apresenta-se a seguir um resumo, baseado fundamentalmente nas exposições de GJELSVIK (1981) e VLASSOV (1962), historiando a evolução das pesquisas sobre o assunto.

A teoria geral de flexo-torção de barras elásticas com seção aberta de paredes delgadas é relativamente recente. A História da Resistência dos Materiais e da Teoria da Elasticidade (TIMOSHENKO, 1953) mostra que durante muitos anos flexão e torção foram investigadas separadamente.

Primeiramente, desenvolveu-se a teoria de flexão baseada na hipótese de Navier-Bernoulli segundo a qual seções planas permanecem planas durante a flexão. Esta teoria considerou apenas vigas de seção transversal simétrica de forma simples, sujeitas a cargas atuando num plano axial de simetria da viga. A tensão de cisalhamento só pôde ser calculada na prática com o desenvolvimento, na década de 1850, da fórmula de Jourawski.

Por muito tempo acreditou-se que a torção fora definitivamente resolvida pela teoria de Saint-Venant, também desenvolvida na década de 1850. Esta teoria considera que, durante a torção, a seção é livre para deformar-se fora de seu plano, ou seja, admite o livre empenamento da seção transversal. Apesar desta limitação, ela foi aplicada indistintamente tanto à torção uniforme como à torção não-uniforme. Sua aplicação às formas práticas de seção de paredes delgadas deveu-se ao trabalho de Bredt, em 1896, em tubos e ainda à analogia de membrana apresentada por Prandtl em 1903.

A possibilidade de desenvolvimento de uma teoria para a torção não-uniforme foi vislumbrada em 1905, quando Timoshenko investigou o problema da torção numa viga I com uma extremidade engastada e concluiu que para se obter um valor satisfatório para o ângulo de torção deveriam ser consideradas não só as tensões de torção de Saint-Venant como também as tensões de flexão nas mesas.

Bach foi o primeiro a constatar, em 1909, por via experimental que na flexo-torção não se verifica a hipótese das seções planas. Efetuando ensaios numa barra com seção em forma de U, esse pesquisador observou que uma carga perpendicular ao plano de simetria do perfil, passando pelo centróide da seção, provoca não somente flexão mas também torção. Medindo os alongamentos de quatro fibras longitudinais localizadas nos cantos do perfil, constatou o não atendimento à hipótese das seções planas. Verificou ainda que a mesma carga perpendicular ao plano de simetria do perfil quando alinhada com o eixo da alma, portanto não passando pelo centróide, provoca uma torção menos acentuada na viga. Bach generalizou os resultados obtidos, atribuindo o afastamento da hipótese das seções planas exclusivamente à assimetria da seção U.

Somente doze anos após as experiências de Bach, a questão da flexo-torção de vigas de paredes delgadas voltou a agitar o meio científico, com o aparecimento, em 1921, de uma obra de Maillart sobre o assunto. Retomando as experiências de Bach, o autor constata que a flexão

acompanhada de torção pode-se desviar da lei das seções planas mesmo para perfis simétricos. Em artigos posteriores, de 1922 e 1924, Maillart esclarece o acoplamento entre flexão e torção, introduzindo finalmente o conceito de centro de cisalhamento e fornecendo os meios de cálculo para a sua determinação.

Em 1927 apareceu uma obra de Bernstein onde o autor, ao estudar a distribuição de tensões normais nas seções transversais de vigas mestras de pontes, observa sensíveis desvios em relação à lei das seções planas, chamando este fenômeno de empenamento da seção.

A construção de aeronaves metálicas durante as décadas de 20 e 30 concorreu para um rápido desenvolvimento dessas idéias e de suas aplicações especialmente a problemas de flambagem lateral e torcional de barras de paredes delgadas. Este desenvolvimento é associado principalmente aos nomes de Wagner, Kappus e Bleich.

Uma teoria abrangente de flexo-torção de barras com seção aberta de paredes delgadas foi desenvolvida durante os anos 30 por Vlassov, com base na introdução do conceito de área setorial (e na definição, a partir desse conceito, de certas propriedades da seção denominadas características setoriais) e de uma nova grandeza seccional designada por bimomento. Tal teoria engloba como casos particulares tanto a teoria usual de flexão de barras como a própria teoria de torção pura de Saint-Venant (aplicada a

esse tipo de seção). É de se observar que Wagner já utilizara, em obra conjunta com Pretschner publicada em 1934, uma lei de distribuição de tensões normais complementares, que resultam da torção, análoga à apresentada por Vlassov em 1936.

Indiscutivelmente, a teoria de Vlassov teve o mérito de ampliar o campo de ação da Resistência dos Materiais, uma vez que ela parte de hipóteses mais gerais que aquelas da teoria clássica de vigas, fazendo abstração da hipótese das seções planas e abordando situações em que não é cabível a aplicação do princípio de Saint-Venant.

Infelizmente, porém, os trabalhos de Vlassov não se tornaram muito conhecidos fora da União Soviética, antes que sua principal obra, publicada pela primeira vez em Moscou em 1940, fosse traduzida para o inglês, sob o título de *Thin Walled Elastic Beams*, cerca de 20 anos mais tarde. Antes disso, porém, teorias gerais foram também desenvolvidas independentemente por Goodier e Timoshenko.

Uma teoria geral para barras com seção fechada é mais complexa do que para hastes com seção aberta. A fórmula de Jourawski não é mais suficiente para determinar as tensões de cisalhamento uma vez que, nesse caso, elas são estaticamente indeterminadas. O problema pode ser solucionado através da consideração de uma deformação de cisalhamento fictícia. Uma teoria geral com base neste método foi apresentada por Bescoter em 1954.

A teoria de torção plástica de barras sem restrição ao livre empenamento começou a ser estudada na década de 20. A analogia com o monte de areia desenvolvida por Nadai permitiu aplicar esta teoria a barras de paredes delgadas com seção aberta ou fechada. Tal como na teoria elástica, o comportamento plástico de barras à flexão foi inicialmente investigado independentemente da torção. O desenvolvimento da noção de rótula plástica e dos métodos e teoremas de análise limite durante os anos 40 e 50 tornou relativamente simples a determinação do comportamento de barras no regime plástico. Recentemente, Åkesson e Bäcklund abordaram o problema da torção elasto-plástica em barras com seção aberta.

O estudo do comportamento estrutural de hastes de paredes delgadas (especialmente de seção aberta) constitui uma linha de pesquisa que também vem sendo desenvolvida, mais intensamente nos dez últimos anos, no Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ. Dentre as teses envolvendo tópicos no assunto, podem-se citar as de ILG (1983), PRESTES (1983), RIZZATTI (1986), SANCHEZ (1988) e SCHULZ (1988).

Muito há ainda que se investigar sobre este assunto, especialmente no âmbito de comportamento não-linear geométrico e/ou físico. O presente trabalho se enquadra precisamente no campo do comportamento não-linear geométrico.

A literatura consultada sobre o comportamento não-linear geométrico de hastes com perfil aberto de paredes delgadas sob flexo-torção revelou-se, na análise da autora, de certa forma incompleta. A maior parte dos autores consultados, como, por exemplo, VLASSOV (1962), RACHID (1975), MORI (1978) e GJELSVIK (1981), introduzem a não-linearidade geométrica meramente nas equações de equilíbrio. Tal procedimento, por exemplo, no estudo da instabilidade elástica, permite que se chegue à carga crítica, mas não possibilita focalizar o caminho pós-crítico, o que só é viável numa análise não-linear completa, isto é, introduzindo também a não-linearidade nas relações deformação-deslocamento. Por outro lado, na obra de CHEN e ATSUTA (1977), que de certa forma serviu de motivação à autora para pesquisar mais detalhadamente o assunto, não se observa uma exposição clara, ordenada e consistente do problema. Só para ilustrar, os autores sequer partem das mesmas premissas básicas ao formular o problema pela consideração do equilíbrio e posteriormente pelo caminho variacional (capítulos 2 e 12 da obra citada). Em decorrência disso, as equações diferenciais gerais para o problema que resultam de cada enfoque são evidentemente diferentes.

Em função do que se acabou de expor, o objetivo primordial deste trabalho foi, efetivamente, o de estabelecer um tratamento analítico amplo, consistente e unificado para o problema, tendo-se a preocupação de enquadrá-lo como uma aplicação no âmbito da Teoria

Não-linear da Elasticidade, sendo utilizada fundamentalmente, para este fim, a excelente obra de NOVOZHILOV (1953). Partindo, então, das equações da Elasticidade Não-linear (geométrica) e introduzindo as hipóteses simplificadoras inerentes ao problema, foram instituídas as equações diferenciais gerais que governam, no âmbito das rotações moderadas, a flexo-torção de hastes prismáticas de paredes delgadas com seção aberta e, para maior generalidade, sob solicitação dinâmica (sem levar em conta o amortecimento). As hipóteses de Kirchhoff e de Vlassov foram básicas neste desenvolvimento.

Dentro desse objetivo de apresentar um tratamento teórico abrangente, as referidas equações diferenciais foram primeiramente instituídas mediante o enfoque do equilíbrio dinâmico e, posteriormente, verificadas através do emprego de procedimento variacional (com a utilização do princípio dos trabalhos virtuais). Este último enfoque apresenta a vantagem, em relação ao primeiro, de conduzir também às condições de contorno (cinemáticas e naturais) de forma consistente, isto é, como decorrência do próprio procedimento empregado.

O presente trabalho está organizado da maneira descrita a seguir. Inicialmente, apresentam-se, no capítulo II, os fundamentos da teoria desenvolvida nos dois capítulos subseqüentes, com ênfase para o tópico geometria da deformação.

No capítulo III são obtidas as equações diferenciais que governam o problema pela consideração do equilíbrio dinâmico, sendo as mesmas equações diferenciais também instituídas, no capítulo IV, mediante enfoque variacional.

Ao final de cada um desses três capítulos é feita a particularização da formulação neles desenvolvida para a análise linear. Nos capítulos III e IV tecem-se, ainda, algumas considerações relativas a procedimentos e deduções apresentados por outros autores.

No capítulo V apresentam-se as conclusões do trabalho, algumas delas já expostas ao longo do texto, e propõe-se um tratamento numérico para o problema, já que a complexidade das equações aqui instituídas inviabiliza a sua resolução por procedimento analítico.

Os conceitos gerais de área setorial, centróide setorial, pólo setorial principal, bem como considerações a respeito das características setoriais de seções transversais abertas de paredes delgadas, são apresentados no Apêndice A, ao final do trabalho.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS DA TEORIA

Expõem-se aqui os fundamentos da teoria desenvolvida nos dois capítulos subseqüentes.

Inicialmente, apresentam-se os referenciais utilizados, definem-se as propriedades geométricas da seção necessárias ao desenvolvimento da teoria (item II.1) e enunciam-se as hipóteses nas quais se baseia a dedução das equações diferenciais que regem, no âmbito das rotações moderadas, a flexo-torção de hastes de paredes delgadas com seção aberta sob solicitação dinâmica (item II.2).

Segue-se a instituição do campo de deslocamentos e das relações deformação-deslocamento e ainda o estabelecimento da orientação das fibras na configuração deformada da barra (item II.3).

Uma vez estabelecidas as relações constitutivas (item II.4), deduz-se a expressão da tensão normal em termos dos deslocamentos, avaliam-se certas integrais desta tensão, definem-se algumas integrais envolvendo as tensões de cisalhamento - em ambos os casos, as integrais estendendo-se sobre a área da seção - e obtêm-se as componentes nos referenciais $x y z$ e $x n s$ do vetor tensão que atua em facetas normais aos eixos x, n, s na geometria inicial (item II.5).

Finalmente, no item II.6 é feita a particularização da formulação para a análise linear.

II.1 - REFERENCIAIS E CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO

São consideradas, no presente trabalho, hastes prismáticas (barras de eixo reto e seção constante) de paredes delgadas com seção transversal aberta. Admite-se que a seção é constituída de trechos retos longos, cada qual com espessura constante.

A figura II.1 mostra uma haste com essas características. A superfície média da peça é uma superfície prismática cuja interseção com o plano da seção é a chamada linha do perfil (também conhecida por linha média ou *contour*). A seção transversal fica, então, perfeitamente definida pela linha média e pela espessura de cada um de seus trechos.

Na figura II.1 também se acham indicados os referenciais utilizados. O referencial x y z constitui um sistema cartesiano ortogonal tal que o eixo x , com origem numa das extremidades da haste, coincide com o próprio eixo da barra (que contém os centróides das seções transversais) e os eixos y e z , localizados no plano da seção e que não são necessariamente eixos principais de inércia, formam um triedro direto com x . O sistema ξ η ζ é composto por eixos paralelos a x y z passando pelo centro de cisalhamento E da seção, de coordenadas $y = y_e$ e $z = z_e$.

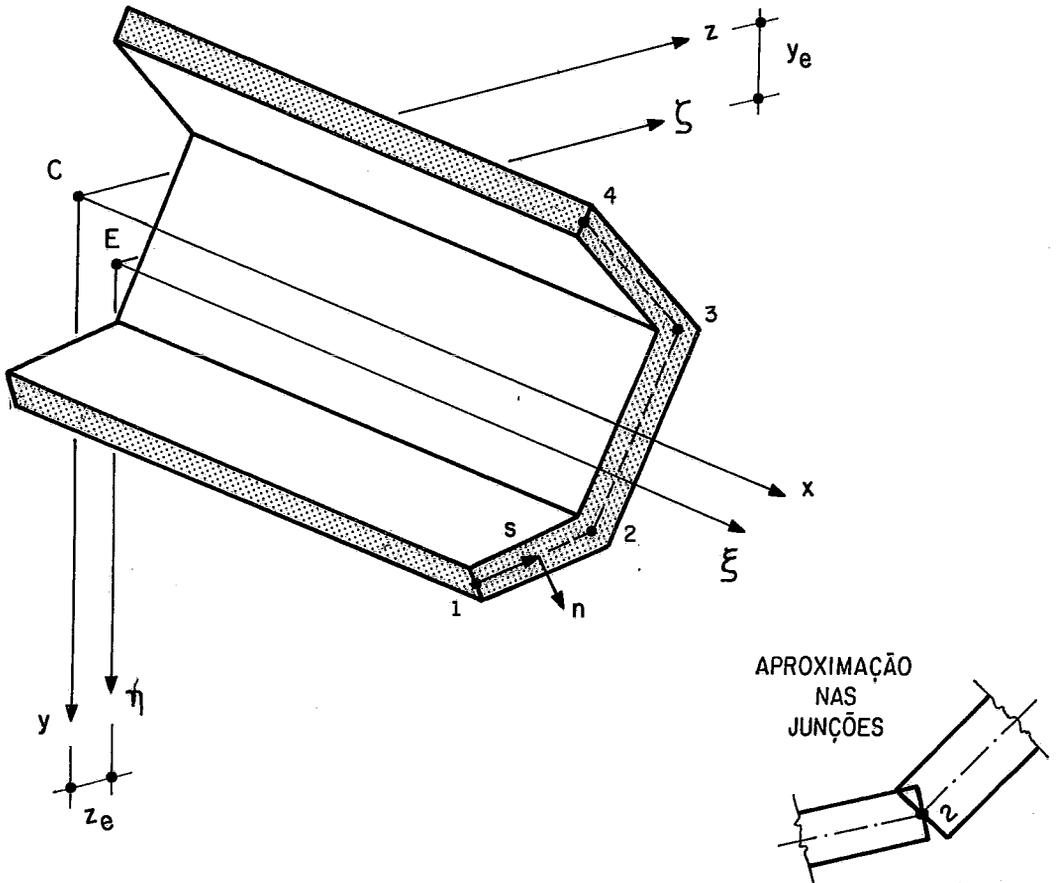


Figura II.1 - Haste de perfil aberto de paredes delgadas e sistemas de coordenadas $x y z$, $\xi \eta \zeta$ e $x n s$

Além dos referenciais $x y z$ e $\xi \eta \zeta$ é conveniente trabalhar ainda com um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais $x n s$ no qual as coordenadas s e n são medidas no plano da seção: a primeira ao longo da linha média, a partir de uma de suas extremidades (ponto 1 na figura II.1), e a segunda na direção normal à linha média. Tal sistema de coordenadas evidentemente não fica definido nas regiões de junção (regiões junto aos pontos 2 e 3), o

que é contornado ao se utilizar a aproximação de que cada trecho genérico i na seção tem forma retangular, iniciando-se em $s = s_i$ e terminando em $s = s_{i+1}$ (ver detalhe na figura II.1).

Considere-se, agora, a seção transversal da figura II.2 e designe-se por α o ângulo que mede a inclinação de um dado trecho e por t a espessura deste trecho. Denominem-se por \hat{y} , \hat{z} e $\hat{\eta}$, $\hat{\zeta}$, respectivamente, as coordenadas segundo os eixos y, z e η, ζ de um ponto genérico S da linha do perfil. Designem-se ainda por r_n , r_s as coordenadas de S em relação a um par de eixos ortogonais com origem em E e orientados tal como n, s .

Podem-se, então, estabelecer as seguintes relações entre coordenadas:

$$y = \hat{y} + n \cos \alpha \tag{II.1a}$$

$$z = \hat{z} + n \sen \alpha$$

$$\hat{\eta} = \hat{y} - y_e = r_n \cos \alpha - r_s \sen \alpha \tag{II.1b}$$

$$\hat{\zeta} = \hat{z} - z_e = r_n \sen \alpha + r_s \cos \alpha$$

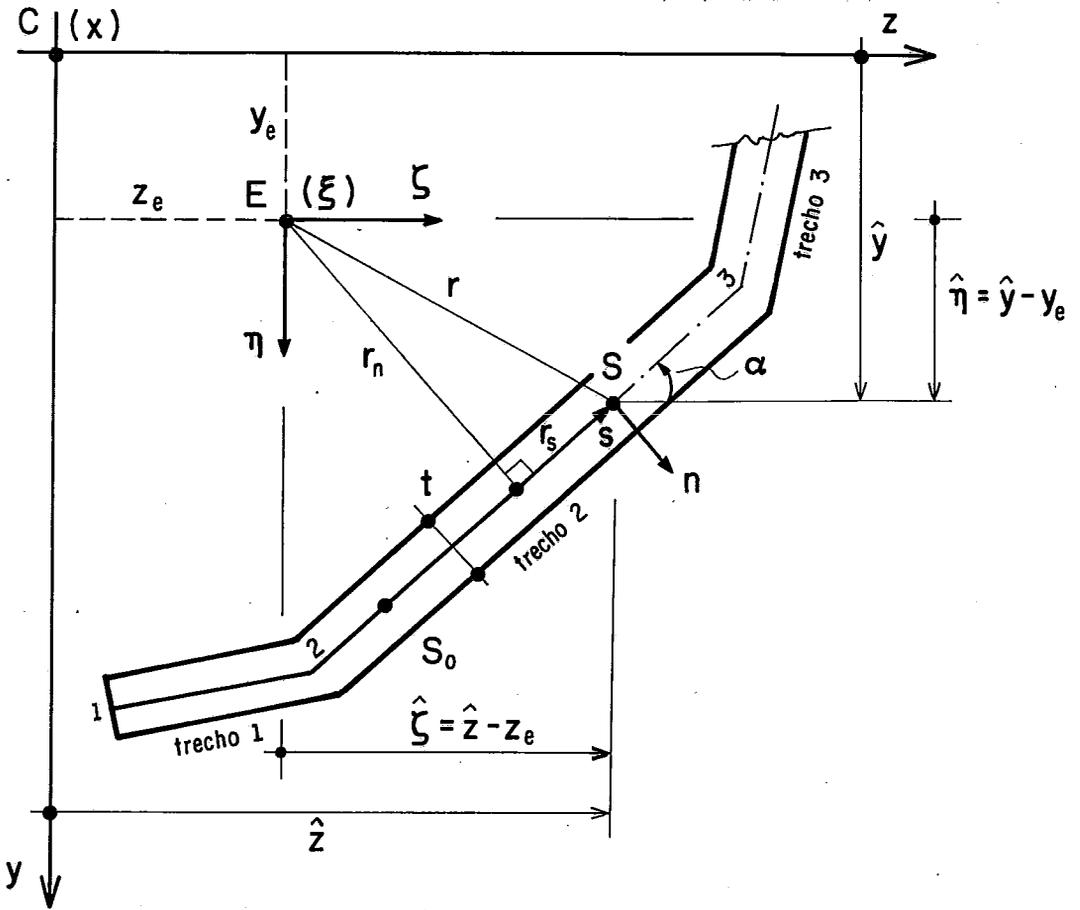


Figura II.2 - Seção aberta de paredes delgadas

$$\eta = y - y_e = (r_n + n) \cos \alpha - r_s \operatorname{sen} \alpha =$$

$$= \hat{\eta} + n \cos \alpha$$

(II.1c)

$$\zeta = z - z_e = (r_n + n) \operatorname{sen} \alpha + r_s \cos \alpha =$$

$$= \hat{\zeta} + n \operatorname{sen} \alpha$$

$$r_n = \hat{\zeta} \operatorname{sen} \alpha + \hat{\eta} \operatorname{cos} \alpha$$

(II.1d)

$$r_s = \hat{\zeta} \operatorname{cos} \alpha - \hat{\eta} \operatorname{sen} \alpha = \zeta \operatorname{cos} \alpha - \eta \operatorname{sen} \alpha$$

$$r_n + n = \zeta \operatorname{sen} \alpha + \eta \operatorname{cos} \alpha$$

(II.1e)

$$r^2 = (\hat{y} - y_e)^2 + (\hat{z} - z_e)^2 = \hat{\eta}^2 + \hat{\zeta}^2 = r_n^2 + r_s^2$$

(II.1f)

Considere-se ainda uma nova coordenada generalizada associada ao ponto S, a área setorial ω , que servirá de base, mais adiante, para a definição de diversas propriedades geométricas da seção e cujo conceito, encontrado em várias referências bibliográficas (por exemplo, COOK e YOUNG (1985)), é também apresentado no Apêndice A deste trabalho. A área setorial será avaliada, tomando para pólo o centro de cisalhamento da seção, que é o pólo setorial principal (neste caso, como visto no Apêndice A, ω é denominado de área setorial principal), e para ponto setorial inicial um centróide setorial, de acordo com a expressão

$$\omega = \int_{s_0}^s r_n ds , \quad (\text{II.2})$$

onde as coordenadas s_0 e s referem-se, respectivamente, ao ponto setorial inicial S_0 e ao ponto genérico S da linha média.

Definem-se, então, as seguintes propriedades geométricas da seção em cujas expressões já são introduzidas simplificações inerentes ao caso de paredes delgadas (ver também Apêndice A):

$$A = \int_A dA , \quad (\text{II.3})$$

área da seção;

$$S_Y = \int_A \hat{z} dA = 0 \quad (\text{II.4a})$$

$$S_Z = \int_A \hat{y} dA = 0 , \quad (\text{II.4b})$$

momentos estáticos da área da seção em relação aos eixos y e z respectivamente, ambos nulos porque se referem a eixos centroidais;

$$S_{\omega} = \int_A \omega \, dA = 0 \quad , \quad (\text{II.5})$$

momento estático setorial, nulo por se tomar para ponto setorial inicial um centróide setorial;

$$I_Y = \int_A \hat{z}^2 \, dA \quad (\text{II.6a})$$

$$I_Z = \int_A \hat{y}^2 \, dA \quad , \quad (\text{II.6b})$$

momentos de inércia da área da seção em relação aos eixos y e z respectivamente;

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 \, dA \quad , \quad (\text{II.7})$$

momento setorial de inércia;

$$I_{YZ} = \int_A \hat{y} \hat{z} \, dA \quad , \quad (\text{II.8})$$

produto de inércia da área da seção em relação aos eixos y e z;

$$I_{\omega Y} = \int_A \hat{z} \omega \, dA = 0 \quad (\text{II.9a})$$

$$I_{\omega Z} = \int_A \hat{y} \omega \, dA = 0 \quad , \quad (\text{II.9b})$$

produtos setoriais de inércia, ambos nulos porque o pólo escolhido (o centro de cisalhamento da seção) é o principal.

$$\begin{aligned} I_e &= \int_A (\hat{\eta}^2 + \hat{\zeta}^2) \, dA = \int_A r^2 \, dA = \\ &= I_Y + I_Z + (y_e^2 + z_e^2) A \quad , \quad (\text{II.10}) \end{aligned}$$

momento de inércia polar (pólo E);

$$H_Y = \int_A \hat{z} (\hat{y}^2 + \hat{z}^2) \, dA \quad (\text{II.11a})$$

$$H_Z = \int_A \hat{y} (\hat{y}^2 + \hat{z}^2) \, dA \quad (\text{II.11b})$$

$$H_\omega = \int_A \omega (\hat{y}^2 + \hat{z}^2) \, dA \quad , \quad (\text{II.11c})$$

$$Q_Y = \int_A \hat{z}^2 r^2 dA = H_Y - 2 z_e I_Y - 2 y_e I_{YZ} \quad (\text{II.12a})$$

$$Q_Z = \int_A \hat{y}^2 r^2 dA = H_Z - 2 y_e I_Z - 2 z_e I_{YZ} \quad (\text{II.12b})$$

$$Q_\omega = \int_A \omega r^2 dA = H_\omega , \quad (\text{II.12c})$$

$$D_Y = \int_A \hat{z}^2 (\hat{y}^2 + \hat{z}^2) dA \quad (\text{II.13a})$$

$$D_Z = \int_A \hat{y}^2 (\hat{y}^2 + \hat{z}^2) dA \quad (\text{II.13b})$$

e

$$\begin{aligned} R_e = \int_A r^4 dA = D_Y + D_Z - 4 z_e H_Y - 4 y_e H_Z + \\ + (2 y_e^2 + 6 z_e^2) I_Y + (6 y_e^2 + 2 z_e^2) I_Z + \\ + 8 y_e z_e I_{YZ} + (y_e^2 + z_e^2)^2 A , \quad (\text{II.14}) \end{aligned}$$

que não terão nenhuma denominação especial.

II.2 - HIPÓTESES BÁSICAS

Primeiramente, enunciam-se as hipóteses a respeito da geometria da deformação:

- a) Aborda-se o problema no âmbito da chamada teoria de rotações moderadas, na qual tanto as componentes de deformação como as rotações são pequenas em presença da unidade, com as últimas, porém, consideravelmente maiores que as primeiras, pois os quadrados dos ângulos de rotação são da ordem de grandeza das deformações específicas e distorções.
- b) Admite-se a hipótese de Kirchhoff da Teoria das Placas, segundo a qual linhas retas normais à superfície média antes da deformação permanecem retas, indeformadas, e normais à superfície média após a deformação. Isto implica desprezar a influência das distorções γ_{xn} e γ_{ns} e da deformação específica E_n na fixação do campo de deslocamentos da barra.
- c) Considera-se a projeção da linha média da seção sobre o seu plano original como indeformável.

- d) Admite-se, na instituição do campo de deslocamentos, que as distorções γ_{XS} sejam nulas na superfície média^(*).

Estas duas últimas hipóteses foram originalmente propostas por VLASSOV (1962).

Seguem-se as hipóteses relativas ao material, às componentes de tensão e ao carregamento, as quais estabelecem que:

- e) O material da barra é homogêneo, isótropo e linearmente elástico, obedecendo, portanto, à lei de Hooke generalizada, o que implica comportamento linear físico.
- f) Das componentes de tensão, apenas a componente normal σ_x e a componente tangencial τ_{XS} são efetivamente relevantes, tendo as demais componentes (σ_n , σ_s , τ_{Xn} , τ_{ns}) participação secundária no desenvolvimento da teoria.

(*) Entretanto, elas podem ser calculadas *a posteriori* - analogamente ao que ocorre na teoria elementar de flexão de vigas da Resistência dos Materiais - a partir do conhecimento das tensões de cisalhamento associadas a um fluxo determinado com base na consideração de equilíbrio (dinâmico, no caso) na direção longitudinal.

- g) O carregamento atuante é constituído de forças de volume (cuja componente na direção x é admitida uniforme na espessura da parede) e de forças de superfície, sendo que, destas últimas, não são consideradas componentes longitudinais na superfície lateral da barra.
- h) Não se leva em conta qualquer efeito de amortecimento na resposta dinâmica.

É importante salientar que a teoria desenvolvida neste trabalho, por conduzir a resultados imprecisos nas proximidades de junções bem como nas extremidades da seção, é efetivamente aplicável apenas em locais suficientemente afastados dessas regiões críticas e, portanto, válida somente em caráter global.

II.3 - GEOMETRIA DA DEFORMAÇÃO

II.3.1 - Campo de deslocamentos e relações deformação - deslocamento

A partir das relações deformação-deslocamento da Teoria Não-linear da Elasticidade, válidas para o caso geral de grandes deformações e rotações, e com base na hipótese de Kirchhoff, pode-se escrever (NOVOZHILOV, 1953, p. 178):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xn} = & \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial n} + \left(1 + \frac{\partial u_n}{\partial n} \right) \frac{\partial u_n}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial u_s}{\partial n} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ns} = & \left(1 + \frac{\partial u_n}{\partial n} \right) \frac{\partial u_n}{\partial s} + \left(1 + \frac{\partial u_s}{\partial s} \right) \frac{\partial u_s}{\partial n} + \\ & + \frac{\partial u_x}{\partial n} \frac{\partial u_x}{\partial s} = 0 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_s}{\partial n} \right)^2 \right] = 0$$

(II.15)

com " ε " designando componentes de deformação e u_x, u_n, u_s representando, num certo instante t , as componentes do deslocamento de um ponto genérico da barra segundo as direções x, n, s respectivamente. Observe-se que como $\gamma_{xn}, \gamma_{ns}, E_n$ são supostos nulos pela hipótese de Kirchhoff, das relações (NOVOZHILOV, 1961, p. 20 e 26)

$$\text{sen } \gamma_{xn} = \frac{\varepsilon_{xn}}{\sqrt{(1 + 2 \varepsilon_x) (1 + 2 \varepsilon_n)}}$$

$$\text{sen } \gamma_{ns} = \frac{\varepsilon_{ns}}{\sqrt{(1 + 2 \varepsilon_n) (1 + 2 \varepsilon_s)}}$$

$$E_n = \sqrt{1 + 2 \varepsilon_n} - 1 \quad ,$$

decorre que ε_{xn} , ε_{ns} , ε_n também são nulos.

Admitam-se soluções para o sistema (II.15) da forma

$$u_x(x, n, s, t) = \hat{u}_x(x, s, t) + n \chi_x(x, s, t)$$

$$u_n(x, n, s, t) = \hat{u}_n(x, s, t) + n \chi_n(x, s, t)$$

$$u_s(x, n, s, t) = \hat{u}_s(x, s, t) + n \chi_s(x, s, t)$$

(II.16)

onde \hat{u}_x , \hat{u}_n , \hat{u}_s simbolizam as componentes do deslocamento de um ponto genérico da superfície média ($n = 0$). A substituição das funções (II.16) no sistema (II.15) conduz a

$$\left(1 + \frac{\hat{\partial u}_x}{\partial x} \right) \chi_x + \frac{\hat{\partial u}_n}{\partial x} (1 + \chi_n) + \frac{\hat{\partial u}_s}{\partial x} \chi_s +$$

$$+ n \left[\chi_x \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + (1 + \chi_n) \frac{\partial \chi_n}{\partial x} + \chi_s \frac{\partial \chi_s}{\partial x} \right] = 0$$

$$\frac{\hat{\partial u}_x}{\partial s} \chi_x + \frac{\hat{\partial u}_n}{\partial s} (1 + \chi_n) + \left(1 + \frac{\hat{\partial u}_s}{\partial s} \right) \chi_s +$$

$$+ n \left[\chi_x \frac{\partial \chi_x}{\partial s} + (1 + \chi_n) \frac{\partial \chi_n}{\partial s} + \chi_s \frac{\partial \chi_s}{\partial s} \right] = 0$$

$$\chi_n + \frac{1}{2} \left[\chi_x^2 + \chi_n^2 + \chi_s^2 \right] = 0$$

ou, então, a

$$\left(1 + \frac{\hat{\partial u}_x}{\partial x} \right) \chi_x + \frac{\hat{\partial u}_n}{\partial x} (1 + \chi_n) + \frac{\hat{\partial u}_s}{\partial x} \chi_s = 0$$

(II.17a)

$$\frac{\hat{\partial u}_x}{\partial s} \chi_x + \frac{\hat{\partial u}_n}{\partial s} (1 + \chi_n) + \left(1 + \frac{\hat{\partial u}_s}{\partial s} \right) \chi_s = 0$$

(II.17b)

$$\chi_x^2 + (1 + \chi_n)^2 + \chi_s^2 = 1, \quad (\text{II.17c})$$

onde, para obtenção das duas primeiras equações, foi utilizada a relação

$$\chi_x \chi'_x + (1 + \chi_n) \chi'_n + \chi_s \chi'_s = 0$$

que decorre da derivação da terceira.

Das equações (II.17a, b), é possível obter

$$\chi_x = \frac{\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s}\right) \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x}}{\left(1 + \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s}\right) - \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x}} (1 + \chi_n)$$

$$\chi_s = \frac{\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x}\right) \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s}}{\left(1 + \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s}\right) - \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x}} (1 + \chi_n)$$

(II.18)

De acordo com a nomenclatura dos parâmetros α_{ij} usada por NOVOZHILOV (1953, p. 8) e chamando de $\hat{\alpha}_{ij}$ o valor de α_{ij} para $n = 0$, tem-se que

$$\hat{\alpha}_{21} = \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} \right) \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x}$$

$$\hat{\alpha}_{22} = \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \right) \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} \right) - \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x}$$

$$\hat{\alpha}_{23} = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \right) \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s}$$

(II.19)

e, portanto, as relações (II.18) podem ser apresentadas na forma:

$$\chi_x = \frac{\hat{\alpha}_{21}}{\hat{\alpha}_{22}} \left(1 + \chi_n \right)$$

(II.20)

$$\chi_s = \frac{\hat{\alpha}_{23}}{\hat{\alpha}_{22}} \left(1 + \chi_n \right)$$

Substituindo estas igualdades na equação (II.17c), obtém-se:

$$\chi_n = \frac{\hat{\alpha}_{22}}{\sqrt{\hat{\alpha}_{21}^2 + \hat{\alpha}_{22}^2 + \hat{\alpha}_{23}^2}} - 1$$

(II.21)

Conseqüentemente, χ_x e χ_s se escrevem

$$\chi_x = \frac{\hat{\alpha}_{21}}{\sqrt{\hat{\alpha}_{21}^2 + \hat{\alpha}_{22}^2 + \hat{\alpha}_{23}^2}}$$

(II.22)

$$\chi_s = \frac{\hat{\alpha}_{23}}{\sqrt{\hat{\alpha}_{21}^2 + \hat{\alpha}_{22}^2 + \hat{\alpha}_{23}^2}}$$

Com base nas definições dos parâmetros "e",

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$e_n = \frac{\partial u_n}{\partial n}$$

$$e_s = \frac{\partial u_s}{\partial s}$$

(II.23)

$$e_{xn} = \frac{\partial u_x}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial x}$$

$$e_{xs} = \frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x}$$

$$e_{ns} = \frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial n} ,$$

e " ω ",

$$\begin{aligned}
 2 \omega_x &= \frac{\partial u_s}{\partial n} - \frac{\partial u_n}{\partial s} \\
 2 \omega_n &= \frac{\partial u_x}{\partial s} - \frac{\partial u_s}{\partial x} \\
 2 \omega_s &= \frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial n} ,
 \end{aligned}
 \tag{II.24}$$

denominados, por SHAMES e DYM (1985, p. 420), respectivamente de parâmetros de deformação e de rotação, é possível exprimir $\hat{\alpha}_{21}$, $\hat{\alpha}_{22}$, $\hat{\alpha}_{23}$ na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_{21} &= \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{ns} - \hat{\omega}_x \right) \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{xs} - \hat{\omega}_n \right) - \\
 &\quad - \left(1 + \hat{e}_s \right) \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{xn} + \hat{\omega}_s \right) \\
 \hat{\alpha}_{22} &= \left(1 + \hat{e}_x \right) \left(1 + \hat{e}_s \right) - \frac{1}{4} \hat{e}_{xs}^2 + \hat{\omega}_n^2 \\
 \hat{\alpha}_{23} &= \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{xs} + \hat{\omega}_n \right) \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{xn} + \hat{\omega}_s \right) - \\
 &\quad - \left(1 + \hat{e}_x \right) \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{ns} - \hat{\omega}_x \right) ,
 \end{aligned}$$

onde " \hat{e} " e " $\hat{\omega}$ " designam respectivamente os valores de "e" e " ω " para $n = 0$.

Considere-se, agora, a tabela II.1 (NOVOZHILOV, 1953, p. 11) que apresenta os cossenos diretores das direções x^* , n^* , s^* dos segmentos elementares que, após a deformação, se orientam segundo x , n , s .

Tabela II.1 - Cossenos diretores das direções x^* , n^* , s^*

	$\underset{\sim}{i}'_1$	$\underset{\sim}{i}'_2$	$\underset{\sim}{i}'_3$
x	$\frac{1 + E_{x^*}}{D} \alpha_{11}$	$\frac{1 + E_{n^*}}{D} \alpha_{12}$	$\frac{1 + E_{s^*}}{D} \alpha_{13}$
n	$\frac{1 + E_{x^*}}{D} \alpha_{21}$	$\frac{1 + E_{n^*}}{D} \alpha_{22}$	$\frac{1 + E_{s^*}}{D} \alpha_{23}$
s	$\frac{1 + E_{x^*}}{D} \alpha_{31}$	$\frac{1 + E_{n^*}}{D} \alpha_{32}$	$\frac{1 + E_{s^*}}{D} \alpha_{33}$

Nesta tabela, os vetores $\underset{\sim}{i}'_1$, $\underset{\sim}{i}'_2$, $\underset{\sim}{i}'_3$ representam respectivamente os unitários das direções x^* , n^* , s^* . Os parâmetros E_{x^*} , E_{n^*} , E_{s^*} são as deformações específicas de fibras que, após a deformação, se tornam paralelas, respectivamente, às direções x , n , s e D é dado pelo valor do determinante (NOVOZHILOV, 1953, p. 9)

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial n} & \frac{\partial u_x}{\partial s} \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} & 1 + \frac{\partial u_n}{\partial n} & \frac{\partial u_n}{\partial s} \\ \frac{\partial u_s}{\partial x} & \frac{\partial u_s}{\partial n} & 1 + \frac{\partial u_s}{\partial s} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + e_x & \frac{1}{2} e_{xn} - \omega_s & \frac{1}{2} e_{xs} + \omega_n \\ \frac{1}{2} e_{xn} + \omega_s & 1 + e_n & \frac{1}{2} e_{ns} - \omega_x \\ \frac{1}{2} e_{xs} - \omega_n & \frac{1}{2} e_{ns} + \omega_x & 1 + e_s \end{vmatrix}$$

que também pode ser expresso, em função das deformações específicas principais E_j , por

$$D = (1 + E_1) (1 + E_2) (1 + E_3)$$

Para o caso de pequenas deformações específicas e distorções em relação à unidade, os numeradores $1 + E_x^*$, $1 + E_n^*$, $1 + E_s^*$ e o denominador D tornam-se aproximadamente iguais a 1 e as direções dos unitários \hat{i}'_1 , \hat{i}'_2 , \hat{i}'_3 podem ser consideradas ortogonais, acarretando que

$$\hat{\alpha}_{21}^2 + \hat{\alpha}_{22}^2 + \hat{\alpha}_{23}^2 \cong 1$$

Nesse caso, então, as equações (II.21) e (II.22) se tornam

$$\chi_x = \hat{\alpha}_{21}$$

$$\chi_n = \hat{\alpha}_{22} - 1 \quad (\text{II.26})$$

$$\chi_s = \hat{\alpha}_{23}$$

Considerando, além disso, que as rotações são pequenas em relação à unidade, tem-se, de acordo com NOVOZHILOV (1961, p. 53), que as derivadas dos deslocamentos também são pequenas em relação à unidade, bem como os parâmetros "e" e "ω" por serem combinações lineares dessas derivadas. Em decorrência, as relações (II.19) e (II.25) se escrevem

$$\hat{\alpha}_{21} = - \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} = - \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{xn} + \hat{\omega}_s \right)$$

$$\hat{\alpha}_{22} = 1 \tag{II.27}$$

$$\hat{\alpha}_{23} = - \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} = - \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{ns} - \hat{\omega}_x \right)$$

Levando-se, então, este resultado às equações (II.26), conclui-se que, nesse caso,

$$\chi_x = - \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} = - \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{xn} + \hat{\omega}_s \right)$$

$$\chi_n = 0 \tag{II.28}$$

$$\chi_s = - \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} = - \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{ns} - \hat{\omega}_x \right)$$

e, por conseguinte, o campo de deslocamentos, dado nas equações (II.16), passa a ser expresso por

$$u_x = \hat{u}_x - n \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x}$$

$$u_n = \hat{u}_n \quad (\text{II.29})$$

$$u_s = \hat{u}_s - n \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s}$$

Observe-se que, para este campo de deslocamentos, os parâmetros definidos pelas equações (II.23) e (II.24) se tornam respectivamente

$$e_x = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} - n \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x^2} = \hat{e}_x - n \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x^2} \quad (\text{II.30a})$$

$$e_n = 0 = \hat{e}_n \quad (\text{II.30b})$$

$$e_s = \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} - n \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial s^2} = \hat{e}_s - n \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial s^2} \quad (\text{II.30c})$$

$$e_{xn} = 0 = \hat{e}_{xn} \quad (\text{II.30d})$$

$$e_{xs} = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} - 2n \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x \partial s} = \hat{e}_{xs} - 2n \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x \partial s} \quad (\text{II.30e})$$

$$e_{ns} = 0 = \hat{e}_{ns} \quad (\text{II.30f})$$

e

$$\omega_x = - \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} = \hat{\omega}_x \quad (\text{II.31a})$$

$$\omega_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} - \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} \right) = \hat{\omega}_n \quad (\text{II.31b})$$

$$\omega_s = \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} = \hat{\omega}_s, \quad (\text{II.31c})$$

notando-se que ω_x , ω_n e ω_s (além, é lógico, de e_n , e_{xn} , e_{ns}) são independentes de n , uma vez que o são \hat{u}_x , \hat{u}_n e \hat{u}_s e, por conseguinte, suas derivadas parciais.

Tendo em vista as igualdades (II.30d,f) e (II.31a,c), as equações (II.28) se tornam

$$\chi_x = - \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} = - \hat{\omega}_s$$

$$\chi_n = 0 \quad (\text{II.32})$$

$$\chi_s = - \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} = \hat{\omega}_x$$

No caso que se está considerando, de pequenas deformações específicas e distorções, estas - conforme mostra NOVOZHILOV (1961, p. 51) - confundem-se com as próprias componentes de deformação. Para o caso, ainda mais particular, denominado de "rotações moderadas" (rotações pequenas em relação à unidade, porém consideravelmente maiores que as componentes de deformação), as componentes de deformação não anuladas pela hipótese de Kirchhoff, quais sejam, $\varepsilon_x \cong E_x$, $\varepsilon_s \cong E_s$ e $\varepsilon_{xs} \cong \gamma_{xs}$, de acordo com NOVOZHILOV (1961, p. 54-55), se escrevem:

$$\varepsilon_x = e_x + \frac{1}{2} (\omega_s^2 + \omega_n^2) \quad (\text{II.33a})$$

$$\varepsilon_s = e_s + \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_n^2) \quad (\text{II.33b})$$

$$\gamma_{xs} = e_{xs} - \omega_x \omega_s \quad (\text{II.33c})$$

onde $e \ll \omega \ll 1$, sendo que a componente ε_s não estará diretamente envolvida no desenvolvimento da teoria.

Levando as igualdades (II.30) e (II.31) às equações (II.33a,c), obtêm-se as relações

$$\varepsilon_x = \frac{\hat{\partial u}_x}{\partial x} - n \frac{\hat{\partial}^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (\hat{\omega}_s^2 + \hat{\omega}_n^2)$$

(II.34a)

$$\gamma_{XS} = \frac{\partial \hat{u}_X}{\partial S} + \frac{\partial \hat{u}_S}{\partial X} - 2n \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial X \partial S} - \hat{\omega}_X \hat{\omega}_S \quad (\text{II.34b})$$

que podem ser rerepresentadas na forma

$$\epsilon_X = \hat{\epsilon}_X - n \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial X^2} \quad (\text{II.35a})$$

$$\gamma_{XS} = \hat{\gamma}_{XS} - 2n \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial X \partial S} \quad (\text{II.35b})$$

onde $\hat{\epsilon}_X$ e $\hat{\gamma}_{XS}$ designam respectivamente os valores de ϵ_X e γ_{XS} para $n = 0$, ou seja,

$$\hat{\epsilon}_X = \hat{e}_X + \frac{1}{2} (\hat{\omega}_S^2 + \hat{\omega}_n^2) = \frac{\partial \hat{u}_X}{\partial X} + \frac{1}{2} (\hat{\omega}_S^2 + \hat{\omega}_n^2) \quad (\text{II.36a})$$

$$\hat{\gamma}_{XS} = \hat{e}_{XS} - \hat{\omega}_X \hat{\omega}_S = \frac{\partial \hat{u}_X}{\partial S} + \frac{\partial \hat{u}_S}{\partial X} - \hat{\omega}_X \hat{\omega}_S \quad (\text{II.36b})$$

Com base na hipótese (c) de que a projeção da linha do perfil sobre o seu plano original não se deforma (experimentando apenas deslocamento de corpo rígido), podem-se deduzir as expressões de \hat{u}_n e \hat{u}_S , como se mostra

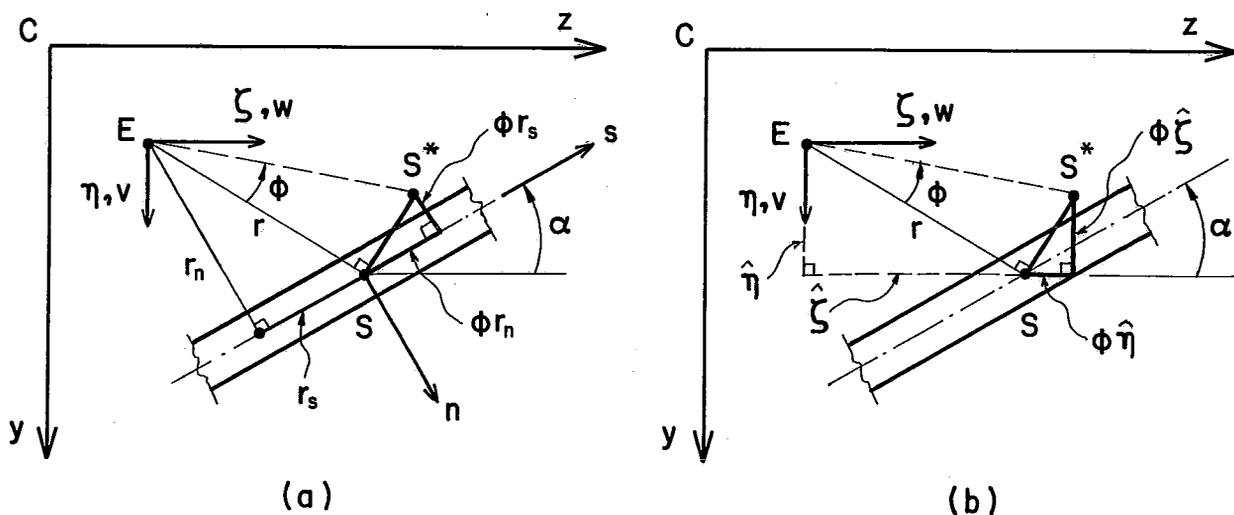


Figura II.3 - Contribuição do ângulo de torção para as componentes: (a) \hat{u}_n, \hat{u}_s ; (b) \hat{u}_y, \hat{u}_z

a seguir. Sejam, então, numa seção genérica de abscissa x e para um dado instante t , $v(x,t)$ e $w(x,t)$ as componentes de deslocamento do centro de cisalhamento E nas direções y e z respectivamente e $\phi(x,t)$ o ângulo de torção, considerado positivo quando, ao se olhar a seção no sentido negativo do eixo x , a rotação ocorrer no sentido anti-horário (de y para z). De acordo com a figura II.3a, tem-se que

$$\hat{u}_n = v \cos \alpha + w \sin \alpha - \phi r_s \quad (\text{II.37a})$$

$$\hat{u}_s = -v \sin \alpha + w \cos \alpha + \phi r_n \quad (\text{II.37b})$$

Alternativamente, podem ser obtidas as expressões das componentes \hat{u}_y e \hat{u}_z com o auxílio da figura II.3b. Escreve-se, então:

$$\hat{u}_y = v - \phi \hat{\zeta} \quad (\text{II.38a})$$

$$\hat{u}_z = w + \phi \hat{\eta} , \quad (\text{II.38b})$$

onde $\hat{\eta} = \hat{y} - y_e$ e $\hat{\zeta} = \hat{z} - z_e$. As componentes \hat{u}_y e \hat{u}_z estão relacionadas às componentes \hat{u}_n e \hat{u}_s por

$$\hat{u}_y = \hat{u}_n \cos \alpha - \hat{u}_s \sin \alpha \quad (\text{II.39})$$

$$\hat{u}_z = \hat{u}_n \sin \alpha + \hat{u}_s \cos \alpha$$

Mediante substituição, nas relações (II.31a,c), da expressão de \hat{u}_n , dada na equação (II.37a), é possível obter

$$\hat{\omega}_x = \phi \quad (\text{II.40a})$$

$$\hat{\omega}_s = v' \cos \alpha + w' \sin \alpha - \phi' r_s, \quad (\text{II.40b})$$

tendo sido considerado na avaliação da primeira que

$$\frac{dr_s}{ds} = 1.$$

A partir da hipótese (d) de que γ_{xs} é nula na superfície média, pode-se deduzir a expressão de \hat{u}_x . De fato, igualando a zero a expressão de $\hat{\gamma}_{xs}$, dada na igualdade (II.36b), vem:

$$\hat{\gamma}_{XS} = \frac{\partial \hat{u}_X}{\partial S} + \frac{\partial \hat{u}_S}{\partial X} - \hat{\omega}_X \hat{\omega}_S = 0 \quad (\text{II.41})$$

donde

$$\frac{\partial \hat{u}_X}{\partial S} = - \frac{\partial \hat{u}_S}{\partial X} + \hat{\omega}_X \hat{\omega}_S \quad (\text{II.42})$$

Tendo em vista as expressões de \hat{u}_S e de $\hat{\omega}_X$ e $\hat{\omega}_S$, dadas nas igualdades (II.37b) e (II.40a,b) respectivamente, a equação (II.42) se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_X}{\partial S} = & \left(v' + \phi w' \right) \text{sen } \alpha - \left(w' - \phi v' \right) \text{cos } \alpha - \\ & - \phi' r_n - \phi \phi' r_s \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por ds, considerando que $ds \text{ sen } \alpha = -d\hat{y}$ e $ds \text{ cos } \alpha = d\hat{z}$, e integrando entre s_0 e s, vem

$$\begin{aligned} \hat{u}_X \Big|_s = \hat{u}_X \Big|_{s_0} - & \left[\left(v' + \phi w' \right) \hat{y} + \left(w' - \phi v' \right) \hat{z} \right]_{s_0}^s - \\ & - \phi' \omega - \phi \phi' \Omega, \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

onde ω é a área setorial avaliada através da equação (II.2)

e $\Omega = \int_{s_0}^s r_s ds$. Esta integral, como se mostra a seguir, tem seu resultado dependente apenas de s_0 e s . Com efeito, considerando a segunda das relações (II.1d), pode-se avaliar

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_{s_0}^s r_s ds = \int_{s_0}^s \left(\hat{\zeta} \cos \alpha - \hat{\eta} \sin \alpha \right) ds = \\ &= \int_{\hat{z}(s_0)}^{\hat{z}(s)} (\hat{z} - z_e) d\hat{z} + \int_{\hat{y}(s_0)}^{\hat{y}(s)} (\hat{y} - \hat{y}_e) d\hat{y} = \\ &= \frac{1}{2} \left[(\hat{z} - \hat{z}_e)^2 + (\hat{y} - \hat{y}_e)^2 \right]_{s_0}^s = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \Big|_{s_0}^s = \lambda \Big|_{s_0}^s, \end{aligned}$$

onde

$$\lambda = \frac{1}{2} r^2 \tag{II.44}$$

Substituindo a expressão de Ω na equação (II.43), obtém-se

$$\hat{u}_x \Big|_s = \hat{u}_x \Big|_{s_0} - \left[\left(v' + \phi w' \right) \hat{y} + \left(w' - \phi v' \right) \hat{z} + \right. \\ \left. + \phi \phi' \lambda \right]_{s_0}^s - \phi' \omega$$

Designando por u a parcela avaliada em s_0 , ou seja,

$$u = \left[\hat{u}_x + \left(v' + \phi w' \right) \hat{y} + \left(w' - \phi v' \right) \hat{z} + \phi \phi' \lambda \right]_{s_0}, \quad (\text{II.45})$$

a qual representa uma translação da linha média da seção na direção x , pode-se escrever, para um s genérico,

$$\hat{u}_x = u - \left(v' + \phi w' \right) \hat{y} - \left(w' - \phi v' \right) \hat{z} - \phi' \omega - \phi \phi' \lambda \quad (\text{II.46})$$

Utilizando a notação

$$\theta_z = v' + \phi w'$$

$$\theta_y = w' - \phi v' \quad (\text{II.47})$$

$$\psi = \phi \phi'$$

é possível reescrever a equação (II.46) na forma

$$\hat{u}_x = u - \theta_z \hat{y} - \theta_y \hat{z} - \phi' \omega - \psi \lambda \quad (\text{II.48})$$

Por outro lado, das equações (II.31b) e (II.42) decorre que

$$\hat{\omega}_n = \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} + \frac{1}{2} \hat{\omega}_x \hat{\omega}_s$$

ou, desprezando o produto $\hat{\omega}_x \hat{\omega}_s$ em presença de $\hat{\omega}_n$,

$$\hat{\omega}_n = - \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x}$$

Substituindo, nesta equação, a expressão de \hat{u}_s , dada na igualdade (II.37b), vem:

$$\hat{\omega}_n = v' \operatorname{sen} \alpha - w' \operatorname{cos} \alpha - \phi' r_n \quad (\text{II.49})$$

Em lugar de $\hat{\omega}_n$ e $\hat{\omega}_s$, serão eventualmente considerados os parâmetros $\hat{\omega}_y$ e $\hat{\omega}_z$, definidos por:

$$\hat{\omega}_y = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right]_{n=0}$$

$$\hat{\omega}_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right]_{n=0}$$

os quais podem ser obtidos, de acordo com NOVOZHILOV (1953, p. 27), a partir de $\hat{\omega}_n$ e $\hat{\omega}_s$, através de

$$\hat{\omega}_y = \hat{\omega}_n \cos \alpha - \hat{\omega}_s \sin \alpha$$

$$\hat{\omega}_z = \hat{\omega}_n \sin \alpha + \hat{\omega}_s \cos \alpha$$

Mediante substituição, nestas equações, das expressões de $\hat{\omega}_n$ e $\hat{\omega}_s$, dadas nas igualdades (II.49) e (II.40b) respectivamente, e utilização das relações (II.1b), é possível chegar a

$$\hat{\omega}_y = -w' - \phi' \hat{\eta}$$

(II.50)

$$\hat{\omega}_z = v' - \phi' \hat{\zeta}$$

Podem-se, agora, obter as relações deformação-deslocamento. Desprezando na relação (II.34a) a parcela de ε_x que varia com n e considerando as equações (II.1b,f), (II.36a), (II.40b), (II.48) e (II.49), escreve-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{x}} \cong \hat{\varepsilon}_{\mathbf{x}} = & u' - \theta'_z \hat{y} - \theta'_y \hat{z} - \phi'' \omega - \psi' \lambda + \\ & + \frac{1}{2} \left(v'^2 + w'^2 + \phi'^2 r^2 - 2 v' \phi' \hat{\zeta} + 2 w' \phi' \hat{\eta} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Por outro lado, a partir das equações (II.35b), (II.37a) e (II.41), tem-se

$$\gamma_{\mathbf{xS}} = 2 \phi' n \quad (\text{II.52})$$

Finalmente, o campo de deslocamentos pode ser conhecido substituindo-se, nas equações (II.29), as expressões de $\hat{u}_{\mathbf{x}}$ e de $\hat{u}_{\mathbf{n}}$ e $\hat{u}_{\mathbf{s}}$, dadas nas igualdades (II.48) e (II.37a,b) respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{x}} = & u - \theta_z \hat{y} - \theta_y \hat{z} - \phi' \omega - \psi \lambda - \\ & - n \left(v' \cos \alpha + w' \sin \alpha - \phi' r_{\mathbf{s}} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

$$u_{\mathbf{n}} = v \cos \alpha + w \sin \alpha - \phi r_{\mathbf{s}}$$

$$u_{\mathbf{s}} = -v \sin \alpha + w \cos \alpha + \phi \left(r_{\mathbf{n}} + n \right)$$

Em lugar de $u_{\mathbf{n}}$ e $u_{\mathbf{s}}$, serão eventualmente consideradas as componentes:

$$u_y = v - \phi \zeta \quad (II.54)$$

$$u_z = w + \phi \eta ,$$

as quais são estabelecidas, a partir de u_n e u_s , através das relações

$$u_y = u_n \cos \alpha - u_s \sin \alpha$$

$$u_z = u_n \sin \alpha + u_s \cos \alpha$$

e com a utilização das equações (II.1c).

As expressões de u_n e u_s , ou de u_y e u_z , indicam que é considerada indeformável não só a projeção da linha do perfil sobre seu plano original como também a projeção da própria seção transversal. Isto decorre da associação da hipótese da indeformabilidade da linha média à hipótese de Kirchhoff.

Em resumo, têm-se então:

- **Parâmetros de rotação**

$$\omega_x = \hat{\omega}_x = \phi \quad (II.55a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \hat{\omega}_n = v' \operatorname{sen} \alpha - w' \operatorname{cos} \alpha - \phi' r_n \\ \omega_s = \hat{\omega}_s = v' \operatorname{cos} \alpha + w' \operatorname{sen} \alpha - \phi' r_s \end{array} \right. \quad (\text{II.55b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_Y = \hat{\omega}_Y = -w' - \phi' \hat{\eta} \\ \omega_Z = \hat{\omega}_Z = v' - \phi' \hat{\zeta} \end{array} \right. \quad (\text{II.55c})$$

- Campo de deslocamentos

$$\begin{aligned} u_x = u - \theta_Z \hat{y} - \theta_Y \hat{z} - \phi' \omega - \psi \lambda - \\ - n \left(v' \operatorname{cos} \alpha + w' \operatorname{sen} \alpha - \phi' r_s \right) \end{aligned} \quad (\text{II.56a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = v \operatorname{cos} \alpha + w \operatorname{sen} \alpha - \phi r_s \\ u_s = -v \operatorname{sen} \alpha + w \operatorname{cos} \alpha + \phi \left(r_n + n \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.56b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_Y = v - \phi \zeta \\ u_Z = w + \phi \eta \end{array} \right. \quad (\text{II.56c})$$

sendo

$$\theta_z = v' + \phi w' \quad (\text{II.57a})$$

$$\theta_y = w' - \phi v' \quad (\text{II.57b})$$

$$\psi = \phi \phi' \quad (\text{II.57c})$$

- Relações deformação-deslocamento

$$\begin{aligned} \epsilon_x = & u' - \theta'_z \hat{y} - \theta'_y \hat{z} - \phi'' \omega - \psi' \lambda + \\ & + \frac{1}{2} \left(v'^2 + w'^2 + \phi'^2 r^2 - 2 v' \phi' \hat{\zeta} + 2 w' \phi' \hat{\eta} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.58a})$$

$$\gamma_{xs}^{(1)} = 2 \phi' n \quad (\text{II.58b})$$

Note-se que foi agora introduzido o índice (1) na segunda relação deformação-deslocamento em função de que, como se verá mais adiante, no item II.5, a tensão de cisalhamento τ_{xs} - e conseqüentemente a distorção γ_{xs} - é constituída, na realidade, de duas parcelas, estando, assim, envolvida na equação (II.58b) apenas a primeira das parcelas de γ_{xs} .

II.3.2 - Orientação das fibras na configuração deformada da barra

A tabela II.2 (NOVOZHILOV, 1953, p. 7) apresenta os cossenos diretores das direções \tilde{x} , \tilde{n} , \tilde{s} dos segmentos elementares que, antes da deformação, se orientavam segundo x , n , s .

Tabela II.2 - Cossenos diretores das direções \tilde{x} , \tilde{n} , \tilde{s}

	\tilde{i}_1	\tilde{i}_2	\tilde{i}_3
x	$\frac{1 + e_x}{1 + E_x}$	$\frac{\frac{1}{2} e_{xn} - \omega_s}{1 + E_n}$	$\frac{\frac{1}{2} e_{xs} + \omega_n}{1 + E_s}$
n	$\frac{\frac{1}{2} e_{xn} + \omega_s}{1 + E_x}$	$\frac{1 + e_n}{1 + E_n}$	$\frac{\frac{1}{2} e_{ns} - \omega_x}{1 + E_s}$
s	$\frac{\frac{1}{2} e_{xs} - \omega_n}{1 + E_x}$	$\frac{\frac{1}{2} e_{ns} + \omega_x}{1 + E_n}$	$\frac{1 + e_s}{1 + E_s}$

Nesta tabela, os vetores \tilde{i}_1 , \tilde{i}_2 , \tilde{i}_3 representam respectivamente os unitários das direções \tilde{x} , \tilde{n} , \tilde{s} . Os parâmetros E_x , E_n , E_s são as deformações específicas de fibras que, antes da deformação, eram paralelas às direções x , n , s respectivamente.

No caso de pequenas deformações específicas e distorções em relação à unidade, os denominadores $1 + E_x$,

$1 + E_n$, $1 + E_s$ tornam-se aproximadamente iguais a 1. Em particular, para o caso em estudo, de rotações moderadas, tem-se que $\omega \ll 1$. Conseqüentemente, os cossenos diretores assumem os valores dados na tabela II.3.

Tabela II.3 - Cossenos diretores das direções \tilde{x} , \tilde{n} , \tilde{s} no caso de rotações moderadas

	\tilde{i}_1	\tilde{i}_2	\tilde{i}_3
x	1	$-\omega_s$	ω_n
n	ω_s	1	$-\omega_x$
s	$-\omega_n$	ω_x	1

É conveniente lembrar que, nesse caso, de acordo com as equações (II.31), os ω_k são os próprios $\hat{\omega}_k$.

Analogamente, para o referencial x, y, z , pode-se construir a tabela II.4, onde, desta vez, $\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \tilde{i}_3$ representam os unitários das direções $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ dos segmentos elementares que, antes da deformação, se orientavam segundo x, y, z .

Tabela II.4 - Cossenos diretores das direções \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z}
no caso de rotações moderadas

	\tilde{i}_1	\tilde{i}_2	\tilde{i}_3
x	1	$-\omega_z$	ω_y
y	ω_z	1	$-\omega_x$
z	$-\omega_y$	ω_x	1

II.4 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

De acordo com a hipótese (e), o material da barra obedece à lei de Hooke generalizada. Assim, as componentes de deformação ϵ_x e $\gamma_{xs}^{(1)}$ relacionam-se às tensões por

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_s + \sigma_n)$$

$$\gamma_{xs}^{(1)} = \frac{\tau_{xs}^{(1)}}{G} ,$$

onde ν , E e G designam respectivamente o coeficiente de Poisson e os módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material da barra, e $\tau_{xs}^{(1)}$ representa a primeira das parcelas que constituem a tensão de cisalhamento τ_{xs} .

Face à hipótese (f), os termos que contêm as componentes de tensão σ_n e σ_s - bem pequenas em presença de σ_x - podem ser ignorados, conduzindo a

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{ou} \quad \sigma_x = E \varepsilon_x \quad (\text{II.59a})$$

$$\gamma_{xs}^{(1)} = \frac{\tau_{xs}^{(1)}}{G} \quad \text{ou} \quad \tau_{xs}^{(1)} = G \gamma_{xs}^{(1)} \quad (\text{II.59b})$$

II.5 - TENSÕES

II.5.1 - Tensão normal e suas integrais na seção

A partir das equações (II.58a) e (II.59a), obtém-se a expressão da tensão σ_x em função dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} \sigma_x = E \left\{ u' - \theta'_z \hat{y} - \theta'_y \hat{z} - \phi'' \omega - \psi' \lambda + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[v'^2 + w'^2 + \phi'^2 r^2 - 2 v' \phi' \left(\hat{z} - z_e \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 w' \phi' \left(\hat{y} - y_e \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

na qual se utilizaram as relações (II.1b).

Definem-se, então, as seguintes integrais das tensões normais sobre a área da seção:

$$N = \int_A \sigma_x \, dA \quad (\text{II.61a})$$

$$M_Y = - \int_A \sigma_x \, z \, dA = - \int_A \sigma_x \, \hat{z} \, dA \quad (\text{II.61b})$$

$$M_Z = \int_A \sigma_x \, y \, dA = \int_A \sigma_x \, \hat{y} \, dA \quad (\text{II.61c})$$

$$B = \int_A \sigma_x \, \omega \, dA \quad (\text{II.61d})$$

$$K = \int_A \sigma_x \, r^2 \, dA \quad (\text{II.61e})$$

$$C = \int_A \sigma_x \, \lambda \, dA = \frac{1}{2} \int_A \sigma_x \, r^2 \, dA, \quad (\text{II.61f})$$

levando-se em conta, nas equações (b) e (c), o fato de σ_x ter distribuição uniforme na espessura e , na igualdade (f), a relação (II.44).

Mediante substituição da relação (II.60) nas igualdades (II.61) e consideração das propriedades geométricas da seção definidas nas equações (II.3) a (II.10), (II.12) e (II.14), bem como das que se definem a seguir, quais sejam,

$$S_\lambda = \int_A \lambda \, dA = \frac{I_e}{2} \quad (\text{II.62a})$$

$$I_{\lambda Y} = \int_A \hat{z} \lambda \, dA = \frac{Q_Y}{2} \quad (\text{II.62b})$$

$$I_{\lambda Z} = \int_A \hat{y} \lambda \, dA = \frac{Q_Z}{2} \quad (\text{II.62c})$$

$$I_{\lambda \omega} = \int_A \omega \lambda \, dA = \frac{Q_\omega}{2} \quad (\text{II.62d})$$

$$I_\lambda = \int_A \lambda^2 \, dA = \frac{R_e}{4} \quad (\text{II.62e})$$

$$Q_\lambda = \int_A \lambda \, r^2 \, dA = \frac{R_e}{2} \, , \quad (\text{II.62f})$$

onde se fez uso da relação (II.44), exprimem-se as integrais (II.61) em termos dos deslocamentos na forma:

$$N = E \left(A u' - \frac{I_e}{2} \psi' + \frac{A}{2} v'^2 + \frac{A}{2} w'^2 + \frac{I_e}{2} \phi'^2 + \right. \\ \left. + z_e A v' \phi' - y_e A w' \phi' \right) \quad (\text{II.63a})$$

$$M_Y = E \left(I_{YZ} \theta'_z + I_Y \theta'_y + \frac{Q_Y}{2} \psi' - \frac{Q_Y}{2} \phi'^2 + \right. \\ \left. + I_Y v' \phi' - I_{YZ} w' \phi' \right) \quad (\text{II.63b})$$

$$M_Z = E \left(- I_Z \theta'_z - I_{YZ} \theta'_y - \frac{Q_Z}{2} \psi' + \frac{Q_Z}{2} \phi'^2 - \right. \\ \left. - I_{YZ} v' \phi' + I_Z w' \phi' \right) \quad (\text{II.63c})$$

$$B = E \left(- I_\omega \phi'' - \frac{Q_\omega}{2} \psi' + \frac{Q_\omega}{2} \phi'^2 \right) \quad (\text{II.63d})$$

$$K = E \left[I_e u' - Q_z \theta'_z - Q_y \theta'_y - Q_\omega \phi'' - \right. \\ \left. - \frac{R_e}{2} \psi' + \frac{I_e}{2} v'^2 + \frac{I_e}{2} w'^2 + \frac{R_e}{2} \phi'^2 - \right. \\ \left. - \left(Q_y - z_e I_e \right) v' \phi' + \left(Q_z - y_e I_e \right) w' \phi' \right] \quad (\text{II.63e})$$

$$C = \frac{K}{2} \quad (\text{II.63f})$$

II.5.2 - Tensões de cisalhamento e suas integrais na seção

Conforme já foi dito anteriormente, a tensão τ_{XS} envolve, na verdade, a consideração de duas parcelas, quais sejam:

a) $\tau_{XS}^{(1)}$: Esta parcela, associada, de acordo com a equação (II.59b), à distorção $\gamma_{XS}^{(1)}$, dada na igualdade (II.58b), fica assim expressa em função dos deslocamentos:

$$\tau_{XS}^{(1)} = 2 G \phi' n \quad (\text{II.64})$$

Como se observa, esta expressão é idêntica à fornecida pela teoria de torção pura de Saint-Venant, para o tipo de seção transversal focalizado (ver, por exemplo, UGURAL e FENSTER (1987, p. 174)), embora, agora, ϕ' não seja mais constante com x . Tal expressão, que na teoria de Saint-Venant é decorrente de uma generalização dos resultados obtidos na análise da seção retangular alongada (ver figura II.4), evidentemente não se aplica nas proximidades de junções nem mesmo nas vizinhanças dos bordos extremos da seção (correspondentes a $s = 0$ e $s = L$, sendo L o comprimento do *contour*). Nestes últimos, por exemplo, $\tau_{XS}^{(1)}$ se anula.

b) $\tau_{XS}^{(2)}$: Esta parcela, admitida constante na espessura, está, portanto, associada a um fluxo de cisalhamento, que será avaliado no capítulo subsequente (item III.4),

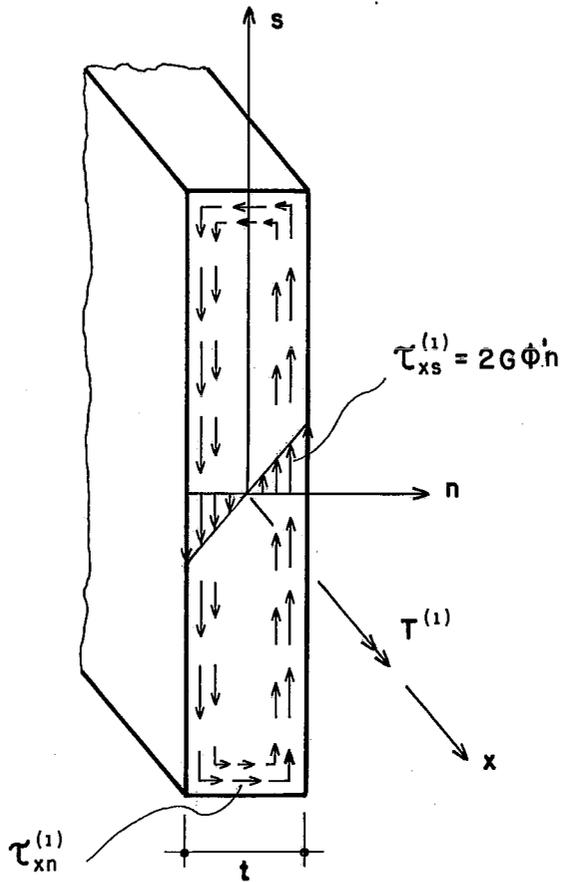


Figura II.4 - Tensões desenvolvidas na seção retangular alongada de uma barra sujeita à torção de Saint-Venant

seguinto um procedimento equivalente ao utilizado na determinação da tensão de cisalhamento no âmbito da teoria elementar de flexão de vigas da Resistência dos Materiais, a partir da consideração do equilíbrio (dinâmico, no caso) na direção longitudinal.

Conseqüentemente, pode-se escrever:

$$\tau_{XS} = \tau_{XS}^{(1)} + \tau_{XS}^{(2)} \quad (\text{II.65})$$

Quanto à outra componente de cisalhamento na seção, τ_{Xn} , de importância secundária como já foi frisado, apesar de não ser diretamente avaliada, terá no que segue, quando for o caso, também computada sua contribuição ao longo do desenvolvimento da teoria.

Tal como τ_{XS} , a tensão τ_{Xn} pode ser subdividida em duas parcelas. A primeira, $\tau_{Xn}^{(1)}$, presente na torção de Saint-Venant e também representada na figura II.4, pode ser ignorada em regiões da seção suficientemente afastadas de extremidades e junções. Já a segunda, $\tau_{Xn}^{(2)}$, conforme se comprovará no próximo capítulo (item III.5), com base na equação de equilíbrio dinâmico (III.2a), pode ser efetivamente desprezada nos cálculos desenvolvidos a seguir.

Tendo em vista que

$$\tau_{xy} = -\tau_{XS} \sin \alpha + \tau_{Xn} \cos \alpha \quad (\text{II.66a})$$

$$\tau_{xz} = \tau_{XS} \cos \alpha + \tau_{Xn} \sin \alpha \quad (\text{II.66b})$$

podem-se definir as seguintes integrais das tensões de cisalhamento sobre a área da seção:

$$V_Y = \int_A \tau_{xy} \, dA = \int_A \left(-\tau_{xs} \, \text{sen } \alpha + \tau_{xn} \, \text{cos } \alpha \right) \, dA$$

(II.67a)

$$V_Z = \int_A \tau_{xz} \, dA = \int_A \left(\tau_{xs} \, \text{cos } \alpha + \tau_{xn} \, \text{sen } \alpha \right) \, dA$$

(II.67b)

$$\begin{aligned} T &= \int_A \left(\tau_{xy} \, \zeta - \tau_{xz} \, \eta \right) \, dA = \\ &= - \int_A \left[\tau_{xs} \left(r_n + n \right) - \tau_{xn} \, r_s \right] \, dA \end{aligned}$$

(II.67c)

$$\begin{aligned} R &= \int_A \left(\tau_{xy} \, \eta + \tau_{xz} \, \zeta \right) \, dA = \\ &= \int_A \left[\tau_{xs} \, r_s + \tau_{xn} \left(r_n + n \right) \right] \, dA \end{aligned}$$

(II.67d)

tendo sido utilizadas, nas equações (c) e (d), as relações (II.1d,e).

Face ao anteriormente exposto com respeito às componentes de cisalhamento τ_{xs} e τ_{xn} , as integrais (II.67) podem ser expressas na forma:

$$V_Y = - \int_A \tau_{XS} \operatorname{sen} \alpha \, dA = - \int_A \tau_{XS}^{(2)} \operatorname{sen} \alpha \, dA \quad (\text{II.68a})$$

$$V_Z = \int_A \tau_{XS} \cos \alpha \, dA = \int_A \tau_{XS}^{(2)} \cos \alpha \, dA \quad (\text{II.68b})$$

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} \quad (\text{II.68c})$$

$$R = \int_A \tau_{XS} r_S \, dA = \int_A \tau_{XS}^{(2)} r_S \, dA, \quad (\text{II.68d})$$

sendo as parcelas $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$ dadas por

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= - \int_A \left[\tau_{XS}^{(1)} (r_n + n) - \tau_{Xn}^{(1)} r_S \right] dA = \\ &= - \int_A \left[\tau_{XS}^{(1)} n - \tau_{Xn}^{(1)} r_S \right] dA \quad (\text{II.69a}) \end{aligned}$$

$$T^{(2)} = - \int_A \tau_{XS}^{(2)} (r_n + n) \, dA = - \int_A \tau_{XS}^{(2)} r_n \, dA \quad (\text{II.69b})$$

Note-se que, em função da lei de variação das tensões $\tau_{XS}^{(1)}$ e $\tau_{XS}^{(2)}$ na espessura, as integrais $\int_A \tau_{XS}^{(1)} \text{sen } \alpha \, dA$, $\int_A \tau_{XS}^{(1)} \cos \alpha \, dA$, $\int_A \tau_{XS}^{(1)} r_S \, dA$, $\int_A \tau_{XS}^{(1)} r_N \, dA$, $\int_A \tau_{XS}^{(2)} n \, dA$ se tornam nulas. Além disso, considerando que $\tau_{XN}^{(2)}$ é desprezível e ainda a forma como se distribuem as tensões $\tau_{XN}^{(1)}$ na seção (ver figura II.4), pode-se ignorar a contribuição das parcelas em τ_{XN} nas expressões de V_Y , V_Z e R .

Com base na teoria de Saint-Venant, pode-se estabelecer que

$$T^{(1)} = - 2 \int_A \tau_{XS}^{(1)} n \, dA \quad (\text{II.70})$$

Conforme focalizado por UGURAL e FENSTER (1987, p. 175), entre outros, com a presença do fator 2 multiplicando a integral na equação (II.68) fica computada a contribuição, para o tursor de Saint-Venant, das tensões $\tau_{XN}^{(1)}$, as quais, embora localizadas em regiões restritas da seção, possuem em contrapartida braços de alavanca bem maiores do que os correspondentes às tensões $\tau_{XS}^{(1)}$ (ver figura II.4). Substituindo a relação (II.64) na equação (II.70), obtém-se a expressão de $T^{(1)}$ em termos dos deslocamentos

$$T^{(1)} = - G J_T \phi' \quad (\text{II.71})$$

com

$$\begin{aligned} J_T &= 4 \int_A n^2 dA = 4 \int_0^L \left[\frac{n^3}{3} \right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} ds = \int_0^L \frac{t^3}{3} ds = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{t_i^3}{3} (s_{i+1} - s_i) \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

designando a constante de torção da seção; n , o número de trechos que constituem a seção e i , um trecho genérico.

Chamando de

$$f = \tau_{XS}^{(2)} t \quad (\text{II.73})$$

o fluxo de cisalhamento, as expressões de V_Y , V_Z , $T^{(2)}$ e R , dadas nas equações (II.68a,b), (II.69b) e (II.68d) respectivamente, assumem o seguinte aspecto

$$V_Y = - \int_0^L f \operatorname{sen} \alpha ds = - \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} f \operatorname{sen} \alpha ds \quad (\text{II.74a})$$

$$V_Z = \int_0^L f \cos \alpha ds = \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} f \cos \alpha ds \quad (\text{II.74b})$$

$$T^{(2)} = - \int_0^L f r_n ds = - \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} f r_n ds \quad (\text{II.74c})$$

$$R = \int_0^L f r_s ds = \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} f r_s ds \quad (\text{II.74d})$$

Estas integrais serão posteriormente escritas em termos dos deslocamentos a partir de relações estabelecidas no capítulo subsequente.

II.5.3 - Componentes das tensões nos referenciais $x n s$ e $x y z$

De acordo com a Tabela II.3 apresentada no item II.3.2, tem-se que a matriz de transformação do sistema $\tilde{x} \tilde{n} \tilde{s}$ para o referencial $x n s$ é a seguinte:

$$T_{\tilde{x}n\tilde{s}} = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_s & \omega_n \\ \omega_s & 1 & -\omega_x \\ -\omega_n & \omega_x & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.75})$$

Analogamente, tem-se, de acordo com a tabela II.4, que a matriz de transformação do sistema $\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z}$ para o referencial $x y z$ é:

$$\tilde{T}_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.76})$$

Assim, as componentes segundo x n s do vetor tensão na face de um elemento de normal x na geometria inicial são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_n \\ \rho_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_s & \omega_n \\ \omega_s & 1 & -\omega_x \\ -\omega_n & \omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xn} \\ \tau_{xs} \end{Bmatrix}$$

ou, efetuando o produto,

$$\rho_x = \sigma_x - \omega_s \tau_{xn} + \omega_n \tau_{xs} \quad (\text{II.77a})$$

$$\rho_n = \omega_s \sigma_x + \tau_{xn} - \omega_x \tau_{xs} \quad (\text{II.77b})$$

$$\rho_s = -\omega_n \sigma_x + \omega_x \tau_{xn} + \tau_{xs} \quad (\text{II.77c})$$

As componentes do mesmo vetor segundo x y z são determinadas por

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

Efetuando, então, o produto, vem

$$\rho_x = \sigma_x - \omega_z \tau_{xy} + \omega_y \tau_{xz} \quad (\text{II.78a})$$

$$\rho_y = \omega_z \sigma_x + \tau_{xy} - \omega_x \tau_{xz} \quad (\text{II.78b})$$

$$\rho_z = -\omega_y \sigma_x + \omega_x \tau_{xy} + \tau_{xz} \quad (\text{II.78c})$$

As componentes ρ_n , ρ_s e ρ_y , ρ_z estão relacionadas por

$$\rho_y = \rho_n \cos \alpha - \rho_s \sin \alpha \quad (\text{II.79})$$

$$\rho_z = \rho_n \sin \alpha + \rho_s \cos \alpha$$

ou por

$$\rho_n = \rho_z \sin \alpha + \rho_y \cos \alpha \quad (\text{II.80})$$

$$\rho_s = \rho_z \cos \alpha - \rho_y \sin \alpha$$

A figura II.5 mostra um trecho i , de espessura t_i , de uma seção aberta de paredes delgadas, onde estão representadas duas faces 1 e 2, a primeira de normal n e a segunda de normal s na geometria inicial.

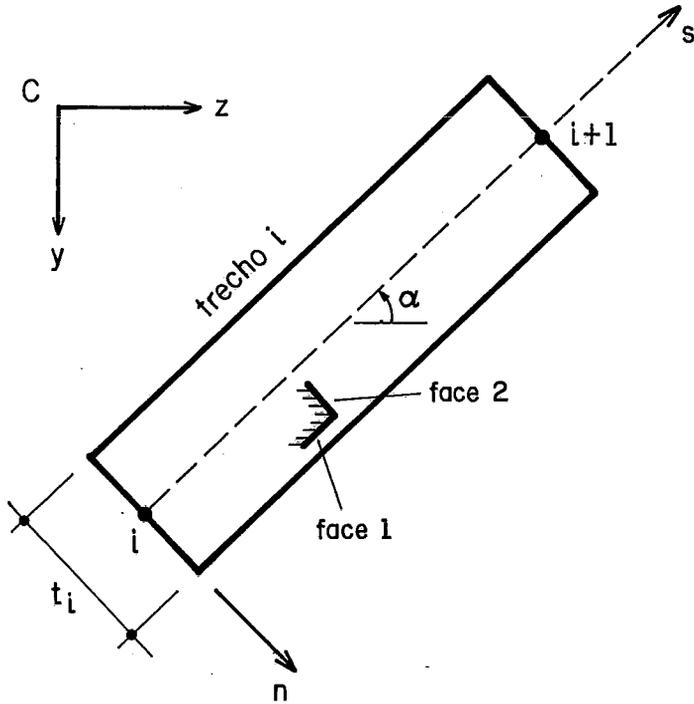


Figura II.5 - Trecho genérico i de uma seção aberta de paredes delgadas

Na figura II.6 estão indicadas as componentes segundo \tilde{x} , \tilde{n} , \tilde{s} , x , n , s e x , y , z do vetor tensão que atua na face 1. Note-se que, por simplicidade, a faceta e as componentes do vetor tensão nas direções \tilde{x} , \tilde{n} , \tilde{s} foram desenhadas com relação à geometria inicial.

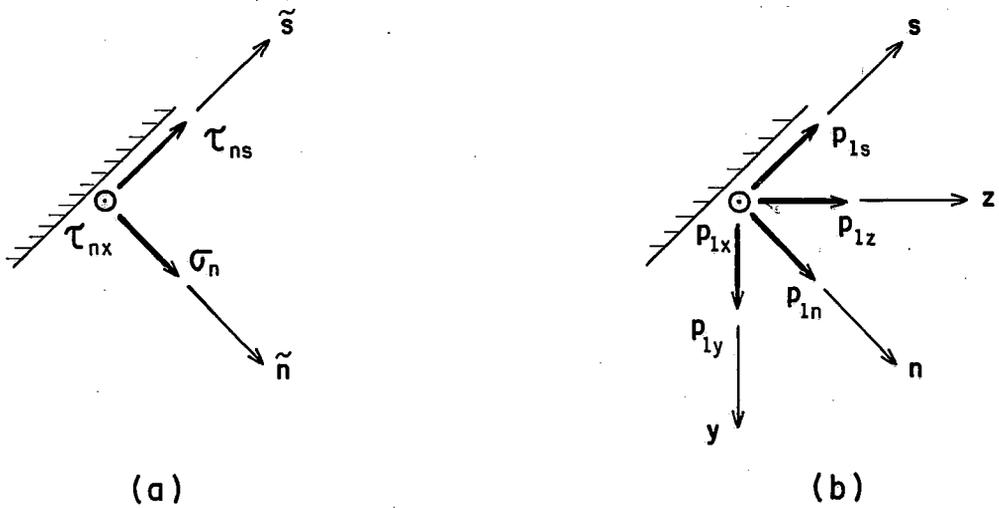


Figura II.6 - Componentes do vetor tensão na face 1:
 (a) segundo \tilde{x} \tilde{n} \tilde{s} ; (b) segundo x n s
 e x y z

As componentes segundo x n s do vetor tensão na face 1 são dadas por

$$\begin{Bmatrix} p_{1x} \\ p_{1n} \\ p_{1s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_s & \omega_n \\ \omega_s & 1 & -\omega_x \\ -\omega_n & \omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xn} \\ \sigma_n \\ \tau_{ns} \end{Bmatrix},$$

onde, em virtude de se estar considerando que as deformações específicas e as distorções são pequenas em relação à unidade, pôde-se fazer $\tau_{nx} = \tau_{xn}$. Efetuando o produto, vem

$$p_{1x} = \tau_{xn} - \omega_s \sigma_n + \omega_n \tau_{ns} \quad (\text{II.81a})$$

$$p_{1n} = \omega_s \tau_{xn} + \sigma_n - \omega_x \tau_{ns} \quad (\text{II.81b})$$

$$p_{1s} = -\omega_n \tau_{xn} + \omega_x \sigma_n + \tau_{ns} \quad (\text{II.81c})$$

De modo análogo, apresentam-se, na figura II.7, as componentes segundo $\tilde{x} \tilde{n} \tilde{s}$, $x n s$ e $x y z$ do vetor tensão que atua na face 2. Também aqui, por simplicidade, a faceta e as componentes do vetor tensão nas direções \tilde{x} , \tilde{n} , \tilde{s} foram desenhadas com relação à geometria inicial.

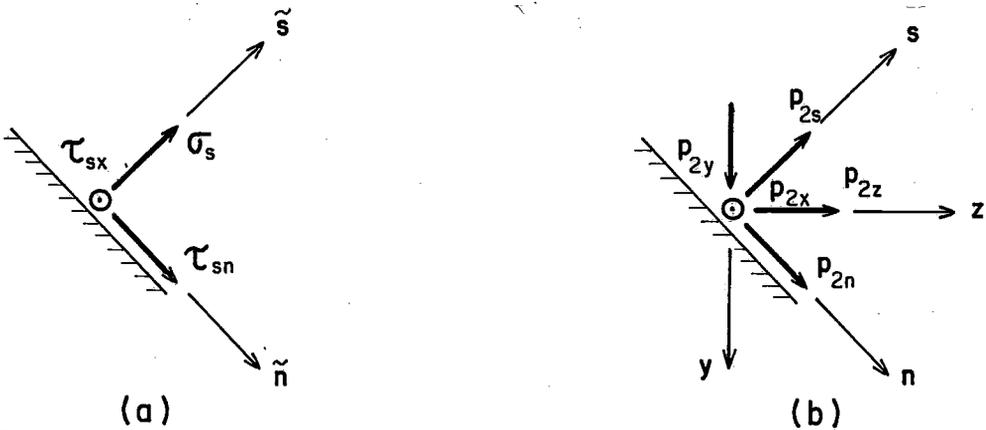


Figura II.7 - Componentes do vetor tensão na face 2:
 (a) segundo $\tilde{x} \tilde{n} \tilde{s}$; (b) segundo $x n s$
 e $x y z$

As componentes segundo $x n s$ do vetor tensão na face 2 são determinadas por

$$\begin{Bmatrix} p_{2x} \\ p_{2n} \\ p_{2s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_s & \omega_n \\ \omega_s & 1 & -\omega_x \\ -\omega_n & \omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xs} \\ \tau_{ns} \\ \sigma_s \end{Bmatrix},$$

onde se fez $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Efetuando o produto, obtém-se

$$p_{2x} = \tau_{xs} - \omega_s \tau_{ns} + \omega_n \sigma_s \quad (\text{II.82a})$$

$$p_{2n} = \omega_s \tau_{xs} + \tau_{ns} - \omega_x \sigma_s \quad (\text{II.82b})$$

$$p_{2s} = -\omega_n \tau_{xs} + \omega_x \tau_{ns} + \sigma_s \quad (\text{II.82c})$$

Numa face i ($i = 1$ ou 2), as componentes p_{iy} , p_{iz} e p_{in} , p_{is} estão relacionadas por

$$p_{iy} = p_{in} \cos \alpha - p_{is} \sin \alpha \quad (\text{II.83a})$$

$$p_{iz} = p_{in} \sin \alpha + p_{is} \cos \alpha \quad (\text{II.83b})$$

ou por

$$p_{in} = p_{iz} \sin \alpha + p_{iy} \cos \alpha \quad (\text{II.84a})$$

$$p_{is} = p_{iz} \cos \alpha - p_{iy} \sin \alpha \quad (\text{II.84b})$$

II.6 - PARTICULARIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO PARA A ANÁLISE LINEAR

No âmbito de comportamento linear, os parâmetros " ω " são quantidades da ordem dos parâmetros " e ". Conseqüentemente, os quadrados ou produtos dos " ω " podem ser desprezados em presença dos parâmetros " e ". Nesse caso, então, de acordo com NOVOZHILOV (1961, p. 54), as componentes de deformação não anuladas pela hipótese de Kirchhoff se tornam:

$$\varepsilon_x = e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (\text{II.85a})$$

$$\varepsilon_s = e_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} \quad (\text{II.85b})$$

$$\varepsilon_{xs} = e_{xs} = \frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x}, \quad (\text{II.85c})$$

lembrando-se que a componente ε_s não está diretamente envolvida no desenvolvimento da teoria (na verdade - conforme se pode comprovar mediante substituição, na igualdade (II.85b), da expressão (II.90c) deduzida mais adiante - nesse caso ε_s se anula).

A substituição das igualdades (II.30) nas relações (II.85a,c) conduz, tal como anteriormente (ver expressões (II.35)), a:

$$\varepsilon_x = \hat{\varepsilon}_x - n \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x^2} \quad (\text{II.86a})$$

$$\gamma_{xs} = \hat{\gamma}_{xs} - 2n \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x \partial s} \quad (\text{II.86b})$$

sendo porém, nesse caso,

$$\hat{\varepsilon}_x = \hat{e}_x = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \quad (\text{II.87a})$$

$$\hat{\gamma}_{xs} = \hat{e}_{xs} = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} \quad (\text{II.87b})$$

A partir da hipótese (d) de que $\hat{\gamma}_{xs} = 0$ e da expressão de \hat{u}_s , dada na equação (II.37b), chega-se à seguinte expressão para \hat{u}_x :

$$\hat{u}_x = u - v' \hat{y} - w' \hat{z} - \phi' \omega, \quad (\text{II.88})$$

sendo

$$u = \left[\hat{u}_x + v' \hat{y} + w' \hat{z} \right]_{s_0} \quad (\text{II.89})$$

O campo de deslocamentos, dado nas equações (II.29), se torna, então,

$$\begin{aligned}
 u_x &= u - v' \hat{y} - w' \hat{z} - \phi' \omega - \\
 &\quad - n \left(v' \cos \alpha + w' \sin \alpha - \phi' r_s \right) = \\
 &= u - v'y - w'z - \phi' \left(\omega - r_s n \right) \quad (\text{II.90a})
 \end{aligned}$$

$$u_n = v \cos \alpha + w \sin \alpha - \phi r_s \quad (\text{II.90b})$$

$$u_s = -v \sin \alpha + w \cos \alpha + \phi \left(r_n + n \right) \quad (\text{II.90c})$$

Em lugar de u_n e u_s podem ser também consideradas as mesmas componentes u_y e u_z dadas nas equações (II.54).

As relações deformação-deslocamento (equações (II.86)), mediante a utilização das igualdades (II.87a), (II.88) e (II.37a) e com a consideração de que $\hat{\gamma}_{XS} = 0$, ficam nesse caso:

$$\varepsilon_x \cong \hat{\varepsilon}_x = u' - v'' \hat{y} - w'' \hat{z} - \phi'' \omega \quad (\text{II.91a})$$

$$\gamma_{XS}^{(1)} = 2 \phi' n \quad (\text{II.91b})$$

Tendo em vista as relações (II.59a) e (II.91a), escreve-se a expressão da tensão normal em termos dos deslocamentos

$$\sigma_x = E \left(u' - v'' \hat{y} - w'' \hat{z} - \phi'' \omega \right) \quad (\text{II.92})$$

As integrais da tensão normal sobre a área da seção, definidas nas equações (II.61a,b,c,d), se tornam

$$N = E A u' \quad (\text{II.93a})$$

$$M_Y = E \left(I_{YZ} v'' + I_Y w'' \right) \quad (\text{II.93b})$$

$$M_Z = - E \left(I_Z v'' + I_{YZ} w'' \right) \quad (\text{II.93c})$$

$$B = - E I_\omega \phi'' \quad (\text{II.93d})$$

Elas representam respectivamente o esforço normal, as componentes do momento fletor nas direções y e z e uma nova grandeza, denominada bimomento, associada ao sistema auto-equilibrado de tensões $- E \phi'' \omega$. Embora também se possam avaliar as integrais apresentadas nas equações (II.61e,f), que, nesse caso, têm por resultado

$$K = E \left(I_e u' - Q_z v'' - Q_y w'' - Q_\omega \phi'' \right) \quad (\text{II.94a})$$

$$C = \frac{K}{2} , \quad (\text{II.94b})$$

elas não têm participação na análise linear.

Das equações (II.93) vem

$$u' = \frac{N}{E A} \quad (\text{II.95a})$$

$$v'' = - \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{E \left(I_y I_z - I_{yz}^2 \right)} \quad (\text{II.95b})$$

$$w'' = \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{E \left(I_y I_z - I_{yz}^2 \right)} \quad (\text{II.95c})$$

$$\phi'' = - \frac{B}{E I_\omega} \quad (\text{II.95d})$$

Substituindo estas igualdades na equação (II.92),
obtem-se

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \hat{y} - \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \hat{z} + \frac{B}{I_\omega} \omega \quad (\text{II.96})$$

Como se observa, a definição da grandeza bimomento tornou possível exprimir convenientemente a tensão normal em função não só dos esforços solicitantes como também dessa própria grandeza.

Quanto à tensão de cisalhamento τ_{xs} , valem as mesmas considerações feitas no item II.5.2. Assim,

$$\tau_{XS} = \tau_{XS}^{(1)} + \tau_{XS}^{(2)}, \quad (\text{II.97})$$

sendo $\tau_{XS}^{(1)}$ associada à distorção $\gamma_{XS}^{(1)}$ e, portanto, dada por

$$\tau_{XS}^{(1)} = 2 G \phi' n \quad (\text{II.98})$$

e $\tau_{XS}^{(2)}$ associada ao fluxo de cisalhamento, avaliado no próximo capítulo (item III.8).

No que se refere à outra componente de cisalhamento na seção, τ_{Xn} , permanecem válidas as observações do item II.5.2 com respeito à parcela $\tau_{Xn}^{(1)}$. No entanto, com relação a $\tau_{Xn}^{(2)}$, deve-se registrar que, nesse caso, tal parcela resulta nula, conforme se comprovará no capítulo subsequente (item III.8), com base na equação de equilíbrio dinâmico (III.90a).

As integrais das tensões de cisalhamento sobre a área da seção, definidas nas equações (II.67a,b,c), quais sejam, V_y , V_z e T representam, nesse caso, respectivamente as componentes do esforço cortante segundo as direções y e z e o momento torsor. A primeira parcela do torsor, dada na equação (II.71), ou seja,

$$T^{(1)} = - G J_T \phi', \quad (\text{II.99})$$

é o torsor de Saint-Venant. A segunda parcela, definida na equação (II.69b), constitui o chamado torsor de empenamento restringido (denominado por GJELSVIK (1981, p. 29) de torsor de Vlassov). Embora também se possa avaliar a integral definida na equação (II.67d), ou seja, R , isto não se faz necessário uma vez que esta não tem participação na análise linear.

CAPÍTULO III

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PELA

CONSIDERAÇÃO DO EQUILÍBRIO DINÂMICO

Neste capítulo, apresenta-se a dedução, a partir da consideração do equilíbrio de um elemento infinitesimal de um sólido à luz da Teoria Não-linear da Elasticidade, das equações diferenciais que regem, no âmbito das rotações moderadas, o equilíbrio dinâmico de um elemento de haste (trecho de haste delimitado por duas seções transversais distantes dx na geometria inicial) de seção aberta de paredes delgadas sob flexo-torção.

Inicialmente, são obtidas as seis equações de equilíbrio dinâmico de um elemento de haste (item III.1) e, em seguida, deduzidas duas relações, a primeira envolvendo B' e $T^{(2)}$ e a segunda, C' e R , sendo com isso possível estabelecer as expressões de $V_{Y'}$, $V_{Z'}$, $T^{(2)}$ e R em função dos deslocamentos (item III.2). A partir daí, com o auxílio das expressões de integrais de tensões bem como de forças de inércia sobre a área da seção em termos dos deslocamentos, chega-se então às quatro equações diferenciais que governam o problema da flexo-torção (item III.3).

Posteriormente, procede-se, no item III.4, à dedução da expressão do fluxo de cisalhamento em função dos

deslocamentos e , no item III.5, à quantificação da componente $\tau_{xn}^{(2)}$ da tensão de cisalhamento, desprezada na avaliação das integrais das tensões de cisalhamento sobre a área da seção, efetuada no item II.5.2 do capítulo precedente.

No item III.6 são obtidas as expressões dos esforços solicitantes na seção transversal da barra relativamente aos sistemas $\xi^p \eta^p \zeta^p$, associado à seção "planificada", e $\xi \eta \zeta$, associado à geometria inicial, e é explicado o chamado efeito Wagner. Já no item III.7, ilustrando um procedimento alternativo, são deduzidas as equações de equilíbrio estático de um elemento de haste a partir da igualdade entre esforços seccionais externos e internos (*).

Finalmente, no item III.8 é feita a particularização da formulação apresentada para a análise linear.

III.1 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO DE UM ELEMENTO DE HASTE DE SEÇÃO ABERTA DE PAREDES DELGADAS

Para o caso, que se enfoca neste trabalho, das rotações moderadas, tem-se, de acordo com NOVOZHILOV (1953, p. 83), que as equações de equilíbrio estático, em relação

(*) Esta designação de esforços seccionais externos e internos, utilizada por alguns autores, serve meramente para indicar que o esforço seccional está sendo avaliado ou através das forças externas ou a partir das forças internas (tensões).

ao referencial $x n s$, de um elemento infinitesimal de um sólido, cujas faces eram normais às direções x , n , s na geometria inicial, são:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_x - \omega_s \tau_{xn} + \omega_n \tau_{xs} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial n} \left[\tau_{xn} - \omega_s \sigma_n + \omega_n \tau_{ns} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \left[\tau_{xs} - \omega_s \tau_{ns} + \omega_n \sigma_s \right] + X = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega_s \sigma_x + \tau_{xn} - \omega_x \tau_{xs} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial n} \left[\omega_s \tau_{xn} + \sigma_n - \omega_x \tau_{ns} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \left[\omega_s \tau_{xs} + \tau_{ns} - \omega_x \sigma_s \right] + N = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[-\omega_n \sigma_x + \omega_x \tau_{xn} + \tau_{xs} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial n} \left[-\omega_n \tau_{xn} + \omega_x \sigma_n + \tau_{ns} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \left[-\omega_n \tau_{xs} + \omega_x \tau_{ns} + \sigma_s \right] + S = 0 , \end{aligned}$$

(III.1)

onde X, N, S são as componentes das forças de volume, convencionadas como positivas quando atuam no sentido positivo dos eixos x, n, s , e, em função de se estar considerando o caso de pequenas deformações específicas e distorções, pôde-se fazer $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Introduzindo, nas equações (III.1), as forças de inércia (por unidade de volume), as quais, juntamente com a componente X das forças de volume, são admitidas com valor constante ao longo da espessura (e igual ao da linha média), resultam as equações de equilíbrio dinâmico

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_x - \omega_s \tau_{xn} + \omega_n \tau_{xs} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial n} \left[\tau_{xn} - \omega_s \sigma_n + \omega_n \tau_{ns} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \left[\tau_{xs} - \omega_s \tau_{ns} + \omega_n \sigma_s \right] + \\ & + X - \mu \ddot{u}_x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega_s \sigma_x + \tau_{xn} - \omega_x \tau_{xs} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial n} \left[\omega_s \tau_{xn} + \sigma_n - \omega_x \tau_{ns} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial s} \left[\omega_s \tau_{xs} + \tau_{ns} - \omega_x \sigma_s \right] + \\
& + N - \mu \ddot{u}_n = 0 \\
\\
& \frac{\partial}{\partial x} \left[-\omega_n \sigma_x + \omega_x \tau_{xn} + \tau_{xs} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial n} \left[-\omega_n \tau_{xn} + \omega_x \sigma_n + \tau_{ns} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial s} \left[-\omega_n \tau_{xs} + \omega_x \tau_{ns} + \sigma_s \right] + \\
& + S - \mu \ddot{u}_s = 0 , \tag{III.2}
\end{aligned}$$

onde μ é a massa específica do material e o ponto encimando uma variável simboliza derivada em relação ao tempo.

Levando em conta as relações (II.77), (II.81) e (II.82), podem-se reaperresentar as equações (III.2) na forma:

$$\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} + X - \mu \ddot{u}_x = 0 \tag{III.3a}$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial x} + \frac{\partial p_{1n}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2n}}{\partial s} + N - \mu \ddot{u}_n = 0 \quad (\text{III.3b})$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial x} + \frac{\partial p_{1s}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2s}}{\partial s} + S - \mu \ddot{u}_s = 0 \quad (\text{III.3c})$$

Mediante projeções nas direções y , z e a consideração de que α é constante em cada trecho do perfil, é possível alternativamente escrever, em lugar das equações (III.3b,c):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_n \cos \alpha - \rho_s \sin \alpha \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial n} \left(p_{1n} \cos \alpha - p_{1s} \sin \alpha \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \left(p_{2n} \cos \alpha - p_{2s} \sin \alpha \right) + N \cos \alpha - \\ & - S \sin \alpha - \mu \left(\ddot{u}_n \cos \alpha - \ddot{u}_s \sin \alpha \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_n \sin \alpha + \rho_s \cos \alpha \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial n} \left(p_{1n} \sin \alpha + p_{1s} \cos \alpha \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial s} \left(p_{2n} \operatorname{sen} \alpha + p_{2s} \operatorname{cos} \alpha \right) + N \operatorname{sen} \alpha + \\
& + S \operatorname{cos} \alpha - \mu \left(\ddot{u}_n \operatorname{sen} \alpha + \ddot{u}_s \operatorname{cos} \alpha \right) = 0
\end{aligned}
\tag{III.4}$$

Utilizando as relações (II.79), (II.83) e (II.39) e designando por

$$Y = N \operatorname{cos} \alpha - S \operatorname{sen} \alpha \tag{III.5}$$

$$Z = N \operatorname{sen} \alpha + S \operatorname{cos} \alpha$$

as componentes das forças de volume nas direções y e z , torna-se conveniente reescrever as equações de equilíbrio dinâmico na seguinte maneira:

$$\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} + X - \mu \ddot{u}_x = 0 \tag{III.6a}$$

$$\frac{\partial \rho_y}{\partial x} + \frac{\partial p_{1y}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2y}}{\partial s} + Y - \mu \ddot{u}_y = 0 \tag{III.6b}$$

$$\frac{\partial \rho_z}{\partial x} + \frac{\partial p_{1z}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2z}}{\partial s} + Z - \mu \ddot{u}_z = 0, \tag{III.6c}$$

sendo agora $\mu \ddot{u}_y$ e $\mu \ddot{u}_z$ as componentes segundo y e z das forças de inércia.

Procede-se, em seguida, à adequada integração destas equações sobre a área da seção transversal. Tem-se, então:

$$\int_A \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} + X - \mu \ddot{u}_x \right) dA = 0$$

(III.7a)

$$\int_A \left(\frac{\partial \rho_y}{\partial x} + \frac{\partial p_{1y}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2y}}{\partial s} + Y - \mu \ddot{u}_y \right) dA = 0$$

(III.7b)

$$\int_A \left(\frac{\partial \rho_z}{\partial x} + \frac{\partial p_{1z}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2z}}{\partial s} + Z - \mu \ddot{u}_z \right) dA = 0$$

(III.7c)

$$\int_A \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} + X - \mu \ddot{u}_x \right) y dA = 0$$

(III.7d)

$$\int_A \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} + X - \mu \ddot{u}_x \right) z dA = 0$$

(III.7e)

$$\int_A \left[\left(\frac{\partial \rho_Y}{\partial x} + \frac{\partial p_{1Y}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2Y}}{\partial s} + Y - \mu \ddot{u}_Y \right) \zeta - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial \rho_Z}{\partial x} + \frac{\partial p_{1Z}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2Z}}{\partial s} + Z - \mu \ddot{u}_Z \right) \eta \right] dA = 0$$

(III.7f)

Antes de analisar cada uma destas equações isoladamente, examine-se a relação (II.78a). Levando em conta que $\omega_k \ll 1$, conclui-se que, mesmo no caso de as tensões τ_{xi} se tornarem próximas de σ_x , os termos $\omega_k \tau_{xi}$ serão bem menores do que σ_x e, portanto, poderão ser desprezados na referida relação, resultando assim:

$$\rho_x \cong \sigma_x \quad (III.8)$$

1.^a Equação:

Considere-se, agora, a equação (III.7a), que pode ser rerepresentada na forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \rho_x dA + \int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} dA + \int_A \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} dA + \\ + \int_A x dA - \int_A \mu \ddot{u}_x dA = 0 \quad (III.9)$$

Avaliando cada parcela separadamente, vem:

- 1.^a Parcela

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \rho_x \, dA = F'_x , \quad (\text{III.10})$$

sendo

$$F_x = \int_A \rho_x \, dA = \int_A \sigma_x \, dA = N , \quad (\text{III.11})$$

onde se fez uso das equações (III.8) e (II.61a).

- 2.^a Parcela

$$\int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} \, dA = \int_0^L \left[p_{1x} \right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \, ds =$$

$$= \int_0^L \left(\bar{p}_{1x} \Big|_{\frac{t}{2}} + \bar{p}_{1x} \Big|_{-\frac{t}{2}} \right) \, ds ,$$

(III.12)

já que, em virtude de convencionar-se que as componentes das forças de superfície presentes na área lateral da barra são positivas quando atuam no sentido positivo dos eixos x , y , z , tem-se que

$$p_{1X}\left(\frac{t}{2}\right) = \bar{p}_{1X}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$p_{1X}\left(-\frac{t}{2}\right) = -\bar{p}_{1X}\left(-\frac{t}{2}\right)$$

- 3ª Parcela

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial p_{2X}}{\partial s} dA &= \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} \left[p_{2X} \right]_{s_i}^{s_{i+1}} dn = \\ &= \int_{-\frac{t_N}{2}}^{\frac{t_N}{2}} p_{2X} \Big|_L dn - \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} p_{2X} \Big|_0 dn = \\ &= \int_{-\frac{t_N}{2}}^{\frac{t_N}{2}} \bar{p}_{2X} \Big|_L dn + \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{p}_{2X} \Big|_0 dn , \end{aligned}$$

(III.13)

uma vez que

$$\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} p_{2X} \Big|_{s_{i+1}} dn = \int_{-\frac{t_{i+1}}{2}}^{\frac{t_{i+1}}{2}} p_{2X} \Big|_{s_{i+1}} dn$$

para $i = 1, N - 1$ e

$$p_{2x}(L) = \bar{p}_{2x}(L)$$

$$p_{2x}(0) = -\bar{p}_{2x}(0) .$$

Com a ausência, de acordo com a hipótese (g), de componentes de forças na superfície lateral da barra na direção longitudinal, tem-se que

$$\bar{p}_{1x} \Big|_{\frac{t}{2}} = \bar{p}_{1x} \Big|_{-\frac{t}{2}} = \bar{p}_{2x} \Big|_L = \bar{p}_{2x} \Big|_0 = 0 ,$$

(III.14)

resultando, portanto, nulas a 2.^a e a 3.^a parcela.

- 4.^a Parcela

$$\int_A X \, dA = q_x \quad (\text{III.15})$$

- 5.^a Parcela

$$\int_A \mu \ddot{u}_x \, dA =$$

$$\begin{aligned}
&= \mu \int_A \left(\ddot{u} - \ddot{\theta}_z \hat{Y} - \ddot{\theta}_Y \hat{z} - \ddot{\phi}' \omega - \ddot{\psi} \lambda \right) dA = \\
&= \mu \left(A \ddot{u} - \frac{I_e}{2} \ddot{\psi} \right) = \mathcal{F}_x ,
\end{aligned}
\tag{III.16}$$

avaliada a partir da igualdade (II.48) e usando-se as propriedades geométricas da seção definidas nas equações (II.3) a (II.5) e (II.62a).

Tendo em vista as igualdades (III.10) e (III.12) a (III.16), a equação (III.9) se escreve:

$$F'_x - \mathcal{F}_x = - q_x \tag{III.17}$$

2.^a Equação:

Tome-se, a seguir, a equação (III.7b), reescrita na forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} \int_A \rho_Y dA + \int_A \frac{\partial p_{1Y}}{\partial n} dA + \int_A \frac{\partial p_{2Y}}{\partial s} dA + \\
&+ \int_A Y dA - \int_A \mu \ddot{u}_Y dA = 0
\end{aligned}
\tag{III.18}$$

Como anteriormente, tem-se:

- 1.^a Parcela

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \rho_Y \, dA = F'_Y, \quad (\text{III.19})$$

sendo

$$\begin{aligned} F'_Y &= \int_A \rho_Y \, dA = \int_A \left(\omega_z \sigma_x + \tau_{xy} - \omega_x \tau_{xz} \right) dA = \\ &= v' \int_A \sigma_x \, dA - \phi' \int_A \sigma_x \hat{\zeta} \, dA + \int_A \tau_{xy} \, dA - \phi \int_A \tau_{xz} \, dA = \\ &= v' N + \phi' M_\eta + V_Y - \phi V_Z, \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

onde se utilizaram as relações (II.78b) e (II.55a,c) e a nomenclatura apresentada nas equações (II.61a) e (II.67a,b), e designou-se por

$$\begin{aligned} M_\eta &= - \int_A \sigma_x \hat{\zeta} \, dA = - \int_A \sigma_x \left(\hat{z} - z_e \right) dA = \\ &= M_Y + z_e N, \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

integral avaliada a partir da segunda das relações (II.1b) e das igualdades (II.61a,b).

- 2.^a Parcela

É avaliada de modo análogo à integral (III.12).

$$\int_A \frac{\partial p_{1Y}}{\partial n} dA = \int_0^L \left(\bar{p}_{1Y} \Big|_{\frac{t}{2}} + \bar{p}_{1Y} \Big|_{-\frac{t}{2}} \right) ds = q_{1Y} \quad (\text{III.22})$$

- 3.^a Parcela

Analogamente à integral (III.13), tem-se que

$$\int_A \frac{\partial p_{2Y}}{\partial s} dA = \int_{-\frac{t_N}{2}}^{\frac{t_N}{2}} \bar{p}_{2Y} \Big|_L dn + \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{p}_{2Y} \Big|_0 dn = q_{2Y} \quad (\text{III.23})$$

- 4.^a Parcela

$$\int_A Y dA = q_{Y, \text{vol}} \quad (\text{III.24})$$

- 5.^a Parcela

$$\begin{aligned}
 \int_A \mu \ddot{u}_Y \, dA &= \mu \int_A \left(\ddot{v} - \ddot{\phi} \hat{\zeta} \right) \, dA = \\
 &= \mu \left(A \ddot{v} + z_e A \ddot{\phi} \right) = \mathcal{F}_Y ,
 \end{aligned}
 \tag{III.25}$$

avaliada a partir da igualdade (II.38a) e usando-se a segunda das relações (II.1b) e as propriedades geométricas da seção definidas nas equações (II.3) e (II.4a).

Levando as igualdades (III.19) e (III.22) a (III.25) à equação (III.18), esta se torna:

$$F'_Y - \mathcal{F}_Y = - q_Y , \tag{III.26}$$

onde

$$q_Y = q_{Y,\text{sup}} + q_{Y,\text{vol}} \tag{III.27}$$

e

$$q_{Y,\text{sup}} = q_{1Y} + q_{2Y} \tag{III.28}$$

3.^a Equação

Atente-se, então, para a equação (III.7c), que pode ser reapresentada na seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_A \rho_z \, dA + \int_A \frac{\partial p_{1z}}{\partial n} \, dA + \int_A \frac{\partial p_{2z}}{\partial s} \, dA + \\ & + \int_A z \, dA - \int_A \mu \hat{u}_z \, dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Tem-se que:

- 1.^a Parcela

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \rho_z \, dA = F'_z, \quad (\text{III.30})$$

sendo

$$\begin{aligned} F_z &= \int_A \rho_z \, dA = \int_A \left(-\omega_y \sigma_x + \omega_x \tau_{xy} + \tau_{xz} \right) \, dA = \\ &= w' \int_A \sigma_x \, dA + \phi' \int_A \sigma_x \hat{\eta} \, dA + \phi \int_A \tau_{xy} \, dA + \int_A \tau_{xz} \, dA = \\ &= w' N + \phi' M_\zeta + \phi V_y + V_z, \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

onde se fez uso das relações (II.78c) e (II.55a,c) e da nomenclatura estabelecida nas equações (II.61a) e (II.67a,b), e denominou-se por

$$\begin{aligned}
 M_{\zeta} &= \int_A \sigma_x \hat{\eta} \, dA = \int_A \sigma_x \left(\hat{y} - y_e \right) \, dA = \\
 &= M_z - y_e N, \qquad \qquad \qquad \text{(III.32)}
 \end{aligned}$$

integral avaliada a partir da primeira das relações (II.1b) e das igualdades (II.61a,c).

- 2.^a Parcela

Analogamente à integral (III.22), escreve-se:

$$\int_A \frac{\partial p_{1z}}{\partial n} \, dA = \int_0^L \left(\bar{p}_{1z} \Big|_{\frac{t}{2}} + \bar{p}_{1z} \Big|_{-\frac{t}{2}} \right) \, ds = q_{1z}$$

(III.33)

- 3.^a Parcela

De modo análogo à integral (III.23), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \int_A \frac{\partial p_{2z}}{\partial s} \, dA &= \int_{-\frac{t_N}{2}}^{\frac{t_N}{2}} \bar{p}_{2z} \Big|_L \, dn + \\
 &+ \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{p}_{2z} \Big|_0 \, dn = q_{2z}
 \end{aligned}$$

(III.34)

- 4.^a Parcela

$$\int_A Z \, dA = q_{z, \text{vol}} \quad (\text{III.35})$$

- 5.^a Parcela

$$\begin{aligned} \int_A \mu \ddot{u}_z \, dA &= \mu \int_A \left(\ddot{w} + \ddot{\phi} \hat{\eta} \right) \, dA = \\ &= \mu \left(A \ddot{w} - Y_e A \dot{\phi} \right) = \mathcal{F}_z , \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

avaliada a partir da igualdade (II.38b) e usando-se a primeira das relações (II.1b) e as propriedades geométricas da seção definidas nas equações (II.3) e (II.4b).

Substituindo as igualdades (III.30) e (III.33) a (III.36) na equação (III.29), obtém-se:

$$F'_z - \mathcal{F}_z = - q_z , \quad (\text{III.37})$$

onde

$$q_z = q_{z, \text{sup}} + q_{z, \text{vol}} \quad (\text{III.38})$$

e

$$q_{z, \text{sup}} = q_{1z} + q_{2z} \quad (\text{III.39})$$

4.^a Equação

Considere-se, agora, a equação (III.7d). Tendo em vista que, de acordo com a relação (III.8), ρ_x pode ser aproximada por σ_x , a qual, do mesmo modo que as forças de inércia e a componente X das forças de volume, é admitida com valor constante ao longo da espessura, a equação (III.7d) pode assumir o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_x \hat{y} \, dA + \int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} y \, dA + \int_A \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} y \, dA + \\ & + \int_A x \hat{y} \, dA - \int_A \mu \ddot{u}_x \hat{y} \, dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Analisando cada parcela separadamente, vem:

- 1.^a Parcela

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_x \hat{y} \, dA = M'_z, \quad (\text{III.41})$$

em virtude da equação (II.61c).

- 2.^a Parcela

$$\begin{aligned} & \int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} y \, dA = \\ & = \int_0^L \left(\left[p_{1x} y \right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} p_{1x} \frac{dy}{dn} \, dn \right) ds = \\ & = \int_0^L \left(\left[\bar{p}_{1x} y \right]_{\frac{t}{2}} + \left[\bar{p}_{1x} y \right]_{-\frac{t}{2}} \right) ds - \\ & \quad - \int_0^L \left(\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} p_{1x} \cos \alpha \, dn \right) ds = \\ & = - \int_A p_{1x} \cos \alpha \, dA \end{aligned}$$

(III.42)

- 3.^a Parcela

$$\begin{aligned}
 \int_A \frac{\partial p_{2X}}{\partial s} Y \, dA &= \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} \left(\left[p_{2X} Y \right]_{S_i}^{S_{i+1}} - \int_{S_i}^{S_{i+1}} p_{2X} \frac{dy}{ds} \, ds \right) \, dn = \\
 &= \int_{-\frac{t_N}{2}}^{\frac{t_N}{2}} \left[\bar{p}_{2X} Y \right]_L \, dn + \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \left[\bar{p}_{2X} Y \right]_0 \, dn + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} \left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} p_{2X} \operatorname{sen} \alpha \, ds \right) \, dn = \\
 &= \int_A p_{2X} \operatorname{sen} \alpha \, dA , \tag{III.43}
 \end{aligned}$$

considerando-se que, para $i = 1, N - 1,$

$$\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} \left[p_{2X} Y \right]_{S_{i+1}} \, dn = \int_{-\frac{t_{i+1}}{2}}^{\frac{t_{i+1}}{2}} \left[p_{2X} Y \right]_{S_{i+1}} \, dn.$$

A partir das relações (II.81a) e (II.82a), obtém-se

$$\begin{aligned} p_{1x} \cos \alpha - p_{2x} \operatorname{sen} \alpha &= \\ &= -\tau_{xs} \operatorname{sen} \alpha + \tau_{xn} \cos \alpha + \omega_n \tau_{ns} \cos \alpha + \\ &+ \omega_s \tau_{ns} \operatorname{sen} \alpha - \omega_s \sigma_n \cos \alpha - \omega_n \sigma_s \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

Tendo em vista que as tensões τ_{ns} , σ_n e σ_s são pequenas comparadas à tensão τ_{xs} e que $\omega_k \ll 1$, os termos envolvendo os produtos de um parâmetro ω_k por qualquer daquelas tensões, presentes na igualdade anterior, poderão ser desprezados. Deste modo, tem-se, usando, ainda, a relação (II.66a),

$$p_{1x} \cos \alpha - p_{2x} \operatorname{sen} \alpha \cong -\tau_{xs} \operatorname{sen} \alpha + \tau_{xn} \cos \alpha = \tau_{xy}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} y \, dA + \int_A \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} y \, dA &= \\ &= - \int_A \left(p_{1x} \cos \alpha - p_{2x} \operatorname{sen} \alpha \right) dA = \\ &= - \int_A \tau_{xy} \, dA = -V_y, \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

de acordo com a equação (II.67a).

- 4.^a Parcela

$$\int_A X \hat{Y} \, dA = - m_z \quad (\text{III.45})$$

- 5.^a Parcela

$$\begin{aligned} \int_A \mu \hat{u}_x \hat{Y} \, dA &= \\ &= \mu \int_A \left(\ddot{u} \hat{Y} - \ddot{\theta}_z \hat{Y}^2 - \ddot{\theta}_y \hat{z} \hat{Y} - \ddot{\phi}' \omega \hat{Y} - \ddot{\psi} \lambda \hat{Y} \right) dA = \\ &= - \mu \left(I_z \ddot{\theta}_z + I_{yz} \ddot{\theta}_y + \frac{Q_z}{2} \ddot{\psi} \right) = \mathcal{F}_{xy} , \quad (\text{III.46}) \end{aligned}$$

avaliada a partir da igualdade (II.48) e usando-se as propriedades geométricas da seção definidas nas equações (II.4b), (II.6b), (II.8), (II.9b) e (II.62c).

Em virtude das igualdades (III.41) e (III.44) a (III.46), a equação (III.40) se escreve:

$$M'_z - V_y - \mathcal{F}_{xy} = m_z \quad (\text{III.47})$$

5ª Equação:

Examinando-se a equação (III.7e), nota-se que ela pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_x \hat{z} \, dA + \int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} z \, dA + \int_A \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} z \, dA + \\ + \int_A x \hat{z} \, dA - \int_A \mu \hat{u}_x \hat{z} \, dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

Tem-se, então, que:

- 1ª Parcela

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_x \hat{z} \, dA = - M'_Y, \quad (\text{III.49})$$

em virtude da equação (II.61b).

- 2ª Parcela

É avaliada de modo análogo à integral (III.42).

Como $\frac{dz}{dn} = \text{sen } \alpha$,

$$\int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} z \, dA = - \int_A p_{1x} \text{sen } \alpha \, dA \quad (\text{III.50})$$

- 3.^a Parcela

Analogamente à integral (III.43), obtém-se

$$\int_A \frac{\partial p_{2X}}{\partial s} z \, dA = - \int_A p_{2X} \cos \alpha \, dA \quad (\text{III.51})$$

uma vez que $\frac{dz}{ds} = \cos \alpha$.

De acordo com as equações (II.81a) e (II.82a), tem-se que

$$\begin{aligned} p_{1X} \operatorname{sen} \alpha + p_{2X} \operatorname{cos} \alpha &= \\ &= \tau_{XS} \operatorname{cos} \alpha + \tau_{Xn} \operatorname{sen} \alpha + \omega_n \tau_{ns} \operatorname{sen} \alpha - \\ &- \omega_s \tau_{ns} \operatorname{cos} \alpha - \omega_s \sigma_n \operatorname{sen} \alpha + \omega_n \sigma_s \operatorname{cos} \alpha \end{aligned}$$

Em vista das considerações feitas quando da obtenção da equação anterior e usando a relação (II.66b), escreve-se

$$p_{1X} \operatorname{sen} \alpha + p_{2X} \operatorname{cos} \alpha \cong \tau_{XS} \operatorname{cos} \alpha + \tau_{Xn} \operatorname{sen} \alpha = \tau_{XZ}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 & \int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} z \, dA + \int_A \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} z \, dA = \\
 & = - \int_A \left(p_{1x} \operatorname{sen} \alpha + p_{2x} \operatorname{cos} \alpha \right) dA = \\
 & = - \int_A \tau_{xz} \, dA = - V_z , \qquad \qquad \qquad \text{(III.52)}
 \end{aligned}$$

de acordo com a equação (II.67b).

- 4.^a Parcela

$$\int_A X \hat{z} \, dA = m_Y \qquad \qquad \qquad \text{(III.53)}$$

- 5.^a Parcela

$$\begin{aligned}
 & \int_A \mu \ddot{u}_x \hat{z} \, dA = \\
 & = \mu \int_A \left(\ddot{u} \hat{z} - \ddot{\theta}_z \hat{y} \hat{z} - \ddot{\theta}_y \hat{z}^2 - \dot{\phi}' \omega \hat{z} - \dot{\psi} \lambda \hat{z} \right) dA =
 \end{aligned}$$

$$= - \mu \left(I_{YZ} \ddot{\theta}_z + I_Y \ddot{\theta}_y + \frac{Q_Y}{2} \ddot{\psi} \right) = \mathcal{F}_{xz} , \quad (\text{III.54})$$

avaliada a partir da igualdade (II.48) e usando-se as propriedades geométricas da seção definidas nas equações (II.4a), (II.6a), (II.8), (II.9a) e (II.62b).

Levando as igualdades (III.49) e (III.52) a (III.54) à equação (III.48), obtém-se

$$- M'_Y - V_Z - \mathcal{F}_{xz} = - m_Y$$

ou

$$M'_Y + V_Z + \mathcal{F}_{xz} = m_Y \quad (\text{III.55})$$

6.^a Equação:

Tome-se, finalmente, a equação (III.7f), que pode ser rerepresentada com o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \left(\rho_Y \zeta - \rho_Z \eta \right) dA + \int_A \left(\frac{\partial p_{1Y}}{\partial n} \zeta - \frac{\partial p_{1Z}}{\partial n} \eta \right) dA +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_A \left(\frac{\partial p_{2Y}}{\partial s} \zeta - \frac{\partial p_{2Z}}{\partial s} \eta \right) dA + \int_A \left(Y \zeta - Z \eta \right) dA - \\
& - \int_A \mu \left(\hat{u}_Y \hat{\zeta} - \hat{u}_Z \hat{\eta} \right) dA = 0 \quad (\text{III.56})
\end{aligned}$$

Analisando cada parcela isoladamente, vem:

- 1.^a Parcela

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \left(\rho_Y \zeta - \rho_Z \eta \right) dA = M'_\xi, \quad (\text{III.57})$$

sendo

$$\begin{aligned}
M_\xi &= \int_A \left(\rho_Y \zeta - \rho_Z \eta \right) dA = \\
&= \int_A \left[\left(\omega_Z \sigma_X + \tau_{XY} - \omega_X \tau_{XZ} \right) \zeta - \right. \\
&\quad \left. - \left(-\omega_Y \sigma_X + \omega_X \tau_{XY} + \tau_{XZ} \right) \eta \right] dA =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v' \int_A \sigma_x \zeta \, dA - w' \int_A \sigma_x \eta \, dA - \\
&\quad - \phi' \int_A \sigma_x \left(\hat{\eta} \eta + \hat{\zeta} \zeta \right) \, dA + \\
&\quad + \int_A \left(\tau_{xy} \zeta - \tau_{xz} \eta \right) \, dA - \\
&\quad - \phi \int_A \left(\tau_{xy} \eta + \tau_{xz} \zeta \right) \, dA = \\
&= v' \int_A \sigma_x \hat{\zeta} \, dA - w' \int_A \sigma_x \hat{\eta} \, dA - \\
&\quad - \phi' \int_A \sigma_x \left(\hat{\eta}^2 + \hat{\zeta}^2 \right) \, dA + \\
&\quad + \int_A \left(\tau_{xy} \zeta - \tau_{xz} \eta \right) \, dA - \\
&\quad - \phi \int_A \left(\tau_{xy} \eta + \tau_{xz} \zeta \right) \, dA =
\end{aligned}$$

$$= - v' M_{\eta} - w' M_{\zeta} - \phi' K + T - \phi R , \quad (\text{III.58})$$

onde se fez uso das relações (II.78b,c), (II.55a,c) e (II.1f) e da nomenclatura estabelecida nas equações (II.61e), (II.67c,d), (III.21) e (III.32), e se levou em conta o fato de σ_x ter distribuição uniforme na espessura.

- 2.^a Parcela

$$\int_A \left(\frac{\partial p_{1Y}}{\partial n} \zeta - \frac{\partial p_{1Z}}{\partial n} \eta \right) dA =$$

$$= \int_0^L \left\{ \left[p_{1Y} \zeta - p_{1Z} \eta \right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(p_{1Y} \frac{d\zeta}{dn} - p_{1Z} \frac{d\eta}{dn} \right) dn \right\} ds =$$

$$= \int_0^L \left\{ \left[\bar{p}_{1Y} \zeta - \bar{p}_{1Z} \eta \right]_{\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} + \left[\bar{p}_{1Y} \zeta - \bar{p}_{1Z} \eta \right]_{-\frac{t}{2}}^{-\frac{t}{2}} \right\} ds -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L \left[\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(p_{1Y} \operatorname{sen} \alpha - p_{1Z} \cos \alpha \right) dn \right] ds = \\
& = - m_1 \xi - \int_A \left(p_{1Y} \operatorname{sen} \alpha - p_{1Z} \cos \alpha \right) dA = \\
& = - m_1 \xi + \int_A p_{1S} dA , \tag{III.59}
\end{aligned}$$

onde se utilizou a relação (II.84b).

- 3.^a Parcela

$$\begin{aligned}
& \int_A \left(\frac{\partial p_{2Y}}{\partial s} \zeta - \frac{\partial p_{2Z}}{\partial s} \eta \right) dA = \\
& = \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} \left\{ \left[p_{2Y} \zeta - p_{2Z} \eta \right]_{s_i}^{s_{i+1}} - \right. \\
& \quad \left. - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(p_{2Y} \frac{d\zeta}{ds} - p_{2Z} \frac{d\eta}{ds} \right) ds \right\} dn =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{t_N}{2}}^{\frac{t_N}{2}} \left[\bar{p}_{2Y} \zeta - \bar{p}_{2Z} \eta \right]_L dn + \\
&\quad + \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \left[\bar{p}_{2Y} \zeta - \bar{p}_{2Z} \eta \right]_0 dn - \\
&\quad - \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} \left[\int_{S_i}^{S_{i+1}} \left(p_{2Y} \cos \alpha + \right. \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + p_{2Z} \sin \alpha \right) ds \right] dn = \\
&= - m_{2\xi} - \int_A \left(p_{2Y} \cos \alpha + p_{2Z} \sin \alpha \right) dA = \\
&= - m_{2\xi} - \int_A p_{2n} dA ,
\end{aligned}$$

(III.60)

onde se fez uso da relação (II.84a).

Com base nas relações (II.81c) e (II.82b), escreve-se

$$p_{1s} - p_{2n} = -\omega_s \tau_{xs} - \omega_n \tau_{xn} + \omega_x \sigma_n + \omega_x \sigma_s$$

Tendo em vista a magnitude das tensões σ_n e σ_s , podem-se ignorar, nessa expressão, os termos envolvendo tais tensões. Deste modo, tem-se que

$$p_{1s} - p_{2n} \cong -\omega_s \tau_{xs} - \omega_n \tau_{xn}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_A (p_{1s} - p_{2n}) dA &= - \int_A (\omega_s \tau_{xs} + \omega_n \tau_{xn}) dA = \\ &= - \int_A \left[\left(v' \cos \alpha + w' \operatorname{sen} \alpha - \phi' r_s \right) \tau_{xs} + \right. \\ &\quad \left. + \left(v' \operatorname{sen} \alpha - w' \cos \alpha - \phi' r_n \right) \tau_{xn} \right] dA = \\ &= - v' \int_A \left(\tau_{xs} \cos \alpha + \tau_{xn} \operatorname{sen} \alpha \right) dA - \\ &\quad - w' \int_A \left(\tau_{xs} \operatorname{sen} \alpha - \tau_{xn} \cos \alpha \right) dA + \\ &\quad + \phi' \int_A \left(\tau_{xs} r_s + \tau_{xn} r_n \right) dA \end{aligned}$$

Em função da lei de variação da tensão $\tau_{XS}^{(1)}$ na espessura (equação (II.64)), sua contribuição para cada uma das integrais presentes nessa igualdade é nula. Além disso, conforme já referido no item II.5.2, pode-se ignorar a contribuição das parcelas em τ_{Xn} em cada uma dessas mesmas integrais. Assim,

$$\int_A \left(p_{1s} - p_{2n} \right) dA = - v' \int_A \tau_{XS}^{(2)} \cos \alpha dA -$$

$$- w' \int_A \tau_{XS}^{(2)} \sin \alpha dA + \phi' \int_A \tau_{XS}^{(2)} r_S dA =$$

$$= - v' V_Z + w' V_Y + \phi' R , \quad (\text{III.61})$$

de acordo com as equações (II.68a,b,d).

- 4.^a Parcela

$$\int_A \left(Y \zeta - Z \eta \right) dA = - m_{\xi, \text{vol}} \quad (\text{III.62})$$

- 5.^a Parcela

$$\begin{aligned}
 & \int_A \mu \left(\ddot{u}_Y \hat{\zeta} - \ddot{u}_Z \hat{\eta} \right) dA = \\
 & = \mu \int_A \left[\left(\ddot{v} - \ddot{\phi} \hat{\zeta} \right) \hat{\zeta} - \left(\ddot{w} + \ddot{\phi} \hat{\eta} \right) \hat{\eta} \right] dA = \\
 & = \mu \int_A \left[\ddot{v} \hat{\zeta} - \ddot{w} \hat{\eta} - \ddot{\phi} \left(\hat{\eta}^2 + \hat{\zeta}^2 \right) \right] dA = \\
 & = \mu \left(- z_e A \ddot{v} + y_e A \ddot{w} - I_e \ddot{\phi} \right) = \mathcal{F}_{YZ} ,
 \end{aligned}$$

(III.63)

avaliada a partir das igualdades (II.38) e usando-se as relações (II.1b,f) e as propriedades geométricas da seção definidas nas equações (II.3), (II.4) e (II.10).

Considerando-se as igualdades (III.57) e (III.59) a (III.63), reescreve-se a equação (III.56) na seguinte maneira:

$$M'_{\xi} - v' V_z + w' V_y + \phi' R - \mathcal{F}_{yz} = m_{\xi} , \quad (\text{III.64})$$

onde

$$m_{\xi} = m_{\xi, \text{sup}} + m_{\xi, \text{vol}} \quad (\text{III.65})$$

e

$$m_{\xi, \text{sup}} = m_{1\xi} + m_{2\xi} \quad (\text{III.66})$$

Resumindo, as equações de equilíbrio dinâmico de um elemento de haste de seção aberta de paredes delgadas podem ser escritas na forma:

$$F'_x - \mathcal{F}_x = - q_x \quad (\text{III.67a})$$

$$F'_y - \mathcal{F}_y = - q_y \quad (\text{III.67b})$$

$$F'_z - \mathcal{F}_z = - q_z \quad (\text{III.67c})$$

$$M'_z - V_y - \mathcal{F}_{xy} = m_z \quad (\text{III.67d})$$

$$M'_y + V_z + \mathcal{F}_{xz} = m_y \quad (\text{III.67e})$$

$$M'_{\xi} - v' V_z + w' V_y + \phi' R - \mathcal{F}_{yz} = m_{\xi} , \quad (\text{III.67f})$$

onde se designam as integrais das tensões na seção por

$$F_x = N \quad (\text{III.68a})$$

$$F_y = v' N + \phi' M_\eta + V_y - \phi V_z \quad (\text{III.68b})$$

$$F_z = w' N + \phi' M_\zeta + \phi V_y + V_z \quad (\text{III.68c})$$

$$M_\zeta = -v' M_\eta - w' M_\zeta - \phi' K + T - \phi R \quad (\text{III.68d})$$

$$M_\eta = M_y + z_e N \quad (\text{III.68e})$$

$$M_\zeta = M_z - y_e N, \quad (\text{III.68f})$$

com as forças generalizadas de inércia (por unidade de comprimento) dadas por

$$\mathcal{F}_x = \mu \left(A \ddot{u} - \frac{I_e}{2} \ddot{\psi} \right) \quad (\text{III.69a})$$

$$\mathcal{F}_y = \mu \left(A \ddot{v} + z_e A \ddot{\phi} \right) \quad (\text{III.69b})$$

$$\mathcal{F}_z = \mu \left(A \ddot{w} - y_e A \ddot{\phi} \right) \quad (\text{III.69c})$$

$$\mathcal{F}_{xy} = -\mu \left(I_z \ddot{\theta}_z + I_{yz} \ddot{\theta}_y + \frac{Q_z}{2} \ddot{\psi} \right) \quad (\text{III.69d})$$

$$\mathcal{F}_{xz} = -\mu \left(I_{yz} \ddot{\theta}_z + I_y \ddot{\theta}_y + \frac{Q_y}{2} \dot{\psi} \right) \quad (\text{III.69e})$$

$$\mathcal{F}_{yz} = \mu \left(-z_e A \ddot{v} + y_e A \ddot{w} - I_e \ddot{\phi} \right), \quad (\text{III.69f})$$

e, ainda, os termos relativos ao carregamento sendo expressos por

$$q_x = \int_A X \, dA \quad (\text{III.70a})$$

$$q_y = q_{y,\text{vol}} + q_{y,\text{sup}}$$

$$q_{y,\text{vol}} = \int_A Y \, dA \quad (\text{III.70b})$$

$$q_{y,\text{sup}} = \int_0^L \left(\bar{p}_{1y} \Big|_{\frac{t}{2}} + \bar{p}_{1y} \Big|_{-\frac{t}{2}} \right) ds +$$

$$+ \int_{-\frac{t_N}{2}}^{\frac{t_N}{2}} \bar{p}_{2y} \Big|_L \, dn + \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{p}_{2y} \Big|_0 \, dn$$

$$q_z = q_{z,\text{vol}} + q_{z,\text{sup}}$$

$$q_{z,\text{vol}} = \int_A Z \, dA \quad (\text{III.70c})$$

$$q_{z,\text{sup}} = \int_0^L \left(\bar{p}_{1z} \Big|_{\frac{t}{2}} + \bar{p}_{1z} \Big|_{-\frac{t}{2}} \right) ds +$$

$$+ \int_{-\frac{t_N}{2}}^{\frac{t_N}{2}} \bar{p}_{2z} \Big|_L \, dn + \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{p}_{2z} \Big|_0 \, dn$$

$$m_z = - \int_A X \hat{Y} \, dA \quad (\text{III.70d})$$

$$m_y = \int_A X \hat{Z} \, dA \quad (\text{III.70e})$$

$$m_\xi = m_{\xi,\text{vol}} + m_{\xi,\text{sup}}$$

$$m_{\xi,\text{vol}} = - \int_A \left(Y \zeta - Z \eta \right) dA \quad (\text{III.70f})$$

$$\begin{aligned}
m_{\xi, \text{sup}} = & - \int_0^L \left\{ \left[\bar{p}_{1Y} \zeta - \bar{p}_{1Z} \eta \right]_{\frac{t}{2}} + \right. \\
& \left. + \left[\bar{p}_{1Y} \zeta - \bar{p}_{1Z} \eta \right]_{-\frac{t}{2}} \right\} ds - \\
& - \int_{-\frac{t_N}{2}}^{\frac{t_N}{2}} \left[\bar{p}_{2Y} \zeta - \bar{p}_{2Z} \eta \right]_L dn - \\
& - \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \left[\bar{p}_{2Y} \zeta - \bar{p}_{2Z} \eta \right]_0 dn
\end{aligned}$$

III.2 - EXPRESSÕES DE V_Y , V_Z , $T^{(2)}$ E R EM FUNÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

Inicialmente, procede-se à dedução de duas importantes relações entre algumas das integrais de tensões sobre a área da seção, definidas no capítulo precedente (item II.5).

Para se obter a primeira, multiplica-se a equação (III.6a) por $\omega \, dA$ e integra-se a igualdade resultante sobre a área da seção:

$$\int_A \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} + X - \mu \ddot{u}_x \right) \omega \, dA = 0$$

(III.71)

Tendo em vista que, como já foi dito no item anterior, ρ_x pode ser aproximada por σ_x , a qual, do mesmo modo que as forças de inércia e a componente X das forças de volume, é admitida com valor constante ao longo da espessura, pode-se reescrever essa equação na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_x \omega \, dA + \int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} \omega \, dA + \int_A \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} \omega \, dA + \\ + \int_A X \omega \, dA - \int_A \mu \ddot{u}_x \omega \, dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

Avaliando cada parcela separadamente, vem:

- 1.^a Parcela

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_x \omega \, dA = B' \quad (\text{III.73})$$

em virtude da equação (II.61d).

- 2.^a Parcela

Por analogia com a integral (III.42), obtém-se

$$\int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} \omega \, dA = \int_0^L \left(\left[\bar{p}_{1x} \omega \right]_{\frac{t}{2}} + \left[\bar{p}_{1x} \omega \right]_{-\frac{t}{2}} \right) ds = 0 \quad (\text{III.74})$$

- 3.^a Parcela

Analogamente à integral (III.43), tem-se

$$\int_A \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} \omega \, dA =$$

$$= \int_{-\frac{t_N}{2}}^{\frac{t_N}{2}} \left[\bar{p}_{2x} \omega \right]_L \, dn + \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \left[\bar{p}_{2x} \omega \right]_0 \, dn -$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} \left(\int_{s_i}^{s_{i+1}} p_{2X} r_n ds \right) dn = \\
 & = - \int_A p_{2X} r_n dA
 \end{aligned}
 \tag{III.75}$$

Examinando a expressão de p_{2X} , dada na equação (II.82a), e levando em conta que $\omega_s \tau_{ns}$ e $\omega_n \sigma_s$ são desprezíveis em presença de τ_{XS} , conclui-se que é possível aproximar

$$p_{2X} \cong \tau_{XS} \tag{III.76}$$

Substituindo esta relação na equação (III.75), vem

$$\begin{aligned}
 \int_A \frac{\partial p_{2X}}{\partial s} \omega dA & = - \int_A p_{2X} r_n dA = - \int_A \tau_{XS} r_n dA = \\
 & = - \int_A \tau_{XS}^{(2)} r_n dA = T^{(2)},
 \end{aligned}
 \tag{III.77}$$

de acordo com a equação (II.69b).

- 4.^a Parcela

$$\int_A X \omega \, dA = b \quad (\text{III.78})$$

- 5.^a Parcela

$$\begin{aligned} \int_A \mu \hat{u}_X \omega \, dA &= \\ &= \mu \int_A \left(\ddot{u} \omega - \ddot{\theta}_z \hat{y} \omega - \ddot{\theta}_y \hat{z} \omega - \ddot{\phi}' \omega^2 - \ddot{\psi} \lambda \omega \right) dA = \\ &= - \mu \left(I_\omega \ddot{\phi}' + \frac{Q_\omega}{2} \ddot{\psi} \right) = \mathcal{F}_\omega, \end{aligned} \quad (\text{III.79})$$

avaliada a partir da relação (II.48) e usando-se as propriedades geométricas da seção definidas nas equações (II.5), (II.7), (II.9) e (II.62d).

Levando as igualdades (III.73), (III.74) e (III.77) a (III.79) à equação (III.72), esta se torna:

$$B' + T^{(2)} - \mathcal{F}_\omega = - b \quad (\text{III.80})$$

Para se obter a segunda relação, multiplica-se a equação (III.6a) por $\lambda \, dA$ e, em seguida, efetua-se uma integração sobre a área da seção:

$$\int_A \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} + X - \mu \ddot{u}_x \right) \lambda \, dA = 0 \quad (\text{III.81})$$

Esta equação pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_x \lambda \, dA + \int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} \lambda \, dA + \int_A \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} \lambda \, dA + \\ + \int_A X \lambda \, dA - \int_A \mu \ddot{u}_x \lambda \, dA = 0 \quad (\text{III.82}) \end{aligned}$$

Tem-se, então, que:

- 1.^a Parcela

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_x \lambda \, dA = C' \quad (\text{III.83})$$

em virtude da equação (II.61f).

- 2.^a Parcela

É avaliada de modo análogo à integral (III.42).

$$\int_A \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} \lambda \, dA = \int_0^L \left(\left[\bar{p}_{1x} \lambda \right]_{\frac{t}{2}} + \left[\bar{p}_{1x} \lambda \right]_{-\frac{t}{2}} \right) ds = 0 \quad (\text{III.84})$$

- 3.^a Parcela

Analogamente à equação (III.43), tem-se

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} \lambda \, dA &= \\ &= \int_{-\frac{t_N}{2}}^{\frac{t_N}{2}} \left[\bar{p}_{2x} \lambda \right]_L \, dn + \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \left[\bar{p}_{2x} \lambda \right]_0 \, dn - \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} \left(\int_{s_i}^{s_{i+1}} p_{2x} r_s \, ds \right) \, dn = \\ &= - \int_A p_{2x} r_s \, dA = - \int_A \tau_{xs} r_s \, dA = - R , \end{aligned}$$

(III.85)

tendo sido utilizadas, nesta última integral, as relações (III.76) e (II.68d).

- 4.^a Parcela

$$\int_A X \lambda \, dA = C \quad (\text{III.86})$$

- 5.^a Parcela

$$\int_A \mu \ddot{u}_x \lambda \, dA =$$

$$= \mu \int_A \left(\ddot{u} \lambda - \ddot{\theta}_z \hat{y} \lambda - \ddot{\theta}_y \hat{z} \lambda - \ddot{\phi}' \omega \lambda - \ddot{\psi} \lambda^2 \right) dA =$$

$$= \mu \left(\frac{I_e}{2} \ddot{u} - \frac{Q_z}{2} \ddot{\theta}_z - \frac{Q_y}{2} \ddot{\theta}_y -$$

$$- \frac{Q_\omega}{2} \ddot{\phi}' - \frac{R_e}{4} \ddot{\psi} \right) = \mathcal{F}_\lambda, \quad (\text{III.87})$$

avaliada a partir da igualdade (II.48) e usando-se as propriedades geométricas da seção definidas nas equações (II.62).

Substituindo as igualdades (III.83) a (III.87) na equação (III.82), obtém-se:

$$C' - R - \mathcal{F}_\lambda = -c \quad (\text{III.88})$$

A partir, então, das relações (III.67d,e), (III.80) e (III.88), das expressões de M_Y , M_Z , B e K , dadas nas equações (II.63b,c,d,e), e de \mathcal{F}_{XY} , \mathcal{F}_{XZ} , \mathcal{F}_ω e \mathcal{F}_λ , apresentadas nas igualdades (III.69d,e), (III.79) e (III.87) respectivamente, é possível, finalmente, escrever V_Y , V_Z , $T^{(2)}$ e R em função dos deslocamentos, na forma:

$$\begin{aligned} V_Y = E \left(- I_Z \theta_Z'' - I_{YZ} \theta_Y'' - \frac{Q_Z}{2} \psi'' + Q_Z \phi' \phi'' - \right. \\ \left. - I_{YZ} (v' \phi')' + I_Z (w' \phi')' \right) + \\ + \mu \left(I_Z \ddot{\theta}_Z + I_{YZ} \ddot{\theta}_Y + \frac{Q_Z}{2} \ddot{\psi} \right) - m_Z \end{aligned} \quad (\text{III.89a})$$

$$\begin{aligned} V_Z = E \left(- I_{YZ} \theta_Z'' - I_Y \theta_Y'' - \frac{Q_Y}{2} \psi'' + Q_Y \phi' \phi'' - \right. \\ \left. - I_Y (v' \phi')' + I_{YZ} (w' \phi')' \right) + \\ + \mu \left(I_{YZ} \ddot{\theta}_Z + I_Y \ddot{\theta}_Y + \frac{Q_Y}{2} \ddot{\psi} \right) + m_Y \end{aligned} \quad (\text{III.89b})$$

$$T^{(2)} = E \left(I_{\omega} \phi''' + \frac{Q_{\omega}}{2} \psi'' - Q_{\omega} \phi' \phi'' \right) -$$

$$- \mu \left(I_{\omega} \dot{\phi}' + \frac{Q_{\omega}}{2} \dot{\psi} \right) - b \quad (\text{III.89c})$$

$$R = \frac{E}{2} \left[I_e u'' - Q_z \theta_z'' - Q_y \theta_y'' - Q_{\omega} \phi''' - \right.$$

$$\left. - \frac{R_e}{2} \psi'' + I_e v' v'' + I_e w' w'' + R_e \phi' \phi'' - \right.$$

$$\left. - (Q_y - z_e I_e) (v' \phi')' + (Q_z - y_e I_e) (w' \phi')' \right] -$$

$$- \frac{\mu}{2} \left(I_e \ddot{u} - Q_z \ddot{\theta}_z - Q_y \ddot{\theta}_y - Q_{\omega} \ddot{\phi}' - \frac{R_e}{2} \dot{\psi} \right) + c$$

$$(\text{III.89d})$$

III.3 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE GOVERNAM O PROBLEMA DA FLEXO-TORÇÃO

Substituindo a relação (III.68a) na equação (III.67a), obtém-se:

$$N' - \mathcal{F}_x = - q_x \quad (\text{III.90})$$

A partir das igualdades (III.67b,d,e), (III.68b,e), chega-se a:

$$\begin{aligned}
 M_Z'' + \left(\phi M_Y \right)'' + \left(v' N \right)' + z_e \left(\phi' N \right)' - \left(\phi m_Y \right)' - \\
 - \mathcal{F}'_{xy} + \left(\phi \mathcal{F}_{xz} \right)' - \mathcal{F}_y = m'_z - q_y
 \end{aligned}
 \tag{III.91}$$

Considerando-se as expressões (III.67c,d,e), (III.68c,f), escreve-se:

$$\begin{aligned}
 - M_Y'' + \left(\phi M_Z \right)'' + \left(w' N \right)' - y_e \left(\phi' N \right)' - \left(\phi m_Z \right)' - \\
 - \mathcal{F}'_{xz} - \left(\phi \mathcal{F}_{xy} \right)' - \mathcal{F}_z = - m'_y - q_z
 \end{aligned}
 \tag{III.92}$$

Por intermédio das equações (III.67d,e,f), (III.68d,e,f), (III.80), (III.88) e (II.68c), obtém-se

$$T^{(1)'} - B'' - \phi C'' - v'' M_Y - w'' M_Z - z_e \left(v' N \right)' +$$

$$\begin{aligned}
 & + y_e (w' N)' - (\phi' K)' - \phi c' - v' m_y - w' m_z + \\
 & + \mathcal{F}'_{\omega} + \phi \mathcal{F}'_{\lambda} + v' \mathcal{F}'_{xz} - w' \mathcal{F}'_{xy} - \mathcal{F}'_{yz} = b' + m_{\xi}
 \end{aligned}$$

(III.93)

Mediante substituição, nas equações (III.90) a (III.93), das expressões de integrais de tensões sobre a área da seção em termos dos deslocamentos dadas nas igualdades (II.63) e (II.71) e de integrais das forças de inércia, apresentadas nas equações (III.69), (III.79) e (III.87), chega-se às equações diferenciais da flexo-torção:

$$\begin{aligned}
 E \left(A u'' - \frac{I_e}{2} \psi'' + A v' v'' + A w' w'' + \right. \\
 \left. + I_e \phi' \phi'' + z_e A (v' \phi')' - y_e A (w' \phi')' \right) - \\
 - \mu \left(A \ddot{u} - \frac{I_e}{2} \ddot{\psi} \right) = - q_x
 \end{aligned} \tag{III.94a}$$

$$\begin{aligned}
& E \left(- I_z \theta_z'' - I_{yz} \theta_y'' - \frac{Q_z}{2} \psi''' + Q_z (\phi' \phi'')' - \right. \\
& - I_{yz} (v' \phi')'' + I_z (w' \phi')'' + I_{yz} (\phi \theta_z')'' + \\
& + I_y (\phi \theta_y')'' + \frac{Q_y}{2} (\phi \psi')'' - \frac{Q_y}{2} (\phi \phi'^2)'' + \\
& + I_y (\phi v' \phi')'' - I_{yz} (\phi w' \phi')'' + A (u' v')' - \\
& - \frac{I_e}{2} (v' \psi')' + \frac{A}{2} (v'^3)' + \frac{A}{2} (v' w'^2)' + \\
& + \frac{I_e}{2} (v' \phi'^2)' + z_e A (v'^2 \phi')' - \\
& - y_e A (v' w' \phi')' + z_e A (u' \phi')' - \\
& - z_e \frac{I_e}{2} (\phi' \psi')' + z_e \frac{A}{2} (v'^2 \phi')' + \\
& + z_e \frac{A}{2} (w'^2 \phi')' + z_e \frac{I_e}{2} (\phi'^3)' + \\
& \left. + z_e^2 A (v' \phi'^2)' - y_e z_e A (w' \phi'^2)' \right) - (\phi m_y)' +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu \left(I_Z \ddot{\theta}'_Z + I_{YZ} \ddot{\theta}'_Y + \frac{Q_Z}{2} \dot{\psi}' - I_{YZ} (\phi \ddot{\theta}'_Z)' - \right. \\
& \left. - I_Y (\phi \ddot{\theta}'_Y)' - \frac{Q_Y}{2} (\phi \dot{\psi})' - A \ddot{v} - z_e A \ddot{\phi} \right) = \\
& = m'_Z - q_Y \quad \text{(III.94b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \left(- I_{YZ} \theta'''_Z - I_Y \theta'''_Y - \frac{Q_Y}{2} \psi'''' + Q_Y (\phi' \phi'')' - \right. \\
- I_Y (v' \phi')'' + I_{YZ} (w' \phi')'' - I_Z (\phi \theta'_Z)'' - \\
- I_{YZ} (\phi \theta'_Y)'' - \frac{Q_Z}{2} (\phi \psi')'' + \frac{Q_Z}{2} (\phi \phi'^2)'' - \\
- I_{YZ} (\phi v' \phi')'' + I_Z (\phi w' \phi')'' + A (u' w')' - \\
- \frac{I_e}{2} (w' \psi')' + \frac{A}{2} (v'^2 w')' + \frac{A}{2} (w'^3)' + \\
+ \frac{I_e}{2} (w' \phi'^2)' + z_e A (v' w' \phi')' - \\
\left. - y_e A (w'^2 \phi')' - y_e A (u' \phi')' + \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y_e \frac{I_e}{2} (\phi' \psi')' - y_e \frac{A}{2} (v'^2 \phi')' - \\
& - y_e \frac{A}{2} (w'^2 \phi')' - y_e \frac{I_e}{2} (\phi'^3)' - \\
& - y_e z_e A (v' \phi'^2)' + y_e^2 A (w' \phi'^2)' \Big) - (\phi m_z)' + \\
& + \mu \left(I_{YZ} \ddot{\theta}'_z + I_Y \ddot{\theta}'_Y + \frac{Q_Y}{2} \ddot{\psi}' + I_Z (\phi \ddot{\theta}'_z)' + \right. \\
& \left. + I_{YZ} (\phi \ddot{\theta}'_Y)' + \frac{Q_Z}{2} (\phi \ddot{\psi})' - A \ddot{w} + y_e A \ddot{\phi} \right) = \\
& = - m'_Y - q_z \qquad \qquad \qquad \text{(III.94c)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - G J_T \phi'' + E \left(I_\omega \phi^{IV} + \frac{Q_\omega}{2} \psi''' - Q_\omega (\phi' \phi'')' - \frac{I_e}{2} \phi u''' + \right. \\
& + \frac{Q_Z}{2} \phi \theta''_z + \frac{Q_Y}{2} \phi \theta''_Y + \frac{Q_\omega}{2} \phi \phi^{IV} + \\
& + \frac{R_e}{4} \phi \psi''' - \frac{I_e}{2} \phi (v' v'')' - \frac{I_e}{2} \phi (w' w'')' - \\
& \left. - \frac{R_e}{2} \phi (\phi' \phi'')' + \frac{1}{2} (Q_Y - z_e I_e) \phi (v' \phi')'' - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \left(Q_z - y_e I_e \right) \phi (w' \phi')'' - I_{yz} \theta'_z v'' - \\
& - I_y \theta'_y v'' - \frac{Q_y}{2} \psi' v'' + \frac{Q_y}{2} \phi'^2 v'' - \\
& - I_y v' \phi' v'' + I_{yz} w' \phi' v'' + I_z \theta'_z w'' + \\
& + I_{yz} \theta'_y w'' + \frac{Q_z}{2} \psi' w'' - \frac{Q_z}{2} \phi'^2 w'' + \\
& + I_{yz} v' \phi' w'' - I_z w' \phi' w'' - z_e A (u' v')' + \\
& + z_e \frac{I_e}{2} (v' \psi')' - z_e \frac{A}{2} (v'^3)' - \\
& - z_e \frac{A}{2} (v' w'^2)' - z_e \frac{I_e}{2} (v' \phi'^2)' - \\
& - z_e^2 A (v'^2 \phi')' + y_e z_e A (v' w' \phi')' + \\
& + y_e A (u' w')' - y_e \frac{I_e}{2} (w' \psi')' + \\
& + y_e \frac{A}{2} (v'^2 w')' + y_e \frac{A}{2} (w'^3)' +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Y_e \frac{I_e}{2} (w' \phi'^2)' + Y_e z_e A (v' w' \phi')' - \\
& - Y_e^2 A (w'^2 \phi')' - I_e (u' \phi')' + Q_z (\phi' \theta'_z)' + \\
& + Q_y (\phi' \theta'_y)' + Q_\omega (\phi' \phi'')' + \frac{R_e}{2} (\phi' \psi')' - \\
& - \frac{I_e}{2} (v'^2 \phi')' - \frac{I_e}{2} (w'^2 \phi')' - \\
& - \frac{R_e}{2} (\phi'^3)' + \left(Q_y - z_e I_e \right) (v' \phi'^2)' - \\
& - \left(Q_z - Y_e I_e \right) (w' \phi'^2)' - \phi c' - v' m_y - w' m_z + \\
& + \mu \left(- I_\omega \ddot{\phi}'' - \frac{Q_\omega}{2} \dot{\psi}' + \frac{I_e}{2} \phi \ddot{u}' - \right. \\
& - \frac{Q_z}{2} \phi \ddot{\theta}'_z - \frac{Q_y}{2} \phi \ddot{\theta}'_y - \frac{Q_\omega}{2} \phi \ddot{\phi}'' - \\
& - \frac{R_e}{4} \phi \dot{\psi}' - I_{yz} v' \ddot{\theta}'_z - I_y v' \ddot{\theta}'_y - \frac{Q_y}{2} v' \dot{\psi}' + \\
& + I_z w' \ddot{\theta}'_z + I_{yz} w' \ddot{\theta}'_y + \frac{Q_z}{2} w' \dot{\psi}' +
\end{aligned}$$

$$+ z_e A \ddot{v} - y_e A \ddot{w} + I_e \ddot{\phi} \Big) = b' + m_{\xi} \quad (\text{III.94d})$$

sendo os termos relativos ao carregamento avaliados a partir das equações (III.70), (III.78) e (III.86).

III.4 - FLUXO DE CISALHAMENTO

Integrando a equação (III.6a) em A^* , ou seja, com s variando de 0 até s^* ($0 \leq s^* \leq L$), vem

$$\int_{A^*} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} + X - \mu \ddot{u}_x \right) dA = 0 \quad (\text{III.95})$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{A^*} \rho_x dA + \int_{A^*} \frac{\partial p_{1x}}{\partial n} dA + \int_{A^*} \frac{\partial p_{2x}}{\partial s} dA + \\ + \int_{A^*} X dA - \int_{A^*} \mu \ddot{u}_x dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.96})$$

Designa-se por

$$q_x^* = \int_{A^*} X dA = \int_0^{s^*} X t ds \quad (\text{III.97})$$

Com base na equação (III.8) e na relação (II.60), pode-se avaliar a integral

$$\begin{aligned}
 \int_{A^*} \rho_x dA &= \int_{A^*} \sigma_x dA = \\
 &= E \int_0^{S^*} \left\{ u' - \theta'_z \hat{y} - \theta'_y \hat{z} - \phi'' \omega - \psi' \lambda + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[v'^2 + w'^2 + \phi'^2 r^2 - 2 v' \phi' \left(\hat{z} - z_e \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2 w' \phi' \left(\hat{y} - y_e \right) \right] \right\} t ds \quad \text{(III.98)}
 \end{aligned}$$

A partir da relação (II.48), é possível escrever

$$\begin{aligned}
 \int_{A^*} \mu \ddot{u}_x dA &= \\
 &= \mu \int_0^{S^*} \left(\ddot{u} - \ddot{\theta}_z \hat{y} - \ddot{\theta}_y \hat{z} - \dot{\phi}' \omega - \dot{\psi} \lambda \right) t ds \quad \text{(III.99)}
 \end{aligned}$$

Definindo as propriedades geométricas de uma parte da seção, por intermédio das equações

$$A^* = \int_0^{S^*} t \, ds$$

$$S_Y^* = \int_0^{S^*} \hat{z} \, t \, ds$$

$$S_Z^* = \int_0^{S^*} \hat{y} \, t \, ds$$

(III.100)

$$S_\omega^* = \int_0^{S^*} \omega \, t \, ds$$

$$I_e^* = \int_0^{S^*} r^2 \, t \, ds$$

$$S_\lambda^* = \int_0^{S^*} \lambda \, t \, ds = \frac{I_e^*}{2} ,$$

na última das quais se fez uso da relação (II.44), podem-se apresentar as integrais (III.98) e (III.99) na forma:

$$\begin{aligned}
\int_{A^*} \rho_X dA = E \left[A^* u' - S_Z^* \theta'_Z - S_Y^* \theta'_Y - S_\omega^* \phi'' - \right. \\
- \frac{I_e^*}{2} \psi' + \frac{A^*}{2} v'^2 + \frac{A^*}{2} w'^2 + \frac{I_e^*}{2} \phi'^2 - \\
\left. - \left(S_Y^* - z_e A^* \right) v' \phi' + \left(S_Z^* - y_e A^* \right) w' \phi' \right]
\end{aligned}
\tag{III.101}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{A^*} \mu \ddot{u}_X dA = \\
= \mu \left(A^* \ddot{u} - S_Z^* \ddot{\theta}_Z - S_Y^* \ddot{\theta}_Y - S_\omega^* \ddot{\phi}' - \frac{I_e^*}{2} \ddot{\psi} \right)
\end{aligned}
\tag{III.102}$$

Por analogia com a integral (III.12), escreve-se

$$\int_{A^*} \frac{\partial p_{1X}}{\partial n} dA = \int_0^{S^*} \left(\bar{p}_{1X} \Big|_{\frac{t}{2}} + \bar{p}_{1X} \Big|_{-\frac{t}{2}} \right) ds = 0$$

(III.103)

Avaliando a integral a seguir, vem

$$\begin{aligned}
 \int_{A^*} \frac{\partial p_{2X}}{\partial s} dA &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(\int_0^{s^*} \frac{\partial p_{2X}}{\partial s} ds \right) dn = \\
 &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[p_{2X} \right]_0^{s^*} dn = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(p_{2X} \Big|_{s^*} + \bar{p}_{2X} \Big|_0 \right) dn = \\
 &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} p_{2X} \Big|_{s^*} dn = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{XS} \Big|_{s^*} dn = \\
 &= \tau_{XS}^{(2)} \cdot t = f \qquad \qquad \qquad \text{(III.104)}
 \end{aligned}$$

onde se fez uso das relações (III.76) e (II.73). Note-se que, em virtude da distribuição de $\tau_{XS}^{(1)}$ na espessura, a

integral $\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{XS}^{(1)} \Big|_{s^*} dn$ se anula.

A partir, então, das equações (III.96), (III.97) e (III.101) a (III.104), pode-se obter a expressão do fluxo de cisalhamento em termos dos deslocamentos

$$\begin{aligned}
 f &= \tau_{XS}^{(2)} \cdot t = \\
 &= - E \left[A^* u'' - S_z^* \theta_z'' - S_Y^* \theta_Y'' - S_\omega^* \phi'' - \frac{I_e^*}{2} \psi'' + \right. \\
 &+ A^* v' v'' + A^* w' w'' + I_e^* \phi' \phi'' - \left(S_Y^* - z_e A^* \right) \left(v' \phi' \right)' + \\
 &+ \left(S_z^* - Y_e A^* \right) \left(w' \phi' \right)' \left. \right] + \mu \left(A^* \ddot{u} - S_z^* \ddot{\theta}_z - S_Y^* \ddot{\theta}_Y - \right. \\
 &\left. - S_\omega^* \ddot{\phi}' - \frac{I_e^*}{2} \ddot{\psi} \right) - \alpha_x^* \tag{III.105}
 \end{aligned}$$

III.5 - AVALIAÇÃO DA COMPONENTE $\tau_{XN}^{(2)}$, DESCONSIDERADA NAS INTEGRAIS DAS TENSÕES DE CISALHAMENTO SOBRE A ÁREA DA SEÇÃO

Considere-se a equação de equilíbrio dinâmico na direção longitudinal

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_x - \omega_s \tau_{xn} + \omega_n \tau_{xs} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial n} \left[\tau_{xn} - \omega_s \sigma_n + \omega_n \tau_{ns} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \left[\tau_{xs} - \omega_s \tau_{ns} + \omega_n \sigma_s \right] + X - \mu \ddot{u}_x = 0 \end{aligned}$$

Tendo em vista que

- a) $\omega_s \tau_{xn}$ e $\omega_n \tau_{xs}$ podem ser ignorados em presença de σ_x e, analogamente, $\omega_s \tau_{ns}$ e $\omega_n \sigma_s$, em relação a τ_{xs} ;
- b) $\tau_{xs}^{(1)}$ e $\tau_{xn}^{(1)}$, pela teoria de torção pura de Saint-Venant, devem atender a

$$\frac{\partial \tau_{xs}^{(1)}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{xn}^{(1)}}{\partial n} = 0 ,$$

pode-se escrever aproximadamente

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial n} \left[\tau_{xn}^{(2)} - \omega_s \sigma_n + \omega_n \tau_{ns} \right] + \frac{\partial \tau_{xs}^{(2)}}{\partial s} + \\ & + X - \mu \ddot{u}_x = 0 \end{aligned}$$

Decomponha-se

$$p_{1X} = \tau_{Xn} - \omega_s \sigma_n + \omega_n \tau_{ns}$$

na soma das parcelas assim designadas:

$$p_{1X}^{(1)} = \tau_{Xn}^{(1)}$$

e

$$p_{1X}^{(2)} = \tau_{Xn}^{(2)} - \omega_s \sigma_n + \omega_n \tau_{ns}$$

Considerando os seguintes fatos:

- a) uma vez que σ_x , $\tau_{xs}^{(2)}$, X e $\mu \hat{u}_x$ são admitidos independentes de n , conclui-se que a distribuição de $p_{1X}^{(2)}$ deve ser necessariamente linear na espessura;
- b) na ausência de componentes longitudinais das forças de superfície na área lateral da barra (hipótese (g)), tem-se que $p_{1X} = 0$ em $n = \pm \frac{t}{2}$; tendo em vista, ainda, que $\tau_{Xn}^{(1)} = p_{1X}^{(1)} = 0$ em $n = \pm \frac{t}{2}$, resulta também que $p_{1X}^{(2)} = 0$ em $n = \pm \frac{t}{2}$;

pode-se, conseqüentemente, afirmar que $p_{1X}^{(2)} = 0$ para qualquer n . Assim,

$$\tau_{Xn}^{(2)} = \omega_s \sigma_n - \omega_n \tau_{ns}$$

Face à magnitude dos parâmetros ω_k e das componentes de tensão σ_n e τ_{ns} , conclui-se que a contribuição da parcela $\tau_{xn}^{(2)}$ pode ser efetivamente desconsiderada na avaliação das integrais das tensões de cisalhamento definidas no item II.5.2.

III.6 - ESFORÇOS SOLICITANTES NA SEÇÃO TRANSVERSAL DA BARRA E EFEITO WAGNER

Considere-se, novamente, a matriz de transformação do sistema $\tilde{x} \tilde{n} \tilde{s}$ para o referencial $x n s$, dada na equação (II.75). Esta matriz pode ser encarada como uma aproximação para o produto de outras duas, ou seja,

$$\tilde{T}_{xns} \cong \tilde{B} \cdot \tilde{A}, \quad (\text{III.106})$$

sendo \tilde{A} a matriz de transformação do sistema $\tilde{x} \tilde{n} \tilde{s}$ para o referencial $x^p n^p s^p$, associado à seção "planificada" (seção na configuração deformada, porém sem empenamento),

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & \phi' r_s & -\phi' r_n \\ -\phi' r_s & 1 & 0 \\ \phi' r_n & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(III.107)

e \tilde{B} a matriz de transformação do sistema $x^p n^p s^p$ para o referencial $x n s$,

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & -v' \cos \alpha - w' \operatorname{sen} \alpha & v' \operatorname{sen} \alpha - w' \cos \alpha \\ v' \cos \alpha + w' \operatorname{sen} \alpha & 1 & -\phi \\ -v' \operatorname{sen} \alpha + w' \cos \alpha & \phi & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.108})$$

Assim, as componentes segundo $x n s$ do vetor tensão na face de um elemento de normal x na geometria inicial podem ser relacionadas às componentes do mesmo vetor segundo $x^p n^p s^p$ através de

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_n \\ \rho_s \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -v' \cos \alpha - w' \operatorname{sen} \alpha & v' \operatorname{sen} \alpha - w' \cos \alpha \\ v' \cos \alpha + w' \operatorname{sen} \alpha & 1 & -\phi \\ -v' \operatorname{sen} \alpha + w' \cos \alpha & \phi & 1 \end{bmatrix} .$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \rho_x^p \\ \rho_n^p \\ \rho_s^p \end{array} \right\}$$

(III.109)

e estas últimas, por sua vez, podem ser relacionadas às componentes desse vetor tensão segundo $\tilde{x} \tilde{n} \tilde{s}$ por intermédio de

$$\left\{ \begin{array}{c} \rho_x^p \\ \rho_n^p \\ \rho_s^p \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & \phi' r_s & -\phi' r_n \\ -\phi' r_s & 1 & 0 \\ \phi' r_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \tau_{xn} \\ \tau_{xs} \end{array} \right\}$$

(III.110)

De modo análogo, a matriz de transformação do sistema $\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z}$ para o referencial $x y z$, dada na equação (II.76), pode ser encarada como uma aproximação para o produto de duas matrizes, isto é,

$$\tilde{T}_{xyz} \cong \tilde{D} \cdot \tilde{C}, \quad (\text{III.111})$$

sendo \tilde{C} a matriz de transformação do sistema $\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z}$ para o referencial $x^p y^p z^p$, associado à seção "planificada",

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & \phi' \hat{\zeta} & -\phi' \hat{\eta} \\ -\phi' \hat{\zeta} & 1 & 0 \\ \phi' \hat{\eta} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(III.112)

e \tilde{D} a matriz de transformação do sistema $x^p y^p z^p$ para o referencial $x y z$,

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 1 & -v' & -w' \\ v' & 1 & -\phi \\ w' & \phi & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(III.113)}$$

Deste modo, as componentes segundo $x y z$ do vetor tensão na face de um elemento de normal x na geometria inicial podem ser relacionadas às componentes do mesmo vetor segundo $x^p y^p z^p$, mediante

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v' & -w' \\ v' & 1 & -\phi \\ w' & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_x^p \\ \rho_y^p \\ \rho_z^p \end{Bmatrix} \quad (\text{III.114})$$

e estas últimas, por sua vez, podem ser relacionadas às componentes desse vetor tensão segundo $\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z}$ por

$$\begin{Bmatrix} \rho_x^p \\ \rho_y^p \\ \rho_z^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi' \hat{\zeta} & -\phi' \hat{\eta} \\ -\phi' \hat{\zeta} & 1 & 0 \\ \phi' \hat{\eta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.115})$$

Atente-se, agora, para a equação (III.110). Efetuando o produto nela indicado, obtêm-se as componentes do vetor tensão segundo $x^p n^p s^p$:

$$\rho_x^p = \sigma_x + \phi' r_s \tau_{xn} - \phi' r_n \tau_{xs} \quad (\text{III.116a})$$

$$\rho_n^p = -\phi' r_s \sigma_x + \tau_{xn} \quad (\text{III.116b})$$

$$\rho_s^p = \phi' r_n \sigma_x + \tau_{xs} , \quad (\text{III.116c})$$

sendo que ρ_x^p pode ser aproximada por

$$\rho_x^p = \sigma_x \quad (\text{III.117})$$

A partir, então, das componentes do vetor tensão, dadas nas igualdades (III.117) e (III.116b,c), e com o auxílio das relações (II.79) e (II.1b,f) e da nomenclatura estabelecida nas equações (II.61a,e), (II.67a,b,c), (III.21) e (III.32), podem-se avaliar os esforços na seção da barra, relativamente ao sistema $\xi^p \eta^p \zeta^p$:

$$F_x^p = \int_A \rho_x^p dA = \int_A \sigma_x dA = N \quad (\text{III.118a})$$

$$F_y^p = \int_A \rho_y^p dA = \int_A \left(\rho_n^p \cos \alpha - \rho_s^p \sin \alpha \right) dA =$$

$$= - \phi' \int_A \sigma_x \left(r_n \sin \alpha + r_s \cos \alpha \right) dA +$$

$$+ \int_A \left(- \tau_{xs} \sin \alpha + \tau_{xn} \cos \alpha \right) dA =$$

$$= - \phi' \int_A \sigma_x \hat{\zeta} \, dA + \int_A \tau_{xy} \, dA = \phi' M_\eta + V_y$$

(III.118b)

$$F_z^p = \int_A \rho_z^p \, dA = \int_A \left(\rho_n^p \operatorname{sen} \alpha + \rho_s^p \cos \alpha \right) \, dA =$$

$$= \phi' \int_A \sigma_x \left(r_n \cos \alpha - r_s \operatorname{sen} \alpha \right) \, dA +$$

$$+ \int_A \left(\tau_{xs} \cos \alpha + \tau_{xn} \operatorname{sen} \alpha \right) \, dA =$$

$$= \phi' \int_A \sigma_x \hat{\eta} \, dA + \int_A \tau_{xz} \, dA = \phi' M_\zeta + V_z$$

(III.118c)

$$M_\xi^p = \int_A \left[\rho_n^p r_s - \rho_s^p \left(r_n + n \right) \right] \, dA =$$

$$= - \phi' \int_A \sigma_x \left(r_s^2 + r_n^2 + r_n n \right) \, dA +$$

$$+ \int_A \left[- \tau_{xs} \left(r_n + n \right) + \tau_{xn} r_s \right] \, dA =$$

$$= - \phi' \left[\int_A \sigma_x r^2 \, dA + \int_A \sigma_x r_n n \, dA \right] -$$

$$- \int_A \left[\tau_{xs} (r_n + n) - \tau_{xn} r_s \right] dA = - \phi' K + T \quad (\text{III.118d})$$

$$M_{\eta}^P = - \int_A \rho_x^P \zeta dA = - \int_A \sigma_x \hat{\zeta} dA = M_{\eta} \quad (\text{III.118e})$$

$$M_{\zeta}^P = \int_A \rho_x^P \eta dA = \int_A \sigma_x \hat{\eta} dA = M_{\zeta} , \quad (\text{III.118f})$$

que constituem respectivamente o esforço normal, os esforços cortantes, o momento torsor e os momentos fletores no referido sistema $\xi^P \eta^P \zeta^P$. Note-se que $F_x^P = F_{\xi}^P$, $F_y^P = F_{\eta}^P$ e $F_z^P = F_{\zeta}^P$, daí serem mantidos os índices x, y, z para as forças.

É importante salientar que a parcela $-\phi' K$ na expressão de M_{ξ}^P (equação (III.118d)), conhecida como efeito Wagner, representa a contribuição para o momento torsor na seção "planificada" das projeções da tensão normal σ_x nas direções n^P e s^P (ver expressões (III.116b,c)). Esta contribuição da tensão normal para o momento torsor é devida, portanto, ao empenamento da seção, sendo ilustrada na figura III.1.

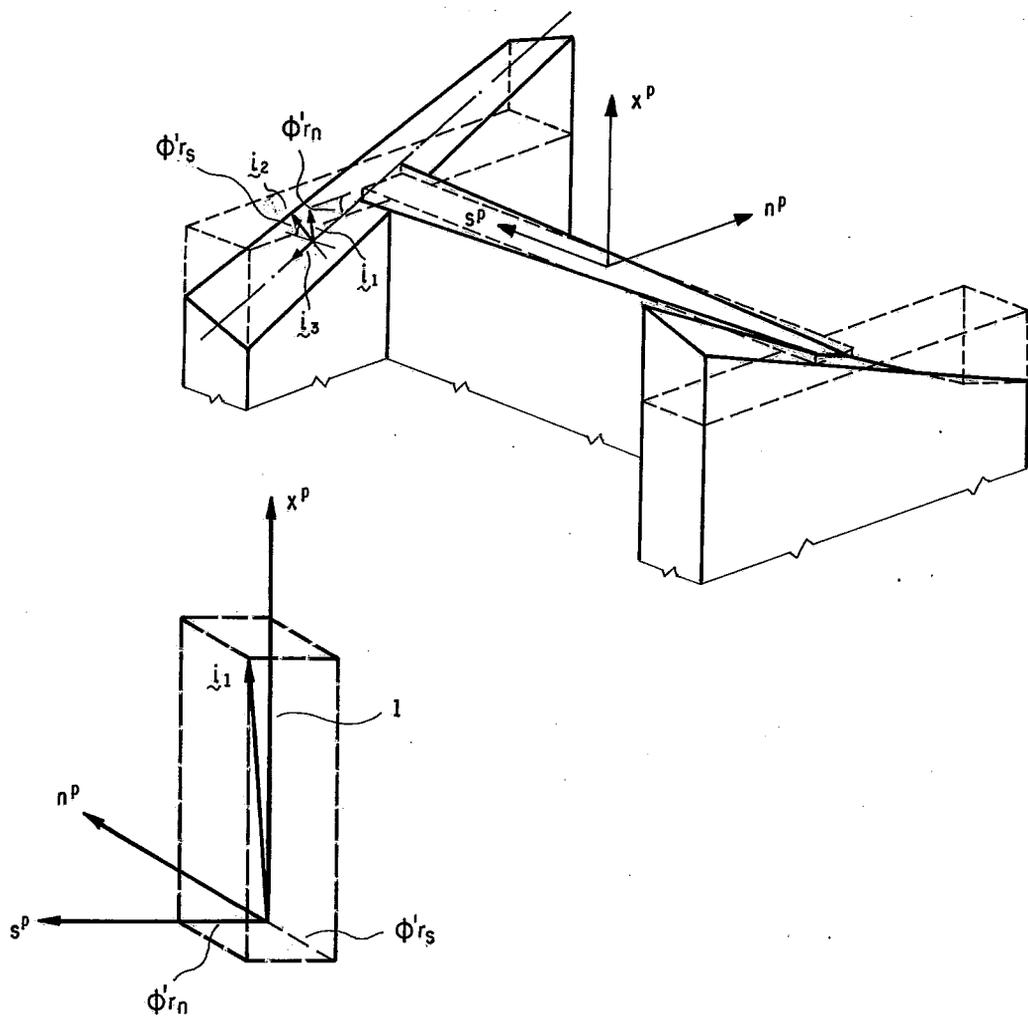


Figura III.1 - Empenamento de um perfil I

Tendo em vista que os elementos da matriz \underline{D} independem das coordenadas dos pontos da seção transversal da barra, esta também é a matriz de transformação do sistema $\xi^P \eta^P \zeta^P$ para o referencial $\xi \eta \zeta$. Assim, os esforços solicitantes relativos ao sistema $\xi \eta \zeta$ são obtidos por

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v' & -w' \\ v' & 1 & -\phi \\ w' & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_X^p \\ F_Y^p \\ F_Z^p \end{Bmatrix}$$

(III.119a)

$$\begin{Bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v' & -w' \\ v' & 1 & -\phi \\ w' & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_\xi^p \\ M_\eta^p \\ M_\zeta^p \end{Bmatrix}$$

(III.119b)

ou, levando em conta as equações (III.118),

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v' & -w' \\ v' & 1 & -\phi \\ w' & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ V_Y + \phi' M_\eta \\ V_Z + \phi' M_\zeta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v' & -w' \\ v' & 1 & -\phi \\ w' & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T - \phi' K \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{Bmatrix}$$

Efetutando estes produtos, vem

$$F_X = N - v' \left(V_Y + \phi' M_\eta \right) - w' \left(V_Z + \phi' M_\zeta \right) \cong N \quad (\text{III.120a})$$

$$\begin{aligned} F_Y &= v' N + V_Y + \phi' M_\eta - \phi V_Z - \phi \phi' M_\zeta \cong \\ &\cong V_Y + \phi' M_\eta - \phi V_Z + v' N \quad (\text{III.120b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Z &= w' N + \phi V_Y + \phi \phi' M_\eta + V_Z + \phi' M_\zeta \cong \\ &\cong V_Z + \phi' M_\zeta + \phi V_Y + w' N \quad (\text{III.120c}) \end{aligned}$$

$$M_\xi = T - \phi' K - v' M_\eta - w' M_\zeta \quad (\text{III.120d})$$

$$M_\eta = v' \left(T - \phi' K \right) + M_\eta - \phi M_\zeta \cong M_\eta - \phi M_\zeta \quad (\text{III.120e})$$

$$M_\zeta = w' \left(T - \phi' K \right) + \phi M_\eta + M_\zeta \cong M_\zeta + \phi M_\eta \quad (\text{III.120f})$$

Alternativamente, tais resultados poderiam ser obtidos diretamente a partir das componentes de tensão

ρ_x, ρ_y, ρ_z , mediante integração sobre a área da seção, considerando-se para tanto a aproximação $\rho_x \cong \sigma_x$ e utilizando-se, na avaliação dos momentos, os braços de alavanca $b_\xi \cong 0$ (isto implica que no cálculo de M_η e M_ζ sejam desprezadas as respectivas contribuições de ρ_z e ρ_y decorrentes do surgimento de um pequeno braço de alavanca b_ξ da ordem de u_x), $b_\eta = \eta - \phi \zeta$ e $b_\zeta = \zeta + \phi \eta$.

III.7 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO A PARTIR DA IGUALDADE ENTRE ESFORÇOS SECCIONAIS EXTERNOS E INTERNOS

Alguns autores (ver, por exemplo, CHEN e ATSUTA (1977, p. 51-69)) obtêm as equações diferenciais de flexo-torção com base nas relações deformação-deslocamento lineares (equações (II.91)) e estabelecendo condições de equilíbrio entre esforços seccionais externos e internos para a configuração deformada da barra. Tal procedimento passa a ser ilustrado a seguir, para a análise estática.

Por simplicidade a dedução aqui apresentada não considera componentes das forças de volume na direção x ($X = 0$), o que implica que $q_x = m_y = m_z = b = c = 0$.

Considere-se, então, um trecho ($0 \leq \xi \leq x$) de uma barra em equilíbrio na configuração deformada, representada na figura III.2 pelo eixo que passa pelos centros de cisalhamento das diversas seções transversais.

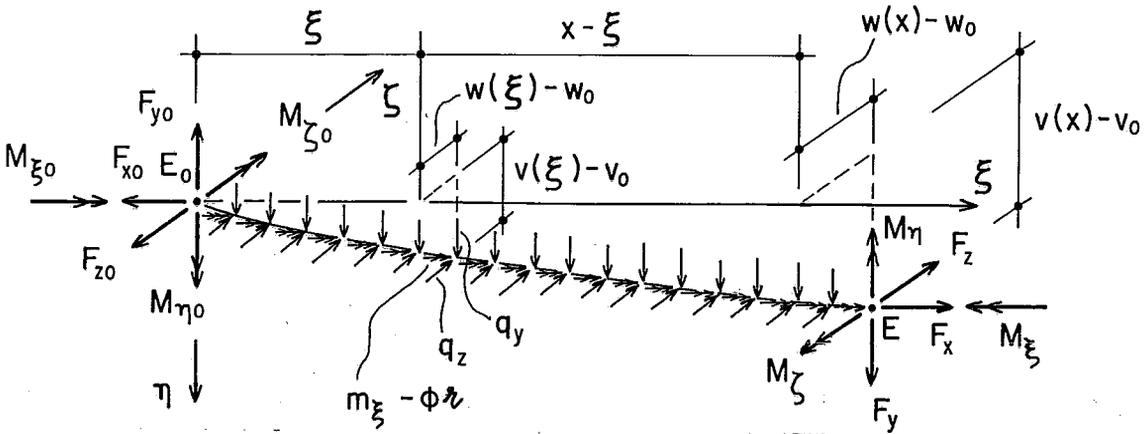


Figura III.2 - Representação de um trecho ($0 \leq \xi \leq x$) de uma barra em equilíbrio na configuração deformada

Os esforços solicitantes numa seção distante x da extremidade esquerda são dados por

$$F_x = F_{x0} \quad (\text{III.121a})$$

$$F_y = F_{y0} - \int_0^x \left(\int_A Y \, dA + \int_{\ell} \bar{p}_y \, d\ell \right) d\xi \quad (\text{III.121b})$$

$$F_z = F_{z0} - \int_0^x \left(\int_A Z \, dA + \int_{\ell} \bar{p}_z \, d\ell \right) d\xi \quad (\text{III.121c})$$

$$\begin{aligned}
M_{\xi} &= M_{\xi_0} - F_{Y_0} \left(w(x) - w_0 \right) + F_{Z_0} \left(v(x) - v_0 \right) - \\
&\quad - \int_0^x \left\{ \int_A \left[Y(\xi) \left(\zeta + \phi(\xi) \eta - w(x) + w(\xi) \right) - \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - Z(\xi) \left(\eta - \phi(\xi) \zeta - v(x) + v(\xi) \right) \right] dA + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\ell} \left[\bar{p}_Y(\xi) \left(\zeta + \phi(\xi) \eta - w(x) + w(\xi) \right) - \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \bar{p}_Z(\xi) \left(\eta - \phi(\xi) \zeta - v(x) + v(\xi) \right) \right] d\ell \right\} dx = \\
&= M_{\xi_0} - F_{Y_0} \left(w(x) - w_0 \right) + F_{Z_0} \left(v(x) - v_0 \right) + \\
&\quad + \int_0^x \left\{ \left(w(x) - w(\xi) \right) \left(\int_A Y dA + \int_{\ell} \bar{p}_Y d\ell \right) - \right. \\
&\quad \quad \left. - \left(v(x) - v(\xi) \right) \left(\int_A Z dA + \int_{\ell} \bar{p}_Z d\ell \right) \right\} dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\int_{\mathbf{A}} (Y \zeta - Z \eta) \, d\mathbf{A} + \int_{\mathcal{L}} (\bar{p}_Y \zeta - \bar{p}_Z \eta) \, d\mathcal{L} \right] - \\
& - \phi(\xi) \left[\int_{\mathbf{A}} (Y \eta + Z \zeta) \, d\mathbf{A} + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\mathcal{L}} (\bar{p}_Y \eta + \bar{p}_Z \zeta) \, d\mathcal{L} \right] \Big\} \, dx \quad (\text{III.121d})
\end{aligned}$$

$$M_\eta = M_{\eta_0} - F_{z_0} x + F_{x_0} (w(x) - w_0) +$$

$$+ \int_0^x \left[\int_{\mathbf{A}} Z \, d\mathbf{A} + \int_{\mathcal{L}} \bar{p}_Z \, d\mathcal{L} \right] (x - \xi) \, d\xi$$

(III.121e)

$$M_\zeta = M_{\zeta_0} + F_{y_0} x - F_{x_0} (v(x) - v_0) -$$

$$- \int_0^x \left[\int_{\mathbf{A}} Y \, d\mathbf{A} + \int_{\mathcal{L}} \bar{p}_Y \, d\mathcal{L} \right] (x - \xi) \, d\xi$$

(III.121f)

onde \mathcal{L} representa o perímetro da seção,

$F_{x_0'}$, $F_{y_0'}$, $F_{z_0'}$, $M_{\xi_0'}$, $M_{\eta_0'}$, $M_{\zeta_0'}$, os esforços solicitantes na seção da extremidade esquerda da barra;

v_0' , w_0' , as componentes, nas direções η e ζ respectivamente, do deslocamento do centro de cisalhamento E_0 da seção da extremidade esquerda da barra.

Considerando-se que

$$\int_A Y \, dA + \int_{\mathcal{L}} \bar{p}_Y \, d\mathcal{L} = q_{Y, \text{vol}} + q_{Y, \text{sup}} = q_Y$$

(III.122a)

$$\int_A Z \, dA + \int_{\mathcal{L}} \bar{p}_Z \, d\mathcal{L} = q_{Z, \text{vol}} + q_{Z, \text{sup}} = q_Z$$

(III.122b)

$$- \int_A (Y \zeta - Z \eta) \, dA - \int_{\mathcal{L}} (\bar{p}_Y \zeta - \bar{p}_Z \eta) \, d\mathcal{L} =$$

$$= m_{\xi, \text{vol}} + m_{\xi, \text{sup}} = m_{\xi} , \quad \text{(III.122c)}$$

e denominando-se por

$$r = \int_A (Y \eta + Z \zeta) dA + \int_{\mathcal{L}} (\bar{p}_Y \eta + \bar{p}_Z \zeta) d\mathcal{L} ,$$

(III.123)

podem-se reescrever as equações (III.121) na forma:

$$F_x = F_{x0} \quad (III.124a)$$

$$F_Y = F_{Y0} - \int_0^x q_Y d\xi \quad (III.124b)$$

$$F_Z = F_{Z0} - \int_0^x q_Z d\xi \quad (III.124c)$$

$$M_\xi = M_{\xi0} - F_{Y0} (w(x) - w_0) + F_{Z0} (v(x) - v_0) +$$

$$+ \int_0^x \left[(w(x) - w(\xi)) q_Y(\xi) - (v(x) - v(\xi)) q_Z(\xi) +$$

$$+ m_\xi(\xi) - \phi(\xi) r(\xi) \right] d\xi \quad (III.124d)$$

$$M_{\eta} = M_{\eta 0} - F_{z0} x + F_{x0} (w(x) - w_0) + \int_0^x q_z(\xi) (x - \xi) d\xi \quad (\text{III.124e})$$

$$M_{\zeta} = M_{\zeta 0} + F_{y0} x - F_{x0} (v(x) - v_0) - \int_0^x q_y(\xi) (x - \xi) d\xi \quad (\text{III.124f})$$

Igualando as expressões dos esforços seccionais externos (equações (III.124)) às dos esforços seccionais internos (equações (III.120)), vem

$$F_{x0} = N \quad (\text{III.125a})$$

$$F_{y0} - \int_0^x q_y d\xi = V_y + \phi' M_{\eta} - \phi V_z + v' N \quad (\text{III.125b})$$

$$F_{z0} - \int_0^x q_z d\xi = V_z + \phi' M_{\zeta} + \phi V_y + w' N \quad (\text{III.125c})$$

A primeira equação de equilíbrio (equação (III.125a)) pode ser apresentada na forma:

$$N' = 0 \quad (\text{III.126})$$

Para se chegar à segunda equação de equilíbrio, deriva-se duas vezes a equação (III.125f) em relação a x , obtendo-se sucessivamente

$$F_{y0} - F_{x0} v' - \int_0^x q_y d\xi = M'_\zeta + (\phi M_\eta)'$$

e

$$- F_{x0} v'' - q_y = M''_\zeta + (\phi M_\eta)''$$

Esta última, em virtude da igualdade (III.125a), torna-se:

$$M''_\zeta + (\phi M_\eta)'' + v'' N = - q_y$$

ou, considerando as expressões de M_η e M_ζ , dadas nas igualdades (III.52e, f) respectivamente, e a equação (III.126)

$$M''_z + (\phi M_y)'' + v'' N + z_e \phi'' N = - q_y$$

$$(\text{III.127})$$

A terceira equação de equilíbrio,

$$- M_Y'' + \left(\phi M_Z \right)'' + w'' N - y_e \phi'' N = - q_Z ,$$

(III.128)

seria deduzida de modo inteiramente análogo.

Para se obter a quarta equação de equilíbrio, deriva-se a equação (III.125d) em relação a x . Tem-se, então,

$$\begin{aligned} - F_{Y0} w' + F_{Z0} v' + \int_0^x w'(x) q_Y(\xi) d\xi - \\ - \int_0^x v'(x) q_Z(\xi) d\xi + m_\xi - \phi r = \\ = T' - \left(\phi' K \right)' - \left(v' M_\eta \right)' - \left(w' M_\zeta \right)' \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} - w' \left[F_{Y0} - \int_0^x q_Y d\xi \right] + v' \left[F_{Z0} - \int_0^x q_Z d\xi \right] + \\ + m_\xi - \phi r = T' - \left(\phi' K \right)' - \end{aligned}$$

$$- \left(v' M_{\eta} \right)' - \left(w' M_{\zeta} \right)'$$

Substituindo, nesta equação, as igualdades (II.68c) e (III.125b,c), obtém-se

$$\begin{aligned} T^{(1)'} + T^{(2)'} - \left(\phi' K \right)' - \left(v' M_{\eta} \right)' - \left(w' M_{\zeta} \right)' - \\ - v' \left(V_z + \phi' M_{\zeta} + \phi V_y + w' N \right) + \\ + w' \left(V_y + \phi' M_{\eta} - \phi V_z + v' N \right) + \phi r = m_{\xi} \end{aligned}$$

Esta outra, por sua vez, em virtude das expressões (III.52e,f) e das relações (II.51d,e) e (III.80), as quais, nesse caso, se tornam respectivamente

$$M'_z = V_y$$

$$M'_y = - V_z$$

$$B' = - T^{(2)},$$

e, ainda, da igualdade (III.126), também pode ser apresentada na forma:

$$\begin{aligned}
T^{(1)'} - B'' - (\phi' K)' - v'' (M_Y + z_e N) - \\
- w'' (M_Z - y_e N) - v' \phi' (M_Z - y_e N) - \phi v' M'_Z + \\
+ w' \phi' (M_Y + z_e N) + \phi w' M'_Y + \phi r = m_\xi
\end{aligned}$$

Finalmente, desprezando os termos que envolvem produtos de deslocamentos, vem

$$\begin{aligned}
T^{(1)'} - B'' - (\phi' K)' - v'' (M_Y + z_e N) - \\
- w'' (M_Z - y_e N) + \phi r = m_\xi
\end{aligned}$$

(III.129)

Desta forma, chega-se, então, a equações de equilíbrio (equações (III.126) a (III.129)) equivalentes às obtidas particularizando-se as equações (III.90) a (III.93) do presente trabalho para a análise estática (ou seja, desconsiderando-se os termos envolvendo as forças generalizadas de inércia bem como suas derivadas) e, ainda, consistentemente com as considerações feitas no início deste item, anulando-se q_x , m_y , m_z , b e c . Com tais simplificações as equações (III.90) a (III.93) se tornam:

$$N' = 0$$

(III.130a)

$$M_Z'' + \left(\phi M_Y \right)'' + \left(v' N \right)' + z_e \left(\phi' N \right)' = - \alpha_Y$$

(III.130b)

$$- M_Y'' + \left(\phi M_Z \right)'' + \left(w' N \right)' - y_e \left(\phi' N \right)' = - \alpha_Z$$

(III.130c)

$$T^{(1)'} - B'' - \phi C'' - v'' M_Y - w'' M_Z - z_e \left(v' N \right)' +$$

$$+ y_e \left(w' N \right)' - \left(\phi' K \right)' = m_\xi \quad \text{(III.130d)}$$

Como se pode observar, substituindo a igualdade (III.130a), que é idêntica à igualdade (III.126), nas equações (III.130b,c,d), as duas primeiras destas ficam idênticas às equações (III.127) e (III.128) respectivamente enquanto que a última assume o seguinte aspecto:

$$T^{(1)'} - B'' - \phi C'' - v'' \left(M_Y + z_e N \right) -$$

$$- w'' \left(M_Z - y_e N \right) - \left(\phi' K \right)' = m_\xi \quad \text{(III.131)}$$

concluindo-se, portanto, que os termos r na equação (III.129) e $-C''$ na equação (III.130d) são equivalentes.

Mediante substituição, nas equações (III.126) a (III.128) e (III.131), das expressões de integrais de tensões sobre a área da seção em termos dos deslocamentos (dadas nas igualdades (II.93), (II.94) e (II.99)), chegar-se-ia às equações diferenciais da flexo-torção correspondentes a este tipo de formulação.

III.8 - PARTICULARIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO PARA A ANÁLISE LINEAR

No caso de comportamento linear, desprezam-se, nas equações (III.1), os termos envolvendo produtos de uma componente de tensão por um parâmetro ω_k , resultando, então:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xn}}{\partial n} + \frac{\partial \tau_{xs}}{\partial s} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xn}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_n}{\partial n} + \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial s} + N = 0 \quad \text{(III.132)}$$

$$\frac{\partial \tau_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial n} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + S = 0$$

Introduzindo, nestas equações, as forças de inércia, obtêm-se as equações de equilíbrio dinâmico de um elemento infinitesimal, relativamente ao referencial $x n s$:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xn}}{\partial n} + \frac{\partial \tau_{xs}}{\partial s} + X - \mu \ddot{u}_x = 0$$

(III.133a)

$$\frac{\partial \tau_{xn}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_n}{\partial n} + \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial s} + N - \mu \ddot{u}_n = 0$$

(III.133b)

$$\frac{\partial \tau_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial n} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + S - \mu \ddot{u}_s = 0$$

(III.133c)

Em lugar das equações (III.133b,c), podem ser utilizadas as seguintes equações alternativas:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{1y}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2y}}{\partial s} + Y - \mu \ddot{u}_y = 0$$

(III.134a)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{1z}}{\partial n} + \frac{\partial p_{2z}}{\partial s} + Z - \mu \ddot{u}_z = 0 ,$$

(III.134b)

obtidas mediante projeções nas direções y e z e a consideração de que α é constante em cada trecho do perfil, bem como das equações (II.39) e (II.66), sendo

Y, Z , componentes das forças de volume nas direções y e z , dadas nas equações (III.5);

p_{1y}, p_{1z} , componentes, segundo y e z , do vetor tensão na face 1 (de normal n), expressas por

$$p_{1y} = \sigma_n \cos \alpha - \tau_{ns} \sin \alpha$$

$$p_{1z} = \tau_{ns} \cos \alpha - \sigma_s \sin \alpha ;$$

p_{2y}, p_{2z} , componentes, segundo y e z , do vetor tensão na face 2 (de normal s), dadas por

$$p_{2y} = \sigma_n \sin \alpha + \tau_{ns} \cos \alpha$$

$$p_{2z} = \tau_{ns} \sin \alpha + \sigma_s \cos \alpha .$$

Procedendo à conveniente integração das equações (III.133a) e (III.134), tal como apresentado nas igualdades (III.7), chega-se às equações de equilíbrio dinâmico de um elemento de haste de seção aberta de paredes delgadas, para o caso de comportamento linear geométrico:

$$N' - \mathcal{F}_x = - q_x \quad \text{(III.135a)}$$

$$V'_Y - \mathcal{F}_Y = -q_Y \quad (\text{III.135b})$$

$$V'_Z - \mathcal{F}_Z = -q_Z \quad (\text{III.135c})$$

$$M'_Z - V_Y - \mathcal{F}_{xy} = m_Z \quad (\text{III.135d})$$

$$M'_Y + V_Z + \mathcal{F}_{xz} = m_Y \quad (\text{III.135e})$$

$$T' - \mathcal{F}_{yz} = m_\xi \quad (\text{III.135f})$$

com as forças generalizadas de inércia dadas por

$$\mathcal{F}_x = \mu A \ddot{u} \quad (\text{III.136a})$$

$$\mathcal{F}_Y = \mu \left(A \ddot{v} + z_e A \ddot{\phi} \right) \quad (\text{III.136b})$$

$$\mathcal{F}_Z = \mu \left(A \ddot{w} - y_e A \ddot{\phi} \right) \quad (\text{III.136c})$$

$$\mathcal{F}_{xy} = -\mu \left(I_Z \ddot{v}' + I_{YZ} \ddot{w} \right) \quad (\text{III.136d})$$

$$\mathcal{F}_{xz} = -\mu \left(I_{YZ} \ddot{v}' + I_Y \ddot{w}' \right) \quad (\text{III.136e})$$

$$\mathcal{F}_{yz} = \mu \left(-z_e A \ddot{v} + y_e A \ddot{w} - I_e \ddot{\phi} \right) \quad (\text{III.136f})$$

e os termos relativos ao carregamento expressos pelas equações (III.70).

A relação entre o bimomento B e o torsor de empenamento restringido $T^{(2)}$ continua a mesma dada pela equação (III.80), ou seja,

$$B' + T^{(2)} - \mathcal{F}_\omega = -b, \quad (\text{III.137})$$

porém com a força generalizada de inércia \mathcal{F}_ω expressa agora por

$$\mathcal{F}_\omega = -\mu I_\omega \ddot{\phi}' \quad (\text{III.138})$$

A partir das relações (III.135d,e) e (III.137), das expressões de $M_{y'}$, $M_{z'}$ e B , dadas nas equações (II.93b,c,d), e de $\mathcal{F}_{xy'}$, $\mathcal{F}_{xz'}$ e \mathcal{F}_ω , apresentadas nas igualdades (III.136d,e) e (III.138), escrevem-se $V_{y'}$, $V_{z'}$ e $T^{(2)}$ em termos dos deslocamentos, na forma:

$$V_{y'} = -E \left(I_z v''' + I_{yz} w''' \right) + \\ + \mu \left(I_z \ddot{v}' + I_{yz} \ddot{w}' \right) - m_z \quad (\text{III.139a})$$

$$V_z = - E \left(I_{YZ} v''' + I_Y w''' \right) + \\ + \mu \left(I_{YZ} \ddot{v}' + I_Y \ddot{w}' \right) + m_Y \quad (\text{III.139b})$$

$$T^{(2)} = E I_\omega \phi''' - \mu I_\omega \dot{\phi}' - b \quad (\text{III.139c})$$

Por intermédio das relações (III.135), (III.137) e (II.68c), obtêm-se então

$$N' - \mathcal{F}_x = - q_x \quad (\text{III.140a})$$

$$M_z'' - \mathcal{F}'_{xy} - \mathcal{F}_y = m_z' - q_y \quad (\text{III.140b})$$

$$- M_y'' - \mathcal{F}'_{xz} - \mathcal{F}_z = - m_y' - q_z \quad (\text{III.140c})$$

$$T^{(1)'} - B'' + \mathcal{F}'_\omega - \mathcal{F}_{yz} = b' + m_\xi \quad (\text{III.140d})$$

Mediante substituição, nestas equações, das igualdades (II.71), (II.93) (III.136) e (III.138) (ou substituição, nas equações (III.135a,b,c,f), das igualdades (II.68c), (II.71), (II.93a), (III.136a,b,c,f) e (III.139)), chega-se às equações diferenciais da flexo-torção, para o caso de comportamento linear geométrico:

$$E A u'' - \mu A \ddot{u} = - q_x \quad (\text{III.141a})$$

$$\begin{aligned} & - E \left(I_z v^{IV} + I_{yz} w^{IV} \right) + \\ & + \mu \left(I_z \ddot{v}'' + I_{yz} \ddot{w}'' - A \ddot{v} - z_e A \ddot{\phi} \right) = \\ & = m'_z - q_y \quad (\text{III.141b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - E \left(I_{yz} v^{IV} + I_y w^{IV} \right) + \\ & + \mu \left(I_{yz} \ddot{v}'' + I_y \ddot{w}'' - A \ddot{w} + y_e A \ddot{\phi} \right) = \\ & = - m'_y - q_z \quad (\text{III.141c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - G J_T \phi'' + E I_\omega \phi^{IV} + \\ & + \mu \left(- I_\omega \ddot{\phi}'' + z_e A \ddot{v} - y_e A \ddot{w} + I_e \ddot{\phi} \right) = b' + m_\xi \quad (\text{III.141d}) \end{aligned}$$

Por outro lado, integrando a equação (III.133a) em A^* , ou seja, com s variando de 0 até s^* ($0 \leq s^* \leq L$), tal como apresentado na igualdade (III.96), é possível deduzir a expressão do fluxo de cisalhamento em termos dos deslocamentos:

$$\begin{aligned}
 f &= \tau_{XS}^{(2)} t = \\
 &= - E \left(A^* u'' - S_Z^* v''' - S_Y^* w''' - S_\omega^* \phi''' \right) + \\
 &+ \mu \left(A^* \ddot{u} - S_Z^* \ddot{v}' - S_Y^* \ddot{w}' - S_\omega^* \ddot{\phi}' \right) - q_x^* ,
 \end{aligned}
 \tag{III.142}$$

sendo as propriedades geométricas de uma parte da seção definidas nas equações (III.100) e q_x^* dada na igualdade (III.97).

Quanto à tensão $\tau_{Xn}^{(2)}$, conforme se depreende da equação (III.133a) de equilíbrio dinâmico na direção longitudinal, resulta automaticamente nula, uma vez que, pela teoria de torção pura de Saint-Venant, $\tau_{XS}^{(1)}$ e $\tau_{Xn}^{(1)}$ devem atender a

$$\frac{\partial \tau_{XS}^{(1)}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{Xn}^{(1)}}{\partial n} = 0 ,$$

considerando-se também que σ_x , $\tau_{XS}^{(2)}$ e as componentes longitudinais das forças de volume e de inércia são admitidas independentes de n e, ainda, que, em decorrência da hipótese (g) e do fato de que $\tau_{Xn}^{(1)} = 0$ em $n = \pm \frac{t}{2}$, tem-se $\tau_{Xn} = \tau_{Xn}^{(1)} = \tau_{Xn}^{(2)} = 0$ em $n = \pm \frac{t}{2}$.

CAPÍTULO IV

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS MEDIANTE ENFOQUE

VARIACIONAL COM A UTILIZAÇÃO DO PRINCÍPIO

DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Tal como no Capítulo III, também são aqui instituídas as equações diferenciais gerais que governam o problema em estudo, desta feita, porém, mediante enfoque variacional, com a utilização do princípio dos trabalhos virtuais. Tal enfoque, quando comparado ao uso direto das equações de equilíbrio dinâmico, apresenta a vantagem de conduzir às condições de contorno (cinemáticas e naturais) de forma consistente, isto é, como decorrência do próprio procedimento variacional.

Inicialmente, é apresentada a equação do princípio dos trabalhos virtuais (item IV.1). Em seguida, são obtidas as expressões do trabalho virtual interno (item IV.2) e do trabalho virtual externo (item IV.3). Igualando as expressões dos trabalhos virtuais interno e externo, obtêm-se as equações diferenciais da flexo-torção (item IV.4) e as condições de contorno (item IV.5).

No item IV.6 é sintetizada a formulação apresentada por CHEN e ATSUTA (1977, p. 541-550) e comparada com a desenvolvida neste capítulo. Finalmente, no item IV.7 é feita a particularização da formulação para a análise linear.

IV.1 - PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

De acordo com o princípio dos trabalhos virtuais - ver, por exemplo, SHAMES e DYM (1985, p. 98) - tem-se que, para um dado instante t ,

$$\delta W_e = \delta W_i, \quad (\text{IV.1})$$

onde δW_e é o trabalho virtual das forças externas - sendo aí incluídas as forças de inércia - e δW_i , o trabalho virtual das forças internas.

IV.2 - TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS INTERNAS

Considerando que as relações deformação-deslocamento efetivamente utilizadas na construção da teoria envolvem somente as componentes de deformação ϵ_x e $\gamma_{XS}^{(1)}$, pode-se escrever:

$$\delta W_i = \int_V \left(\sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{XS}^{(1)} \delta \gamma_{XS}^{(1)} \right) dV \quad (\text{IV.2})$$

com V simbolizando o volume da barra e $\delta \epsilon_x$ e $\delta \gamma_{XS}^{(1)}$ representando variações nas componentes ϵ_x e $\gamma_{XS}^{(1)}$, no instante t , as quais, mediante as relações (II.58), associam-se às correspondentes variações nas derivadas dos deslocamentos u , v , w e ϕ . Em vista disso, a equação (IV.2) se torna:

$$\delta W_i = \int_V \left\{ \sigma_x \delta \left[u' - \theta'_z \hat{y} - \theta'_y \hat{z} - \phi'' \omega - \psi' \lambda + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left(v'^2 + w'^2 + \phi'^2 r^2 - 2 v' \phi' \hat{\zeta} + 2 w' \phi' \hat{\eta} \right) \right] + \right. \\ \left. + \tau_{xs}^{(1)} \delta \left(2 \phi' n \right) \right\} dV$$

ou

$$\delta W_i = \int_0^l \left\{ \delta u' \int_A \sigma_x dA - \delta \theta'_z \int_A \sigma_x \hat{y} dA - \delta \theta'_y \int_A \sigma_x \hat{z} dA - \right. \\ \left. - \delta \phi'' \int_A \sigma_x \omega dA - \delta \psi' \int_A \sigma_x \lambda dA + v' \delta v' \int_A \sigma_x dA + \right. \\ \left. + w' \delta w' \int_A \sigma_x dA + \phi' \delta \phi' \int_A \sigma_x r^2 dA - \right. \\ \left. - \left(\phi' \delta v' + v' \delta \phi' \right) \int_A \sigma_x \hat{\zeta} dA + \right.$$

$$+ \left(\phi' \delta w' + w' \delta \phi' \right) \int_A \sigma_x \hat{\eta} \, dA +$$

$$+ 2 \delta \phi' \int_A \tau_{xS}^{(1)} n \, dA \left. \right\} dx ,$$

onde ℓ designa o comprimento da barra. De acordo com a nomenclatura estabelecida nas equações (II.61), (II.70), (III.21) e (III.32), resulta:

$$\delta W_i = \int_0^\ell \left\{ N \delta u' - M_z \delta \theta'_z + M_y \delta \theta'_y - B \delta \phi'' - C \delta \psi' + \right.$$

$$+ v' N \delta v' + w' N \delta w' + \phi' K \delta \phi' + \phi' M_\eta \delta v' +$$

$$\left. + v' M_\eta \delta \phi' + \phi' M_\zeta \delta w' + w' M_\zeta \delta \phi' - T^{(1)} \delta \phi' \right\} dx$$

(IV.3)

Integrando por partes, vem:

$$\delta W_i = \int_0^\ell \left\{ - N' \delta u + M'_z \delta \theta_z - M'_y \delta \theta_y + B' \delta \phi' + C' \delta \psi - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(v' N \right)' \delta v - \left(w' N \right)' \delta w - \left(\phi' K \right)' \delta \phi - \\
& - \left(\phi' M_{\eta} \right)' \delta v - \left(v' M_{\eta} \right)' \delta \phi - \left(\phi' M_{\zeta} \right)' \delta w - \\
& - \left(w' M_{\zeta} \right)' \delta \phi + T^{(1)'} \delta \phi \left. \right\} dx + \\
& + \left[N \delta u - M_z \delta \theta_z + M_y \delta \theta_y - B \delta \phi' - C \delta \psi + v' N \delta v + \right. \\
& + w' N \delta w + \phi' K \delta \phi + \phi' M_{\eta} \delta v + v' M_{\eta} \delta \phi + \\
& \left. + \phi' M_{\zeta} \delta w + w' M_{\zeta} \delta \phi - T^{(1)} \delta \phi \right]_0^{\ell}
\end{aligned}$$

Expressando, com base nas igualdades (II.57), as variações em θ_z , θ_y e ψ em função das variações correspondentes em ϕ , v' , w' e ϕ' e grupando os termos de mesma variação, obtém-se:

$$\delta W_i = \int_0^{\ell} \left\{ - N' \delta u - \left(v' N + \phi' M_{\eta} \right)' \delta v - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(w' N + \phi' M_{\zeta} \right)' \delta w + \left[w' M'_Z + v' M'_Y + \phi' C' - \right. \\
& - \left. \left(\phi' K + v' M_{\eta} + w' M_{\zeta} - T^{(1)} \right)' \right] \delta \phi + \\
& + \left(M'_Z + \phi M'_Y \right) \delta v' + \left(\phi M'_Z - M'_Y \right) \delta w' + \\
& + \left. \left(B' + \phi C' \right) \delta \phi' \right\} dx + \\
& + \left[N \delta u + \left(v' N + \phi' M_{\eta} \right) \delta v + \right. \\
& + \left(w' N + \phi' M_{\zeta} \right) \delta w - \left(w' M_Z + v' M_Y + \phi' C - \phi' K - \right. \\
& - \left. v' M_{\eta} - w' M_{\zeta} + T^{(1)} \right) \delta \phi - \left(M_Z + \phi M_Y \right) \delta v' - \\
& - \left. \left(\phi M_Z - M_Y \right) \delta w' - \left(B + \phi C \right) \delta \phi' \right]_0^{\ell}
\end{aligned}$$

Com nova integração por partes, chega-se, finalmente, a:

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & \int_0^\ell \left\{ - N' \delta u - \left(v' N + \phi' M_\eta + M'_Z + \phi M'_Y \right)' \delta v - \right. \\
& - \left(w' N + \phi' M_\zeta + \phi M'_Z - M'_Y \right)' \delta w + \left[w' M'_Z + v' M'_Y - \right. \\
& - \phi C'' - \left. \left. \left(\phi' K + v' M_\eta + w' M_\zeta - T^{(1)} + B' \right)' \right] \delta \phi \right\} dx + \\
& + \left[N \delta u + \left(v' N + \phi' M_\eta + M'_Z + \phi M'_Y \right) \delta v + \right. \\
& + \left. \left(w' N + \phi' M_\zeta + \phi M'_Z - M'_Y \right) \delta w - \right. \\
& - \left. \left(w' M'_Z + v' M'_Y + \phi' C - \phi' K - v' M_\eta - w' M_\zeta + \right. \right. \\
& + \left. \left. T^{(1)} - B' - \phi C' \right) \delta \phi - \left(M'_Z + \phi M'_Y \right) \delta v' + \right. \\
& + \left. \left(- \phi M'_Z + M'_Y \right) \delta w' - \left(B + \phi C \right) \delta \phi' \right]_0^\ell \quad (IV.4)
\end{aligned}$$

IV.3 - TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS EXTERNAS

De acordo com a hipótese (g), e considerando as forças de inércia, as quais são admitidas com valor constante ao longo da espessura (e igual ao da linha média), escreve-se para o trabalho virtual das forças externas, no instante t :

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_V \left[\left(X - \mu \ddot{u}_x \right) \delta u_x + \left(Y - \mu \ddot{u}_y \right) \delta u_y + \right. \\ & \left. + \left(Z - \mu \ddot{u}_z \right) \delta u_z \right] dV + \int_{A_\ell} \left(\bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z \right) dA_\ell + \\ & + \left[\int_A \left(\bar{\rho}_x \delta u_x + \bar{\rho}_y \delta u_y + \bar{\rho}_z \delta u_z \right) dA \right]_0^\ell, \end{aligned}$$

(IV.5)

sendo, como já definido,

X, Y, Z as componentes das forças de volume segundo x, y, z ;

$\mu \ddot{u}_x, \mu \ddot{u}_y, \mu \ddot{u}_z$ as componentes segundo x, y, z das forças de inércia, com μ simbolizando a massa específica do material;

\bar{p}_y, \bar{p}_z as componentes segundo y, z das forças prescritas na superfície lateral A_ℓ da barra;

e denotando-se por

$\bar{\rho}_x, \bar{\rho}_y, \bar{\rho}_z$ as componentes segundo x, y, z das forças prescritas nas seções das extremidades convencionadas como positivas no sentido dos eixos em $x = \ell$ e no sentido contrário aos eixos em $x = 0$ sendo $\bar{\rho}_x$ admitida uniformemente distribuída na espessura.

Uma vez que $X, \mu \ddot{u}_x, \mu \ddot{u}_y, \mu \ddot{u}_z$ e $\bar{\rho}_x$ independem de n , pode-se reaperesentiar a equação (IV.5) na forma:

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_0^\ell \left\{ \int_A \left[\left(X - \mu \ddot{u}_x \right) \delta \hat{u}_x + Y \delta u_y - \mu \ddot{u}_y \delta \hat{u}_y + \right. \right. \\ & \left. \left. + Z \delta u_z - \mu \ddot{u}_z \delta \hat{u}_z \right] dA + \int_\ell \left(\bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z \right) d\ell \right\} dx + \\ & + \left[\int_A \left(\bar{\rho}_x \delta \hat{u}_x + \bar{\rho}_y \delta u_y + \bar{\rho}_z \delta u_z \right) dA \right]_0^\ell, \quad (\text{IV.6}) \end{aligned}$$

lembrando que ℓ representa o perímetro da seção.

Tendo em vista que as variações em \hat{u}_x , \hat{u}_y e \hat{u}_z , u_y e u_z relacionam-se às correspondentes variações em u , v , w , ϕ , θ_z , θ_y , ψ , ϕ' através das equações (II.46), (II.38), (II.56c) respectivamente, escreve-se:

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_0^\ell \left\{ \int_A \left[\left(X - \mu \ddot{u}_x \right) \delta \left(u - \theta_z \hat{y} - \theta_y \hat{z} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \phi' \omega - \psi \lambda \right) + Y \delta \left(v - \phi \zeta \right) - \mu \ddot{u}_y \delta \left(v - \phi \hat{\zeta} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + Z \delta \left(w + \phi \eta \right) - \mu \ddot{u}_z \delta \left(w + \phi \hat{\eta} \right) \right] dA + \right. \\ & \left. + \int_{\mathcal{L}} \left[\bar{p}_y \delta \left(v - \phi \zeta \right) + \bar{p}_z \delta \left(w + \phi \eta \right) \right] d\mathcal{L} \right\} dx + \\ & + \left[\int_A \left(\bar{\rho}_x \delta \left(u - \theta_z \hat{y} - \theta_y \hat{z} - \phi' \omega - \psi \lambda \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{\rho}_y \delta \left(v - \phi \zeta \right) + \bar{\rho}_z \delta \left(w + \phi \eta \right) dA \right) \right]_0^\ell \end{aligned}$$

ou, grupando os termos de mesma variação,

$$\begin{aligned}
 \delta W_e = & \int_0^{\ell} \left[\delta u \left(\int_A X \, dA - \int_A \mu \ddot{u}_X \, dA \right) + \delta v \left(\int_A Y \, dA + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_{\mathcal{L}} \bar{p}_Y \, d\ell - \int_A \mu \ddot{u}_Y \, dA \right) + \delta w \left(\int_A Z \, dA + \int_{\mathcal{L}} \bar{p}_Z \, d\ell - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \int_A \mu \ddot{u}_Z \, dA \right) - \delta \phi \left(\int_A (Y \zeta - Z \eta) \, dA + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_{\mathcal{L}} (\bar{p}_Y \zeta - \bar{p}_Z \eta) \, d\ell - \int_A \mu (\ddot{u}_Y \hat{\zeta} - \ddot{u}_Z \hat{\eta}) \, dA \right) - \right. \\
 & \left. - \delta \theta_Z \left(\int_A X \hat{y} \, dA - \int_A \mu \ddot{u}_X \hat{y} \, dA \right) - \delta \theta_Y \left(\int_A X \hat{z} \, dA - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \int_A \mu \ddot{u}_X \hat{z} \, dA \right) - \delta \phi' \left(\int_A X \omega \, dA - \int_A \mu \ddot{u}_X \omega \, dA \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \delta\psi \left[\int_A X \lambda \, dA - \int_A \mu \hat{u}_x \lambda \, dA \right] dx + \\
& + \left[\delta u \int_A \bar{\rho}_x \, dA + \delta v \int_A \bar{\rho}_y \, dA + \delta w \int_A \bar{\rho}_z \, dA - \right. \\
& - \delta\phi \int_A \left(\bar{\rho}_y \zeta - \bar{\rho}_z \eta \right) \, dA - \delta\theta_z \int_A \bar{\rho}_x \hat{y} \, dA - \\
& \left. - \delta\theta_y \int_A \bar{\rho}_x \hat{z} \, dA - \delta\phi' \int_A \bar{\rho}_x \omega \, dA - \delta\psi \int_A \bar{\rho}_x \lambda \, dA \right]_0^\ell
\end{aligned}
\tag{IV.7}$$

Observando-se que

$$\int_A X \, dA = q_x \tag{IV.8a}$$

$$\int_A Y \, dA + \int_{\ell} \bar{p}_y \, d\ell = q_{y,\text{vol}} + q_{y,\text{sup}} = q_y \tag{IV.8b}$$

$$\int_A Z \, dA + \int_{\mathcal{L}} \bar{p}_Z \, d\ell = q_{Z,\text{vol}} + q_{Z,\text{sup}} = q_Z \quad (\text{IV.8c})$$

$$\begin{aligned} - \int_A \left(Y \zeta - Z \eta \right) \, dA - \int_{\mathcal{L}} \left(\bar{p}_Y \zeta - \bar{p}_Z \eta \right) \, d\ell = \\ = m_{\xi,\text{vol}} + m_{\xi,\text{sup}} = m_{\xi} \end{aligned} \quad (\text{IV.8d})$$

$$\int_A X \hat{z} \, dA = m_Y \quad (\text{IV.8e})$$

$$- \int_A X \hat{y} \, dA = m_Z \quad (\text{IV.8f})$$

$$\int_A X \omega \, dA = b \quad (\text{IV.8g})$$

$$\int_A X \lambda \, dA = c, \quad (\text{IV.8h})$$

e considerando-se as integrais das forças prescritas nas seções das extremidades, definidas a seguir,

$$\bar{F}_x = \int_A \bar{\rho}_x \, dA \quad (\text{IV.9a})$$

$$\bar{F}_y = \int_A \bar{\rho}_y \, dA \quad (\text{IV.9b})$$

$$\bar{F}_z = \int_A \bar{\rho}_z \, dA \quad (\text{IV.9c})$$

$$\bar{M}_\xi = \int_A \left(\bar{\rho}_y \zeta - \bar{\rho}_z \eta \right) \, dA \quad (\text{IV.9d})$$

$$\bar{M}_y = - \int_A \bar{\rho}_x \hat{z} \, dA \quad (\text{IV.9e})$$

$$\bar{M}_z = \int_A \bar{\rho}_x \hat{y} \, dA \quad (\text{IV.9f})$$

$$\bar{B} = \int_A \bar{\rho}_x \omega \, dA \quad (\text{IV.9g})$$

$$\bar{C} = \int_A \bar{\rho}_x \lambda \, dA, \quad (\text{IV.9h})$$

bem como as integrais das forças de inércia, apresentadas nas igualdades (III.16), (III.25), (III.36), (III.46), (III.54), (III.63), (III.79) e (III.87), reescreve-se a equação (IV.7) na seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_0^l \left[\left(q_x - \mathcal{F}_x \right) \delta u + \left(q_y - \mathcal{F}_y \right) \delta v + \left(q_z - \mathcal{F}_z \right) \delta w + \right. \\ & + \left(m_\xi + \mathcal{F}_{yz} \right) \delta \phi + \left(m_z + \mathcal{F}_{xy} \right) \delta \theta_z - \left(m_y - \mathcal{F}_{xz} \right) \delta \theta_y - \\ & \left. - \left(b - \mathcal{F}_\omega \right) \delta \phi' - \left(c - \mathcal{F}_\lambda \right) \delta \psi \right] dx + \\ & + \left[\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \bar{F}_z \delta w - \bar{M}_\xi \delta \phi - \bar{M}_z \delta \theta_z + \right. \end{aligned}$$

$$+ \bar{M}_Y \delta\theta_Y - \bar{B} \delta\phi' - \bar{C} \delta\psi \Big]_0^\ell \quad (\text{IV.10})$$

Exprimindo, com base nas igualdades (II.57), as variações em θ_Z , θ_Y e ψ em função das variações correspondentes em ϕ , v' , w' e ϕ' e grupando os termos de mesma variação, obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_0^\ell \left[\left(q_x - \mathcal{F}_x \right) \delta u + \left(q_y - \mathcal{F}_y \right) \delta v + \left(q_z - \mathcal{F}_z \right) \delta w + \right. \\ & + \left(m_\xi + w' m_z + v' m_y - \phi' c + \mathcal{F}_{yz} + w' \mathcal{F}_{xy} - v' \mathcal{F}_{xz} + \right. \\ & + \left. \left. \phi' \mathcal{F}_\lambda \right) \delta\phi + \left(m_z + \phi m_y + \mathcal{F}_{xy} - \phi \mathcal{F}_{xz} \right) \delta v' + \right. \\ & + \left. \left(\phi m_z - m_y + \phi \mathcal{F}_{xy} + \mathcal{F}_{xz} \right) \delta w' - \right. \\ & \left. - \left(b + \phi c - \mathcal{F}_\omega - \phi \mathcal{F}_\lambda \right) \delta\phi' \right] dx + \\ & + \left[\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \bar{F}_z \delta w - \right. \end{aligned}$$

$$- \left(\bar{M}_\xi + w' \bar{M}_z + v' \bar{M}_y + \phi' \bar{C} \right) \delta\phi -$$

$$- \left[\left(\bar{M}_z + \phi \bar{M}_y \right) \delta v' + \left(-\phi \bar{M}_z + \bar{M}_y \right) \delta w' - \left(\bar{B} + \phi \bar{C} \right) \delta\phi' \right]_0^\ell$$

Integrando por partes, vem

$$\delta W_e = \int_0^\ell \left\{ \left(q_x - \mathcal{F}_x \right) \delta u + \right.$$

$$+ \left[q_y - \mathcal{F}_y - \left(m_z + \phi m_y + \mathcal{F}_{xy} - \phi \mathcal{F}_{xz} \right)' \right] \delta v +$$

$$+ \left[q_z - \mathcal{F}_z - \left(\phi m_z - m_y + \phi \mathcal{F}_{xy} + \mathcal{F}_{xz} \right)' \right] \delta w +$$

$$+ \left[m_\xi + w' m_z + v' m_y + \phi c' + \right.$$

$$\left. + \mathcal{F}_{yz} + w' \mathcal{F}_{xy} - v' \mathcal{F}_{xz} - \phi \mathcal{F}'_\lambda + \left(b - \mathcal{F}_\omega \right)' \right] \delta\phi \left. \right\} dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\bar{F}_x \delta u + \left(\bar{F}_y + m_z + \phi m_y + \mathcal{F}_{xy} - \phi \mathcal{F}_{xz} \right) \delta v + \right. \\
& + \left(\bar{F}_z + \phi m_z - m_y + \phi \mathcal{F}_{xy} + \mathcal{F}_{xz} \right) \delta w - \\
& - \left(\bar{M}_\xi + w' \bar{M}_z + v' \bar{M}_y + \phi' \bar{C} + b + \phi c - \mathcal{F}_\omega - \phi \mathcal{F}_\lambda \right) \delta \phi - \\
& \left. - \left(\bar{M}_z + \phi \bar{M}_y \right) \delta v' + \left(-\phi \bar{M}_z + \bar{M}_y \right) \delta w' - \left(\bar{B} + \phi \bar{C} \right) \delta \phi' \right]_0^\ell
\end{aligned}
\tag{IV.11}$$

IV.4 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE FLEXO-TORÇÃO

Igualando as expressões de δW_i e δW_e , apresentadas nas equações (IV.4) e (IV.11) respectivamente, e considerando que, no instante genérico t , as variações δu , δv , δw , $\delta \phi$ são arbitrárias no domínio, obtêm-se:

$$- N' = q_x - \mathcal{F}_x$$

$$- \left(v' N + \phi' M_\eta + M'_z + \phi M'_y \right)' =$$

$$= q_y - \mathcal{F}_y - \left(m_z + \phi m_y + \mathcal{F}_{xy} - \phi \mathcal{F}_{xz} \right)'$$

$$\begin{aligned}
 - \left(w' N + \phi' M_{\zeta} + \phi M'_Z - M'_Y \right)' &= \\
 &= q_Z - \mathcal{F}_Z - \left(\phi m_Z - m_Y + \phi \mathcal{F}_{XY} + \mathcal{F}_{XZ} \right)'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w' M'_Z + v' M'_Y - \phi C'' - \left(\phi' K + v' M_{\eta} + w' M_{\zeta} - T^{(1)} + B' \right)' &= \\
 &= m_{\xi} + w' m_Z + v' m_Y + \phi C' + \\
 &+ \mathcal{F}_{YZ} + w' \mathcal{F}_{XY} - v' \mathcal{F}_{XZ} - \phi \mathcal{F}'_{\lambda} + \left(b - \mathcal{F}_{\omega} \right)'
 \end{aligned}$$

ou

$$N' - \mathcal{F}_X = - q_X \quad (\text{IV.12a})$$

$$M''_Z + \left(\phi M_Y \right)'' + \left(v' N \right)' + z_e \left(\phi' N \right)' -$$

$$- \left(\phi m_Y \right)' - \mathcal{F}'_{XY} + \left(\phi \mathcal{F}_{XZ} \right)' - \mathcal{F}_Y = m'_Z - q_Y$$

(IV.12b)

$$- M_Y'' + (\phi M_Z)'' + (w' N)' - Y_e (\phi' N)' -$$

$$- (\phi m_Z)' - \mathcal{F}'_{xz} - (\phi \mathcal{F}_{xy})' - \mathcal{F}_z = - m'_Y - q_z$$

(IV.12c)

$$T^{(1)'} - B'' - \phi C'' - v'' M_Y - w'' M_Z - z_e (v' N)' +$$

$$+ Y_e (w' N)' - (\phi' K)' - \phi c' - v' m_Y - w' m_Z +$$

$$+ \mathcal{F}'_{\omega} + \phi \mathcal{F}'_{\lambda} + v' \mathcal{F}_{xz} - w' \mathcal{F}_{xy} - \mathcal{F}_{yz} = b' + m_{\xi}$$

(IV.12d)

tendo sido utilizadas, nas equações (b, c, d), as relações (III.68e,f). Desta forma, foram novamente obtidas as equações (III.90) a (III.93) do capítulo anterior. Mediante substituição, nessas equações, das expressões de integrais de tensões sobre a área da seção em termos dos deslocamentos dadas nas igualdades (II.63) e (II.71) e de integrais das forças de inércia, apresentadas nas equações (III.69), (III.79) e (III.87), chega-se finalmente, às equações diferenciais (III.94) da flexo-torção.

IV.5 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Da igualdade entre os trabalhos virtuais interno e externo, resultam ainda, nas extremidades $x = 0$ e $x = \ell$ da barra, as condições de contorno (cinemáticas e naturais) na forma seguinte:

$$N - \bar{F}_x = 0 \quad \text{ou} \quad \delta u = 0 \quad (u = \bar{u}) \quad (\text{IV.13a})$$

$$v' N + \phi' M_\eta + M'_z - m_z - \mathcal{F}_{xy} + \phi \left(M'_y - m_y + \mathcal{F}_{xz} \right) - \bar{F}_y = 0$$

$$\text{ou} \quad \delta v = 0 \quad (v = \bar{v}) \quad (\text{IV.13b})$$

$$w' N + \phi' M_\zeta + \phi \left(M'_z - m_z - \mathcal{F}_{xy} \right) - \left(M'_y - m_y + \mathcal{F}_{xz} \right) - \bar{F}_z = 0$$

$$\text{ou} \quad \delta w = 0 \quad (w = \bar{w}) \quad (\text{IV.13c})$$

$$\begin{aligned} & - v' M_\eta - w' M_\zeta - \phi' K + T^{(1)} - \left(B' + b - \mathcal{F}_\omega \right) - \\ & - \phi \left(C' + c - \mathcal{F}_\lambda \right) - \bar{M}_\xi + v' \left(M_y - \bar{M}_y \right) + \end{aligned}$$

$$+ w' \left(M_Z - \bar{M}_Z \right) + \phi' \left(c - \bar{c} \right) = 0$$

$$\text{ou } \delta\phi = 0 \quad \left(\phi = \bar{\phi} \right) \quad (\text{IV.13d})$$

$$\left(M_Z - \bar{M}_Z \right) + \phi \left(M_Y - \bar{M}_Y \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta v' = 0 \quad \left(v' = \bar{v}' \right) \quad (\text{IV.13e})$$

$$\left(M_Y - \bar{M}_Y \right) - \phi \left(M_Z - \bar{M}_Z \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w' = 0 \quad \left(w' = \bar{w}' \right) \quad (\text{IV.13f})$$

$$\left(B - \bar{B} \right) + \phi \left(c - \bar{c} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta\phi' = 0 \quad \left(\phi' = \bar{\phi}' \right) , \quad (\text{IV.13g})$$

com a barra superior denotando valores prescritos em $x = 0$ e $x = \ell$. Em virtude das relações (III.67d,e), (III.80), (III.88), (II.68c) e (III.68a,b,c,d), as equações (IV.13) assumem o seguinte aspecto:

$$F_x - \bar{F}_x = 0 \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \quad (\text{IV.14a})$$

$$F_Y - \bar{F}_Y = 0 \quad \text{ou} \quad v = \bar{v} \quad (\text{IV.14b})$$

$$F_Z - \bar{F}_Z = 0 \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \quad (\text{IV.14c})$$

$$\left(M_\xi - \bar{M}_\xi \right) + v' \left(M_Y - \bar{M}_Y \right) + w' \left(M_Z - \bar{M}_Z \right) + \phi' \left(C - \bar{C} \right) = 0$$

$$\text{ou} \quad \phi = \bar{\phi} \quad (\text{IV.14d})$$

$$\left(M_Z - \bar{M}_Z \right) + \phi \left(M_Y - \bar{M}_Y \right) = 0 \quad \text{ou} \quad v' = \bar{v}' \quad (\text{IV.14e})$$

$$\left(M_Y - \bar{M}_Y \right) - \phi \left(M_Z - \bar{M}_Z \right) = 0 \quad \text{ou} \quad w' = \bar{w}' \quad (\text{IV.14f})$$

$$\left(B - \bar{B} \right) + \phi \left(C - \bar{C} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \phi' = \bar{\phi}' \quad (\text{IV.14g})$$

Uma vez que $\delta\theta_Z = \delta v' + \phi \delta w' + w' \delta\phi$ e $\delta\theta_Y = \delta w' - \phi \delta v' - v' \delta\phi$, podem-se substituir as equações (IV.14d,e,f) pelo seguinte conjunto de condições de contorno alternativas:

$$\left(M_\xi - \bar{M}_\xi \right) + \phi' \left(C - \bar{C} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \phi = \bar{\phi}$$

$$M_Z - \bar{M}_Z = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_Z = \bar{\theta}_Z$$

$$M_Y - \bar{M}_Y = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_Y = \bar{\theta}_Y$$

Com base nas relações (III.68e,f), podem-se apresentar as equações (IV.13), ainda, na seguinte maneira:

$$N - \bar{F}_x = 0 \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \quad (\text{IV.15a})$$

$$M'_Z + \left(\phi M_Y \right)' + v' N + z_e \phi' N - m_Z - \phi m_Y -$$

$$- \mathcal{F}_{xy} + \phi \mathcal{F}_{xz} - \bar{F}_y = 0 \quad \text{ou} \quad v = \bar{v} \quad (\text{IV.15b})$$

$$- M'_Y + \left(\phi M_Z \right)' + w' N - y_e \phi' N + m_Y - \phi m_Z -$$

$$- \mathcal{F}_{xz} - \phi \mathcal{F}_{xy} - \bar{F}_z = 0 \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \quad (\text{IV.15c})$$

$$T^{(1)} - B' - \phi C' - v' M_Y - w' M_Z - z_e v' N + y_e w' N -$$

$$- \phi' K - b - \phi c + \mathcal{F}_\omega + \phi \mathcal{F}_\lambda - \bar{M}_\xi + v' \left(M_Y - \bar{M}_Y \right) +$$

$$+ w' \left(M_Z - \bar{M}_Z \right) + \phi' \left(C - \bar{C} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \phi = \bar{\phi}$$

$$(\text{IV.15d})$$

$$\left(M_Z - \bar{M}_Z \right) + \phi \left(M_Y - \bar{M}_Y \right) = 0 \quad \text{ou} \quad v' = \bar{v}' \quad (\text{IV.15e})$$

$$\left(M_Y - \bar{M}_Y \right) - \phi \left(M_Z - \bar{M}_Z \right) = 0 \quad \text{ou} \quad w' = \bar{w}' \quad (\text{IV.15f})$$

$$\left(B - \bar{B} \right) + \phi \left(C - \bar{C} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \phi' = \bar{\phi}' \quad (\text{IV.15g})$$

Tendo em vista as expressões de integrais de tensões dadas nas equações (II.63) e (II.71) e de integrais das forças de inércia, apresentadas nas igualdades (III.69), (III.79) e (III.87), escrevem-se, finalmente, as condições de contorno em função dos deslocamentos na forma:

$$E \left[A u' - \frac{I_e}{2} \psi' + \frac{A}{2} v'^2 + \frac{A}{2} w'^2 + \frac{I_e}{2} \phi'^2 + \right. \\ \left. + z_e A v' \phi' - y_e A w' \phi' \right] - \bar{F}_x = 0 \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \quad (\text{IV.16a})$$

$$E \left[- I_Z \theta_Z'' - I_{YZ} \theta_Y'' - \frac{Q_Z}{2} \psi'' + Q_Z \phi' \phi'' - I_{YZ} \left(v' \phi' \right)' + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + I_Z (w' \phi')' + I_{YZ} (\phi \theta'_Z)' + I_Y (\phi \theta'_Y)' + \frac{Q_Y}{2} (\phi \psi')' - \\
& - \frac{Q_Y}{2} (\phi \phi'^2)' + I_Y (\phi v' \phi')' - I_{YZ} (\phi w' \phi')' + \\
& + A u' v' - \frac{I_e}{2} v' \psi' + \frac{A}{2} v'^3 + \frac{A}{2} v' w'^2 + \\
& + \frac{I_e}{2} v' \phi'^2 + z_e A v'^2 \phi' - y_e A v' w' \phi' + \\
& + z_e A u' \phi' - z_e \frac{I_e}{2} \phi' \psi' + z_e \frac{A}{2} v'^2 \phi' + \\
& + z_e \frac{A}{2} w'^2 \phi' + z_e \frac{I_e}{2} \phi'^3 + z_e^2 A v' \phi'^2 - \\
& - y_e z_e A w' \phi'^2 \Big) - m_Z - \phi m_Y + \mu \left(I_Z \ddot{\theta}_Z + I_{YZ} \ddot{\theta}_Y + \right. \\
& \left. + \frac{Q_Z}{2} \ddot{\psi} - I_{YZ} \phi \ddot{\theta}_Z - I_Y \phi \ddot{\theta}_Y - \frac{Q_Y}{2} \phi \ddot{\psi} \right) - \bar{F}_Y = 0
\end{aligned}$$

ou $v = \bar{v}$

(IV.16b)

$$\begin{aligned}
& E \left(- I_{YZ} \theta''_z - I_Y \theta''_Y - \frac{Q_Y}{2} \psi'' + Q_Y \phi' \phi'' - I_Y (v' \phi')' + \right. \\
& + I_{YZ} (w' \phi')' - I_Z (\phi \theta'_z)' - I_{YZ} (\phi \theta'_Y)' - \frac{Q_Z}{2} (\phi \psi')' + \\
& + \frac{Q_Z}{2} (\phi \phi'^2)' - I_{YZ} (\phi v' \phi')' + I_Z (\phi w' \phi')' + \\
& + A u' w' - \frac{I_e}{2} w' \psi' + \frac{A}{2} v'^2 w' + \frac{A}{2} w'^3 + \\
& + \frac{I_e}{2} w' \phi'^2 + z_e A v' w' \phi' - y_e A w'^2 \phi' - \\
& - y_e A u' \phi' + y_e \frac{I_e}{2} \phi' \psi' - y_e \frac{A}{2} v'^2 \phi' - \\
& - y_e \frac{A}{2} w'^2 \phi' - y_e \frac{I_e}{2} \phi'^3 - y_e z_e A v' \phi'^2 + \\
& \left. + y_e^2 A w' \phi'^2 \right) + m_Y - \phi m_Z + \mu \left(I_{YZ} \ddot{\theta}_z + \right. \\
& + I_Y \ddot{\theta}_Y + \frac{Q_Y}{2} \ddot{\psi} + I_Z \phi \ddot{\theta}_z + I_{YZ} \phi \ddot{\theta}_Y +
\end{aligned}$$

$$\left. + \frac{Q_Z}{2} \phi \dot{\psi} \right) - \bar{F}_Z = 0 \quad \text{ou} \quad w = \bar{w}$$

(IV.16c)

$$\begin{aligned} & - G J_T \phi' + E \left(I_\omega \phi''' + \frac{Q_\omega}{2} \psi'' - Q_\omega \phi' \phi'' - \frac{I_e}{2} \phi u'' + \right. \\ & \quad + \frac{Q_Z}{2} \phi \theta_Z'' + \frac{Q_Y}{2} \phi \theta_Y'' + \frac{Q_\omega}{2} \phi \phi''' + \\ & \quad + \frac{R_e}{4} \phi \psi'' - \frac{I_e}{2} \phi v' v'' - \frac{I_e}{2} \phi w' w'' - \\ & \quad - \frac{R_e}{2} \phi \phi' \phi'' + \frac{1}{2} \left(Q_Y - z_e I_e \right) \phi \left(v' \phi' \right)' - \\ & \quad - \frac{1}{2} \left(Q_Z - y_e I_e \right) \phi \left(w' \phi' \right)' - I_{YZ} v' \theta_Z' - \\ & \quad - I_Y v' \theta_Y' - \frac{Q_Y}{2} v' \psi' + \frac{Q_Y}{2} v' \phi'^2 - \\ & \quad - I_Y v'^2 \phi' + I_{YZ} v' w' \phi' + I_Z w' \theta_Z' + \\ & \quad \left. + I_{YZ} w' \theta_Y' + \frac{Q_Z}{2} w' \psi' - \frac{Q_Z}{2} w' \phi'^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + I_{YZ} v' w' \phi' - I_Z w'^2 \phi' - z_e A u' v' + \\
& + z_e \frac{I_e}{2} v' \psi' - z_e \frac{A}{2} v'^3 - z_e \frac{A}{2} v' w'^2 - \\
& - z_e \frac{I_e}{2} v' \phi'^2 - z_e^2 A v'^2 \phi' + \\
& + y_e z_e A v' w' \phi' + y_e A u' w' - \\
& - y_e \frac{I_e}{2} w' \psi' + y_e \frac{A}{2} v'^2 w' + y_e \frac{A}{2} w'^3 + \\
& + y_e \frac{I_e}{2} w' \phi'^2 + y_e z_e A v' w' \phi' - \\
& - y_e^2 A w'^2 \phi' - I_e u' \phi' + Q_Z \phi' \theta'_Z + Q_Y \phi' \theta'_Y + \\
& + Q_\omega \phi' \phi'' + \frac{R_e}{2} \phi' \psi' - \frac{I_e}{2} v'^2 \phi' - \\
& - \frac{I_e}{2} w'^2 \phi' - \frac{R_e}{2} \phi'^3 + \\
& + \left(Q_Y - z_e I_e \right) v' \phi'^2 - \left(Q_Z - y_e I_e \right) w' \phi'^2 \Big) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - b - \phi c + \mu \left(- I_{\omega} \ddot{\phi}' - \frac{Q_{\omega}}{2} \dot{\psi} + \frac{I_e}{2} \phi \ddot{u} - \right. \\
& \left. - \frac{Q_z}{2} \phi \ddot{\theta}_z - \frac{Q_y}{2} \phi \ddot{\theta}_y - \frac{Q_{\omega}}{2} \phi \ddot{\phi}' - \frac{R_e}{4} \phi \dot{\psi} \right) - \\
& - \bar{M}_{\xi} + v' \left[E \left(I_{YZ} \theta'_z + I_Y \theta'_y + \frac{Q_y}{2} \psi' - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{Q_y}{2} \phi'^2 + I_Y v' \phi' - I_{YZ} w' \phi' \right) - \bar{M}_Y \right] + \\
& + w' \left[E \left(- I_z \theta'_z - I_{YZ} \theta'_y - \frac{Q_z}{2} \psi' + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Q_z}{2} \phi'^2 - I_{YZ} v' \phi' + I_z w' \phi' \right) - \bar{M}_z \right] + \\
& + \phi' \left[E \left(\frac{I_e}{2} u' - \frac{Q_z}{2} \theta'_z - \frac{Q_y}{2} \theta'_y - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{Q_{\omega}}{2} \phi'' - \frac{R_e}{4} \psi' + \frac{I_e}{4} v'^2 + \frac{I_e}{4} w'^2 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R_e}{4} \phi'^2 - \frac{1}{2} \left(Q_Y - z_e I_e \right) v' \phi' + \\
& + \frac{1}{2} \left(Q_Z - y_e I_e \right) w' \phi' \Big] - \bar{C} \Big] = 0 \quad \text{ou} \quad \phi = \bar{\phi} \\
& \hspace{25em} \text{(IV.16d)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \left[- I_Z \theta'_Z - I_{YZ} \theta'_Y - \frac{Q_Z}{2} \psi' + \frac{Q_Z}{2} \phi'^2 - I_{YZ} v' \phi' + \right. \\
\left. + I_Z w' \phi' \right] - \bar{M}_Z + \phi \left[E \left(I_{YZ} \theta'_Z + I_Y \theta'_Y + \frac{Q_Y}{2} \psi' - \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{Q_Y}{2} \phi'^2 + I_Y v' \phi' - I_{YZ} w' \phi' \right) - \bar{M}_Y \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad v' = \bar{v}' \hspace{25em} \text{(IV.16e)}$$

$$\begin{aligned}
E \left[I_{YZ} \theta'_Z + I_Y \theta'_Y + \frac{Q_Y}{2} \psi' - \frac{Q_Y}{2} \phi'^2 + I_Y v' \phi' - \right. \\
\left. - I_{YZ} w' \phi' \right] - \bar{M}_Y - \phi \left[E \left(- I_Z \theta'_Z - I_{YZ} \theta'_Y - \frac{Q_Z}{2} \psi' + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{Q_z}{2} \phi'^2 - I_{YZ} v' \phi' + I_z w' \phi' \Big) - \bar{M}_z \Big] = 0$$

$$\text{ou } w' = \bar{w}' \quad (\text{IV.16f})$$

$$\begin{aligned} & E \left(- I_\omega \phi'' - \frac{Q_\omega}{2} \psi' + \frac{Q_\omega}{2} \phi'^2 \right) - \bar{B} + \phi \left[E \left(\frac{I_e}{2} u' - \right. \right. \\ & - \frac{Q_z}{2} \theta'_z - \frac{Q_y}{2} \theta'_y - \frac{Q_\omega}{2} \phi'' - \frac{R_e}{4} \psi' + \frac{I_e}{4} v'^2 + \\ & + \frac{I_e}{4} w'^2 + \frac{R_e}{4} \phi'^2 - \frac{1}{2} \left(Q_y - z_e I_e \right) v' \phi' + \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left(Q_z - y_e I_e \right) w' \phi' - \bar{C} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ou } \phi' = \bar{\phi}' \quad (\text{IV.16g})$$

Observe-se que as funções incógnitas $u(x,t)$, $v(x,t)$, $w(x,t)$ e $\phi(x,t)$, além de atenderem às equações diferenciais (equações (III.94)) que governam o problema e às condições de contorno (expressões (IV.16)), devem ainda satisfazer as

condições iniciais do problema (deslocamentos e velocidades iniciais).

IV.6 - CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA FORMULAÇÃO APRESENTADA POR CHEN E ATSUTA (1977, p. 541-550)

Neste item será sintetizada a dedução, mediante enfoque variacional e com a utilização do princípio dos trabalhos virtuais, das equações diferenciais que regem o comportamento estático de hastes prismáticas de paredes delgadas com seção aberta submetidas à flexo-torção, apresentadas por CHEN e ATSUTA (1977, p. 541-550). Entretanto, para efeito de comparação com a formulação desenvolvida neste capítulo, serão usados o encaminhamento, a notação e a convenção de sinais aqui adotados.

No referido trabalho as relações deformação-deslocamento foram utilizadas na forma:

$$\hat{\varepsilon}_x = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} \right)^2 \right]$$

(IV.17a)

$$\hat{\gamma}_{xs} = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s}$$

(IV.17b)

Com base na hipótese de que a projeção do *contour* da seção transversal sobre seu plano original não se altera durante a deformação, foram obtidas as expressões (II.38) para \hat{u}_y e \hat{u}_z ; isto é,

$$\hat{u}_y = v - \phi \hat{\zeta} \quad (\text{IV.18a})$$

$$\hat{u}_z = w + \phi \hat{\eta} \quad (\text{IV.18b})$$

Isto equivale a obter as expressões (II.37) para \hat{u}_n e \hat{u}_s , ou seja,

$$\hat{u}_n = v \cos \alpha + w \sin \alpha - \phi r_s \quad (\text{IV.19a})$$

$$\hat{u}_s = -v \sin \alpha + w \cos \alpha + \phi r_n \quad (\text{IV.19b})$$

A expressão de \hat{u}_x foi deduzida a partir da hipótese de que o parâmetro e_{xs} (e não a distorção γ_{xs} , como afirma o autor) é nulo na superfície média e da expressão de \hat{u}_s , dada na igualdade (IV.19b). Foi considerado, portanto,

$$\hat{e}_{xs} = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} = 0, \quad (\text{IV.20})$$

em lugar de $\hat{\gamma}_{XS} = 0$, conduzindo, então, à mesma expressão para \hat{u}_X utilizada na análise linear:

$$\hat{u}_X = u - v' \hat{y} - w' \hat{z} - \phi' \omega \quad (\text{IV.21})$$

Em virtude das relações (IV.17), o trabalho virtual interno,

$$\delta W_i = \int_V \left(\sigma_X \delta \hat{\varepsilon}_X + \tau_{XS} \delta \hat{\gamma}_{XS} \right) dV, \quad (\text{IV.22})$$

poderia ser expresso na forma:

$$\begin{aligned} \delta W_i = \int_V \left\{ \sigma_X \delta \left[\frac{\partial \hat{u}_X}{\partial X} \right] + \tau_{XS} \delta \left[\frac{\partial \hat{u}_X}{\partial S} + \frac{\partial \hat{u}_S}{\partial X} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_X}{2} \delta \left[\left(\frac{\partial \hat{u}_N}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}_S}{\partial X} \right)^2 \right] + \tau_{XS} \delta \left[\frac{\partial \hat{u}_N}{\partial X} \frac{\partial \hat{u}_N}{\partial S} \right] \right\} dV \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Tendo em vista as expressões de \hat{u}_X , dada na igualdade (IV.21), e de \hat{u}_N e \hat{u}_S , apresentadas nas equações (IV.19), δW_i tornar-se-ia

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & \int_0^{\ell} \left[N \delta u' - M_z \delta v'' + M_y \delta w'' - B \delta \phi'' + v' N \delta v' + \right. \\
& + w' N \delta w' + \phi' K \delta \phi' + \phi' M_\eta \delta v' + v' M_\eta \delta \phi' + \\
& + \phi' M_\zeta \delta w' + w' M_\zeta \delta \phi' - v' V_z \delta \phi - \phi V_z \delta v' + \\
& \left. + w' V_y \delta \phi + \phi V_y \delta w' + \phi' R \delta \phi + \phi R \delta \phi' \right] dx
\end{aligned}$$

(IV.24)

Entretanto, a expressão apresentada para δW_i por CHEN e ATSUTA é equivalente à seguinte:

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & \int_0^{\ell} \left[N \delta u' - M_z \delta v'' + M_y \delta w'' - B \delta \phi'' + v' N \delta v' + \right. \\
& + w' N \delta w' + \phi' K \delta \phi' + \phi' M_\eta \delta v' + v' M_\eta \delta \phi' + \\
& + \phi' M_\zeta \delta w' + w' M_\zeta \delta \phi' - v' V_z \delta \phi - \phi V_z \delta v' +
\end{aligned}$$

$$\left. + w' V_Y \delta\phi + \phi V_Y \delta w' - T^{(1)} \delta\phi' \right] dx \quad (IV.25)$$

Como mostra a equação (IV.24), por não ter sido considerada *a priori* a variação de e_{XS} na espessura, o termo envolvendo o tursor de Saint-Venant não surgiu na igualdade (IV.25) de forma natural. Nota-se também a ausência, na equação (IV.25), dos termos contendo a grandeza R (que por equilíbrio se interliga à grandeza C), presentes na igualdade (IV.24) e que são abandonados pelo autor sem qualquer justificativa explícita.

Deve-se salientar ainda que em virtude de ter sido considerado $\hat{e}_{XS} = 0$, em lugar de $\hat{\gamma}_{XS} = 0$, surgiu, na expressão (IV.22) do trabalho virtual interno, uma parcela envolvendo τ_{XS} e $\delta\hat{\gamma}_{XS}$. Isto acarretou o aparecimento, na igualdade (IV.25), de termos contendo as grandezas V_Y e V_Z e, portanto, a necessidade de utilização, no desenvolvimento da formulação, das relações

$$M'_Z = V_Y \quad (IV.26a)$$

$$M'_Y = -V_Z \quad , \quad (IV.26b)$$

extraídas através da consideração do equilíbrio, fazendo com que o procedimento variacional não tenha sido utilizado na sua forma padrão.

No trabalho em questão foram consideradas apenas forças de superfície. A expressão apresentada para o trabalho virtual externo equivale à seguinte:

$$\delta W_e = \int_0^{\ell} \left(q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w \right) dx + \left[\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \right. \\ \left. + \bar{F}_z \delta w - \bar{M}_\xi \delta \phi - \bar{M}_z \delta v' + \bar{M}_y \delta w' - \bar{B} \delta \phi' \right]_0^{\ell}$$

(IV.27)

Nesta equação o autor desconsiderou, portanto, os termos envolvendo as grandezas m_ξ , m_y , m_z , b e c , sendo que a grandeza c não poderia mesmo aparecer na formulação devido à expressão usada para \hat{u}_x .

Realizando as integrações indicadas nas expressões de δW_i e δW_e , dadas nas equações (IV.25) e (IV.27) respectivamente, igualando-as e considerando que, no instante genérico t , as variações δu , δv , δw , $\delta \phi$ são arbitrárias no domínio, foram obtidas as equações diferenciais da flexo-torção

$$N' = -q$$

(IV.28a)

$$M_Z'' + \left(\phi M_Y \right)'' + \left(v' N \right)' + z_e \left(\phi' N \right)' = - q_Y \quad (\text{IV.28b})$$

$$- M_Y'' + \left(\phi M_Z \right)'' + \left(w' N \right)' - y_e \left(\phi' N \right)' = - q_Z \quad (\text{IV.28c})$$

$$\begin{aligned} T^{(1)'} - B'' - v'' M_Y - w'' M_Z - z_e \left(v' N \right)' + y_e \left(w' N \right)' - \\ - \left(\phi' K \right)' = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.28d})$$

e as condições de contorno

$$N - \bar{F}_x = 0 \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \quad (\text{IV.29a})$$

$$M_Z' + \left(\phi M_Y \right)' + v' N + z_e \phi' N - \bar{F}_Y = 0 \quad \text{ou} \quad v = \bar{v} \quad (\text{IV.29b})$$

$$- M_Y' + \left(\phi M_Z \right)' + w' N - y_e \phi' N - \bar{F}_Z = 0 \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \quad (\text{IV.29c})$$

$$T^{(1)} - B' - v' M_Y - w' M_Z - z_e v' N + y_e w' N - \phi' K -$$

$$-\bar{M}_\xi = 0 \quad \text{ou} \quad \phi = \bar{\phi} \quad (\text{IV.29d})$$

$$M_z - \bar{M}_z = 0 \quad \text{ou} \quad v' = \bar{v}' \quad (\text{IV.29e})$$

$$M_y - \bar{M}_y = 0 \quad \text{ou} \quad w' = \bar{w}' \quad (\text{IV.29f})$$

$$B - \bar{B} = 0 \quad \text{ou} \quad \phi' = \bar{\phi}' \quad (\text{IV.29g})$$

Para efeito de comparação com as equações (IV.28) e (IV.29), devem-se particularizar as equações (IV.12) e (IV.15) do presente trabalho para a análise estática (desconsiderando os termos envolvendo as forças generalizadas de inércia bem como suas derivadas) e ainda, consistentemente com o trabalho de CHEN e ATSUTA, anular m_ξ , m_y , m_z e b , dispensando, também, c por extensão. As equações de equilíbrio ficariam:

$$N' = -q_x \quad (\text{IV.30a})$$

$$M_z'' + \left(\phi M_y \right)'' + \left(v' N \right)' + z_e \left(\phi' N \right)' = -q_y \quad (\text{IV.30b})$$

$$-M_y'' + \left(\phi M_z \right)'' + \left(w' N \right)' - y_e \left(\phi' N \right)' = -q_z \quad (\text{IV.30c})$$

$$\begin{aligned}
T^{(1)'} - B'' - \phi C'' - v'' M_Y - w'' M_Z - z_e (v' N)' + \\
+ Y_e (w' N)' - (\phi' K)' = 0
\end{aligned} \tag{IV.30d}$$

e as condições de contorno assumiriam a forma:

$$N - \bar{F}_x = 0 \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \tag{IV.31a}$$

$$\begin{aligned}
M_Z' + (\phi M_Y)' + v' N + z_e \phi' N - \bar{F}_y = 0 \quad \text{ou} \quad v = \bar{v} \\
\end{aligned} \tag{IV.31b}$$

$$\begin{aligned}
-M_Y' + (\phi M_Z)' + w' N - Y_e \phi' N - \bar{F}_z = 0 \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \\
\end{aligned} \tag{IV.31c}$$

$$\begin{aligned}
T^{(1)} - B' - \phi C' - v' M_Y - w' M_Z - z_e v' N + Y_e w' N - \\
- \phi' K - \bar{M}_\xi + v' (M_Y - \bar{M}_Y) + w' (M_Z - \bar{M}_Z) + \\
+ \phi' (C - \bar{C}) = 0 \quad \text{ou} \quad \phi = \bar{\phi}
\end{aligned}$$

(IV.31d)

$$\left(M_Z - \bar{M}_Z \right) + \phi \left(M_Y - \bar{M}_Y \right) = 0 \quad \text{ou} \quad v' = \bar{v}' \quad (\text{IV.31e})$$

$$\left(M_Y - \bar{M}_Y \right) - \phi \left(M_Z - \bar{M}_Z \right) = 0 \quad \text{ou} \quad w' = \bar{w}' \quad (\text{IV.31f})$$

$$\left(B - \bar{B} \right) + \phi \left(C - \bar{C} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \phi' = \bar{\phi}' \quad (\text{IV.31g})$$

Comparando-se as equações de equilíbrio (equações (IV.28) e (IV.30)), nota-se que as três primeiras são idênticas nos dois trabalhos. Entretanto, na última equação do trabalho de CHEN e ATSUTA (equação (IV.28d)) falta o termo $-\phi C''$, que teria aparecido na forma $-\phi R'$ se o autor não tivesse abandonado os termos envolvendo a grandeza R , presentes na equação (IV.24). Lembre-se ainda que o termo $T^{(1)'}$, embora presente na equação (IV.28d), não surgiu de maneira natural.

Quanto às condições de contorno (igualdades (IV.29) e (IV.31)), observa-se que as três primeiras são coincidentes nas duas formulações. Já da equação (IV.29d) estão ausentes, além do termo $-\phi C'$ (que poderia ter aparecido na forma $-\phi R$), os termos $v' \left(M_Y - \bar{M}_Y \right)$, $w' \left(M_Z - \bar{M}_Z \right)$, $\phi' \left(C - \bar{C} \right)$ por causa da expressão usada para \hat{u}_X . Pelo mesmo motivo estão ausen-

tes das equações (IV.29e,f,g) respectivamente os termos $\phi \left(M_Y - \bar{M}_Y \right)$, $-\phi \left(M_Z - \bar{M}_Z \right)$, $\phi \left(C - \bar{C} \right)$.

Deve-se salientar, no entanto, que as equações de equilíbrio e as condições de contorno do trabalho de CHEN e ATSUTA se expressas em função dos deslocamentos difeririam bastante das expressões apresentadas no presente trabalho (igualdades (III.94) e (IV.16)), face às diferenças nas expressões das integrais das tensões em termos dos deslocamentos.

IV.7 - PARTICULARIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO PARA A ANÁLISE LINEAR

Como foi visto no item II.6, as relações deformação-deslocamento efetivamente utilizadas na construção da teoria, no âmbito de comportamento linear, passam a ser dadas pelas equações (II.91). Assim, é através dessas igualdades que as variações nas componentes ϵ_x e $\gamma_{XS}^{(1)}$, no instante t , se associam às correspondentes variações nas derivadas dos deslocamentos u , v , w e ϕ . Em vista disso, a equação (IV.2) do trabalho virtual interno se torna:

$$\delta W_i = \int_V \left[\sigma_x \delta \left(u' - v'' \hat{y} - w'' \hat{z} - \phi'' w \right) + \tau_{XS}^{(1)} \delta \left(2 \phi' n \right) \right] dV$$

Usando a nomenclatura apresentada nas equações (II.61a,b,c,d) e (II.70), escreve-se:

$$\delta W_i = \int_0^\ell \left[N \delta u' - M_Z \delta v'' + M_Y \delta w'' - B \delta \phi'' - T^{(1)} \delta \phi' \right] dx \quad (IV.32)$$

Integrando por partes, vem:

$$\begin{aligned} \delta W_i = & \int_0^\ell \left[-N' \delta u - M_Z'' \delta v + M_Y'' \delta w + \left(T^{(1)'} - B'' \right) \delta \phi \right] dx + \\ & + \left[N \delta u + M_Z' \delta v - M_Y' \delta w - \left(T^{(1)} - B' \right) \delta \phi - \right. \\ & \left. - M_Z \delta v' + M_Y \delta w' - B \delta \phi' \right]_0^\ell \end{aligned} \quad (IV.33)$$

Por outro lado, tendo em vista que as variações em \hat{u}_x , \hat{u}_y e \hat{u}_z , u_y e u_z relacionam-se às correspondentes variações em u , v , w , ϕ , v' , w' , ϕ' através das equações (II.88), (II.38), (II.56c) respectivamente, a equação (IV.6) para o trabalho virtual externo assume o aspecto:

$$\begin{aligned}
\delta W_e = & \int_0^\ell \left\{ \int_A \left[\left(X - \mu \ddot{u}_x \right) \delta \left(u - v' \hat{y} - w' \hat{z} - \phi' \omega \right) + \right. \right. \\
& + Y \delta \left(v - \phi \zeta \right) - \mu \ddot{u}_y \delta \left(v - \phi \zeta \right) + Z \delta \left(w + \phi \eta \right) - \\
& \left. \left. - \mu \ddot{u}_z \delta \left(w + \phi \eta \right) \right] dA + \int_{\mathcal{L}} \left[\bar{p}_y \delta \left(v - \phi \zeta \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{p}_z \delta \left(w + \phi \eta \right) \right] d\mathcal{L} \right\} dx + \left[\int_A \left(\bar{\rho}_x \delta \left(u - v' \hat{y} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - w' \hat{z} - \phi' \omega \right) + \bar{\rho}_y \delta \left(v - \phi \zeta \right) + \bar{\rho}_z \delta \left(w + \phi \eta \right) \right) dA \right]_0^\ell
\end{aligned}$$

Considerando-se as equações (IV.8), (IV.9) e a nomenclatura apresentada, para as forças generalizadas de inércia, nas equações (III.16), (III.25), (III.36), (III.46), (III.54), (III.63) e (III.79), escreve-se:

$$\delta W_e = \int_0^\ell \left[\left(q_x - \mathcal{F}_x \right) \delta u + \left(q_y - \mathcal{F}_y \right) \delta v + \left(q_z - \mathcal{F}_z \right) \delta w + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(m_{\xi} + \mathcal{F}_{YZ} \right) \delta\phi + \left(m_z + \mathcal{F}_{XY} \right) \delta v' - \left(m_Y - \mathcal{F}_{XZ} \right) \delta w' - \\
& - \left(b - \mathcal{F}_{\omega} \right) \delta\phi' \Big] dx + \left[\bar{F}_X \delta u + \bar{F}_Y \delta v + \bar{F}_Z \delta w - \right. \\
& \left. - \bar{M}_{\xi} \delta\phi - \bar{M}_Z \delta v' + \bar{M}_Y \delta w' - \bar{B} \delta\phi' \right]_0^{\ell}
\end{aligned}$$

(IV.34)

Integrando por partes, vem:

$$\begin{aligned}
\delta W_e &= \int_0^{\ell} \left\{ \left[q_X - \mathcal{F}_X \right] \delta u + \left[q_Y - \mathcal{F}_Y - \left(m_z + \mathcal{F}_{XY} \right)' \right] \delta v + \right. \\
& + \left[q_Z - \mathcal{F}_Z + \left(m_Y - \mathcal{F}_{XZ} \right)' \right] \delta w + \\
& + \left. \left[m_{\xi} + \mathcal{F}_{YZ} + \left(b - \mathcal{F}_{\omega} \right)' \right] \delta\phi \right\} dx + \\
& + \left[\bar{F}_X \delta u + \left(\bar{F}_Y + m_z + \mathcal{F}_{XY} \right) \delta v + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\bar{F}_z - m_Y + \mathcal{F}_{xz} \right) \delta w - \left(\bar{M}_\xi + b - \mathcal{F}_\omega \right) \delta \phi - \\
& - \bar{M}_z \delta v' + \bar{M}_Y \delta w' - \bar{B} \delta \phi' \Big]_0^\ell \quad (\text{IV.35})
\end{aligned}$$

Igualando as expressões de δW_i e δW_e , dadas nas equações (IV.33) e (IV.35) respectivamente, e considerando que, no instante genérico t , as variações δu , δv , δw , $\delta \phi$ são arbitrárias no domínio, obtêm-se, novamente, as equações (III.140):

$$N' - \mathcal{F}_x = -q_x \quad (\text{IV.36a})$$

$$M''_z - \mathcal{F}'_{xy} - \mathcal{F}_y = m'_z - q_y \quad (\text{IV.36b})$$

$$-M''_Y - \mathcal{F}'_{xz} - \mathcal{F}_z = -m'_Y - q_z \quad (\text{IV.36c})$$

$$T^{(1)'} - B'' + \mathcal{F}'_\omega - \mathcal{F}_{yz} = b' + m_\xi \quad (\text{IV.36d})$$

Da igualdade entre os trabalhos virtuais interno e externo, resultam ainda, em $x = 0$ e $x = \ell$, as condições de contorno na forma:

$$N - \bar{F}_x = 0 \quad \text{ou} \quad \delta u = 0 \quad (u = \bar{u}) \quad (\text{IV.37a})$$

$$M'_z - m_z - \mathcal{F}_{xy} - \bar{F}_y = 0 \quad \text{ou} \quad \delta v = 0 \quad (v = \bar{v}) \quad (\text{IV.37b})$$

$$- \left(M'_y - m_y + \mathcal{F}_{xz} \right) - \bar{F}_z = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w = 0 \quad (w = \bar{w}) \quad (\text{IV.37c})$$

$$T^{(1)} - \left(B' + b - \mathcal{F}_\omega \right) - \bar{M}_\xi = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \phi = 0 \quad (\phi = \bar{\phi}) \quad (\text{IV.37d})$$

$$M_z - \bar{M}_z = 0 \quad \text{ou} \quad \delta v' = 0 \quad (v' = \bar{v}') \quad (\text{IV.37e})$$

$$M_y - \bar{M}_y = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w' = 0 \quad (w' = \bar{w}') \quad (\text{IV.37f})$$

$$B - \bar{B} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \phi' = 0 \quad (\phi' = \bar{\phi}') \quad (\text{IV.37g})$$

Em virtude das relações (II.68c), (III.135d,e) e (III.137), as equações (IV.37) assumem o seguinte aspecto:

$$N - \bar{F}_x = 0 \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \quad (\text{IV.38a})$$

$$V_y - \bar{F}_y = 0 \quad \text{ou} \quad v = \bar{v} \quad (\text{IV.38b})$$

$$V_z - \bar{F}_z = 0 \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \quad (\text{IV.38c})$$

$$T - \bar{M}_\xi = 0 \quad \text{ou} \quad \phi = \bar{\phi} \quad (\text{IV.38d})$$

$$M_z - \bar{M}_z = 0 \quad \text{ou} \quad v' = \bar{v}' \quad (\text{IV.38e})$$

$$M_y - \bar{M}_y = 0 \quad \text{ou} \quad w' = \bar{w}' \quad (\text{IV.38f})$$

$$B - \bar{B} = 0 \quad \text{ou} \quad \phi' = \bar{\phi}' \quad (\text{IV.38g})$$

Mediante substituição das expressões das integrais de tensões em termos dos deslocamentos, dadas nas equações (II.93) e (III.139), obtêm-se, finalmente:

$$E A u' - \bar{F}_x = 0 \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \quad (\text{IV.39a})$$

$$- E \left(I_Z v''' + I_{YZ} w''' \right) - m_Z + \mu \left(I_Z \ddot{v}' + I_{YZ} \ddot{w}' \right) - \bar{F}_Y = 0$$

$$\text{ou} \quad v = \bar{v} \quad (\text{IV.39b})$$

$$- E \left(I_{YZ} v''' + I_Y w''' \right) + m_Y + \mu \left(I_{YZ} \ddot{v}' + I_Y \ddot{w}' \right) - \bar{F}_Z = 0$$

$$\text{ou} \quad w = \bar{w} \quad (\text{IV.39c})$$

$$- G J_T \phi' + E I_\omega \phi''' - b - \mu I_\omega \ddot{\phi}' - \bar{M}_\xi = 0$$

$$\text{ou} \quad \phi = \bar{\phi} \quad (\text{IV.39d})$$

$$- E \left(I_Z v'' + I_{YZ} w'' \right) - \bar{M}_Z = 0 \quad \text{ou} \quad v' = \bar{v}' \quad (\text{IV.39e})$$

$$E \left(I_{YZ} v'' + I_Y w'' \right) - \bar{M}_Y = 0 \quad \text{ou} \quad w' = \bar{w}' \quad (\text{IV.39f})$$

$$- E I_\omega \phi'' - \bar{B} = 0 \quad \text{ou} \quad \phi' = \bar{\phi}' \quad (\text{IV.39g})$$

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo são apresentadas as conclusões do trabalho, algumas das quais já expostas ao longo do texto, e uma proposta de tratamento numérico para o problema, como sugestão para o prosseguimento da pesquisa.

O objetivo de estabelecer um tratamento amplo, consistente e unificado, no contexto de rotações moderadas, para o problema do comportamento dinâmico de hastes prismáticas de paredes delgadas, com seção aberta, submetidas à flexo-torção pode ser considerado como efetivamente alcançado. De fato, as equações diferenciais gerais para o problema foram obtidas através de dois procedimentos distintos, ou seja, inicialmente deduzidas pela consideração do equilíbrio dinâmico e posteriormente reinstituídas pela utilização do princípio dos trabalhos virtuais. A dedução das equações gerais através deste último enfoque, além de servir como uma verificação de resultados, possibilita obter, de forma consistente, ou seja, como decorrência do próprio procedimento empregado, as condições de contorno (cinemáticas e naturais) do problema. Com relação a este aspecto, é interessante observar a forma como se apresentam as condições naturais nas expressões (IV.14), forma esta que, em alguns casos (expressões d e g), é na verdade, difícil de se prever.

Outro aspecto importante, é o fato de que, a partir das equações gerais aqui instituídas, podem ser estabelecidas, como casos particulares, as equações diferenciais para a análise estática não-linear (suprimindo os termos em μA e μI), análise estática linear (procedendo também à eliminação dos termos não-lineares nas equações) e ainda para a análise dinâmica linear.

Como se pode verificar no capítulo III (item III.1), para a dedução das seis equações de equilíbrio dinâmico de um elemento de haste, foram, inicialmente, escritas as condições de equilíbrio de um elemento infinitesimal fornecidas pela Teoria Não-linear da Elasticidade, para o caso de rotações moderadas. Tais equações foram, em seguida, integradas adequadamente sobre a área da seção, devendo-se ressaltar que, na obtenção das equações de equilíbrio de momentos do elemento de haste, foram convenientemente considerados os respectivos braços de alavanca em relação à configuração indeformada, quais sejam, η e ζ (ou y e z) em lugar respectivamente, de $\eta - \phi \zeta$ e $\zeta + \phi \eta$ (ou $y - \phi z$ e $z + \phi y$). Isto é perfeitamente válido, uma vez que se qualquer das três equações (III.6) for multiplicada membro a membro por $\phi \zeta$, $\phi \eta$ (ou então por ϕz , ϕy) e, em seguida, for efetuada a integração sobre a área da seção, o segundo membro permanecerá sempre nulo. Desta forma, atinge-se o objetivo de se chegar às mesmas equações diferenciais pelos dois caminhos utilizados, sem a necessidade de se estabelecer, no que se refere à quarta equação, a relação entre r

(definido na equação (III.123) e a segunda derivada de C (definido na equação (II.61f)).

No mesmo capítulo (item III.7) foi também ilustrado (para o caso de análise estática) um procedimento alternativo para a obtenção das equações de equilíbrio de um elemento de haste, a partir da igualdade entre esforços seccionais externos e internos. Uma terceira alternativa, ainda, seria a de considerar diretamente o equilíbrio do próprio elemento de haste.

É importante enfatizar que a formulação aqui desenvolvida considerou a hipótese original de Vlassov de que a distorção γ_{XS} é nula na superfície média. Como foi visto no item IV.6 do capítulo precedente, focalizando a formulação apresentada por CHEN e ATSUTA (1977, p. 541-550), a consideração de $\hat{e}_{XS} = 0$, em lugar de $\hat{\gamma}_{XS} = 0$, conduz à mesma expressão de \hat{u}_X utilizada na análise linear. Em conseqüência, $\hat{\gamma}_{XS}$ resulta não-nula, aparecendo, então, na expressão do trabalho virtual interno (equação (IV.22)), uma parcela envolvendo τ_{XS} e $\delta\hat{\gamma}_{XS}$ que gera, na igualdade (IV.24), os termos contendo as grandezas V_Y , V_Z e também os termos envolvendo a grandeza R - estes últimos, entretanto, abandonados na obra dos referidos autores, sem qualquer justificativa explícita. O aparecimento destas grandezas leva à necessidade de se utilizar, no desenvolvimento da formulação, relações

extraídas através da consideração do equilíbrio, fazendo com que o procedimento variacional não seja, então empregado na sua forma usual. De outra parte, deve-se salientar, ainda, que somente com a utilização de um campo de deslocamentos da forma apresentada nas equações (II.29), ou seja, que considere a variação de u_x e u_s na espessura (implicando, portanto, a variação de γ_{xs} com n), Chen e Atsuta teriam conseguido fazer surgir, de maneira natural, na expressão do trabalho virtual interno, o termo envolvendo o torsor de Saint-Venant - presente na igualdade (IV.25).

Outro aspecto que merece destaque é o fato de que na formulação desenvolvida, diferentemente do procedimento adotado por diversos autores - mais voltados à obtenção de carga crítica - a não-linearidade é introduzida não só nas condições de equilíbrio como também nas relações deformação-deslocamento, tendo-se, então, a possibilidade de realmente efetuar - no âmbito de rotações moderadas - uma análise não-linear completa. Desta forma, no estudo da instabilidade elástica, além da carga crítica, pode-se obter o início do caminho pós-crítico.

Tendo em vista, no entanto, a complexidade das equações aqui instituídas, o que inviabiliza a sua resolução por procedimento analítico, torna-se necessária, para a obtenção de resultados, uma abordagem numérica do problema. Normalmente tal abordagem envolve um tratamento numérico no espaço e um processo de marcha no tempo.

Dentre os possíveis procedimentos para o tratamento no espaço, podem-se citar, por exemplo, o emprego do método dos elementos finitos - ver YANG e McGUIRE (1986) e CONCI (1988) - e a aplicação da técnica das diferenças finitas, já utilizada com sucesso para a solução de outros problemas não-lineares. No que se refere ao segundo procedimento, duas alternativas se apresentam, quais sejam, a de trabalhar diretamente sobre as equações diferenciais - tal como GARCIA (1987) - e a de operar sobre a equação do princípio dos trabalhos virtuais (ou sobre o funcional de energia - como PLETZ (1983) - quando se trata de um sistema conservativo). É de se ressaltar que esta última alternativa apresenta sobre a primeira a vantagem de requerer a utilização de operadores de diferenças finitas de ordem mais baixa (para o problema em estudo lida-se, no máximo, com os de 2.^a ordem enquanto que a adoção da primeira alternativa exige os de até 4.^a ordem), além do fato de que somente necessitam ser impostas as condições de contorno cinemáticas do problema.

Quanto ao procedimento de integração no tempo, várias opções se oferecem, dentre as quais destacam-se o método da aceleração constante, o método Wilson θ e o método de Houbolt (ver BATHE (1982)).

Apresenta-se, a seguir, como sugestão para o prosseguimento da pesquisa, uma proposta de tratamento numérico sobre a equação do princípio dos trabalhos virtuais, ilustrada, por simplicidade, para o caso de

análise estática não-linear de barras com seção transversal apresentando um eixo de simetria (eixo z).

Tome-se, então, a equação (IV.3) do trabalho virtual interno. Levando a esta equação as relações (III.68e,f), as expressões (II.57) de θ_z , θ_y e ψ e as expressões (II.63) de integrais de tensões sobre a área da seção e considerando-se que, face à simetria da seção em relação ao eixo z, y_e , I_{yz} , Q_z e Q_w resultam nulos, escreve-se:

$$\begin{aligned} \delta W_i = & \int_0^l \left\{ E \left[A u' + \frac{A}{2} (v'^2 + w'^2 + 2 z_e v' \phi') - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{I_e}{2} \phi \phi'' \right] \delta u' + E \left[A u' + \frac{A}{2} (v'^2 + w'^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 z_e v' \phi') - \frac{I_e}{2} \phi \phi'' \right] (v' + z_e \phi') \delta v' + \right. \\ & \left. + E \left[I_z v'' + (I_z - I_y) \phi w'' + I_y \phi^2 v'' - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{Q_y}{2} \phi^2 \phi'' \right] \delta v'' + E \left[A u' + \frac{A}{2} (v'^2 + w'^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 z_e v' \phi') - \frac{I_e}{2} \phi \phi'' \Big] w' \delta w' + \\
& + E \left[I_Y w'' + (I_Z - I_Y) \phi v'' + I_Z \phi^2 w'' + \right. \\
& + \frac{Q_Y}{2} \phi \phi'' \Big] \delta w'' + E \left[(I_Z - I_Y) v'' w'' - \frac{I_e}{2} u' \phi'' + \right. \\
& + \frac{Q_Y}{2} w'' \phi'' + I_Y \phi v''^2 + I_Z \phi w''^2 - Q_Y \phi v'' \phi'' + \\
& + \frac{R_e}{4} \phi \phi''^2 - \frac{I_e}{2} (v'^2 + w'^2 + 2 z_e v' \phi') \phi'' \Big] \delta \phi + \\
& + E \left[\left(Au' + \frac{A}{2} (v'^2 + w'^2 + 2 z_e v' \phi') - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{I_e}{2} \phi \phi'' \right) z_e v' + G J_T \phi' \right] \delta \phi' + E \left[I_\omega \phi'' + \right. \\
& + \phi \left(- \frac{I_e}{2} u' + \frac{Q_Y}{2} w'' - \frac{Q_Y}{2} \phi v'' + \frac{R_e}{4} \phi \phi'' - \right.
\end{aligned}$$

$$- \frac{I_e}{4} (v'^2 + w'^2 + 2 z_e v' \phi') \Big] \Big] \delta\phi'' \Big\} dx$$

(V.1)

Observa-se, assim, que a expressão do trabalho virtual interno apresenta termos lineares, quadráticos e cúbicos nos deslocamentos u , v , w , ϕ e/ou suas derivadas.

Para escrever uma expressão aproximada para δW_i é necessário estabelecer aproximações para os deslocamentos e suas derivadas primeira e segunda no domínio.

Com este objetivo, então, divide-se a barra em segmentos, por exemplo, de mesmo comprimento λ e, sendo m um ponto pivotal genérico (ponto onde são avaliados deslocamentos e suas derivadas), adotam-se os esquemas de numeração local e global, indicados nas figuras V.1 e V.2 respectivamente, para os diversos pontos nodais (aí incluindo os dois pontos virtuais I e II) e correspondentes valores das incógnitas, ou seja, das funções $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ e $\phi(x)$ em tais pontos.

Com base no esquema da figura V.3, que mostra o ponto pivotal genérico m e os pontos nodais i , j , k , l , distanciados de λ entre si, tem-se que, para o referido ponto pivotal, pode-se aproximar um deslocamento qualquer pelo valor médio no intervalo, ou seja, por $\frac{a_j + a_k}{2}$,

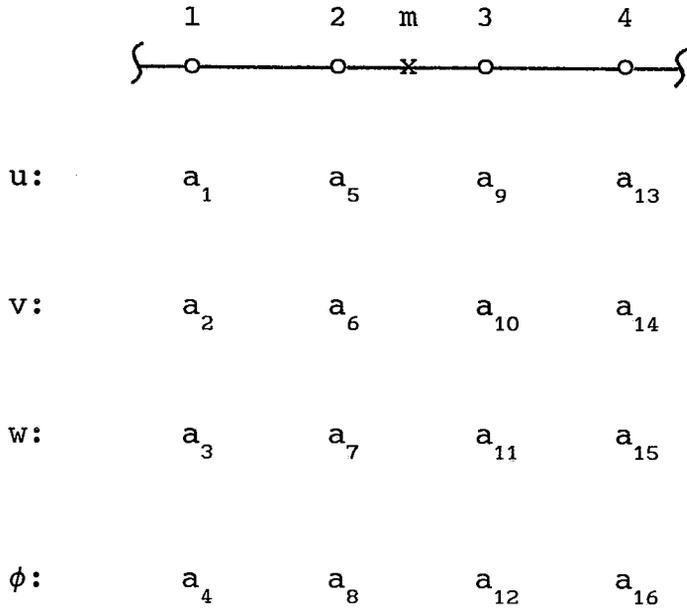


Figura V.1 - Sistema de numeração local

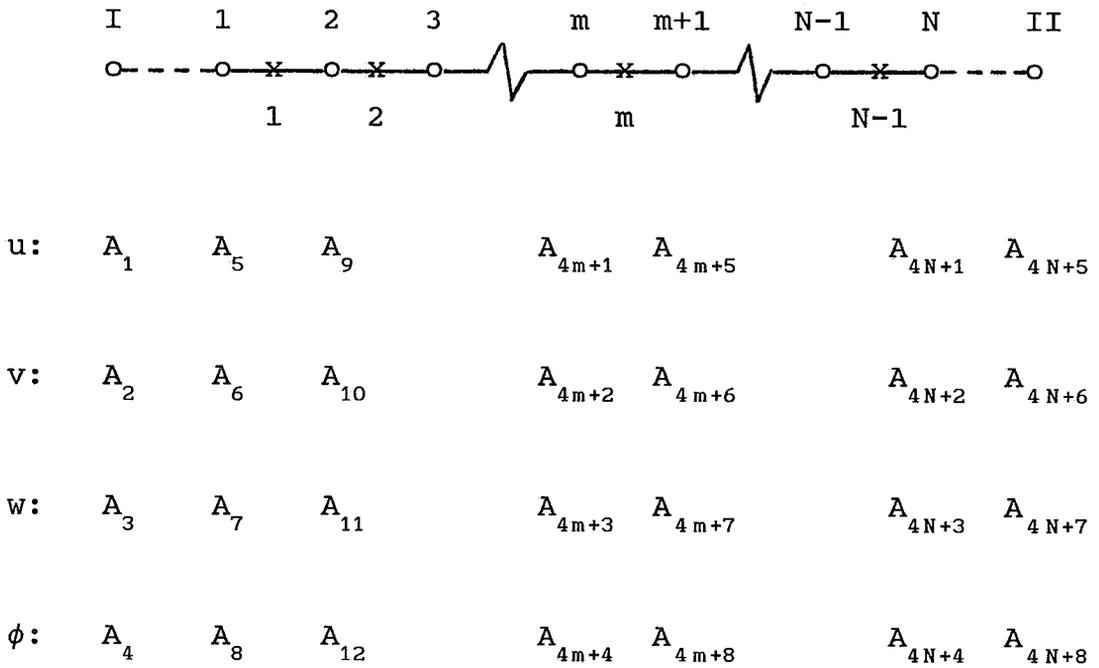


Figura V.2 - Sistema de numeração global

e utilizar expressões do tipo $\frac{a_k - a_j}{\lambda}$ e $\frac{a_l - a_k - a_j + a_i}{2 \lambda^2}$, respectivamente, para a representação em diferenças finitas da derivada primeira e da derivada segunda de um deslocamento.

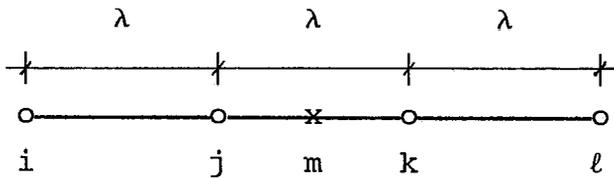


Figura V.3 - Ponto pivotado m e pontos nodais i, j, k, l no seu entorno

Admitindo que, num intervalo genérico λ em torno do ponto pivotado m , o valor de um deslocamento (ou de qualquer de suas derivadas) é constante e igual ao valor avaliado em m , a equação do trabalho virtual interno pode ser aproximada por um somatório de $N - 1$ termos, sendo o termo genérico m da forma

$$\delta W_i^m = \sum_{p=1}^{16} \left\{ \sum_{i=1}^{16} C_o(p, i) A_{4m-4+i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} C_1(p, i, j) A_{4m-4+i} A_{4m-4+j} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} \sum_{k=j}^{16} C_2(p, i, j, k) A_{4m-4+i} A_{4m-4+j}$$

$$A_{4m-4+k} \left. \vphantom{A_{4m-4+k}} \right\} \delta A_{4m-4+p}, \quad (V.2)$$

onde C_0 , C_1 e C_2 designam coeficientes que dependem de $E A$, $E I_Y$, $E I_Z$, $E I_\omega$, $E I_e$, $E Q_Y$, $E R_e$ e $G J_T$.

O trabalho virtual externo, proveniente do carregamento atuante na barra, pode-se constituir de duas parcelas, uma de domínio e outra referente às extremidades $x = 0$ e $x = \ell$. Admitindo, para exemplificar, o caso de uma barra totalmente engastada na extremidade $x = 0$ e totalmente livre na outra, isto é, em $x = \ell$, com previsão de carregamento apenas na extremidade livre (o mais geral possível), a expressão (IV.10) do trabalho virtual externo se torna:

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \left[\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \bar{F}_z \delta w - \right. \\ & - \left(\bar{M}_\xi + w' \bar{M}_z + v' \bar{M}_y + \phi' \bar{C} \right) \delta \phi - \\ & \left. - \left(\bar{M}_z + \phi \bar{M}_y \right) \delta v' - \left(\phi \bar{M}_z - \bar{M}_y \right) \delta w' - \left(\bar{B} + \phi \bar{C} \right) \delta \phi' \right]_\ell \end{aligned} \quad (V.3)$$

tendo em vista ainda as igualdades (II.57).

Para escrever uma expressão aproximada para δW_e devem-se instituir aproximações para os deslocamentos e suas derivadas primeiras nos extremos da barra.

Para o ponto nodal N (figura V.4), um deslocamento genérico é o próprio a_N , e a derivada primeira desse deslocamento é aproximada por expressão do tipo $\frac{a_{II} - a_{N-1}}{2 \lambda}$.

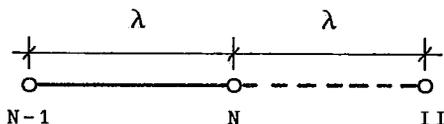


Figura V.4 - Pontos nodais reais N - 1 e N e virtual II

Assim, o trabalho virtual externo é aproximado por

$$\delta W_e = \bar{F}_X \delta A_{4N+1} + \bar{F}_Y \delta A_{4N+2} + \bar{F}_Z \delta A_{4N+3} +$$

$$+ \left[- \bar{M}_Z \left(\frac{A_{4N+7} - A_{4N-1}}{2 \lambda} \right) - \bar{M}_Y \left(\frac{A_{4N+6} - A_{4N-2}}{2 \lambda} \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \bar{C} \left(\frac{A_{4N+8} - A_{4N}}{2 \lambda} \right) - \bar{M}_\xi \left. \right] \delta A_{4N+4} + \\
& + \left(- \bar{M}_Z - \bar{M}_Y A_{4N+4} \right) \delta \left(\frac{A_{4N+6} - A_{4N-2}}{2 \lambda} \right) + \\
& + \left(- \bar{M}_Z A_{4N+4} + \bar{M}_Y \right) \delta \left(\frac{A_{4N+7} - A_{4N-1}}{2 \lambda} \right) - \\
& - \left(\bar{B} + \bar{C} A_{4N+4} \right) \delta \left(\frac{A_{4N+8} - A_{4N}}{2 \lambda} \right) \tag{V.4}
\end{aligned}$$

Igualando as expressões de δW_i e δW_e , chega-se a uma equação do tipo

$$\sum_{i=1}^{4N+8} f_i \left(A_1, A_2, \dots, A_{4N+8}, \bar{F}_X, \dots, \bar{C} \right) \delta A_i = 0 \tag{V.5}$$

Introduzindo as condições de contorno cinemáticas (no exemplo escolhido somente em $x = 0$, onde inclusive todas as condições são desta natureza), tem-se:

$$u = 0 : \quad A_5 = 0, \quad \text{o que acarreta} \quad \delta A_5 = 0 \tag{V.6a}$$

$$v = 0 : \quad A_6 = 0, \quad \text{o que acarreta} \quad \delta A_6 = 0 \tag{V.6b}$$

$$w = 0 : \quad A_7 = 0, \quad \text{o que acarreta} \quad \delta A_7 = 0 \quad (\text{V.6c})$$

$$\phi = 0 : \quad A_8 = 0, \quad \text{o que acarreta} \quad \delta A_8 = 0 \quad (\text{V.6d})$$

$$v' = 0 : \quad \frac{A_{10} - A_2}{2\lambda} = 0 \quad \text{ou} \quad A_2 = A_{10}, \quad \text{o que} \\ \text{acarreta} \quad \delta A_2 = \delta A_{10} \quad (\text{V.6e})$$

$$w' = 0 : \quad \frac{A_{11} - A_3}{2\lambda} = 0 \quad \text{ou} \quad A_3 = A_{11}, \quad \text{o que} \\ \text{acarreta} \quad \delta A_3 = \delta A_{11} \quad (\text{V.6f})$$

$$\phi' = 0 : \quad \frac{A_{12} - A_4}{2\lambda} = 0 \quad \text{ou} \quad A_4 = A_{12}, \quad \text{o que} \\ \text{acarreta} \quad \delta A_4 = \delta A_{12} \quad (\text{V.6g})$$

Observe-se ainda que os deslocamentos A_1 e A_{4N+5} a rigor não participam da solução do problema, sendo mantidos meramente por conveniência (e podendo-lhes ser atribuídos quaisquer valores), quer no que se refere à apresentação formal do método, quer visando a sua própria implementação computacional.

Tendo em vista as equações (V.5) e (V.6) e considerando que os $\delta A_9, \delta A_{10}, \dots, \delta A_{4N+4}, \delta A_{4N+6}, \dots, \delta A_{4N+8}$ são arbitrários, escreve-se então:

$$f_9 = \left(A_9, A_{10}, \dots, A_{4N+4}, A_{4N+6}, \dots, A_{4N+8}, \bar{F}_X, \dots, \bar{C} \right) = 0$$

$$f_{10} = \left(A_9, A_{10}, \dots, A_{4N+4}, A_{4N+6}, \dots, A_{4N+8}, \bar{F}_X, \dots, \bar{C} \right) = 0$$

⋮

$$f_{4N+4} = \left(A_9, A_{10}, \dots, A_{4N+4}, A_{4N+6}, \dots, A_{4N+8}, \bar{F}_X, \dots, \bar{C} \right) = 0$$

$$f_{4N+6} = \left(A_9, A_{10}, \dots, A_{4N+4}, A_{4N+6}, \dots, A_{4N+8}, \bar{F}_X, \dots, \bar{C} \right) = 0$$

⋮

$$f_{4N+8} = \left(A_9, A_{10}, \dots, A_{4N+4}, A_{4N+6}, \dots, A_{4N+8}, \bar{F}_X, \dots, \bar{C} \right) = 0$$

(V.7)

Chega-se assim, neste caso, a um sistema de equações algébricas não-lineares que uma vez resolvido - por exemplo, pelo método de Newton-Raphson (ver BATHE (1982)) - fornece os valores das incógnitas (deslocamentos) nodais.

Além do tratamento numérico sugerido para o problema, evidencia-se ainda a conveniência de uma investigação experimental objetivando estabelecer, para alguns casos particulares, uma comprovação de resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALMER, H.A. (1969), "General Beam Element for ASKA", ISD Report n.º 75, Institut für Statik und Dynamik der Luft - und Raumfahrtkonstruktionen, University of Stuttgart.
- BATHE, K. (1982), Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- BLEICH, F. (1952), Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Company, Inc., U.S.A.
- CARNAHAN, B., LUTHER, H.A. e WILKES, J.O., (1969), Applied Numerical Methods, John Wiley, New York.
- CHAUDHARY, A.B. (1982), "Generalized Stiffness Matrix for Thin Walled Beams", Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 108, n.º ST3, pp. 559-577.
- CHEN, W. e ATSUTA, T. (1977) Theory of Beam Columns, vol. 2: Space Behavior and Design, McGraw-Hill International Book Company, Inc., U.S.A.
- CONCI, A. (1988), "Análise de Estruturas Reticuladas de Aço com Consideração de Empenamento e Não-linearidades Geométrica e Material", Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC, Rio de Janeiro.

- COOK, R.D. e YOUNG, W.C. (1985), Advanced Mechanics of Materials, MacMillan, New York.
- DYM, C.L. e SHAMES, I.H. (1973), Solid Mechanics: A Variational Approach, McGraw-Hill, Inc., New York.
- ELSGOLTZ, L. (1969), Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional, Editorial Mir, Moscou.
- FÉODOSIEV, V. (1977), Resistência dos Materiais, Edições Lopes da Silva, Porto.
- GARCIA, L.F.T. (1987), "Uma Contribuição ao Estudo da Flexão de Barras com Forte Não Linearidade Geométrica", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- GARCIA, L.F.T., VILLAÇA, S.F. e POLILLO, V.R. (1991), "Flexo-torção de Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta sob Solicitação Dinâmica", R.B.E. - Caderno de Engenharia Estrutural, vol. 7, n.º 2.
- GERE, J.M. e TIMOSHENKO, S.P. (1990), Mechanics of Materials, 3rd edition, PWS-Kent Publishing Company, U.S.A.
- GJELSVIK, A. (1981), The Theory of Thin Walled Bars, John Wiley & Sons, Inc., U.S.A.

- ILG, I. (1983), "Vigas contínuas em hastes de paredes delgadas", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- KOLLBRUNNER, C.F. e BASLER, K. (1969), Torsion in Structures - An Engineering Approach, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
- LANGENDONCK, T. van (1959), "Torção de Peças de Secção Delgada", Estrutura, n.º 13, pp. 49-73.
- MORI, D.D. (1978), "Flexo-torção: Teorias de 1.ª e 2.ª ordem - Automatização do Cálculo", Dissertação de Mestrado, EESC/USP, São Carlos.
- NOVOZHILOV, V.V. (1953), Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock Press, Rochester, New York.
- NOVOZHILOV, V.V. (1961), Theory of Elasticity, Pergamon Press Ltd., Oxford/London.
- ODEN, J.T. (1967), Mechanics of Elastic Structures, McGraw-Hill Book Company, Inc., U.S.A.
- PLETZ, E. (1983), "Análise de Estruturas Laminares pelo Método da Energia Discretizada", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

- PRESTES, J.A.S. (1983), "Análise linear de estruturas planas com elementos de paredes delgadas", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- RACHID, M. (1975), "Instabilidade de barras de secção delgada", Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos.
- RIZZATTI, E. (1986), "Análise de tensões em nós sujeitos a bimomentos", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- SÁNCHEZ FILHO, E. de S. (1988), "Torção de peças de secção aberta com hastes de paredes delgadas de concreto armado", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- SANTOS, S.M.G. dos (1967), "Estudo das Hastes de Paredes Delgadas com Secção Aberta", PUC, Rio de Janeiro.
- SCHULZ, M. (1988), "Verificação geral de peças de concreto armado baseada no modelo de chapa fissurada", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

SHAMES, I.H. e DYM, C.L. (1985), Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.

TIMOSHENKO, S.P. (1953), History of Strength of Materials, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.

TIMOSHENKO, S.P. e GERE, J.M. (1961), Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.

UGURAL, A.C. e FENSTER, S.K. (1987), Advanced Strength and Applied Elasticity, Elsevier, New York.

VLASSOV, B.Z. (1962), Pièces Longues en Voiles Mince, Éditions Eyrolles, Paris.

VILLAÇA, S.F., GARCIA, L.F.T. e POLILLO, V.R. (1990), "Formulação Variacional para a Flexo-torção de Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta sob Solicitação Dinâmica", R. B. E. - Caderno de Engenharia Estrutural, vol. 7, n.º 1, pp. 25-41.

YANG, Y. e McGUIRE, W. (1986), "Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis", Journal of the Structural Engineering, ASCE, vol. 112, n° ST4, pp. 853-877.

ZBIROHOWSKI-KOSCIA, K. (1967), Thin Walled Beams, Crosby Lockwood & Son Ltd., London.

APÊNDICE A

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE PERFIS ABERTOS

DE PAREDES DELGADAS

A.1 - INTRODUÇÃO

Apresentam-se, neste apêndice, os conceitos de área setorial, centróide setorial, pólo setorial principal e ainda algumas considerações a respeito do modo como variam as características setoriais (próprias somente de perfis abertos de paredes delgadas) com determinados parâmetros.

A figura A.1 mostra uma seção aberta de paredes delgadas, constituída de trechos retos, cada qual com espessura constante. A seção fica perfeitamente definida pela sua linha média (também chamada de linha do perfil ou *contour*) e pela espessura de cada um de seus trechos.

É conveniente referir a seção não apenas a um sistema de coordenadas retangulares y, z , com origem no centróide C da seção, como também a um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais n, s , como se vê na figura A.1. Nesse caso, onde não ficam englobadas as junções, a coordenada s é medida ao longo da linha média, a partir de uma de suas extremidades (ponto 1 na figura A.1), e a coordenada n é mensurada segundo a direção

normal à linha do perfil, de tal modo que os vetores tangentes às linhas coordenadas x , n , s formam um sistema direto.

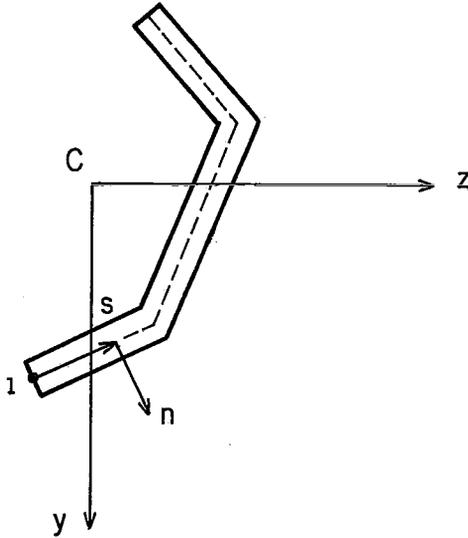


Figura A.1 - Seção aberta de paredes delgadas e sistemas de coordenadas

As propriedades geométricas usuais das seções transversais de barras são definidas pelas seguintes expressões (já com simplificações inerentes ao caso de paredes delgadas):

- área da seção

$$A = \int_A dA \quad ; \quad (A.1)$$

- momentos estáticos da área da seção em relação aos eixos y e z respectivamente

$$S_Y = \int_A \hat{z} \, dA = 0 \quad (\text{A.2a})$$

$$S_Z = \int_A \hat{y} \, dA = 0, \quad (\text{A.2b})$$

ambos nulos para a seção da figura A.1, já que os eixos y e z são centroidais;

- momentos de inércia da área da seção em relação aos eixos y e z respectivamente

$$I_Y = \int_A \hat{z}^2 \, dA \quad (\text{A.3a})$$

$$I_Z = \int_A \hat{y}^2 \, dA ; \quad (\text{A.3b})$$

- produto de inércia da área da seção em relação aos eixos y e z

$$I_{YZ} = \int_A \hat{y} \hat{z} \, dA . \quad (\text{A.4})$$

Nestas equações \hat{y} e \hat{z} designam as coordenadas y e z de um ponto genérico da linha média.

Os perfis abertos de paredes delgadas possuem, ainda, outras propriedades geométricas, que se determinam com base no conceito de área setorial.

A.2 - ÁREA SETORIAL

O conceito de área setorial será apresentado com o auxílio da figura A.2, que mostra a linha média de um perfil aberto de paredes delgadas.

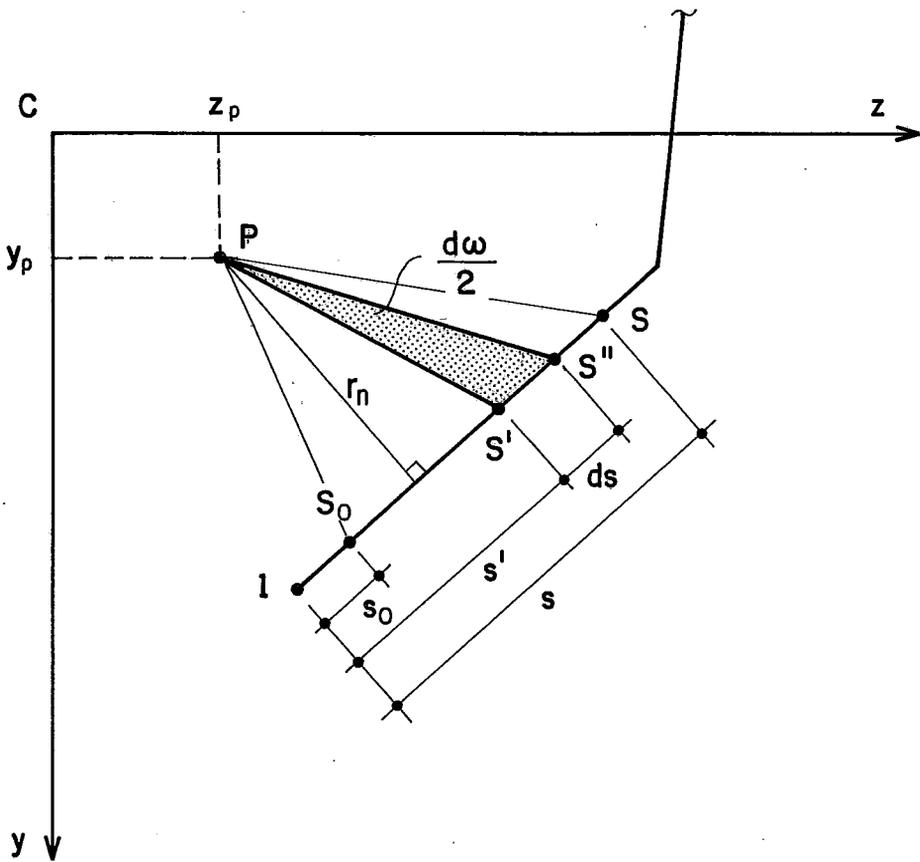


Figura A.2 - Área setorial elementar

Tome-se, então, um ponto P qualquer do plano da seção transversal da barra. Ligue-se este ponto, por dois raios vetores, a dois pontos da linha do perfil, S' e S'', distantes ds entre si. Designando-se por r_n a coordenada de S' em relação a um eixo com origem em P e orientado tal como o eixo n e por $d\omega$ o dobro da área do triângulo elementar PS'S'', de altura r_n e base ds, tem-se

$$d\omega = r_n ds .$$

A integral

$$\omega = \int_{s_0}^s r_n ds \quad (\text{A.5})$$

é a chamada área setorial que, portanto, vem a ser igual ao dobro da área varrida pelo raio vetor PS' durante o movimento do ponto S' pela linha do perfil desde o ponto S_0 , de coordenada s_0 , até um ponto S, de coordenada s. O ponto P é chamado pólo setorial e o ponto S_0 , ponto setorial inicial.

A variação da área setorial $d\omega$ é considerada positiva se o raio vetor que a descreve gira no sentido anti-horário quando se olha a seção no sentido negativo do eixo x.

A área setorial ω é uma função da coordenada s e depende das posições dos pontos tomados para pólo e para ponto setorial inicial.

É importante estabelecer a relação entre a área setorial e as coordenadas \hat{y} e \hat{z} de um ponto S genérico da linha do perfil. Como já foi dito, $d\omega$ é igual ao dobro da área do triângulo elementar PSS' . Assim, da figura A.3, vem

$$d\omega = (\hat{y} - y_p) d\hat{z} + d\hat{y} d\hat{z} - (\hat{z} - z_p + d\hat{z}) d\hat{y} .$$

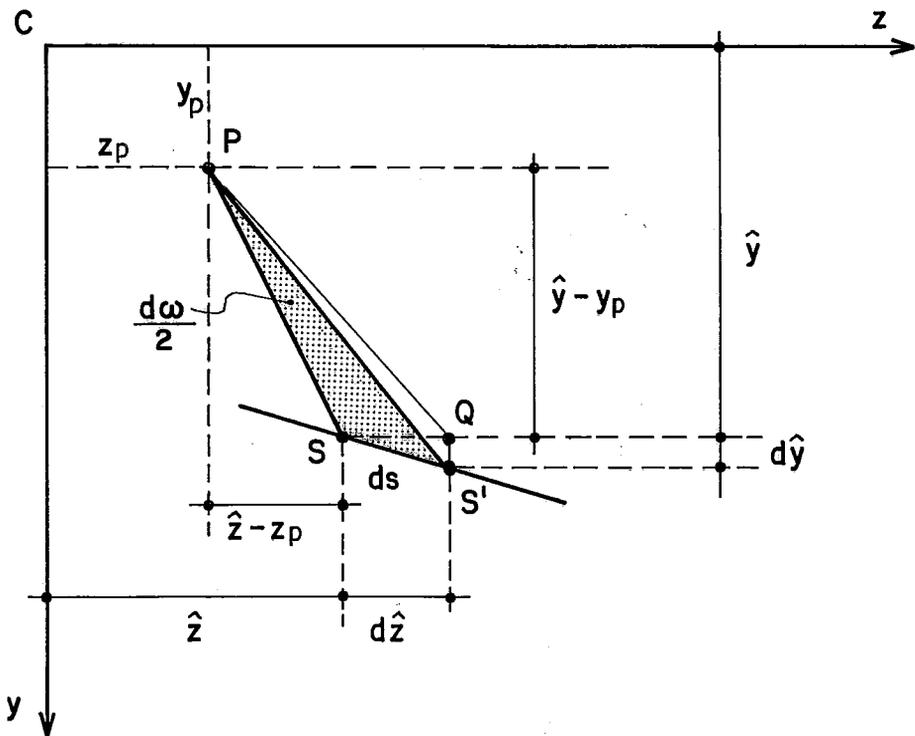


Figura A.3 - Diferenciais de ω , s , \hat{y} e \hat{z}

Portanto, a área setorial elementar $d\omega$ pode ser expressa por

$$d\omega = (\hat{y} - y_p) d\hat{z} - (\hat{z} - z_p) d\hat{y} \quad (\text{A.6})$$

onde y_p e z_p são as coordenadas do pólo P.

Com base na relação (A.6), pode-se estabelecer a fórmula de transformação de uma área setorial para uma mudança de pólo.

Sejam, então, ω_p e ω_e as áreas setoriais relativas aos pólos P e E (figura A.4) respectivamente. A diferença entre as diferenciais destas áreas é dada por

$$d\omega_e - d\omega_p = (z_e - z_p) d\hat{y} - (y_e - y_p) d\hat{z}$$

onde y_p, z_p são as coordenadas do pólo P e y_e, z_e , as coordenadas do pólo E. Integrando ambos os membros desta equação entre os pontos S_0 e S, vem

$$\omega_e = \omega_p + (z_e - z_p) (\hat{y} - \hat{y}_0) - (y_e - y_p) (\hat{z} - \hat{z}_0) \quad (\text{A.7})$$

sendo \hat{y}_0, \hat{z}_0 as coordenadas do ponto setorial inicial S_0 , para o qual $\omega_e = \omega_p = 0$.

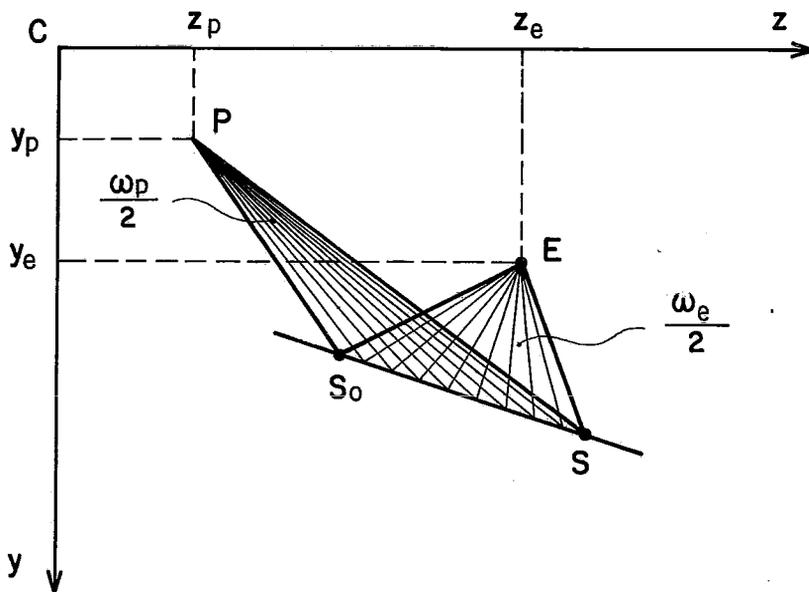


Figura A.4 - Áreas setoriais relativas aos pólos P e E

Da equação (A.7) deduz-se que, no caso de transferência de pólo, a área setorial sofre, em cada ponto da linha do perfil, uma variação que é função linear das coordenadas \hat{y} e \hat{z} deste ponto. Já a mudança de ponto setorial inicial faz com que a área setorial sofra a mesma variação em todos os pontos da linha do perfil. Isto pode ser facilmente constatado com a ajuda da figura A.5.

De fato, é evidente que $\omega_{p(s_0)}$ e $\omega_{p(s_1)}$, áreas setoriais relativas ao mesmo pólo P mas a pontos setoriais iniciais diferentes S_0 e S_1 , estão relacionadas num dado ponto S por

$$\omega_{p(s_0)} = \omega_{p(s_1)} + \omega_0 \quad (\text{A.8})$$

onde ω_0 é uma constante igual ao dobro da área varrida pelo raio vetor entre os pontos S_0 e S_1 da linha do perfil.

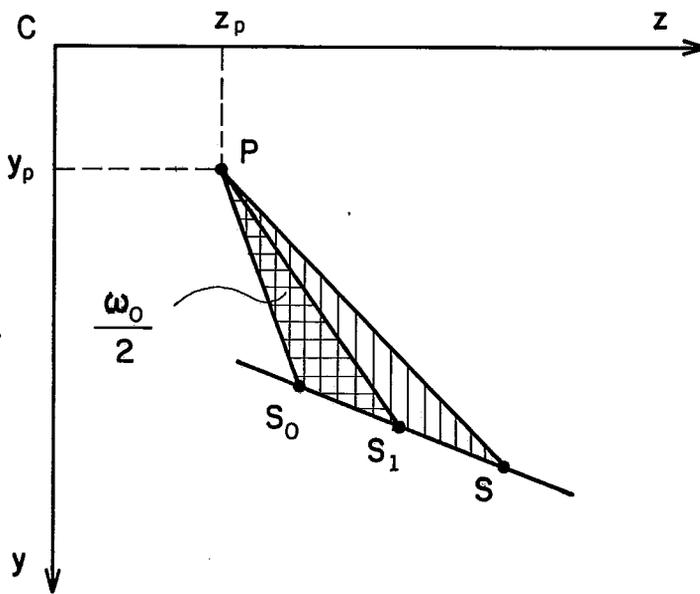


Figura A.5 - Áreas setoriais relativas ao mesmo pólo P mas a pontos setoriais iniciais diferentes S_0 e S_1

A.3 - CARACTERÍSTICAS SETORIAIS

As características setoriais, próprias somente de perfis abertos de paredes delgadas, são assim definidas:

- momento estático setorial

$$S_{\omega} = \int_A \omega \, dA \quad ; \quad (\text{A.9})$$

- momento setorial de inércia

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 \, dA \quad ; \quad (\text{A.10})$$

- produtos setoriais de inércia

$$I_{\omega y} = \int_A \omega \hat{z} \, dA \quad (\text{A.11a})$$

$$I_{\omega z} = \int_A \omega \hat{y} \, dA \quad . \quad (\text{A.11b})$$

Assim como acontece com a área setorial, os valores destas características dependem das posições dos pontos escolhidos para pólo e para ponto setorial inicial.

As leis de transformação destas características para uma mudança de pólo podem ser obtidas substituindo-se a relação (A.7) nas igualdades (A.9) a (A.11) e levando-se em conta as definições dadas nas equações (A.1) a (A.4). Deste modo,

$$S_{\omega_e} = S_{\omega_p} - (z_e - z_p) \hat{Y}_o A + (y_e - y_p) \hat{z}_o A ,$$

(A.12)

$$\begin{aligned} I_{\omega_e} = & I_{\omega_p} + (z_e - z_p)^2 (I_z + \hat{Y}_o^2 A) + \\ & + (y_e - y_p)^2 (I_y + \hat{z}_o^2 A) - \\ & - 2 (y_e - y_p) (z_e - z_p) (I_{yz} + \hat{Y}_o \hat{z}_o A) + \\ & + 2 (z_e - z_p) (I_{\omega_p z} - \hat{Y}_o S_{\omega_p}) - \\ & - 2 (y_e - y_p) (I_{\omega_p y} - \hat{z}_o S_{\omega_p}) , \end{aligned}$$

(A.13)

$$I_{\omega_e y} = I_{\omega_p y} + (z_e - z_p) I_{yz} - (y_e - y_p) I_y$$

(A.14a)

$$I_{\omega_e z} = I_{\omega_p z} + (z_e - z_p) I_z - (y_e - y_p) I_{yz} .$$

(A.14b)

Por outro lado, substituindo-se a relação (A.8) nas igualdades (A.9) a (A.11) e usando-se as definições dadas nas equações (A.1) a (A.4), podem-se obter as leis de transformação das características setoriais para uma mudança de ponto setorial inicial. São elas:

$$S_{\omega p(s_1)} = S_{\omega p(s_0)} - \omega_0 A , \quad (\text{A.15})$$

$$I_{\omega p(s_1)} = I_{\omega p(s_0)} - 2 \omega_0 S_{\omega p(s_0)} + \omega_0^2 A , \quad (\text{A.16})$$

$$I_{\omega p(s_1)Y} = I_{\omega p(s_0)Y} \quad (\text{A.17a})$$

$$I_{\omega p(s_1)Z} = I_{\omega p(s_0)Z} \quad (\text{A.17b})$$

Note-se que, como os eixos y e z são centroidais, $I_{\omega y}$ e $I_{\omega z}$ são invariantes em relação à posição do ponto setorial inicial. Entretanto, os valores dos produtos setoriais de inércia dependem da orientação dos eixos y e z.

A.4 - CENTRÓIDES SETORIAIS

Há pontos da linha do perfil que, quando escolhidos como pontos setoriais iniciais, acarretam a anulação do momento estático setorial S_{ω} . Estes pontos são chamados centróides setoriais. É possível haver para um mesmo pólo, num determinado perfil, mais de um centróide setorial. Como se mostra a seguir, não é difícil localizar um destes pontos quando são dados o perfil e o pólo.

A partir da lei de transformação do momento estático setorial para uma mudança de ponto setorial inicial (equação (A.15)) e da hipótese de que S_1 é um centróide setorial, pode-se escrever

$$S_{\omega_{p(s_1)}} = S_{\omega_{p(s_0)}} - \omega_0 A = 0$$

donde se obtém

$$\omega_0 = \frac{S_{\omega_{p(s_0)}}}{A} . \quad (A.18)$$

Assim, tem-se um centróide setorial no ponto para o qual

$$\omega_{p(s_1)}(s) = \omega_0 , \quad (A.19)$$

podendo, como já mencionado, relativamente a um determinado pólo, haver mais de um ponto satisfazendo essa equação.

A.5 - ÁREA SETORIAL PRINCIPAL

Chama-se área setorial principal àquela para a qual os produtos setoriais de inércia, I_{ω_y} e I_{ω_z} , se anulam. O pólo relativo à área setorial principal é chamado pólo setorial principal ou, simplesmente, pólo principal. Suas coordenadas são obtidas a seguir.

A partir das leis de transformação dos produtos setoriais de inércia para uma mudança de pólo (equações (A.14)) e da hipótese de que E é o pólo setorial principal, escreve-se o sistema:

$$I_{\omega_e y} = I_{\omega_p y} + (z_e - z_p) I_{yz} - (y_e - y_p) I_y = 0$$

$$I_{\omega_e z} = I_{\omega_p z} + (z_e - z_p) I_z - (y_e - y_p) I_{yz} = 0$$

donde se obtêm as coordenadas do pólo principal

$$y_e = y_p + \frac{1}{D} (I_{\omega_p y} I_z - I_{\omega_p z} I_{yz}) \quad (\text{A.20a})$$

$$z_e = z_p + \frac{1}{D} (I_{\omega_p z} I_y - I_{\omega_p y} I_{yz}) \quad (\text{A.20b})$$

sendo

$$D = I_y I_z - I_{yz}^2 . \quad (\text{A.21})$$

É importante observar que, como já foi dito, em virtude de os eixos y e z serem centroidais, $I_{\omega_p y}$ e $I_{\omega_p z}$ são invariantes em relação à posição do ponto setorial inicial e, conseqüentemente, as coordenadas do pólo principal também o são. Conclui-se, então, que o pólo principal é um ponto particular da seção transversal da barra. Como se sabe, ele coincide com o centro de cisalhamento da seção.