

"O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: FUNDAMENTOS TEÓRICOS -  
AUTOMATIZAÇÃO - APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE PLACAS E DE  
ELASTICIDADE PLANA"

ALCEBIADES DE VASCONCELLOS FILHO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIA (D.Sc.)

Aprovada por:

Sydney Vanhy

Presidente

Fernando S. Lameira

Rostovski

Giovanni Gómez

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
FEVEREIRO DE 1970

Este trabalho é dedicado  
à Lúcia, por sua visão, paciência e estímulo;  
à Jeanine, filha querida;  
aos meus pais, por seu apoio.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA

"O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: FUNDAMENTOS TEÓRICOS -  
AUTOMATIZAÇÃO - APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE PLACAS E DE  
ELASTICIDADE PLANA"

ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO\*

Publicação nº 11.70

RIO DE JANEIRO

MAIO DE 1970

\*M.Sc., 1967, Stanford. D.Sc., 1970, COPPE

Professor assistente COPPE e Escola de Engenharia da Universidade Federal  
de Minas Gerais.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Sydney M. G. dos Santos, pela orientação dada a este trabalho.

Ao professor Fernando L. L. B. Carneiro, pelos inúmeros conselhos e sugestões.

Ao professor Alberto Luiz Coimbra, por seu incentivo aos estudos pós-graduados.

Ao professor Hélio Martins da Silva, por seu apoio irrestrito ao longo de dez anos de convivência.

Aos professores Adhemar Rodrigues, Cândido Holanda de Lima e Mário Werneck de Alencar Lima, responsáveis pelo impulso inicial que levou a este trabalho.

Ao professor James M. Gere, por seus ensinamentos e atenções na Universidade de Stanford.

Ao professor Eduardo Romano Arantes e Oliveira, pelas atenções dispensadas no Laboratório Nacional de Engenharia Civil em Lisboa.

Aos amigos do Departamento de Cálculo Científico, por sua colaboração.

Aos funcionários da COPPE, por sua solicitude.

## SINOPSE

São estabelecidos os fundamentos teóricos do Método dos Elementos Finitos.

A teoria é apresentada de maneira especialmente adequada a engenheiros estruturais, tendo-se procurado seguir uma linha análoga à da análise matricial de estruturas reticuladas.

Como casos particulares de aplicação da teoria são estudados, mais detalhadamente, a elasticidade plana (estados planos de tensões e deformações) e placas.

Casos inéditos de placas e de problemas de estados planos de tensões e deformações são discutidos, com a apresentação de tabelas e gráficos.

É apresentado um programa automático que permite a análise de placas e problemas de estados planos de tensões e deformações pelo Método dos Elementos Finitos; o programa foi desenvolvido em um computador IBM 1130 com 32 K de memória interna. Este programa é descrito com algum detalhe e, para auxiliar sua compreensão, é incluído um fluxograma simplificado do mesmo.

## SYNOPSIS

The theoretical fundamentals of the Finite Element Method are established.

The theory has been set down in such a way as to be particularly useful to structural engineers, and a line of study analogous to that of the matrix analysis of framed structures has been sought.

More detailed studies were made of plane elasticity (plane stresses and plane strains) and plates.

Examples of particular cases for the application of this theory are given; and special cases whose solutions have not yet appeared in technical literature are discussed in this work, the results being presented in the form of tables and graphs.

An automatic program has also been formulated to permit analysis of plates and problems of plane stresses and plane strains using the Finite Element Method. This program was developed for an IBM 1130, 32 K, internal memory computer. It has been described in some detail, and a simplified flow chart has been included.

ÍNDICE

NOTAÇÕES .....	1
INTRODUÇÃO.....	6
CAPÍTULO I - IDEALIZAÇÃO ESTRUTURAL	
1.1 - Considerações gerais.....	11
1.2 - Fundamentos.....	12
1.3 - Campo de deslocamentos.....	15
CAPÍTULO II - CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO	
2.1 - Funções de deslocamento.....	18
2.2 - Deformações no elemento.....	22
2.3 - Tensões no elemento.....	23
2.4 - Matriz de rigidez do elemento.....	24
CAPÍTULO III - ANÁLISE ESTRUTURAL DO CONJUNTO DE ELEMENTOS	
3.1 - Sistema de referência global.....	32
3.2 - Equação de equilíbrio.....	34
3.3 - Cargas nodais equivalentes.....	39
3.4 - Cálculo dos deslocamentos.....	42
3.5 - Análise complementar.....	45
CAPÍTULO IV - ESTADOS PLANOS DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES	
4.1 - Considerações gerais.....	47
4.2 - Funções de deslocamento.....	47
4.3 - Deformações no elemento.....	50
4.4 - Tensões no elemento.....	52
4.5 - Matriz de rigidez do elemento.....	54
4.6 - Cargas nodais equivalentes.....	55

4.7 - Sistemas de referência.....

CAPÍTULO V - PLACAS	58
5.1 - Considerações gerais.....	
5.2 - Funções de deslocamento para o elemento retangular.....	58
5.3 - Deformações no elemento retangular.....	61
5.4 - Tensões no elemento retangular.....	63
5.5 - Matriz de rigidez do elemento retangular ortotrópico.....	65
5.6 - Cargas nodais equivalentes - elemento retangular.....	68
5.7 - Momentos nos nós de um elemento retangular ortotrópico.....	69
5.8 - Funções de deslocamento para o elemento triangular.....	72
5.9 - Deformações no elemento triangular.....	74
5.10 - Tensões no elemento triangular.....	77
5.11 - Matriz de rigidez do elemento triangular ortotrópico.....	78
5.12 - Cargas nodais equivalentes - elemento triangular.....	82
CAPÍTULO VI - CONSIDERAÇÕES RELATIVAS À ESCOLHA DA LEI DE VARIAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS	83
6.1 - Considerações gerais.....	84
6.2 - Convergência monótona.....	86
6.3 - Convergência para a solução exata.....	
6.4 - Comentários adicionais sobre a convergência para a solução exata.....	88
6.5 - O elemento triangular para estados planos de tensões e deformações à luz dos critérios para a convergência para a solução exata.....	91

6.6 - O elemento retangular de placa à luz dos critérios para a convergência para a solução exata.	92
6.7 - O elemento triangular de placa à luz dos critérios para a convergência para a solução exata.	98
CAPÍTULO VII - APLICAÇÕES	
7.1 - Estruturas analisadas.....	100
7.2 - Placa 1.....	101
7.3 - Placa 2.....	103
7.4 - Placa 3.....	104
7.5 - Placa 4.....	106
7.6 - Placa 5.....	107
7.7 - Placas 6 e 7.....	109
7.8 - Placa 8.....	110
7.9 - Chapas 1 e 2.....	112
7.10 - Descontinuidades nas tensões e momentos causadas por incrustações (reforços).....	115
7.11 - Considerações adicionais sobre as placas reforçadas 6 e 7.....	118
7.12 - A influência dos apoios nas flechas e momentos em placas da mesma natureza.....	119
CONCLUSÃO.....	122
GRÁFICOS.....	123
APÊNDICE	
Convenções adotadas no fluxograma.....	154
A1 - Considerações gerais.....	158
A2 - Explicações referentes ao fluxograma simplificado do subprograma MEF1 e ao subprograma MEF1. Fluxograma simplificado do subprograma MEF1.	
Subprograma MEF1.....	160
A3 - Explicações referentes ao fluxograma simplificado	

do do subprograma MEFI2 e ao subprograma MEFI2.	
Fluxograma simplificado do subprograma MEFI2.....	180
Subprograma MEFI2.....	199
A4 - Subrotinas associadas ao subprograma MEFI1.....	220
A5 - Subrotinas associadas ao subprograma MEFI2.....	
A6 - Considerações sobre as condições de contorno no bordo livre de uma placa.....	236
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	238
NOTA BIOGRÁFICA.....	242

NOTAÇÕES

	determinante
[ ]	matriz quadrada ou retangular
{ }	matriz coluna
$[M^{-1}]$ , $[M]^{-1}$	matriz inversa da matriz $[M]$
$[M^T]$ , $[M]^T$	matriz transposta da matriz $[M]$
$\{\delta^e\}$ , $\{\underline{\delta}^e\}$	deslocamentos nodais do elemento <u>e</u> referidos respectivamente aos sistemas local e global
$\{\delta\}_i$	deslocamentos do nó <u>i</u>
$\{\delta\}$	deslocamentos nodais da estrutura
$\{\delta_d\}$	deslocamentos nodais desconhecidos
$\{\delta_a\}$	deslocamentos dos apoios
$\{\underline{\delta}\}$	matriz dos deslocamentos nodais para a "estrutura desmontada"
$\{f\}$	deslocamentos em um ponto do elemento
$\{\alpha^e\}$	deslocamentos generalizados do elemento <u>e</u>
$[k^e]$ , $[\underline{k}^e]$	matrizes de rigidez do elemento <u>e</u> associadas aos deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$ e referidas respectivamente aos sistemas local e global

$[k_g^e]$	matriz de rigidez do elemento e associada aos deslocamentos generalizados $\{\alpha^e\}$ e em relação a um sistema de referência local
$[K]$	matriz de rigidez global da estrutura
$[k]$	matriz de rigidez para a "estrutura desmontada"
$\{p^e\}, \{p_i^e\}, \{q^e\}$	matrizes associadas ao carregamento do elemento (fôrças de massa, concentradas e de superfície)
$\{P\}$	cargas nodais totais
$\{P_d\}$	cargas nodais totais correspondentes aos deslocamentos nodais desconhecidos
$\{P_a\}$	reações nos apoios
$\{P\}$	matriz das cargas aplicadas diretamente aos nós
$\{P'\}$	matriz das cargas nodais equivalentes ao carregamento da estrutura (excluído $\{P\}$ )
$\{\underline{P}_p\}, \{\underline{P}_c\}, \{\underline{P}_q\}$	matrizes das cargas nodais equivalentes respectivamente, para a "estrutura desmontada", às fôrças de massa, concentradas e de superfície
$\{F^e\}, \{\underline{F}^e\}$	fôrças nodais aplicadas ao elemento e referidas respectivamente aos sistemas local e global
$\{\underline{F}\}$	matriz das fôrças nodais para a "estrutura desmontada"
$\{\Phi^e\}$	fôrças generalizadas "aplicadas" ao elemento e

$\{\epsilon\}, \{\epsilon_c\}, \{\epsilon_v\}$	deformações totais em um ponto do elemento (c - compatível; v - verdadeira)
$\{e\}, \{e_v\}$	deformações elásticas em um ponto do elemento (v - verdadeira)
$\{\epsilon_0\}$	deformações iniciais em um ponto do elemento
$\{\Gamma\}, \{\Gamma_v\}$	tensões em um ponto do elemento (v - verdadeira)
$[N']$	matriz de transformação que associa os deslocamentos generalizados $\{\alpha^e\}$ aos deslocamentos $\{f\}$
$[C]$	matriz de transformação que associa os deslocamentos generalizados $\{\alpha^e\}$ aos deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$
$[N]$	matriz de transformação que associa os deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$ aos deslocamentos $\{f\}$
$[B], [B_c], [B_v]$	matrizes de transformação que associam os deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$ às deformações $\{\epsilon\}$ (c - compatível; v - verdadeira)
$[Q], [Q_c], [Q_v]$	matrizes de transformação que associam os deslocamentos generalizados $\{\alpha^e\}$ às deformações $\{\epsilon\}$ (c - compatível; v - verdadeira)
$[D]$	matriz de transformação que associa as deformações elásticas $\{e\}$ às tensões $\{\Gamma\}$
$[R]$	matriz de transformação que associa os deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$ e $\{\delta^e\}$

[A]

matriz de transformação que associa os deslocamentos nodais  $\{\underline{\delta}\}$  e  $\{\delta\}$

$w^e$ ,  $w$

trabalho das forças externas aplicadas ao elemento  $e$ ; trabalho total das forças externas

$u^e$ ,  $u$

energia de deformação do elemento  $e$ ; energia total de deformação

$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

deslocamentos em um ponto do elemento (estados planos de tensões e deformações)

$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}$

deslocamento em um ponto do elemento (placa)

$\begin{bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix}$

matriz das deformações generalizadas (curvatura e torção) em placas

$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}$

matriz das tensões generalizadas (momentos fletores e de torção) em placas

\*

símbolo associado às grandezas virtuais

-

símbolo associado a um sistema de referência global

$\triangle$

área do triângulo de nós  $ijk$

$\alpha$

coeficiente de dilatação térmica

$t^e$	acréscimo de temperatura no elemento $e$
$\nu$	coeficiente de Poisson
$E$	módulo de elasticidade
$h$	espessura do elemento ou altura da placa
$G$	módulo de elasticidade transversal
$E_x^t, E_y^t, E^{tt}, D_x,$ $D_y, D_{xy}, D_1$	constantes elásticas associadas a um elemento de placa ortotrópico
•	apoio puntual
<u>      </u>	apoio simples
<u>      </u>	bordo livre
<u>      </u>	malha
<u>      </u>	eixo de simetria
	material diferente ou reforço

## INTRODUÇÃO

Como se sabe o computador eletrônico é um instrumento de criação recente. Antes do seu advento os engenheiros viam-se irremediavelmente tolhidos em suas concepções e análises estruturais pela falta de um instrumento de trabalho adequado.

Os métodos clássicos de análise apesar do seu aperfeiçoamento constante só eram capazes de oferecer soluções a problemas simples, geralmente bastante distanciados dos reais. A opção natural, os métodos numéricos, era infelizmente vedada pelo grande esforço exigido e pouca confiança nos resultados.

Com o computador as principais restrições que se faziam aos métodos numéricos desapareceram e estes tomaram tremendo impulso com repercussão em todas as áreas da engenharia e em particular na análise de estruturas.

Por exemplo, a análise de estruturas reticuladas foi reformulada tendo em vista o novo instrumento de trabalho e disto resultou a sua sistematização com a ajuda de métodos matriciais. Com isto pôde-se obter análises rápidas e precisas de estruturas relativamente complexas para as mais diversas condições de carregamento permitindo, inclusive, a otimização do projeto e cálculo.

Deve-se render um tributo especial à indústria aeronáutica pois foi principalmente a necessidade de se obter estruturas leves e seguras sujeitas a severas condições de trabalho a mola pulsora deste desenvolvimento.

É fácil de se ver, todavia, que as novas concepções arquitetônicas, os reatores nucleares, os monstruosos petroleiros, as majestosas barragens e pontes, etc, eram e são também desafios à capacidade criadora do engenheiro.

Lamentavelmente para enfrentar tais situações ele dispunha apenas dos métodos convencionais, que eram reconhecidamente bons para estruturas simples mas que falhavam em casos mais complexos, ou então da análise experimental, sabidamente dispendiosa, em

modelos reduzidos.

Como era de se esperar foram atacados problemas mais complexos relativos ao meio contínuo na esperança de resolvê-los por algum processo adequado de discretização.

O Método das Diferenças Finitas, já conhecido a esta altura, foi desenvolvido e aplicado com sucesso em inúmeras situações.

Todavia com a continuação das pesquisas um novo caminho foi aberto com a criação do Método dos Elementos Finitos.

Ele é uma opção vantajosa ao Método das Diferenças Finitas sob inúmeros aspectos<sup>3,4,5,6</sup>. Em particular sua concepção e desenvolvimento iniciais foram feitos em analogia à Análise Matricial de Estruturas Reticuladas o que o torna atrativo ao engenheiro estrutural. Ainda por este mesmo motivo sua programação para um computador digital é relativamente simples, o que não acontece com o Método das Diferenças Finitas.

Entre outras vantagens apresentadas pelo Método dos Elementos Finitos pode-se citar:

- a) grande facilidade no trato das condições de contorno sejam estas expressas em termos de deslocamentos ou forças;
- b) permite considerar orifícios, descontinuidades, não homogeneidade e anisotropia dentro da formulação normal e com facilidade;
- c) permite a utilização de malhas irregulares o que facilita o estudo de corpos com contorno qualquer assim como o estudo detalhado de regiões onde haja variações bruscas de tensões;
- d) permite analisar a estrutura como um todo, com a utilização de elementos de natureza diferente (viga, placa, casca, etc);
- e) o sistema de equações lineares obtido é normalmente bem condicionado e em geral apresenta menos problemas

do que o obtido, por exemplo, pelo Método das Diferenças Finitas<sup>5</sup>;

f) problemas de natureza dinâmica são tratados de forma análoga aos de natureza estática e com a mesma simplicidade; também problemas de estabilidade elástica.

É de se notar ainda que o método, já a esta altura consagrado em problemas elásticos lineares, começa a ser empregado em problemas não lineares<sup>1</sup> (plasticidade, grandes deformações) e visco-elásticos (deformação lenta) com resultados promissores. Além disso, a comprovação da natureza variacional do método permitiu a sua formulação matemática adequada<sup>7</sup> e, como resultado imediato, o seu emprêgo em problemas não estruturais mas de caráter variacional.

Não é de se estranhar, pois, que ao verificar o grande potencial do novo método inúmeros pesquisadores tenham dirigido seus esforços para ele e um número assombroso de artigos tenha sido publicado em pouco mais de dez anos. Verifica-se pela sua leitura que o método tem sido aplicado com sucesso nas mais diversas situações.

Infelizmente, todavia, como geralmente acontece em tais situações, é difícil ter-se uma idéia global do conjunto. Muito mais difícil ainda é conseguir organizar as informações dadas em pequenas e incompletas doses a fim de se poder utilizar efetivamente o novo método em situações impossíveis de serem abordadas por outros processos.

Recentemente a publicação de dois livros<sup>1,2</sup> sobre o assunto veio ajudar a se ter uma idéia global a seu respeito. Entretanto, da sua leitura à solução de problemas reais há um longo caminho a percorrer. Isto se deve principalmente à necessidade de se programar o método para computadores digitais. Não há, praticamente, publicações específicas sobre êstes programas. A realidade mostra que o tempo e trabalho envolvidos na sua preparação é de tal ordem que os seus possuidores não se mostram propensos a cedê-los.

Acrescente-se a isto o fato dos programas serem feitos para computadores específicos não podendo ser, em geral, utilizados imediatamente em outros computadores.

Foi o reconhecimento do inegável valor do Método dos Elementos Finitos no trato de problemas outrora insolúveis em termos práticos, associado à necessidade de se dispor de um programa que permita o seu uso que deram origem a este trabalho.

Sua versatilidade é comprovada pela apresentação das soluções de vários problemas de interesse teórico e prático ainda não tratados na bibliografia especializada.

Tendo em vista os motivos expostos resolveu-se, ao se esquematizar a tarefa a ser empreendida, que seriam desenvolvidas três partes:

- a) os fundamentos teóricos;
- b) um programa automático;
- c) aplicações do método ao estudo de problemas inéditos de elasticidade plana e placas.

Os fundamentos teóricos básicos são desenvolvidos nos três primeiros capítulos; procurou-se apresentar o método de forma especialmente dirigida aos engenheiros estruturais. Para isto seguindo-se uma linha de apresentação análoga à da Análise Matricial de Estruturas Reticuladas, procurando-se fazer o Método dos Elementos Finitos uma sequência natural desta.

Não obstante todos os resultados apresentados nestes capítulos serem conhecidos, acredita-se haver uma contribuição do autor visando a sistematização do desenvolvimento teórico.

Nos capítulos IV e V são discutidos em detalhe os problemas de estados planos de tensões e deformações e placas; trata-se, naturalmente, de uma continuação da teoria tendo em vista o programa automático que trata de problemas de elasticidade plana e placas.

No capítulo V, referente a placas, há dois pontos a destacar:

- 1) visando-se minimizar os erros, quando da aplicação prática, alterou-se a numeração dos vértices do elemento retangular ortótropo de placa apresentado na referência 1 - disto resultou uma matriz de rigidez análoga à apresentada nesta referência porém com linhas e colunas trocadas;
- 2) a matriz de rigidez para elemento triangular ortótropo de placa apresentada na referência 6 está errada; o erro é indicado e ela é mais trabalhada visando maior eficiência.

No capítulo VI justifica-se a escolha dos elementos adotados ao mesmo tempo em que são discutidos critérios para a escolha da lei de variação dos deslocamentos.

O capítulo VII é o das aplicações; são apresentadas oito placas e duas chapas, as quais se discutem pormenorizadamente com a apresentação de tabelas e gráficos.

Finalmente, no apêndice, é explicado o programa automático desenvolvido; deve-se observar que este é o primeiro programa desta natureza desenvolvido no Brasil e também, que se saiba, o primeiro publicado que permite a análise de placas. Como já se disse, sabe-se que existem programas análogos em alguns centros especializados - apenas evita-se sua difusão.

Deve ser salientado que o autor procurou otimizar o programa na medida permitida por um computador de pequeno porte como é o caso do IBM 1130 no qual foi desenvolvido; para isto lançou mão de técnicas modernas e, em particular, inspirou-se no excelente trabalho de Gere e Weaver para estruturas reticuladas, do qual tomou conhecimento quando de seus estudos na Universidade de Stanford.

Acrecenta-se ainda que o programa foi desenvolvido de forma a permitir, com ligeiras alterações, o tratamento de outros problemas como elasticidade tri-dimensional, cascas, etc.

## CAPÍTULO I - IDEALIZAÇÃO ESTRUTURAL

### 1.1 - Considerações gerais

Ao se estudar um meio contínuo elástico pelo Método dos Elementos Finitos devem-se considerar as seguintes etapas fundamentais:

- a) idealização estrutural;
- b) cálculo das matrizes de rigidez (flexibilidade) dos elementos;
- c) análise estrutural do conjunto de elementos.

Naturalmente a primeira etapa é a fundamental porque é nela que as diversas hipóteses aproximadas são feitas e, consequentemente, os resultados dependerão de terem sido adequadas ou não estas hipóteses.

O cálculo das matrizes de rigidez (flexibilidade) é um processo de certa forma rotineiro partindo-se de hipóteses feitas na primeira etapa.

Na etapa final obtém-se os deslocamentos assim como as tensões na estrutura tendo em vista o carregamento a que ela está submetida.

Para esta análise utiliza-se o Método dos Deslocamentos por ser o que melhor se presta ao cálculo automático (logo, no item b serão calculadas matrizes de rigidez).

Vale dizer que existe absoluta dualidade entre o Método dos Deslocamentos e o Método das Fôrças dentro do Método dos Elementos Finitos. A cada hipótese feita tendo em vista o Método dos Deslocamentos corresponde uma análoga para o Método das Fôrças e é possível desenvolverem-se dois processos de análise, no Método dos Elementos Finitos, em paralelo. Todavia, tendo em vista o caráter deste trabalho não haverá preocupação em mostrar esta analogia e se concentrará no desenvolvimento que leva ao uso do Método dos Deslocamentos.

Neste capítulo e nos que se seguem serão consideradas em detalhe as três etapas mencionadas.

### 1.2 - Fundamentos

A essência fundamental dos métodos matriciais de análise e do Método dos Elementos Finitos é a possibilidade de poder-se substituir a estrutura contínua por um conjunto de elementos estruturais.

Naturalmente se se divide o contínuo por meio de linhas ou superfícies a fim de se obter o conjunto de elementos estruturais verifica-se que êles estão interligados por um número infinito de pontos. Logo a simples divisão não é suficiente para se discretizar o problema.

Para superar o impasse supõem-se os elementos interligados por um número finito de pontos nodais situados no seu contorno. Isto feito consideram-se os deslocamentos destes nós como as incógnitas do problema que é, desta forma, discretizado. Como se verá posteriormente estas hipóteses permitirão reduzir o problema à solução de um sistema de equações algébricas lineares à semelhança do que ocorre na análise de estruturas reticuladas.

Como já se teve ocasião de mencionar é possível identificar o Método dos Elementos Finitos como um método variacional e a razão de se procurar apresentá-lo em uma linha semelhante à da análise matricial de estruturas reticuladas é facilitar sua compreensão e aproveitar a experiência acumulada nesta.

Verifica-se, todavia, que se a experiência pôde realmente ser aproveitada, já não é tão simples aceitar intuitivamente seu mecanismo, ao contrário do que acontece na análise de estruturas reticuladas.

Na figura 1.1 estão representados um pórtico plano e sua idealização estrutural.

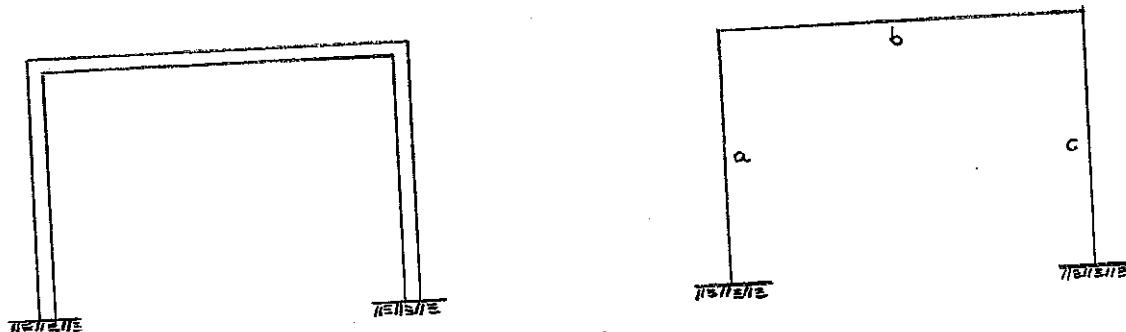


Figura 1.1

A hipótese feita para se obter a idealização estrutural é considerarem-se os elementos estruturais com caráter unidimensional. Vê-se imediatamente que se se considera a, b e c como o conjunto de elementos estruturais equivalente à estrutura original então obtém-se elementos ligados entre si por um número discreto de pontos. Este fato facilita enormemente a análise.

É relativamente simples neste caso passar-se das equações diferenciais do meio contínuo a um sistema de equações algébricas.

Observe-se inicialmente que as propriedades elásticas destes elementos estruturais podem ser determinadas facilmente e com precisão satisfatória a partir das teorias elementares de flexão e torção, especialmente para elementos em que seu comprimento tenha caráter dominante (para elementos bi e tri-dimensionais a situação não é tão simples).

É possível, então, resolverem-se, para cada elemento, as equações diferenciais da Teoria da Elasticidade em termos dos valores no contorno (fôrças e deslocamentos nos nós). Em seguida, a satisfação das condições de contorno em elementos adjacentes fornece um sistema de equações algébricas cuja solução permite avaliar os valores no contorno desconhecidos. Uma vez determinados êles permitem analisar todos os elementos por meio de relações força-deslocamento ou deslocamento-fôrça previamente estabelecidas.

Vê-se, portanto, que as estruturas reticuladas não oferecem qualquer dificuldade ao processo de discretização.

Não é de se estranhar, pois, que as primeiras tentativas de se estudar o meio contínuo resultassem do esforço em representá-

lo por estruturas reticuladas em que as propriedades elásticas dos elementos estruturais eram calculadas de forma a simularem o funcionamento do meio contínuo.

Sabe-se, por exemplo, que em muitos casos é possível analisar-se uma placa substituindo-a por uma grelha<sup>8</sup> ou uma casca idealizando-a como treliça espacial.

Admite-se, inclusive, que o conceito de elemento finito surgiu da tentativa de melhorar o modelo reticulado sugerido por Hrennikoff e posteriormente por McHenry para o estudo de estados planos de tensões<sup>9</sup>.

Logo, a importante inovação introduzida pelo Método dos Elementos Finitos não é, certamente, a representação do contínuo por elementos estruturais e sim o uso de elementos bi e tri-dimensionais com os quais, ao se reduzir sucessivamente seu tamanho, é possível obter-se uma idealização mais adequada.

Uma vantagem imediata permitida por esta representação é considerarem-se as propriedades do material que forma cada elemento idênticas às do contínuo original. Isto facilita sobremaneira a consideração, por exemplo, de anisotropia e heterogeneidade.

Não obstante esta significativa generalização podem-se ainda empregar os métodos matriciais de análise de estruturas reticuladas; como se verá as propriedades de cada elemento serão calculadas utilizando-se a teoria associada aos meios contínuos, ao passo que a análise da estrutura contínua será efetuada sobre o conjunto de elementos estruturais quando então os referidos métodos matriciais poderão ser utilizados.

Ver-se-á a seguir, todavia, que o processo de discretização do meio contínuo por elementos que estão inicialmente ligados continuamente não é tão simples como o das estruturas reticuladas e apresenta algumas dificuldades.

É de se notar a este ponto a diferença existente entre o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas. No primeiro faz-se uma aproximação física e uma vez feita esta prosse

gue-se normalmente sem nenhuma outra aproximação. No Método das Diferenças Finitas ao contrário obtém-se as equações exatas fornecidas pela Teoria da Elasticidade relativas ao meio que está sendo estudado e estas é que são resolvidas por processos matemáticos aproximados.

### 1.3 - Campo de deslocamentos

A determinação das propriedades elásticas dos elementos estruturais das estruturas reticuladas; ou seja, o cálculo das matrizes de rigidez associadas a estes elementos, é geralmente feita com simplicidade. O método mais comum para a determinação dos coeficientes das matrizes consiste em se fixarem as juntas do elemento e introduzir, um de cada vez, deslocamentos unitários ao mesmo tempo em que todos os outros deslocamentos são impedidos. Naturalmente, em cada etapa, é necessário que se apliquem forças para manter o elemento (descarregado) em equilíbrio. Estas forças assim determinadas irão constituir a coluna da matriz de rigidez correspondente ao deslocamento introduzido.

Este processo, todavia, não pode ser usado para elementos bi e tri-dimensionais por dois motivos.

Em primeiro lugar é em geral muito difícil a determinação destas forças; com os métodos matemáticos disponíveis atualmente é na realidade impossível este cálculo na grande maioria dos casos.

Em segundo lugar, e é este realmente o motivo principal, uma aproximação feita desta forma dificilmente representaria adequadamente o funcionamento do contínuo.

Veja-se, por exemplo, que esta forma de determinar as forças permite que os elementos desloquem-se praticamente independentemente uns dos outros, já que os únicos pontos de ligação são os nós.

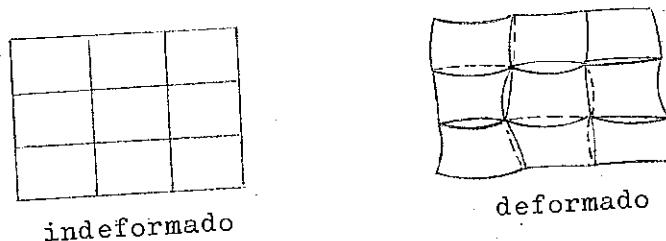


Figura 1.2

A figura 1.2 mostra, para os elementos retangulares representados, o conjunto indeformado e deformado (deformação correspondente a um certo carregamento). É fácil de se notar que em algumas regiões os elementos se sobrepõem e em outras há espaços vazios.

Tem-se assim uma idealização por demais flexível e incapaz de representar adequadamente o contínuo. Observe-se, de passagem, que este fato não tem a menor importância nas estruturas reticuladas.

Além do mais teríamos na região dos nós forte concentração de tensões produzidas pelas forças concentradas transmitidas por eles, as quais introduzem descontinuidades inexistentes no contínuo. Não se pode esperar, pois, que o campo de tensões obtido com este modelo represente com alguma fidelidade o correspondente no contínuo.

A forma de se obter um modelo capaz de simular adequadamente o contínuo está intimamente relacionada com a sua capacidade em representar de forma satisfatória as deformações que realmente ocorrem na estrutura real.

Deve-se, pois, exigir que cada elemento estrutural seja capaz de representar satisfatoriamente as deformações que ocorrem na região correspondente do contínuo.

O método normalmente utilizado para obter-se este resultado é estabelecer-se a lei de variação do campo de deslocamentos.

É esta a operação mais delicada do Método dos Elementos Finitos e também a mais difícil.

Os critérios para a escolha das funções representativas dos deslocamentos serão abordados em um capítulo posterior quando também se tratará do problema da convergência da solução aproximada, obtida com o modelo formado pelo conjunto de elementos estruturais finitos, para a solução exata quando o tamanho dos elementos diminui. Já no próximo capítulo, todavia, estas funções serão introduzidas pois que são fundamentais ao desenvolvimento da teoria.

CAPÍTULO II - CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO

2.1 - Funções de deslocamento

A escolha das funções de deslocamento, ou seja, da lei de variação do campo de deslocamentos de um elemento estrutural, é parte do processo de idealização estrutural. Todavia, para unificar a exposição relativa à determinação da matriz de rigidez de um elemento considerou-se mais adequado fazer o desenvolvimento matemático associado a esta escolha neste capítulo.

Ressalte-se, novamente, que esta escolha deve seguir certos critérios, os quais serão estudados em capítulo posterior. No que se segue é, entretanto, irrelevante saber-se até que ponto foram satisfeitos os referidos critérios já que a escolha em si não é feita.

Como se sabe da análise matricial de estruturas reticulares a escolha do sistema de referência adotado para os cálculos influí na maior ou menor dificuldade em obter-se a matriz de rigidez de um elemento. A experiência mostra que para elementos mais complexos o uso de sistemas de referência locais facilita sobremaneira o cálculo.

Por isto supõe-se que a matriz de rigidez é determinada em relação a um sistema de referência local. Posteriormente, quando da análise, ela é transformada de forma a poder-se usar um único sistema de referência (global) para todos os elementos.

As incógnitas no Método dos Deslocamentos são, como já se disse, os deslocamentos nodais.

Suponha-se ter um elemento com  $\beta$  nós, estando associados a cada nó  $\gamma$  deslocamentos (rotações podem estar incluídas dependendo do problema em foco); a este elemento estão associados, pois,  $\lambda = \beta \times \gamma$  deslocamentos nodais que serão normalmente representados por

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} \{\delta\}_i \\ \{\delta\}_j \\ \vdots \\ \{\delta\}_m \end{bmatrix}$$

As submatrizes  $\{\delta\}_i, \{\delta\}_j, \dots, \{\delta\}_m$  representam os deslocamentos associados aos nós  $i, j, \dots, m$  do elemento.

A introdução das funções de deslocamento é feita supondo-se que os deslocamentos  $\{f\}$  em um ponto do elemento possam ser expressos pela equação matricial

$$\{f\} = [N] \{\delta^e\} \quad (2.1)$$

Isto é, admite-se ser possível exprimir os deslocamentos em um ponto do elemento como funções lineares dos deslocamentos nodais; os coeficientes da matriz  $[N]$  são, em geral, funções contínuas da posição do ponto considerado.

O desenvolvimento teórico que agora se inicia refere-se a problemas de elasticidade linear; isto é, admite-se que as associações em um ponto sejam uma combinação linear das deformações associadas (lei de Hooke generalizada) e que os deslocamentos sejam pequenos.

Se se examina a equação (2.1) à luz da teoria elástica linear verifica-se que para ela ser válida é necessário que o elemento em estudo esteja ligado ao meio circundante por pontos discretos. Na realidade, como já se disse, ao se dividir o contínuo por linhas ou superfícies obtém-se elementos que estão ligados continuamente ao meio que os circunda. Consequentemente, o uso da equação (2.1) introduzida por uma necessidade de discretização, levará, em geral, a representações aproximadas do campo de deformações real.

Neste trabalho não serão considerados problemas dinâmicos.

cos; todavia vale ressaltar que neste tipo de problemas a matriz  $[N]$  é inexistente mesmo para elementos ligados ao meio circundante por pontos discretos.

É também comum introduzirem-se as funções de deslocamento supondo-se ser possível exprimir os deslocamentos  $\{f\}$  em um ponto do elemento como funções lineares de parâmetros que serão considerados como coordenadas generalizadas:

(2.2)

$$\{f\} = [N'] \{d^e\}$$

Como anteriormente, os coeficientes da matriz  $[N']$  são usualmente funções contínuas da posição do ponto considerado.

Há interesse em ambos os processos e por isto eles serão desenvolvidos simultaneamente. No desenvolvimento que se segue supõe-se a número de coordenadas generalizadas  $\{d^e\}$  igual a  $\lambda$ , isto é, igual ao número de deslocamentos nodais do elemento.

A equação (2.2) permite relacionar as coordenadas generalizadas  $\{d^e\}$  aos deslocamentos nodais  $\{\delta\}$ . Ela permite escrever (supondo xyz o sistema de referência)

$$\{\delta\}_i = [N'(x_i, y_i, z_i)] \{d^e\}$$

$$\{\delta\}_j = [N'(x_j, y_j, z_j)] \{d^e\}$$

:

$$\{\delta\}_m = [N'(x_m, y_m, z_m)] \{d^e\}$$

Agrupando-se em uma única equação obtém-se

$$\begin{bmatrix} \{\delta\}_i \\ \{\delta\}_j \\ \vdots \\ \{\delta\}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [N'(x_i, y_i, z_i)] \\ [N'(x_j, y_j, z_j)] \\ \vdots \\ [N'(x_m, y_m, z_m)] \end{bmatrix} \{d^e\}$$

ou

(2.3)

$$\{\delta^e\} = [C] \{\delta^e\}$$

onde

$$[C] = \begin{bmatrix} [N^i(x_i, y_i, z_i)] \\ [N^i(x_j, y_j, z_j)] \\ \vdots \\ [N^i(x_m, y_m, z_m)] \end{bmatrix}$$

é a matriz de transformação que associa os deslocamentos generalizados  $\{\delta^e\}$  aos deslocamentos nodais  $\{\delta^e\}$ .  
É, agora, também possível obter-se a relação inversa à representada por (2.3):

(2.4)

$$\{\delta^e\} = [C]^{-1} \{\delta^e\}$$

A matriz  $[C]^{-1}$  normalmente é obtida sem maiores problemas tratando-se de mera rotina de inversão; algumas vezes, todavia, dependendo das hipóteses feitas com relação às funções de deslocamento e também dependendo da orientação do elemento pode-se ter uma matriz  $[C]$  singular.

Se bem que o problema possa ser contornado muitas vezes simplesmente mudando a orientação do elemento, tem sido evitado o uso de funções de deslocamento em que esta singularidade possa acontecer.<sup>1</sup>

Se se introduz agora na equação (2.2) o valor de  $\{\delta^e\}$  obtido em (2.4) tem-se

(2.5)

$$\{f\} = [N^i] [C]^{-1} \{\delta^e\}$$

A comparação entre as equações (2.1) e (2.5) mostra que

(2.6)

$$[N] = [N^i] [C]^{-1}$$

Como se verá adiante a matriz  $[N^i]$  é a de mais simples

formulação; algumas vezes é possível obterem-se expressões explícitas para  $[N]$  mas em geral esta determinação é bastante laboriosa. Quando fôr êste o caso a equação (2.6) é muito útil já que permite obter-se  $[N]$  com simplicidade; a inversão da matriz  $[C]$ , como se disse, não oferece maiores problemas sendo feita automaticamente pelo computador.

## 2.2 - Deformações no elemento

As equações (2.1) e (2.2) definindo o campo de deslocamentos do elemento prestam-se, naturalmente, à determinação das deformações associadas a este campo.

Assim, derivando-se adequadamente os deslocamentos  $\{f\}$ , o que corresponde a derivar as matrizes  $[N]$  e  $[N']$  obtém-se

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta^e\} \quad (2.7)$$

e

$$\{\epsilon\} = [Q]\{\alpha^e\} \quad (2.8)$$

A matriz  $\{\epsilon\}$  representa as deformações totais englobando, caso existam, deformações iniciais causadas por efeitos de temperatura, pré-esforço, etc.

A matriz  $\{f\}$  pode incluir, dependendo do problema em estudo, rotações. Isto dá à matriz das deformações  $\{\epsilon\}$  um caráter mais geral e é conveniente considerá-la como representando, na verdade, distorções no elemento. O uso da palavra deformação é assim generalizado e ela poderá significar, por exemplo, curvatura.

As equações (2.4) e (2.8) permitem escrever:

$$\{\epsilon\} = [Q][C]^{-1}\{\delta^e\} \quad (2.9)$$

Comparando (2.7) e (2.9) vê-se que

$$[B] = [Q][C]^{-1} \quad (2.10)$$

### 2.3 - Tensões no elemento

Se se representa por  $\{\epsilon\}$  a matriz das deformações elásticas pode-se escrever

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_e\} + \{\epsilon_o\} \quad (2.11)$$

onde  $\{\epsilon_o\}$  é a matriz das deformações iniciais.

Tem-se suposto o material do elemento elástico e a lei de Hooke generalizada válida; se além disso o material do elemento é homogêneo a equação relacionando as tensões e deformações é da forma

$$\{G\} = [D]\{\epsilon\} \quad (2.12)$$

onde  $\{G\}$  é a matriz das tensões e  $[D]$  é uma matriz de transformação associando as deformações elásticas às tensões. A matriz  $[D]$  é representativa das propriedades do material do elemento.

As equações (2.11) e (2.12) permitem escrever

$$\{G\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_o\}) \quad (2.13)$$

De (2.7) e (2.13) obtém-se

$$\{G\} = [D]([B]\{\sigma^e\} - \{\epsilon_o\})$$

ou

$$\{G\} = [D][B]\{\sigma^e\} - [D]\{\epsilon_o\} \quad (2.14)$$

Se se faz

$$[S] = [D][B] \quad (2.15)$$

a equação (2.14) fica

$$\{G\} = [S]\{\delta^e\} - [D]\{\epsilon_o\} \quad (2.16)$$

Pode-se fazer um desenvolvimento análogo considerando-se as coordenadas generalizadas  $\{\alpha^e\}$ . Levando o valor de  $\{\epsilon\}$  dado pela equação (2.8) na equação (2.13) tem-se

$$\{G\} = [D][Q]\{\alpha^e\} - [D]\{\epsilon_o\} \quad (2.17)$$

Das equações (2.4) e (2.17) tira-se

$$\{G\} = [D][Q][C]^{-1}\{\delta^e\} - [D]\{\epsilon_o\} \quad (2.18)$$

Comparando as equações (2.16) e (2.18) conclui-se ainda que

$$[S] = [D][Q][C]^{-1} \quad (2.19)$$

#### 2.4 - Matriz de rigidez do elemento

Considere-se um elemento ligado ao meio circundante por um número finito de pontos (nós) e sejam  $\{\delta^e\}$  e  $\{F^e\}$  os deslocamentos e forças associados a estes nós. Vai-se procurar determinar uma relação entre estas forças e deslocamentos nodais e para isto será utilizado o Princípio do Trabalho Virtual. O elemento pode estar sujeito a um estado inicial de deformação mas o carregamento é constituído exclusivamente pelas forças nodais.

Assim sendo dê-se ao elemento nova configuração, tendo em vista, porém, que os incrementos infinitesimais introduzidos devem ser de natureza a respeitar a compatibilidade das deformações.

Como nesta transformação de configurações o carregamento permanece inalterado, o trabalho realizado pelas forças externas é dado por (o símbolo \* indica que o incremento sofrido pela grandeza à qual está associado é devido ao deslocamento virtual):

$$W^{e*} = \{\delta^{e*}\}^T \{F^e\} \quad (2.20)$$

Nesta equação  $W^e$  representa o trabalho das forças externas.

Se se representa a energia de deformação do elemento por  $U^e$ , os incrementos das deformações em um ponto do seu interior por  $\{\epsilon_c^*\}$  (o índice  $c$  é usado para ressaltar que se trata de deformações compatíveis), as tensões por  $\{\sigma_v\}$  (o índice  $v$  indica tratar-se das tensões verdadeiras), o incremento da energia de deformação é então dado por (observar que  $\{\sigma_v\}$  permanece inalterado):

$$U^{e*} = \int_V \{\epsilon_c^*\}^T \{\sigma_v\} dV \quad (2.21)$$

O Princípio do Trabalho Virtual estabelece que

$$W^{e*} = U^{e*} \quad (2.22)$$

As equações (2.20), (2.21) e (2.22) permitem escrever

$$\{\epsilon^{e*}\}^T \{F^e\} = \int_V \{\epsilon_c^*\}^T \{\sigma_v\} dV \quad (2.23)$$

A obtenção de deformações compatíveis é relativamente simples não havendo maiores problemas em conseguir-se uma relação do tipo (2.24):

$$\{\epsilon_c\} = [B_c] \{\delta^e\} \quad (2.24)$$

De (2.24) obtém-se

$$\{\epsilon_c^*\} = [B_c] \{\delta^{e*}\} \quad (2.25)$$

A determinação das tensões e deformações verdadeiras é geralmente problemática mas como se trata de problemas elásticos lineares é válida a relação (2.26):

$$\{\epsilon_v\} = [B_v] \{\delta^e\} \quad (2.26)$$

Uma vez conhecida a matriz  $[B_v]$  a obtenção de  $\{\varepsilon_v\}$  é simples:

$$\{\varepsilon_v\} = [D]\{e_v\} = [D](\{\varepsilon_v^*\} - \{\varepsilon_o\}) \quad (2.27)$$

As equações (2.26) e (2.27) permitem escrever

$$\{\varepsilon_v\} = [D][B_v]\{\varepsilon^e\} - [D]\{\varepsilon_o\} \quad (2.28)$$

Introduzindo em (2.23) os valores de  $\{\varepsilon_c^*\}$  e  $\{\varepsilon_v\}$  dados por (2.25) e (2.28) obtém-se

$$\{\varepsilon^*\}^T \{F^e\} = \int \{\varepsilon^*\}^T [B_c]^T ([D][B_v]\{\varepsilon^e\} - [D]\{\varepsilon_o\}) dV$$

Dai deduz-se

$$\{\varepsilon^*\}^T \{F^e\} = \{\varepsilon^*\}^T \int [B_c]^T ([D][B_v]\{\varepsilon^e\} - [D]\{\varepsilon_o\}) dV$$

$$\text{ou } \{\varepsilon^*\}^T (\{F^e\} - \int [B_c]^T ([D][B_v]\{\varepsilon^e\} - [D]\{\varepsilon_o\}) dV) = 0 \quad (2.29)$$

Como a expressão (2.29) deve ser válida para qualquer deslocamento virtual  $\{\varepsilon^*\}$  segue-se que

$$\{F^e\} = \int [B_c]^T ([D][B_v]\{\varepsilon^e\} - [D]\{\varepsilon_o\}) dV$$

$$\text{ou } \{F^e\} = \left( \int [B_c]^T [D][B_v] dV \right) \{\varepsilon^e\} - \int [B_c]^T [D]\{\varepsilon_o\} dV \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é a relação procurada; como se ressaltou no inicio ela foi determinada para um elemento ligado ao meio circundante por pontos discretos e sujeito a um carregamento formado por cargas nodais.

Não se pode, portanto, a rigor, utilizá-la para um elemento em que as ligações são contínuas ao invés de discretas. Não obstante é o que se fará; isto naturalmente implicará em soluções

aproximadas.

Vê-se claramente que uma aproximação feita consiste em substituir-se a distribuição de tensões existente no contorno do elemento por um conjunto de forças nodais.

Estas forças são, evidentemente, fictícias tratando-se simplesmente de um artifício matemático com vistas à discretização do problema.

Recapitulando a dedução da equação (2.30) vê-se que esta aproximação é introduzida pela equação (2.20) quando o incremento  $W^*$  é calculado.

Além desta aproximação é introduzida outra pela equação (2.26) que só é válida quando o número de ligações com o meio círcundante é discreto.

A equação (2.30) na forma como está apresenta em geral dificuldades em ser estabelecida pois que a determinação da matriz  $[B_v]$  é muito difícil ou mesmo impossível na maioria dos casos.

A matriz  $[B_v]$  representa a distribuição exata do campo de deformações; isto quer dizer que o seu uso na equação (2.30) garante a satisfação das equações de equilíbrio e compatibilidade em todo o elemento.

Logo, se se vai usar outra matriz que não  $[B_v]$  estas equações não serão totalmente satisfeitas e o grau de aproximação introduzido depende, naturalmente, de se saber até que ponto elas foram satisfeitas.

O que normalmente se faz, tendo em vista o Método dos Elementos Finitos, é supor que as equações de compatibilidade são satisfeitas, isto é, que as deformações no elemento são compatíveis. Neste caso  $[B_v] = [B_c]$  e a equação (2.30) fica

$$\{F^e\} = \left( \int_V [B_c]^T [D] [B_c] dV \right) \{\delta^e\} - \int_V [B_c]^T [D] \{\varepsilon_o\} dV \quad (2.31)$$

Nos elementos finitos a serem estudados neste trabalho tem-se sempre compatibilidade de deformação no interior do elemento. Assim, comparando as equações (2.7) e (2.24) vê-se que

$$[B_c] = [B].$$

A equação (2.31) pode finalmente ser escrita:

$$\{F^e\} = \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{\delta^e\} - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_o\} dV \quad (2.32)$$

Define-se, agora, como matriz de rigidez do elemento associada aos deslocamentos  $\{\delta^e\}$  a matriz  $[k^e]$  dada por

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (2.33)$$

Se se introduz este valor na equação (2.32) obtém-se uma relação mais condensada:

$$\{F^e\} = [k^e] \{\delta^e\} - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_o\} dV \quad (2.34)$$

Todo o desenvolvimento feito para se obter a matriz  $[k^e]$  relacionou-se aos deslocamentos nodais  $\{\delta^e\}$ ; é possível fazer-se o mesmo considerando-se as coordenadas generalizadas  $\{\alpha^e\}$ .

Se se representa por  $\{\varphi^e\}$  as forças generalizadas associadas às coordenadas generalizadas  $\{\alpha^e\}$  então

$$w^{e*} = \{\alpha^e\}^T \{\varphi^e\} \quad (2.35)$$

Já se viu que

$$u^{e*} = \int_V \{\xi_c^*\}^T \{\bar{v}_v\} dV \quad (2.21)$$

$$w^{e*} = u^{e*} \quad (2.22)$$

As equações (2.21), (2.22) e (2.35) permitem escrever

$$\{\alpha^{e*}\}^T \{\varphi^e\} = \int_V \{\xi_c^*\}^T \{\bar{v}_v\} dV \quad (2.36)$$

Analogamente ao que foi feito para os deslocamentos no -

dais  $\{\delta^e\}$  também se têm

$$\{\xi_c\} = [Q_c] \{\alpha^e\}, \quad (2.37)$$

$$\{\xi_c^*\} = [Q_c] \{\alpha^{e*}\}, \quad (2.38)$$

$$\{\xi_v\} = [Q_v] \{\alpha^e\} \quad (2.39)$$

$$\{\xi_v\} = [D][Q_v]\{\alpha^e\} - [D]\{\xi_o\} \quad (2.40)$$

Introduzindo na equação (2.36) os valores de  $\{\xi_c^*\}$  e  $\{\xi_v\}$  dados nas equações (2.38) e (2.40) obtém-se

$$\{\alpha^{e*}\}^T \{\xi_v\} = \int \{\alpha^{e*}\}^T [Q_c]^T [D][Q_v] \{\alpha^e\} - [D]\{\xi_o\} dV$$

$$\text{ou } \{\alpha^{e*}\}^T (\{\xi_v\}) - \int [Q_c]^T [D][Q_v] \{\alpha^e\} - [D]\{\xi_o\} dV = 0$$

Como esta expressão deve ser válida para qualquer valor de  $\{\alpha^{e*}\}$  segue-se que

$$\{\xi_v\} = \left( \int [Q_c]^T [D][Q_v] dV \right) \{\alpha^e\} - \int [Q_c]^T [D]\{\xi_o\} dV \quad (2.41)$$

Seguindo a mesma linha de argumentos desenvolvida para os deslocamentos nodais  $\{\delta^e\}$  chega-se, finalmente, à equação

$$\{\xi_v\} = \left( \int [Q]^T [D][Q] dV \right) \{\alpha^e\} - \int [Q]^T [D]\{\xi_o\} dV \quad (2.42)$$

Define-se então como matriz de rigidez do elemento associada aos deslocamentos generalizados  $\{\alpha^e\}$  a matriz  $[k_g^e]$  dada por

$$[k_g^e] = \int [Q]^T [D][Q] dV \quad (2.43)$$

A equação (2.42) pode então ser escrita

$$\{\varphi^e\} = [k_g^e] \{\varphi\} - \int_V [Q]^T [D] \{\xi_o\} dV \quad (2.44)$$

É interessante relacionar estes resultados; a comparação das equações (2.23) e (2.36) mostra que

$$\{s^{ex}\}^T \{F^e\} = \{\alpha^{ex}\}^T \{\varphi\} \quad (2.45)$$

Da equação (2.4) obtém-se

$$\{\alpha^{ex}\}^T = \{s^{ex}\}^T [C^{-1}]^T \quad (2.46)$$

As equações (2.45) e (2.46) permitem escrever

$$\{s^{ex}\}^T (\{F^e\} - [C^{-1}]^T \{\varphi\}) = 0$$

Como esta relação é válida para qualquer valor de  $\{s^{ex}\}$ , a relação entre as forças nodais  $\{F^e\}$  e generalizadas  $\{\varphi^e\}$  é

$$\{F^e\} = [C^{-1}]^T \{\varphi^e\} \quad (2.47)$$

ou

$$\{\varphi^e\} = [C]^T \{F^e\} \quad (2.48)$$

Se se multiplica a equação (2.42) à esquerda por  $[C^{-1}]^T$

obtem-se

$$[C^{-1}]^T \{\varphi^e\} = [C^{-1}]^T \left( \int_V [Q]^T [D] [Q] dV \right) \{\alpha^e\} - [C^{-1}]^T \int_V [Q]^T [D] \{\xi_o\} dV \quad (2.49)$$

As equações (2.4), (2.47) e (2.49) levam a

$$\{F^e\} = [C^{-1}]^T \left( \int_V [Q]^T [D] [Q] dV \right) [C^{-1}] \{\alpha^e\} - [C^{-1}]^T \int_V [Q]^T [D] \{\xi_o\} dV \quad (2.50)$$

A comparação das equações (2.34), (2.43) e (2.50) permite ainda concluir que

$$[k^e] = [C^{-1}]^T \left( \int_V [Q]^T [D] [Q] dV \right) [C^{-1}] \quad (2.51)$$

ou

$$[k^e] = [C^{-1}]^T [k_g^e] [C^{-1}] \quad (2.52)$$

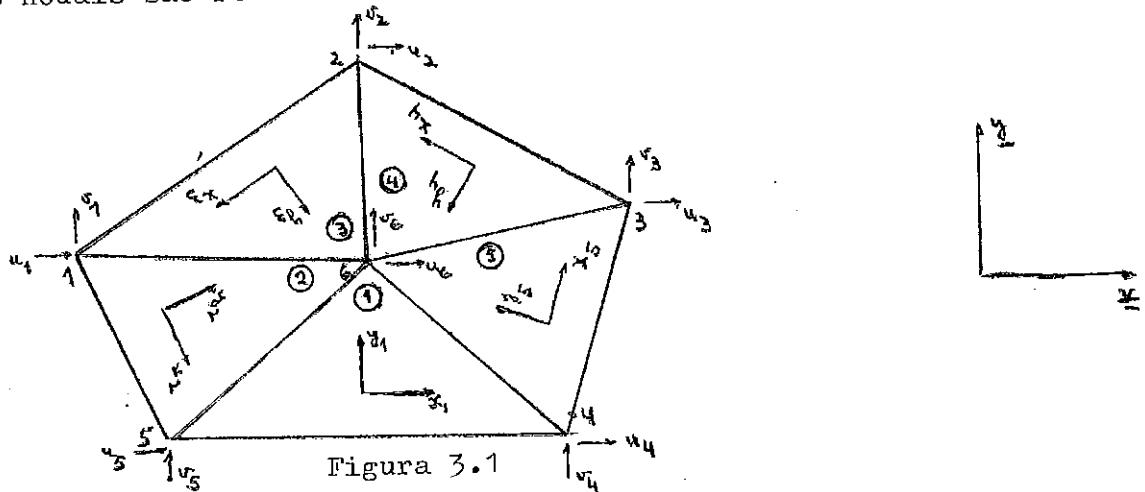
Os resultados obtidos neste capítulo serão usados a seguir na análise estrutural do conjunto de elementos finitos.

CAPÍTULO III - ANÁLISE ESTRUTURAL DO CONJUNTO DE ELEMENTOS

3.1 - Sistema de referência global

Como se disse, o cálculo da matriz de rigidez de um elemento é geralmente feito utilizando-se um sistema de referência local visando a simplificação deste cálculo. Mas para se proceder a análise do conjunto de elementos é necessário utilizar um único sistema de referência global que é aquêle em relação ao qual serão determinados os deslocamentos dos nós da estrutura.

Na figura 3.1 exemplifica-se uma possível situação; o sistema xy é global mas todos os outros são locais; os deslocamentos nodais são referidos ao sistema global.



Como se viu, a equação fundamental relacionando as forças e deslocamentos nodais de um elemento é

$$\{F^e\} = [k^e]\{\delta^e\} - \int_{V_e} [B]^T [D] \{\varepsilon_o\} dV \quad (2.34)$$

Faça-se

$$\{F_t\} = \int_{V_e} [B]^T [D] \{\varepsilon_o\} dV \quad (3.1)$$

A equação (2.34) pode, então, ser reescrita

$$\{F^e\} = [k^e] \{\underline{\delta}^e\} - \{F_t^e\} \quad (3.2)$$

A esta equação corresponde uma análoga referida ao sistema global; no que segue vai-se procurar determiná-la.

Seja  $\{\underline{\delta}^e\}$  (o símbolo  $\underline{\phantom{x}}$  indica que a grandeza à qual está associado refere-se ao sistema de referência global) a matriz dos deslocamentos nodais do elemento  $e$  referidos ao sistema global. É sempre possível relacionar os deslocamentos nodais  $\{\delta^e\}$  e  $\{\underline{\delta}^e\}$  por uma equação do tipo

$$\{\delta^e\} = [R] \{\underline{\delta}^e\} \quad (3.3)$$

onde  $[R]$  é a matriz de transformação que estabelece esta relação.

Se se dá ao elemento um deslocamento virtual os deslocamentos nodais virtuais serão, naturalmente, relacionados pela equação

$$\{\delta^{e*}\} = [R] \{\underline{\delta}^{e*}\} \quad (3.4)$$

Evidentemente o trabalho realizado pelas forças externas devido a este deslocamento é independente do sistema de referência. Logo

$$\{\delta^{e*}\}^T \{F\} = \{\underline{\delta}^{e*}\}^T \{\underline{F}^e\} \quad (3.5)$$

onde  $\{\underline{F}^e\}$  é a matriz das forças nodais aplicadas ao elemento referidas a um sistema global.

Substituindo na equação (3.5) o valor de  $\{\delta^{e*}\}$  dado em (3.4) tem-se

$$\{\underline{\delta}^{e*}\}^T [R]^T \{F^e\} = \{\underline{\delta}^{e*}\}^T \{\underline{F}^e\} \quad (3.6)$$

ou

$$\{\underline{\delta}^e\}^T [\underline{R}]^T \{\underline{F}^e\} - \{\underline{F}_t^e\} = 0 \quad (3.7)$$

Como a equação (3.7) é válida para qualquer valor de  $\{\underline{\delta}^e\}$

segue-se que

$$\{\underline{F}^e\} = [\underline{R}]^T \{\underline{F}_t^e\} \quad (3.8)$$

As equações (3.2) e (3.8) permitem escrever

$$\{\underline{F}^e\} = [\underline{R}]^T [\underline{k}^e] \{\underline{\delta}^e\} - [\underline{R}]^T \{\underline{F}_t^e\} \quad (3.9)$$

Levando na equação (3.9) o valor de  $\{\underline{\delta}^e\}$  dado pela equação (3.3) obtém-se

$$\{\underline{F}^e\} = [\underline{R}]^T [\underline{k}^e] [\underline{R}] \{\underline{\delta}^e\} - [\underline{R}]^T \{\underline{F}_t^e\} \quad (3.10)$$

A equação (3.10) pode ser posta sob a forma

$$\{\underline{F}^e\} = [\underline{k}^e] \{\underline{\delta}^e\} - \{\underline{F}_t^e\} \quad (3.11)$$

desde que se faça

$$[\underline{k}^e] = [\underline{R}]^T [\underline{k}^e] [\underline{R}] \quad (3.12)$$

e

$$\{\underline{F}_t^e\} = [\underline{R}]^T \{\underline{F}_t^e\} \quad (3.13)$$

Evidentemente a equação (3.11) é a equação análoga que se procurava determinar;  $[\underline{k}^e]$  é a matriz de rigidez do elemento e associada aos deslocamentos nodais  $\{\underline{\delta}^e\}$ , para um sistema de referência global.

### 3.2 - Equação de equilíbrio

Uma vez obtida a equação (3.11) é possível passar-se a análise da estrutura, isto é, a análise do conjunto de elementos infinitos que se supõe representá-la; a etapa fundamental nesta análise é o cálculo dos deslocamentos nodais. Vai-se inicialmente determinar a equação que, satisfeita, garante o equilíbrio do conjunto.

Se o número de elementos é  $m$  existem, então,  $m$  equações do tipo (3.11) referentes aos diversos elementos:

$$\begin{aligned} \{\underline{F}^1\} &= [\underline{k}^1] \{\underline{\delta}^1\} - \{\underline{F}_t^1\} \\ \{\underline{F}^2\} &= [\underline{k}^2] \{\underline{\delta}^2\} - \{\underline{F}_t^2\} \\ &\dots \\ \{\underline{F}^m\} &= [\underline{k}^m] \{\underline{\delta}^m\} - \{\underline{F}_t^m\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

O sistema de equações (3.14) pode também ser escrito de forma mais condensada:

$$\begin{bmatrix} \{\underline{F}^1\} \\ \{\underline{F}^2\} \\ \vdots \\ \{\underline{F}^m\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{k}^1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\underline{k}^2] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\underline{k}^m] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\underline{\delta}^1\} \\ \{\underline{\delta}^2\} \\ \vdots \\ \{\underline{\delta}^m\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{\underline{F}_t^1\} \\ \{\underline{F}_t^2\} \\ \vdots \\ \{\underline{F}_t^m\} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Se se faz

$$\{\underline{F}\} = \begin{bmatrix} \{\underline{F}^1\} \\ \{\underline{F}^2\} \\ \vdots \\ \{\underline{F}^m\} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$[\underline{k}] = \begin{bmatrix} [\underline{k}^1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\underline{k}^2] & \cdots & [0] \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\underline{k}^m] \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\{\underline{\delta}\} = \begin{bmatrix} \{\underline{\delta}^1\} \\ \{\underline{\delta}^2\} \\ \vdots \\ \{\underline{\delta}^m\} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

e

$$\{\underline{F}_t\} = \begin{bmatrix} \{\underline{F}_t^1\} \\ \{\underline{F}_t^2\} \\ \vdots \\ \{\underline{F}_t^m\} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

então pode-se reescrever a equação (3.15) da forma

$$\{\underline{F}\} = [\underline{k}]\{\underline{\delta}\} - \{\underline{F}_t\} \quad (3.20)$$

A matriz  $[\underline{k}]$  simplesmente agrupa de forma ordenada as matrizes de rigidez dos diversos elementos; ela é então, de certa forma, a matriz de rigidez da estrutura desmontada.

Note-se que a matriz  $\{\underline{\delta}\}$  representa os deslocamentos nodais dos elementos mas estes deslocamentos ainda não foram relacionados de forma alguma; isto é, ainda não se exigiu que os deslocamentos nodais de elementos adjacentes sejam iguais. Naturalmente a satisfação desta exigência é a condição necessária para se ter os elementos ligados entre si nos pontos nodais.

Ressalte-se que a compatibilidade dos deslocamentos nos

nós não garante necessariamente a compatibilidade dos deslocamentos em outros pontos do contorno dos elementos; por isto a condição acima mencionada é chamada "condição reduzida de compatibilidade".

Para exprimir matematicamente a condição reduzida de compatibilidade introduza-se a matriz  $\{\delta\}$  dos deslocamentos nodais da estrutura, isto é, os deslocamentos dos nós do conjunto de elementos devidamente agrupados (supõe-se que a estrutura tem  $n$  graus de liberdade, isto é, são possíveis  $n$  deslocamentos nodais):

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

A condição reduzida de compatibilidade é então expressa por

$$\{\underline{\delta}\} = [A]\{\delta\} \quad (3.22)$$

onde  $[A]$  é uma matriz de transformação cujas linhas são constituídas por zeros exceto um coeficiente, unitário, cuja posição indica qual deslocamento da estrutura corresponde ao deslocamento a que a linha se refere. Esta matriz, portanto, indica de que forma os elementos devem ser agrupados.

O próximo passo a ser dado visando a obtenção dos deslocamentos  $\{\delta\}$  é a introdução do carregamento externo o qual supõe-se constituído exclusivamente por cargas nodais correspondentes aos deslocamentos nodais  $\{\delta\}$  e que se representa por

$$\{\underline{P}\} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

O Princípio do Trabalho Virtual é agora novamente utilizado, desta feita considerando o conjunto de elementos, para se obter a equação que, satisfeita, garantirá o seu equilíbrio. Dando um deslocamento virtual ao conjunto obtém-se os seguintes incrementos no trabalho total  $W$  das fôrças externas e energia total de deformação  $U$ :

(3.24)

$$W^* = \{\delta^*\}^T \{F\}$$

$$U^* = \sum_{e=1}^m U_e^* = \sum_{e=1}^m \{\delta_e^*\}^T \{F_e\}$$

As equações (3.16), (3.18) e (3.25) permitem obter a seguinte expressão para  $U^*$ :

(3.26)

$$U^* = \{S^*\}^T \{F\}$$

O Princípio do Trabalho Virtual estabelece que

(3.27)

$$W^* = U^*$$

Logo

(3.28)

$$\{\delta^*\}^T \{P\} = \{\delta^*\}^T \{F\}$$

As equações (3.22) e (3.28) dão então

(3.29)

$$\{\delta^*\}^T \{P\} = \{\delta^*\}^T [A]^T \{F\}$$

Como esta equação deve ser válida para qualquer valor de

$\{\delta^*\}$  segue-se que

(3.30)

$$\{P\} = [A]^T \{F\}$$

A satisfação da equação (3.30), como se disse, garante o

equilíbrio da estrutura; ela estabelece uma relação entre as fôrças nodais externas  $\{P\}$  e as fôrças nodais internas  $\{F\}$  sendo, simplesmente, uma forma condensada que agrupa todas as equações de equilíbrio dos nós.

Continuando o desenvolvimento vê-se que as equações (3.20) e (3.22) permitem reescrever a equação (3.30) na forma

$$\{P\} = [A]^T [k] [A] \{\delta\} - [A]^T \{F_t\} \quad (3.31)$$

A equação (3.31) é a que se procurava determinar.

### 3.3 - Cargas nodais equivalentes

Viu-se que a equação (3.31) foi estabelecida supondo-se o carregamento constituído exclusivamente por cargas nodais. Naturalmente este não é o caso em geral e é necessário transformar o carregamento real em um carregamento aproximadamente equivalente, constituído por cargas nodais.

Muitas vezes a experiência no trato de problemas semelhantes é suficiente para esta transformação a qual pode ser obtida por processos elementares da estática; todavia, se se deseja uma análise mais exata, é possível fazer-se esta transformação de forma coerente ao que tem sido feito até o momento.

Além das fôrças nodais já mencionadas podem ainda atuar nos elementos os seguintes tipos de fôrças:

- a) fôrças de massa ("body forces") de intensidade  $\{p^e\}$  por unidade de volume;
- b) fôrças concentradas em pontos  $i$ , outros que os nodais, de intensidade  $\{P_i^e\}$ ;
- c) fôrças distribuídas aplicadas nas superfícies exteriores de intensidade  $\{q^e\}$  por unidade de área.

O critério adotado para a determinação do sistema de fôrças nodais equivalente é estabelecer-se a igualdade do trabalho realizado pelos dois sistemas de carregamento quando se dá à estrutura um deslocamento virtual.

Então, se a matriz

$$\{\underline{P}\} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

representa o sistema de fôrças nodais equivalente ao sistema representado por (a), (b) e (c) deve-se ter

$$\{\delta^*\}^T \{\underline{P}\} = \sum_{e=1}^m ((\int \{f^*\}^T \{P^e\} dV) + (\sum_i \{f_i^*\}^T \{P_i^e\}) + (\int \{f^*\}^T \{q^e\} dS)) \quad (3.33)$$

Nesta equação a matriz  $\{f_i\}$  representa o deslocamento em um ponto  $i$ ; além disto deve-se notar que as matrizes  $\{\delta\}$  e  $\{\underline{P}\}$  representam grandezas referidas ao sistema global ao passo que as outras referem-se a sistemas locais que dependerão do elemento em consideração. As integrações referem-se, naturalmente, aos elementos (tomados um de cada vez de acordo com  $\sum_{e=1}^m$ ) e a somatória  $\sum_i$  estende-se a todos os pontos do elemento em foco onde haja fôrças concentradas.

As equações (2.1) e (3.3) permitem escrever

$$\{f\} = [N] \{\delta^e\} = [N] [R] \{\underline{\delta}^e\} \quad (3.34)$$

$$\{f^*\}^T = \{\underline{\delta}^{e*}\}^T [R]^T [N]^T \quad (3.35)$$

$$e \quad \{f_i^*\}^T = \{\underline{\delta}^{e*}\}^T [R]^T [N_i]^T \quad (3.36)$$

onde  $[N_i] = [N(x_i, y_i, z_i)]$ .

Combinando as equações (3.33), (3.35) e (3.36) obtém-se

$$\{\delta^*\}^T \{\underline{P}\} = \sum_{e=1}^m ((\{\underline{\delta}^{e*}\}^T [R]^T) \int [N]^T \{P^e\} dV) + (\{\underline{\delta}^{e*}\}^T [R]^T \sum_i [N_i]^T \{P_i^e\}) +$$

$$+ (\{\underline{\delta}^e\}^T [\mathbf{R}]^T \int_s [\mathbf{N}]^T \{q^e\} ds) \quad (3.37)$$

Faça-se agora

$$\{\underline{P}_p^e\} = [\mathbf{R}]^T \int_v [\mathbf{N}]^T \{P_i^e\} dv \quad (3.38)$$

$$\{\underline{P}_c^e\} = [\mathbf{R}]^T \sum_i [\mathbf{N}_i]^T \{P_i^e\} \quad (3.39)$$

$$\{\underline{P}_q^e\} = [\mathbf{R}]^T \int_s [\mathbf{N}]^T \{q^e\} ds \quad (3.40)$$

Naturalmente (3.38), (3.39) e (3.40) representam contribuições do elemento e para as cargas nodais; são, na verdade, as cargas nodais equivalentes ao carregamento do elemento e.

A equação (3.37) pode então ser escrita

$$\{\underline{\delta}^*\}^T \{\underline{P}\} = \sum_{e=1}^m \{\underline{\delta}^e\}^T (\{\underline{P}_p^e\} + \{\underline{P}_c^e\} + \{\underline{P}_q^e\}) \quad (3.41)$$

Criem-se agora as matrizes  $\{\underline{P}_p\}$ ,  $\{\underline{P}_c\}$  e  $\{\underline{P}_q\}$  dadas por

$$\{\underline{P}_p\} = \begin{bmatrix} \{\underline{P}_p^1\} \\ \{\underline{P}_p^2\} \\ \vdots \\ \{\underline{P}_p^m\} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\{\underline{P}_c\} = \begin{bmatrix} \{\underline{P}_c^1\} \\ \{\underline{P}_c^2\} \\ \vdots \\ \{\underline{P}_c^m\} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\{\underline{P}_q\} = \begin{bmatrix} \{\underline{P}_q^1\} \\ \{\underline{P}_q^2\} \\ \vdots \\ \{\underline{P}_q^m\} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

A introdução destas novas matrizes, juntamente com as equações (3.18) e (3.22), na equação (3.41) leva a

$$\{\delta^*\}^T \{\underline{P}\} = \{\delta^*\}^T [\underline{A}]^T (\{\underline{P}_p\} + \{\underline{P}_c\} + \{\underline{P}_q\}) \quad (3.45)$$

Como esta equação deve ser válida para qualquer valor de  $\{\delta^*\}$  chega-se finalmente à expressão desejada de  $\{\underline{P}'\}$ :

$$\{\underline{P}'\} = [\underline{A}]^T (\{\underline{P}_p\} + \{\underline{P}_c\} + \{\underline{P}_q\}) \quad (3.46)$$

### 3.4 - Cálculo dos deslocamentos

O carregamento total é então dado por

$$\{\underline{P}\} + \{\underline{P}'\} = \{\underline{P}\} + [\underline{A}]^T (\{\underline{P}_p\} + \{\underline{P}_c\} + \{\underline{P}_q\}) \quad (3.47)$$

No caso mais geral de carregamento a equação de equilíbrio (3.31) será então

$$\{\underline{P}\} + [\underline{A}]^T (\{\underline{P}_p\} + \{\underline{P}_c\} + \{\underline{P}_q\}) = [\underline{A}]^T [\underline{k}] [\underline{A}] \{\delta\} - [\underline{A}]^T \{\underline{F}_t\} \quad (3.48)$$

Definem-se agora como matriz de rigidez global da estrutura e matriz das cargas nodais totais as matrizes

$$[\underline{K}] = [\underline{A}]^T [\underline{k}] [\underline{A}] \quad (3.49)$$

e

$$\{P\} = \{\underline{P}\} + [A]^T(\{\underline{P}_p\} + \{\underline{P}_c\} + \{\underline{P}_q\} + \{\underline{F}_t\}) \quad (3.50)$$

É de se notar que a matriz  $\{\underline{F}_t\}$  dos efeitos iniciais pode, para efeito de análise, ser considerada como uma matriz de carregamento.

A expressão final para a equação de equilíbrio é

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (3.51)$$

Não se pode obter a matriz dos deslocamentos nodais  $\{\delta\}$  diretamente da equação (3.51) porque a matriz  $[K]$  é singular. Isto deve-se a não se ter preocupado até o momento em impedir o deslocamento da estrutura como um corpo rígido.

Suponha-se então que são introduzidos apoios que impeçam o deslocamento da estrutura como corpo rígido.

É de se notar que em estruturas autoequilibradas estes apoios, sobre os quais não é exercida nenhuma solicitação, são ainda necessários para que se tenha um sistema de referência para se medir os deslocamentos (em relação ao qual os deslocamentos dos apoios fictícios introduzidos são considerados, normalmente, nulos) e evitar, consequentemente, que a matriz dos deslocamentos  $\{\delta\}$  fique indeterminada.

É também frequente o uso de apoios em número superior ao necessário para se impedir o deslocamento da estrutura como corpo rígido; sejam então  $\{\delta_a\}$  os deslocamentos conhecidos dos apoios e  $\{P_a\}$  as forças nodais correspondentes.

Na matriz  $\{\delta_a\}$  estão englobados os deslocamentos dos apoios introduzidos para se evitar o deslocamento da estrutura como corpo rígido (normalmente considerados nulos) e de apoios adicionais que porventura existam.

Se agora se reorganizam as matrizes da equação (3.51) de forma a que os deslocamentos e forças nodais possam ser agrupados em submatrizes  $\{P_a\}$ ,  $\{P_d\}$ ,  $\{\delta_a\}$  e  $\{\delta_d\}$  (o índice  $d$  indica tratar-se de deslocamentos desconhecidos) a equação (3.51) fica

$$\begin{bmatrix} \{P_d\} \\ \{P_a\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{dd}] & [K_{da}] \\ [K_{ad}] & [K_{aa}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\delta_d\} \\ \{\delta_a\} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Esta equação é equivalente às equações (3.53) e (3.54):

$$\{P_d\} = [K_{dd}]\{\delta_d\} + [K_{da}]\{\delta_a\} \quad (3.53)$$

$$\{P_a\} = [K_{ad}]\{\delta_d\} + [K_{aa}]\{\delta_a\} \quad (3.54)$$

A matriz  $[K_{dd}]$ , como se sabe, não é singular; de (3.53) obtem-se então

$$\{\delta_d\} = [K_{dd}]^{-1}(\{P_d\} - [K_{da}]\{\delta_a\}) \quad (3.55)$$

A equação (3.55) permite calcular os deslocamentos desconhecidos; uma vez calculados estes valores as reações nos apoios são determinadas pela equação (3.54).

Se os deslocamentos dos apoios são nulos as equações (3.53) e (3.54) reduzem-se a

$$\{P_d\} = [K_{dd}]\{\delta_d\} \quad (3.56)$$

$$\{P_a\} = [K_{ad}]\{\delta_d\} \quad (3.57)$$

Neste caso obtem-se

$$\{\delta_d\} = [K_{dd}]^{-1}\{P_d\} \quad (3.58)$$

Antes de terminar este item é interessante observar que não obstante os valores de  $[K]$  e  $\{P\}$  dados pelas equações (3.49) e (3.50) possam ser obtidos pelas simples operações de matrizes indicadas é preferível na prática, quando do cálculo automático, proceder-se de forma diferente.

Na verdade é simples de se verificar<sup>2</sup> (está implícito nas deduções feitas) que a multiplicação  $[A]^T [k] [A]$  simplesmente coloca os coeficientes das diversas matrizes  $[k^e]$  nas posições corretas dentro da matriz global  $[K]$ , adicionando aqueles que se superpõem.

Este espalhamento e superposição pode ser programado com facilidade para um computador considerando-se a contribuição de um elemento de cada vez.

Com isto evitam-se as multiplicações envolvendo as matrizes  $[A]$  que, por serem constituídas essencialmente por zeros, levam a muitas operações inúteis resultando em um processo lento comparado com o espalhamento e superposição sucessivos das matrizes de rigidez dos elementos. Além do mais a matriz  $[A]$  é grande e economiza-se memória de computador se não se precisa usá-la; é este o caso no processo mencionado.

As mesmas observações são válidas com relação à matriz  $\{P\}$ .

### 3.5 - Análise complementar

Uma vez calculados os deslocamentos  $\{\delta\}$  têm-se imediatamente os deslocamentos  $\{\delta^e\}$  e  $\{\delta_e\}$ , estes dados pela equação (3.3).

Não há, pois, dificuldade alguma em se proceder a análise dos elementos.

Os deslocamentos em um ponto do elemento são calculados utilizando-se as equações (2.1) e (3.3); obtém-se então

$$\{f\} = [N][R]\{\delta^e\} \quad (3.59)$$

As equações (2.7) e (3.3) permitem calcular as deformações:

$$\{\epsilon\} = [B][R]\{\delta^e\} \quad (3.60)$$

Finalmente as tensões serão determinadas pelas equações  
(2.14) e (3.3):

$$\{\sigma\} = [D][B][R]\{\epsilon^e\} - [D]\{\epsilon_o\} \quad (3.61)$$

## CAPÍTULO IV - ESTADOS PLANOS DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES

### 4.1 - Considerações gerais

Já se mencionou que o conceito de elemento finito provavelmente surgiu da tentativa de melhorar o modelo reticulado sugerido por Hrennikoff e posteriormente por McHenry para o estudo de estados planos de tensões.

Os esforços iniciais foram desenvolvidos pela indústria aeronáutica mas em pouco tempo pesquisadores de outras áreas começaram a se interessar pelo novo método e os primeiros estudos e sucessos não se fizeram esperar. Referiam-se como era natural também a problemas de elasticidade bi-dimensional; em engenharia civil o primeiro trabalho apresentado referia-se a problemas de estado plano de tensões<sup>10</sup>.

Neste capítulo será feito o estudo dos estados planos de tensões e deformações tendo em vista os objetivos deste trabalho; não serão estudados tipos diversos de elemento nem detalhes além dos necessários à compreensão do programa apresentado.

Apresenta-se um elemento triangular, o qual, por sua formulação simples, facilidade de adaptação ao contorno e resultados satisfatórios tem sido o mais utilizado.

### 4.2 - Funções de deslocamento

Tanto em problemas de estado plano de tensões como de deformações o campo de deslocamento é definido por deslocamentos  $u$  e  $v$  associados a um sistema de referência plano tomado, naturalmente, perpendicularmente à direção em que as tensões ou as deformações são supostas nulas.

Na figura 4.1 está representado um elemento triangular de nós i, j, k (os nós deverão ser numerados em sentido anti-horário), os deslocamentos dos nós e o sistema de referência adotado.

§ - é de se salientar o trabalho pioneiro de Turner, Clough, Martin, Topp e Argyris.

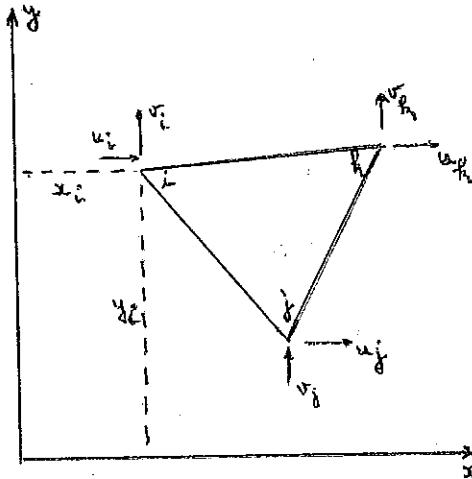


Figura 4.1

A matriz dos deslocamentos nodais é

$$\{\delta^e\} = \{u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_k \ v_k\} \quad (4.1)$$

A lei de variação do campo de deslocamentos escolhida foi uma variação linear expressa pelos dois polinômios<sup>1</sup>

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (4.2)$$

e

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (4.3)$$

O primeiro passo a se dar, seguindo orientação análoga à exposta nos capítulos II e III, é exprimir os deslocamentos  $u$  e  $v$  como funções lineares dos deslocamentos nodais (para este caso é conveniente fazer o desenvolvimento desde o início considerando-se os deslocamentos nodais ao invés dos generalizados  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ ).

A equação (4.2) permite escrever

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i$$

$$u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \quad (4.4)$$

$$u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k$$

O sistema de equações (4.4) permite determinar  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ . Substituindo então estes valores na equação (4.2) resulta

$$u = \frac{1}{2A} [(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_k + b_k x + c_k y)u_k] \quad (4.5)$$

onde

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k \quad (4.6)$$

$$c_i = x_k - x_j$$

e  $A$  é a área do triângulo  $ijk$ .

Os outros coeficientes são obtidos permutando ciclicamente os índices  $i$ ,  $j$ ,  $k$ ; a área pode ser calculada por

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

A expressão para o deslocamento  $v$  é obtida da mesma forma:

$$v = \frac{1}{2A} [(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_k + b_k x + c_k y)v_k] \quad (4.8)$$

A equação (2.1)

$$\{f\} = [N]\{\delta^e\} \quad (2.1)$$

pode ser então escrita, de acordo com as equações (4.5) e (4.8):

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} (a_i + b_i x + c_i y) & 0 & (a_j + b_j x + c_j y) & 0 & (a_k + b_k x + c_k y) & 0 \\ 0 & (a_i + b_i x + c_i y) & 0 & (a_j + b_j x + c_j y) & 0 & (a_k + b_k x + c_k y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

#### 4.3 - Deformações no elemento

Suponha-se

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}\} \quad (4.10)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}\} \quad (4.11)$$

as matrizes representativas das deformações e tensões em um ponto do elemento.

Vê-se que o produto  $\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}$  é dado por

$$\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{yz} \tau_{yz} \quad (4.12)$$

Em um problema de estado plano de tensões este produto reduz-se a

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} &= \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \times 0 + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \times 0 + \gamma_{yz} \times 0 = \\ &= \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy} \end{aligned}$$

Para um problema de estado plano de deformações o produto reduz-se a

$$\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + 0x \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + 0x \tau_{xz} + 0x \tau_{yz} =$$

$$= \epsilon_x \epsilon_x + \epsilon_y \epsilon_y + \gamma_{xy} \gamma_{xy}$$

Isto prova que sómente as tensões e deformações associadas ao plano xy contribuem para a energia de deformação; a análise desenvolvida no capítulo II mostra só ser necessário considerar  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  para se conseguir as matrizes necessárias à aplicação do método.

Consequentemente as matrizes de tensão e deformação terão a forma

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}\} \quad (4.13)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\} \quad (4.14)$$

Os outros valores, se necessário, podem ser calculados com as relações fornecidas pela Teoria da Elasticidade.

A deformação total num ponto do elemento é, pois, dada por<sup>11</sup>

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

As equações (4.9) e (4.15) permitem então escrever

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{2D} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

que é a equação correspondente à equação (2.7):

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta^e\} \quad (2.7)$$

Como se disse, é possível a existência de um estado inicial de deformação

$$\{\epsilon_o\} = \{\epsilon_{xo} \quad \epsilon_{yo} \quad \gamma_{xyo}\} \quad (4.17)$$

o qual pode, inclusive, não ser uniforme. Normalmente, se este é o caso, considera-se um valor médio representativo da deformação para que os coeficientes da matriz  $\{\epsilon_o\}$  tenham o mesmo valor em todos os pontos do elemento.

Um caso comum é a elevação de temperatura de um elemento; se o material é isotrópico e a elevação de temperatura é uniforme as matrizes  $\{\epsilon_o\}$  para os dois tipos de problema são<sup>2</sup>

a) estado plano de tensões:

$$\{\epsilon_o\} = \begin{bmatrix} \alpha t^e \\ \alpha t^e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

b) estado plano de deformações:

$$\{\epsilon_o\} = (1 + \nu) \begin{bmatrix} \alpha t^e \\ \alpha t^e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Nestas equações  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação térmica,  $t^e$  o aumento de temperatura e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material.

#### 4.4 - Tensões no elemento

Como já se viu as tensões são calculadas, uma vez conhecidas as deformações elásticas, pela equação (2.13):

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) \quad (2.13)$$

É necessário, pois, conhecer a matriz  $[D]$ . Para problemas elásticos bi-dimensionais a forma mais geral da matriz  $[D]$  é

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ (\text{sim.}) & & D_{33} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

O valor dos coeficientes depende, naturalmente, do tipo de anisotropia apresentado pelo elemento.

Para elementos isotrópicos o cálculo destes coeficientes não oferece dificuldade.

Sabe-se, da Teoria da Elasticidade, que as equações relacionando tensões e deformações em problemas bi-dimensionais são ( $E$  é o módulo de elasticidade do material)

a) estado plano de tensões:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\epsilon_x - \epsilon_{x0}) + \nu(\epsilon_y - \epsilon_{y0})] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\nu(\epsilon_x - \epsilon_{x0}) + (\epsilon_y - \epsilon_{y0})] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\epsilon_{xy} - \epsilon_{xy0}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

b) estado plano de deformações:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)(\epsilon_x - \epsilon_{x0}) + \nu(\epsilon_y - \epsilon_{y0})] \\ \epsilon_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu(\epsilon_x - \epsilon_{x0}) + (1-\nu)(\epsilon_y - \epsilon_{y0})] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\epsilon_{xy} - \epsilon_{xy0}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Estas equações postas sob forma matricial tornam-se  
a) estado plano de tensões:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_{xo} \\ \epsilon_y - \epsilon_{yo} \\ \epsilon_{xy} - \epsilon_{xyo} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

b) estado plano de deformações:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_{xo} \\ \epsilon_y - \epsilon_{yo} \\ \epsilon_{xy} - \epsilon_{xyo} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Vê-se imediatamente que as matrizes  $[D]$  são da forma  
a) estado plano de tensões:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

b) estado plano de deformações:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

#### 4.5 - Matriz de rigidez do elemento

A matriz de rigidez do elemento é dada pela equação (2.33), a qual, se a espessura  $h$  do elemento é constante permite

escrever:

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = [B]^T [D] [B] h \Big|_S ds$$

ou

$$[k^e] = [B]^T [D] [B] h A \quad (4.27)$$

A expressão (4.27) já se encontra em uma forma adequada ao cálculo automático; todavia, se desejado, é possível obter-se uma forma explícita para  $[k^e]$  bastando para isto efetuar as multiplicações indicadas.

#### 4.6 - Cargas nodais equivalentes

É interessante determinar a contribuição de cada elemento para as cargas nodais totais. Estas contribuições, como foi visto, são dadas pelas equações (3.13), (3.38), (3.39) e (3.40):

$$\{F_t^e\} = [R]^T \int_V [B]^T [D] \{\epsilon_o\} dV \quad (3.1), (3.13)$$

$$\{P_p^e\} = [R]^T \int_V [N]^T \{p^e\} dV \quad (3.38)$$

$$\{P_c^e\} = [R]^T \sum_i [N_i]^T \{P_i^e\} \quad (3.39)$$

$$\{P_q^e\} = [R]^T \int_S [N]^T \{q^e\} ds \quad (3.40)$$

Se se tem um estado inicial de deformação constante em todo o elemento e se sua espessura é também constante, obtém-se para  $\{F_t^e\}$  o valor

$$\{F_t^e\} = [R]^T [B]^T [D] \{\epsilon_o\} h A \quad (4.28)$$

Para os casos em que a integração envolve a matriz  $[N]$ , cujos elementos são função de  $x$  e  $y$ , não há problema desde que a

lei de variação do carregamento seja simples e permita a avaliação da integral. Quando não fôr este o caso deve-se recorrer à integração numérica.

Por exemplo, se as fôrças de massa são constantes esta integração é imediata e obtém-se

$$\begin{Bmatrix} P_e \\ -p \end{Bmatrix} = [R]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{Bmatrix} \frac{\Delta h}{3} \quad (4.29)$$

onde X e Y são as componentes dessas fôrças segundo os eixos x e y.

#### 4.7 - Sistemas de referência

A simplicidade da formulação para o elemento escolhido permitiu que fôsse tomado um sistema de referência local xy sem nenhuma relação especial com o elemento. Nada impede que ele seja o mesmo para todos os elementos; é o que normalmente se faz em problemas de engenharia civil.

Neste caso ele será também global e a matriz  $[R]$  é a própria matriz unidade; têm-se então

$$[k_e] = [k^e] = [B]^T [D] [B] h^4 \quad (4.30)$$

$$\begin{Bmatrix} F_e \\ -f_t \end{Bmatrix} = \int [B]^T [D] \{ \epsilon \}_o dV \quad (4.31)$$

$$\begin{Bmatrix} P_e \\ -p \end{Bmatrix} = \int [N]^T \{ p^e \} dV \quad (4.32)$$

$$\begin{Bmatrix} P_c \\ -q \end{Bmatrix} = \sum_i [N_i]^T \{ p_i^e \} \quad (4.33)$$

$$\begin{Bmatrix} P_e \\ -q \end{Bmatrix} = \int_s [N]^T \{ q^e \} ds \quad (4.34)$$

As equações (4.28) e (4.29) tornam-se, respectivamente,

$$\{F_t^e\} = [B]^T [D] \{\xi_0\} h \Delta \quad (4.35)$$

e

$$\{P_p^e\} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{bmatrix} \Delta h \quad (4.36)$$

## CAPÍTULO V - PLACAS

### 5.1 - Considerações gerais

Conforme se pode verificar na bibliografia especializada, a obtenção de elementos adequados ao estudo de placas ofereceu dificuldades inesperadas e os insucessos foram vários<sup>12</sup>. Foi esta, inclusive, a ocasião em que se começou a pensar seriamente em critérios a serem satisfeitos pelas funções de deformação para se obter convergência para a solução exata quando o tamanho dos elementos decresce<sup>13</sup>. Isto porque para alguns elementos apresentados não se conseguia convergência para resultado algum e para outros obtinha-se convergência para valores diferentes dos exatos.

Se bem que algum sucesso já tivesse sido obtido com elementos retangulares<sup>5,13,14</sup>, sómente em fins de 1965 foi apresentando um elemento triangular satisfatório<sup>15</sup>.

Em todos os casos a teoria de placas clássica (simplificada)<sup>8</sup> é tomada como base para os desenvolvimentos; nela, as hipóteses simplificativas introduzidas permitem conhecer os estados de deformação e tensão da placa uma vez determinado o deslocamento transversal  $w$ .

É, pois, importante que qualquer comparação dos resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos seja feita com soluções obtidas pela teoria clássica simplificada de placas.

Neste capítulo serão apresentados dois elementos, um retangular<sup>1,5</sup> e um triangular<sup>1,6,15</sup>; tratar-se-á inicialmente do elemento retangular.

### 5.2 - Funções de deslocamento para o elemento retangular

Na teoria simplificada de placas, além da continuidade do deslocamento transversal  $w$ , é exigida a continuidade da declividade para se evitar o aparecimento de "dobras", isto é, para se e-

vitar o aparecimento de curvaturas infinitas.

Nada mais natural, então, incluir entre os deslocamentos nodais rotações. Isto porque a declividade confunde-se com a rotação (a menos de um sinal) quando se têm pequenas deformações e assim a satisfação das condições reduzidas de compatibilidade é em última análise a obtenção de continuidade da declividade nos nós.

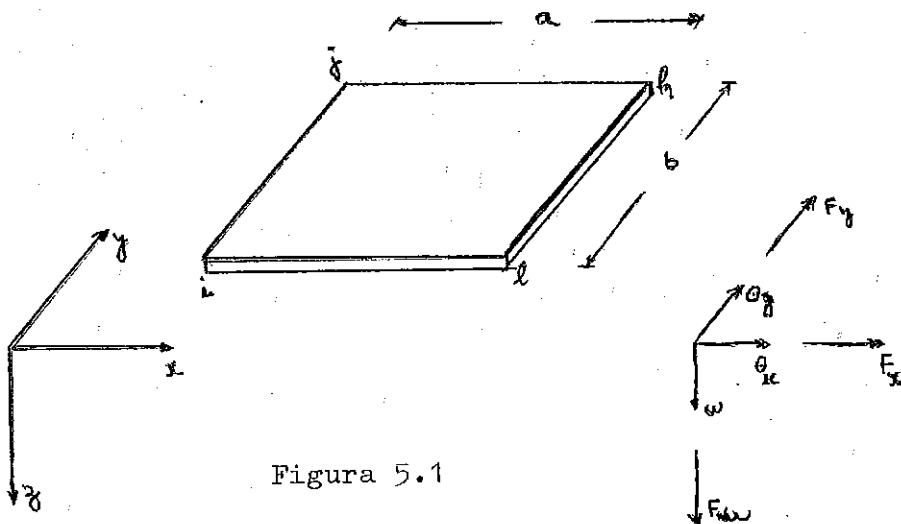


Figura 5.1

Na figura 5.1 estão representados um elemento retangular  $ijkl$  (a numeração deve ser feita no sentido horário) de lados  $a$  e  $b$ , os deslocamentos possíveis em um nó, as fórcas nodais associadas a estes deslocamentos e o sistema de referência local (o plano  $xy$  é o plano médio da placa).

Vê-se que são três os deslocamentos nodais considerados:

- deslocamento transversal  $w$ ;
- rotação  $\theta_x$  segundo o eixo dos  $x$ ;
- rotação  $\theta_y$  segundo o eixo dos  $y$ .

Para representar as rotações e momentos ( $F_x$  e  $F_y$  por exemplo) usam-se flexas de cabeça dupla ou setas curvas; no primeiro caso adota-se como positivo o sentido anti-horário.

A lei de variação escolhida para o deslocamento transversal é a expressão polinomial

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x y^3 \quad (5.1)$$

Vê-se que a equação (2.2)

$$\{f\} = [N'] \{\alpha^e\} \quad (2.2)$$

neste caso é

$$[w] = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ x^3 y \ xy^3] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Da equação (5.1) pode-se obter:

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} = -(\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} x y^2) \quad (5.3)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \quad (5.4)$$

As equações (5.2), (5.3) e (5.4) permitem escrever

$$\begin{bmatrix}
 w_i \\
 e_{xi} \\
 e_{yi} \\
 w_j \\
 e_{xj} \\
 e_{yj} \\
 w_k \\
 e_{xk} \\
 e_{yk} \\
 w_l \\
 e_{xl} \\
 e_{yl}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 y_i & x_i y_i^3 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -x_i & -2y_i & 0 & -x_i^2 & -2x_i y_i & -3y_i^2 & -x_i^3 & -3x_i y_i^2 \\
 0 & 1 & 0 & 2x_i & y_i & 0 & 3x_i^2 & 2x_i y_i & y_i^2 & 0 & 3x_i^2 y_i & y_i^3 \\
 \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 a_3 \\
 a_4 \\
 a_5 \\
 a_6 \\
 a_7 \\
 a_8 \\
 a_9 \\
 a_{10} \\
 a_{11} \\
 a_{12}
 \end{bmatrix}$$

(5.5)

onde os índices  $i, j, k, l$  referem-se aos nós do elemento.

Comparando a equação (5.5) com a equação (2.3)

$$\{\delta^e\} = [C]\{\psi^e\} \quad (2.3)$$

vê-se imediatamente que a matriz  $[C]$  é a matriz  $12 \times 12$  dada na equação (5.5).

As equações (5.2) e (5.5) permitem, então, calcular o valor de  $w$  em um ponto  $(x, y)$  uma vez determinados os deslocamentos nodais já que

$$[w] = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ x^3 y \ xy^3] [C]^{-1} \{\delta^e\} \quad (5.6)$$

### 5.3 - Deformações no elemento retangular

Normalmente a esta altura é introduzida a matriz das deformações lineares e transversais  $\epsilon_x, \dots, \epsilon_{yz}$ .

Todavia as hipóteses simplificadoras clássicas introduzidas na teoria das placas permitem obter estas deformações com facilidade uma vez conhecidas as curvaturas e torção na placa; por isto, e para seguir uma linha análoga à desenvolvida na teoria das placas adotar-se-á como matriz das deformações (generalizando o significado da palavra) a matriz  $\{\epsilon\}$  definida por

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Das equações (5.3) e (5.4) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} xy \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \alpha_5 + 2\alpha_8 x + 2\alpha_9 y + 3\alpha_{11} x^2 + 3\alpha_{12} y^2 \quad (5.10)$$

Pode-se então escrever, de acordo com (5.7), (5.8), (5.9) e (5.10):

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Comparando a equação (5.11) com a equação (2.8)

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\delta^e\} \quad (2.8)$$

identifica-se imediatamente a matriz  $[Q]$ .

As equações (2.9), (5.5) e (5.11) permitem então calcular-se as deformações uma vez conhecidos os deslocamentos nodais

$$\{\varepsilon\} = [Q][C]^{-1}\{\delta^e\} \quad (2.9)$$

#### 5.4 - Tensões no elemento retangular

Da mesma forma que as deformações as tensões normais e tangenciais podem ser obtidas uma vez conhecidos os momentos fletóres e de torção  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ <sup>8</sup> (as definições de  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  usadas neste trabalho são idênticas às dadas na referência 8). São considerados positivos os sentidos indicados na figura (5.2).

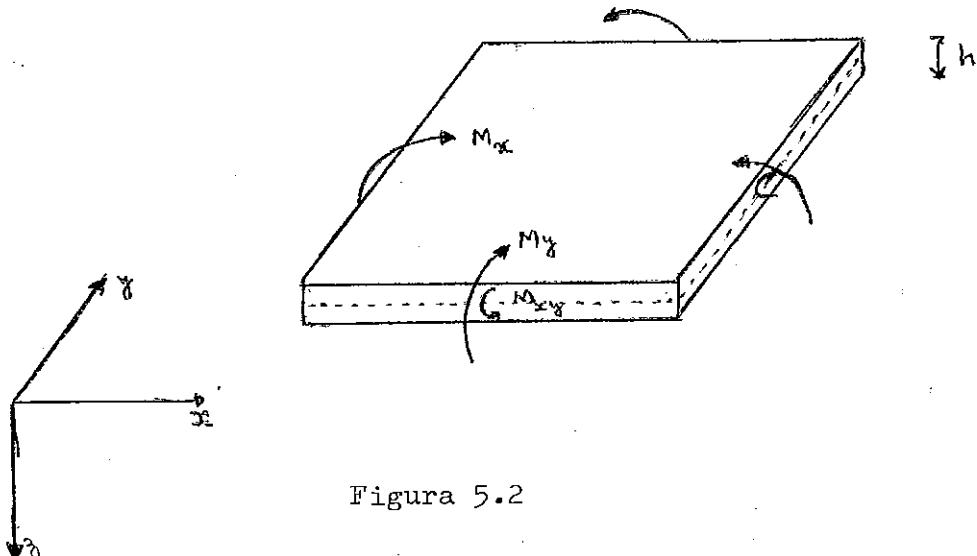


Figura 5.2

A matriz das tensões (generalizando o significado da palavra)  $\{\sigma\}$ , que será também representada por  $\{M\}$  é, então igual a

$$\{\varepsilon\} = \{M\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_o\}) \quad (5.12), (2.13)$$

A matriz  $[D]$  no caso mais geral de anisotropia será

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ (\text{sim.}) & & D_{33} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Para outros casos os coeficientes de  $[D]$  deverão ser determinados adequadamente; se, por exemplo, a placa é ortótropa tendo  $x$  e  $y$  como direções principais de ortotropia sabe-se que

$$M_x = -[D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \xi_{xo} \right) + D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \xi_{yo} \right)] \quad (5.14)$$

$$M_y = -[D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \xi_{yo} \right) + D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \xi_{xo} \right)] \quad (5.15)$$

$$M_{xy} = D_{xy} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \gamma_{xyo} \right) \quad (5.16)$$

Nesta equações  $\xi_{xo}$ ,  $\xi_{yo}$  e  $\gamma_{xyo}$  são funções de  $x$  e  $y$  cujo valor dependerá do tipo de deformação inicial sofrida pela placa; as constantes  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_1$  e  $D_{xy}$  são dadas por

$$D_x = \frac{E'_x h^3}{12}, \quad D_y = \frac{E'_y h^3}{12}, \quad D_1 = \frac{E'' h^3}{12}, \quad D_{xy} = \frac{G h^3}{12} \quad (5.17)$$

onde  $E'_x$ ,  $E'_y$ ,  $E''$  e  $G$  são as constantes necessárias para caracterizar as propriedades elásticas do material e  $h$  a altura da placa.

As equações (5.14), (5.15) e (5.16) podem ser reescritas em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \epsilon_{xo} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \epsilon_{yo} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \gamma_{xyo} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

A comparação das equações (5.12) e (5.18) mostra que neste caso a matriz  $[D]$  é

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Se a placa é isótropa tem-se<sup>8</sup>

$$E'_x = E'_y = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad E'' = \frac{2E}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.20)$$

Pode-se então obter a matriz  $[D]$  substituindo os valores dados por (5.17) e (5.20) em (5.19):

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

### 5.5 - Matriz de rigidez do elemento retangular ortótropo

A matriz de rigidez  $[k^e]$  é agora calculada pela equação análoga à (2.51) aplicada a placas; note-se apenas que em (2.51) a integração é feita para todo o volume do elemento mas agora a integração relativa a z não é feita porque ela já o foi quando da substituição das tensões normais e tangenciais pelos momentos fletores e de torção<sup>8</sup>:

$$[\mathbf{k}^e] = [\mathbf{C}^{-1}]^T (\{ \{ [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{Q}] dx dy \} [\mathbf{C}^{-1}] \}) \quad (5.22)$$

Como as matrizes  $[\mathbf{C}^{-1}]$ ,  $[\mathbf{Q}]$  e  $[\mathbf{D}]$  são conhecidas é possível obter-se a matriz  $[\mathbf{k}^e]$ ; isto pode, por exemplo, ser feito integrando-se numéricamente (5.22). Todavia é possível obter-se uma expressão explícita para  $[\mathbf{k}^e]$  (referir-se à figura 5.1) para placas ortotrópicas<sup>1</sup>:

$$[\mathbf{k}^e] = \frac{1}{15ab} [\mathbf{L}] (D_x [\mathbf{K}_1] + D_y [\mathbf{K}_2] + D_z [\mathbf{K}_3] + D_{xy} [\mathbf{K}_4]) [\mathbf{L}] \quad (5.23)$$

Os valores das matrizes  $[\mathbf{K}_1]$ ,  $[\mathbf{K}_2]$ ,  $[\mathbf{K}_3]$ ,  $[\mathbf{K}_4]$  e  $[\mathbf{L}]$  são dados abaixo:

$$[\mathbf{K}_1] = p^{-2} \begin{bmatrix} 60 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 30 & 0 & 20 & & & & & & \\ 30 & 0 & 15 & 60 & & & & & \text{simétrica} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 15 & 0 & 10 & 30 & 0 & 20 & & & \\ -30 & 0 & -15 & -60 & 0 & -30 & 60 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 15 & 0 & 5 & 30 & 0 & 10 & -30 & 0 & 20 \\ -60 & 0 & -30 & -30 & 0 & -15 & 30 & 0 & -15 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 10 & 15 & 0 & 5 & -15 & 0 & 10 & -30 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$[K_2] = p^2 \begin{bmatrix} 60 & & & & & & & \\ -30 & 20 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ -60 & 30 & 0 & 60 & & & & \text{simétrica} \\ -30 & 10 & 0 & 30 & 20 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ -30 & 15 & 0 & 30 & 15 & 0 & 60 & \\ -15 & 5 & 0 & 15 & 10 & 0 & 30 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & -15 & 0 & -30 & -15 & 0 & -60 & -30 & 0 & 60 \\ -15 & 10 & 0 & 15 & 5 & 0 & 30 & 10 & 0 & -30 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} 30 & & & & & & & \\ -15 & 0 & & & & & & \\ 15 & -15 & 0 & & & & & \\ -30 & 0 & -15 & 30 & & & & \text{simétrica} \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & & & \\ -15 & 0 & 0 & 15 & 15 & 0 & & \\ 30 & 0 & 0 & -30 & -15 & 0 & 30 & \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & -15 & 0 \\ -30 & 15 & 0 & 30 & 0 & 0 & -30 & 0 & 15 & 30 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & -15 & 15 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$[K_4] = \begin{bmatrix} 84 & & & & & & & \\ -6 & 8 & & & & & & \\ 6 & 0 & 8 & & & & & \\ -84 & 6 & -6 & 84 & & & & \text{simétrica} \\ -6 & -2 & 0 & 6 & 8 & & & \\ -6 & 0 & -8 & 6 & 0 & 8 & & \\ 84 & -6 & 6 & -84 & -6 & -6 & 84 & \\ 6 & 2 & 0 & -6 & -8 & 0 & 6 & 8 \\ -6 & 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & -6 & 0 & 8 \\ -84 & 6 & -6 & 84 & 6 & 6 & -84 & -6 & 6 & 84 \\ 6 & -8 & 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & -2 & 0 & -6 & 8 \\ 6 & 0 & -2 & -6 & 0 & 2 & 6 & 0 & -8 & -6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & b & & & & & & & \\ 0 & 0 & a & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \text{simétrica} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

onde

$$p^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{e} \quad p^{-2} = \frac{b^2}{a^2} \quad (5.29)$$

### 5.6 - Cargas nodais equivalentes - elemento retangular

Neste trabalho o sistema de referência  $xy$  é tomado o mesmo para todos os elementos; ele é, portanto, global também.

Então

$$[\underline{k}^e] = [k^e] \quad (5.30)$$

e a contribuição de cada elemento para as cargas nodais equivalentes será dada por (2.6, 2.10, 3.1, 3.38, 3.39, 3.40):

$$\{F_t^e\} = [C^{-1}]^T \int \{Q\}^T [D] \{\epsilon_o\} dx dy \quad (5.31)$$

$$\{P_p^e\} = h [C^{-1}]^T \int [N']^T \{p^e\} dx dy \quad (5.32)$$

$$\{P_{-c}^e\} = [C^{-1}]^T \sum_i [N'_i]^T \{p_i^e\} \quad (5.33)$$

$$\{P_q^e\} = [C^{-1}]^T \int [N']^T \{q^e\} dx dy \quad (5.34)$$

As matrizes  $[C]$ ,  $[Q]$ ,  $[N']$  e  $[D]$  são dadas respectivamente pelas equações (5.5), (5.11), (5.2) e (5.19); em (5.32) admite-se que  $\{p^e\}$  é função de  $x$  e  $y$  apenas.

Se se supõe que está atuando em toda a face superior da placa uma carga uniformemente distribuída  $q$  a integração de (5.34) leva a<sup>1</sup>

$$\{P_q^e\} = qab \left\{ \frac{1}{4} \ -\frac{b}{24} \ \frac{a}{24} \ \frac{1}{4} \ \frac{b}{24} \ \frac{a}{24} \ \frac{1}{4} \ \frac{b}{24} \ -\frac{a}{24} \ \frac{1}{4} \ \frac{-b}{24} \ \frac{-a}{24} \right\} \quad (5.35)$$

### 5.7 - Momentos nos nós de um elemento retangular ortotropo

Os momentos fletores e de torção em um ponto do elemento são dados pela equação (5.36)

$$\{M\} = [D](\{\delta\} - \{\epsilon_o\}) = [D][Q][C^{-1}] \{\delta^e\} - [D]\{\epsilon_o\} \quad (5.36)$$

Vê-se que estes momentos podem ser calculados uma vez co

nhecida a contribuição das deformações iniciais; vai-se a seguir calcular os momentos nos nós do elemento supondo-se nula esta contribuição. Se ela existir deverá ser adicionada adequadamente.

A equação (5.36) aplicada sucessivamente aos nós fornece o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned}\{M_i\} &= [D][Q_i][C^{-1}]\{\delta^e\} \\ \{M_j\} &= [D][Q_j][C^{-1}]\{\delta^e\} \\ \{M_k\} &= [D][Q_k][C^{-1}]\{\delta^e\} \\ \{M_l\} &= [D][Q_l][C^{-1}]\{\delta^e\}\end{aligned}\tag{5.37}$$

que pode ser reescrito, condensadamente, como

$$\begin{bmatrix} \{M_i\} \\ \{M_j\} \\ \{M_k\} \\ \{M_l\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D][Q_i][C^{-1}] \\ [D][Q_j][C^{-1}] \\ [D][Q_k][C^{-1}] \\ [D][Q_l][C^{-1}] \end{bmatrix} \{\delta^e\}\tag{5.38}$$

A matriz de transformação que associa os deslocamentos nodais  $\{\delta^e\}$  aos momentos nos nós pode ser posta sob uma forma explícita. A equação (5.38) transforma-se então em<sup>1</sup>

Nesta equação  $M_{xi}$ ,  $M_{yi}$ , ...,  $M_{xyl}$  são os momentos fletores e de torção nos nós i, j, k e l; além disto  $p = \frac{a}{b}$ .

### 5.8 - Funções de deslocamento para o elemento triangular

O uso de expressões polinomiais simples, como se viu, levou a resultados satisfatórios tanto para o elemento triangular utilizado na análise de estados planos de tensões e deformações como para o elemento retangular que se acabou de apresentar. Todavia, para elementos triangulares de placa a adoção de expressões polinomiais simples não obteve tal sucesso<sup>12</sup>.

O desenvolvimento que se segue baseia-se nos trabalhos desenvolvidos por Zienkiewicz e seus colaboradores<sup>1,6,15</sup> nos quais é apresentado o que parece ser o melhor elemento triangular idealizado até agora.

Uma exposição detalhada relativa à obtenção das características do elemento é extremamente longa e laboriosa. Por isto muitas passagens não serão justificadas e o leitor interessado deverá referir-se às publicações indicadas.

É adotada a seguinte lei de variação para o deslocamento transversal w:

$$[w] = [\bar{w}] + [w^R] = [N]\{\delta^e\} \quad (5.40)$$

onde

$$[w^R] = [L_i \quad 0 \quad 0 \quad L_j \quad 0 \quad 0 \quad L_k \quad 0 \quad 0]\{\delta^e\} \quad (5.41)$$

e

$$[\bar{w}] = [N_{ix} \quad N_{iy} \quad N_{jx} \quad N_{jy} \quad N_{kx} \quad N_{ky}][T]\{\delta^e\} \quad (5.42)$$

$L_i$ ,  $L_j$  e  $L_k$  são dados por

$$L_i = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (5.43)$$

$$L_j = \frac{1}{2\Delta}(a_j + b_j x + c_j y)$$

MARCH 2014 240 cm

$6D_x/P +$	$-4bD_x$	$4bD_x$	$-6pD_1$	$-2aD_1$	0	0	0	$-6D_x/P$	0	$2bD_x$
$6pDy +$	$-4aD_y$	$4bD_1$	$-6pD_y$	$-2aD_y$	0	0	0	$-6D_1/P$	0	$2bD_1$
$-2D_{xy}$	$2bD_{xy}$	$-2aD_{xy}$	$2D_{xy}$	0	$2aD_{xy}$	$-2D_{xy}$	0	$2D_{xy}$	$-bD_{xy}$	0
$-6pD_1$	$2aD_1$	0	$6D_x/P +$	$4aD_1$	$4bD_x$	$-6D_x/P$	0	$2bD_x$	0	0
$-6pD_y$	$2aD_y$	0	$6pD_y +$	$4aD_y$	$4bD_1$	$-6D_1/P$	0	$2bD_1$	0	0
$-2D_{xy}$	0	$-2aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$2bD_{xy}$	$2aD_{xy}$	$-2D_{xy}$	$-2bD_{xy}$	0	$2D_{xy}$	0
0	0	0	$-6D_x/P$	0	$-2bD_x$	$6D_x/P +$	$4aD_1$	$-4bD_x$	$-pD_1$	$2aD_1$
$-2D_{xy}$	0	0	$2D_{xy}$	$2bD_{xy}$	0	$-2D_{xy}$	$-2bD_{xy}$	$2aD_{xy}$	$0$	$-2aD_{xy}$
$-6D_1/P$	0	$-2bD_1$	$6pD_y +$	$4aD_y$	$-4bD_1$	$-6pD_1$	$2aD_y$	0	$-2aD_{xy}$	(5.39)
$-2bD_x$	0	$-2bD_x$	0	0	$-6pD_1$	$-2aD_1$	0	$6D_x/P +$	$-4aD_1$	$-4bD_x$
$-6D_1/P$	0	$-2bD_1$	0	0	$-6pD_y$	$-2aD_y$	0	$6pD_y +$	$-4aD_y$	$-4bD_1$
$-2D_{xy}$	$2bD_{xy}$	0	$2D_{xy}$	$2bD_{xy}$	0	$-2D_{xy}$	$-2bD_{xy}$	$2aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$-2bD_{xy}$

$$L_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) \quad (5.44)$$

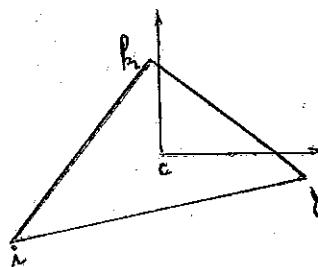


Figura 5.3

Se  $x_i, y_i, \dots, y_k$  são as coordenadas dos nós  $i, j, k$  (numerados no sentido anti-horário) os valores  $a_i, b_i, c_i, \dots, c_k$  e  $\Delta$  são dados por (toma-se um sistema de referência local cuja origem coincide com o centroíde C do triângulo ijk):

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \quad (5.45)$$

$$b_i = y_j - y_k \quad (5.46)$$

$$c_i = x_k - x_j \quad (5.47)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (5.48)$$

sendo que  $a_j, \dots, c_k$  são obtidos de (5.45), (5.46) e (5.47) por uma permutação cíclica dos índices  $i, j, k$ .

$N_{ix}$  e  $N_{iy}$  são dados por

$$N_{ix} = b_k (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - b_j (L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \quad (5.49)$$

e

$$N_{iy} = c_k (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - c_j (L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \quad (5.50)$$

sendo que  $N_{jx}, \dots, N_{ky}$  são obtidas por permutação cíclica dos índices  $i, j, k$ .

A matriz  $[T]$  é

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{c_i}{2\Delta} & 1 & 0 & \frac{c_j}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{c_k}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{-b_i}{2\Delta} & 0 & 1 & \frac{-b_j}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{-b_k}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{c_i}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{c_j}{2\Delta} & 1 & 0 & \frac{c_k}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{-b_i}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{-b_j}{2\Delta} & 0 & 1 & \frac{-b_k}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{c_i}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{c_j}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{c_k}{2\Delta} & 1 & 0 \\ \frac{-b_i}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{-b_j}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{-b_k}{2\Delta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

e  $\{\delta^e\}$  é a matriz dos deslocamentos nodais

$$\{\delta^e\} = \{w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ w_k \ \theta_{xk} \ \theta_{yk}\} \quad (5.52)$$

### 5.9 - Deformações no elemento triangular

As equações (5.40), (5.41)...(5.44) mostram que a matriz das deformações  $\{\epsilon\}$  é dada por

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Como

$$\{\xi\} = [B]\{\delta^e\} \quad (2.7)$$

as equações (5.42), (5.49), (5.50) e (5.51) permitem escrever

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_{ix}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_{iy}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_{jx}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_{jy}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_{kx}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_{ky}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_{ix}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_{iy}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_{jx}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_{jy}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_{kx}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_{ky}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 N_{ix}}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{iy}}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{jx}}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{jy}}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{kx}}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{ky}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [T] \quad (5.54)$$

ou

$$[B] = [\bar{B}][T] \quad (5.55)$$

sendo  $[\bar{B}]$  a matriz  $3 \times 6$  obtida em (5.54).

Após cálculos laboriosos obtém-se para  $[\bar{B}]$  a seguinte expressão<sup>6</sup>

$$[\bar{B}] = \frac{1}{8 \Delta^3} [A'] [B'] \quad (5.56)$$

A matriz  $[A']$  é dada por

$$[A'] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Antes de apresentar a matriz  $[B']$  introduzam-se os seguintes valores:

$$a = x_j y_k - x_k y_j \quad (5.58)$$

$$E_1 = a(b_i b_j + b_j b_k + b_k b_i)$$

$$\begin{aligned}
 E_2 &= a[(c_i b_j + b_i c_j) + (c_j b_k + b_j c_k) + (c_k b_i + b_k c_i)] \\
 E_3 &= a(c_i c_j + c_j c_k + c_k c_i) \\
 E_4 &= b_i b_j b_k \\
 E_5 &= c_i b_j b_k + c_j b_k b_i + c_k b_i b_j \\
 E_6 &= c_i c_j b_k + c_j c_k b_i + c_k c_i b_j \\
 E_7 &= c_i c_j c_k
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}
 x_1^i &= b_i^2 a + 2ab_i b_j \\
 x_2^i &= 2b_i c_i a + 2b_j c_i a + 2b_i c_j a \\
 x_3^i &= c_i^2 a + 2ac_i c_j \\
 x_4^i &= b_i^2 b_j \\
 x_5^i &= 2b_i c_i b_j + b_i^2 c_j \\
 x_6^i &= c_i^2 b_j + 2b_i c_i c_j \\
 x_7^i &= c_i^2 c_j \\
 y_1^i &= b_i^2 a + 2ab_i b_k \\
 y_2^i &= 2b_i c_i a + 2b_k c_i a + 2b_i c_k a \\
 y_3^i &= c_i^2 a + 2ac_i c_k \\
 y_4^i &= b_i^2 b_k \\
 y_5^i &= 2b_i c_i b_k + b_i^2 c_k \\
 y_6^i &= c_i^2 b_k + 2b_i c_i c_k \\
 y_7^i &= c_i^2 c_k \\
 F^i &= (b_k - b_j)/2 \\
 G^i &= (c_k - c_j)/2
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Além desses valores são necessários os valores  $x_1^j, x_2^j, \dots, x_7^j$  que são obtidos de (5.60) por uma permutação cíclica dos índices  $i, j, k$ .

ces i, j, k.

A matriz  $[B^i]$  é então dada por

$$[B^i] = \begin{bmatrix} (BX)_1^i & (BY)_1^i & (BX)_1^j & (BY)_1^j & (BX)_1^k & (BY)_1^k \\ (BX)_2^i & (BY)_2^i & (BX)_2^j & (BY)_2^j & (BX)_2^k & (BY)_2^k \\ (BX)_3^i & (BY)_3^i & (BX)_3^j & (BY)_3^j & (BX)_3^k & (BY)_3^k \\ (BX)_4^i & (BY)_4^i & (BX)_4^j & (BY)_4^j & (BX)_4^k & (BY)_4^k \\ (BX)_5^i & (BY)_5^i & (BX)_5^j & (BY)_5^j & (BX)_5^k & (BY)_5^k \\ (BX)_6^i & (BY)_6^i & (BX)_6^j & (BY)_6^j & (BX)_6^k & (BY)_6^k \\ (BX)_7^i & (BY)_7^i & (BX)_7^j & (BY)_7^j & (BX)_7^k & (BY)_7^k \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

onde

$$\begin{aligned} (BX)_l^i &= x_l^i b_k - y_l^i b_j + e_l F^i \quad (l=1,2,3,4,5,6,7) \\ (BY)_l^i &= x_l^i c_k - y_l^i c_j + e_l G^i \end{aligned} \quad (5.62)$$

Os outros valores  $(BX)_l^j, \dots, (BY)_l^k$  são obtidos por permutação cíclica dos índices i, j, k em (5.62).

#### 5.10 - Tensões no elemento triangular

Todo o desenvolvimento feito no item 5.4 para o elemento retangular é válido para o elemento triangular.

As equações (5.12), (2.7) e (5.55) permitem então escrever

$$\{M\} = [D][\bar{B}][T]\{\xi^e\} - [D]\{\xi_o\} \quad (5.63)$$

ou, de acordo com (5.56):

$$\{M\} = \frac{1}{8 \Delta^3} [D][A^i][B^i][T]\{\xi^e\} - [D]\{\xi_o\} \quad (5.64)$$

A equação (5.64) permite determinar os momentos fletores e de torção em um ponto qualquer do elemento.

### 5.11 - Matriz de rigidez do elemento triangular ortotropo

Como se sabe a matriz de rigidez de um elemento de placa é dada por

$$[k^e] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (5.65)$$

Levando em consideração (5.55) e (5.56) obtém-se para a matriz de rigidez

$$[k^e] = \frac{1}{64\Delta^6} [T]^T [B']^T (\iint [A']^T [D] [A'] dx dy) [B'] [T] \quad (5.66)^{\$}$$

O cálculo da matriz de rigidez dada por (5.66) (é esta a forma final apresentada na referência 6) exige uma dupla integração numérica. Para evitar esta integração numérica vai-se fazer a integração analítica.

Vê-se que a matriz  $[A']$  dada por (5.57) pode ser decomposta da forma

$$[A'] = [A_o] + [A_x]x + [A_y]y \quad (5.67)$$

onde

$$[A_o] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

---

<sup>\$</sup> - a expressão de  $[k^e]$  apresentada na referência 6 está errada já que no denominador aparece  $\Delta^5$  ao invés de  $\Delta^6$ ; este erro foi constatado pelo autor quando esta parte do trabalho era desenvolvida no Laboratório Nacional de Engenharia Civil em Lisboa.

$$[A_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

$$[A_y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

A integral  $\iint [A']^T [D] [A'] dx dy$  é então dada por

$$\iint [A']^T [D] [A'] dx dy = \iint (([A_o]^T + [A_x]^T x + [A_y]^T y) [D] ([A_o] + [A_x] x + [A_y] y)) dx dy$$

ou, levando em consideração que  $\iint x dx dy = \iint y dx dy = 0$ :

$$\iint [A']^T [D] [A'] dx dy = \iint (([A_o]^T [D] [A_o] + [A_x]^T [D] [A_x] x^2 + + ([A_x]^T [D] [A_y] + [A_y]^T [D] [A_x]) xy + [A_y]^T [D] [A_y] y^2) dx dy \quad (5.71)$$

Supondo, agora, que trata-se de um elemento de placa ortotrópico com os eixos principais de ortotropia paralelos a x e y a matriz  $[D]$  é dada por (5.19).

Efetuando então os produtos indicados em (5.71) obtém-se

$$[A_o]^T [D] [A_o] = \begin{bmatrix} 4D_x & 0 & 4D_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4D_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4D_{xy} & 0 & 4D_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

$$[A_x]^T [D] [A_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36D_x & 0 & 12D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16D_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12D_1 & 0 & 4D_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} [A_x]^T [D] [A_y] + \\ [A_y]^T [D] [A_x] = \end{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12D_x & 0 & 36D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 12D_x & 0 & 4D_1 + 16D_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4D_1 + 16D_{xy} & 0 & 12D_y \\ 0 & 0 & 0 & 36D_1 & 0 & 12D_y & 0 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$[A_y]^T [D] [A_y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4D_x & 0 & 12D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16D_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12D_1 & 0 & 36D_y \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

As integrais que aparecem em (5.71) são facilmente integráveis e seus valores são:

$$\iint x^2 dx dy = \frac{\Delta}{12} (x_i^2 + x_j^2 + x_k^2) \quad (5.76)$$

$$\iint y^2 dx dy = \frac{\Delta}{12} (y_i^2 + y_j^2 + y_k^2) \quad (5.77)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} xydxdy = \frac{\Delta}{12} (x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k) \end{array} \right. \quad (5.78)$$

Introduzindo-se os valores dados em (5.72), (5.73)....  
..(5.78) em (5.71) e adicionando-se adequadamente as matrizes obtidas chega-se a

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ A' \right]^T [D] \left[ A' \right] dxdy = \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} 4D_x & 0 & 4D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4D_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4D_1 & 0 & 4D_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3D_x(SQX) & D_x(SXY) & D_1(SQX) \\ 0 & 0 & 0 & D_x(SXY) & D_x(SQY)/3 + 4D_{xy}(SQX)/3 & D_1(SXY)/3 + 4D_{xy}(SXY)/3 \\ 0 & 0 & 0 & D_1(SQX) & D_1(SXY)/3 + 4D_{xy}(SXY)/3 & D_y(SXY) \\ 0 & 0 & 0 & 3D_1(SXY) & D_1(SQY) & D_y(SXY) \end{array} \right| \quad (5.79)$$

onde

$$\begin{aligned} (SQX) &= x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 \\ (SQY) &= y_i^2 + y_j^2 + y_k^2 \\ (SXY) &= x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k \end{aligned} \quad (5.80)$$

(5.66) e (5.79) permitem, então, calcular a matriz de rigidez de um elemento triangular ortotropo de placa sem ser necessária

rio fazer-se a integração numérica.

### 5.12 - Cargas nodais equivalentes - elemento triangular

Viu-se que os sistemas de referência locais têm origem nos centróides dos triângulos  $ijk$ ; nenhuma restrição se fez todavia à orientação destes sistemas. Se todos os sistemas são tomados paralelos entre si a matriz  $[R]$  é a matriz unidade.

Neste caso tem-se

$$[k^e] = [k^e] \quad (5.81)$$

e as contribuições de cada elemento para as fôrças nodais equivalentes serão dadas por (3.1, 3.38, 3.39, 3.40):

$$\{F_t^e\} = \iint [B]^T [D] \{\xi_o\} dx dy \quad (5.82)$$

$$\{P_p^e\} = h \iint [N]^T \{p^e\} dx dy \quad (5.83)$$

$$\{P_c^e\} = \sum_i [N_i]^T \{P_i^e\} \quad (5.84)$$

$$\{P_q^e\} = \iint [N]^T \{q^e\} dx dy \quad (5.85)$$

As matrizes  $[N]$  e  $[B]$  são dadas respectivamente por (5.40) e (5.55); supõe-se  $\{p^e\}$  função de  $x$  e  $y$  apenas.

A equação (5.82) pode reescrever-se, levando em consideração (5.55) e (5.56):

$$\{F_t^e\} = \frac{1}{8 \Delta^3} [T]^T [B]^T \iint [A']^T [D] \{\xi_o\} dx dy \quad (5.86)$$

## CAPÍTULO VI - CONSIDERAÇÕES RELATIVAS À ESCOLHA DA LEI DE VARIAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

### 6.1 - Considerações gerais

Em capítulos anteriores foram apresentadas leis de variações de deslocamentos para tipos diversos de elementos; em nenhuma oportunidade, todavia, justificou-se a escolha.

Esta escolha é, em geral, uma operação difícil e o pesquisador é surpreendido frequentemente por situações imprevistas, o que tem levado, como mostra a bibliografia especializada, a alguns fracassos.

Logo que se iniciou o estudo de elementos de placas verificou-se a necessidade de estabelecerem-se certos critérios associados a esta escolha já que alguns elementos apresentados não mereciam a mínima confiança.

Por representarem duas filosofias diferentes merecem destaque os critérios estabelecidos por Melosh<sup>13</sup> e Zienkiewicz e sua equipe<sup>15</sup>.

Melosh considerava a convergência para a solução exata como de interesse secundário já que ao engenheiro interessam, normalmente, apenas valores aproximados dos exatos. Por isto estabeleceu critérios que asseguravam a convergência monótona de certas grandezas mas que não garantiam convergência para a solução exata.

Verificou-se, todavia, que a satisfação total dos critérios estabelecidos por Melosh, além de restringir demasiadamente as leis de variação possíveis para os deslocamentos, era normalmente difícil de se obter.

Por isto Zienkiewicz procurou estabelecer critérios que embora não garantissem convergência monótona pudessem levar à convergência para a solução exata.

Posteriormente Arantes e Oliveira estabeleceu critérios iguais em sua essência aos de Zienkiewicz e mostrou em que condições sua satisfação leva à convergência para a solução exata.

No que se segue vai-se apresentar este assunto visando justificar as escolhas das leis de variação dos deslocamentos e, consequentemente, os resultados obtidos utilizando-se os elementos apresentados. A rigor, não é necessário falar-se em convergência monótona; isto é feito, entretanto, para mostrar a filosofia que em certa época foi a principal.

### 6.2 - Convergência monótona

Melosh estabeleceu os seguintes critérios para a escolha das funções de deslocamento:

- 1) elas devem ser contínuas em todo o elemento;
- 2) elas devem ser uma função linear dos deslocamentos generalizados (ou nodais);
- 3) elas devem permitir ao elemento deslocar-se como um corpo rígido;
- 4) elas devem preservar a continuidade dos deslocamentos em elementos adjacentes;
- 5) elas devem ser tais que os deslocamentos em um sub-elemento possam ser iguais aos que teria antes da subdivisão do elemento.

Os critérios 1, 2 e 4 eram considerados os fundamentais ao passo que 3 e 5 opcionais. A inclusão de 5 foi feita para obter se convergência monótona da energia potencial total das diversas soluções aproximadas obtidas diminuindo sucessivamente o tamanho dos elementos; é o que se vai mostrar a seguir.

A forma desenvolvida neste trabalho para a obtenção das equações fundamentais ao Método dos Elementos Finitos não é, naturalmente, a única. Em particular mostra-se<sup>1,20</sup> que a equação (3.31) que garante o equilíbrio global da estrutura pode ser obtida minimizando-se o funcional

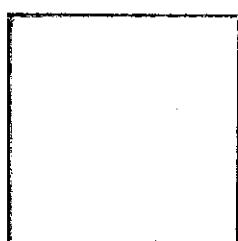
$$F_n = \sum_{e=1}^m U^e - \sum_{e=1}^m W^e \quad (6.1)$$

na família de campos de deslocamento possíveis associada à idealização adotada; em (6.1) m é o número de elementos em que se dividiu a estrutura, n indica tratar-se da enésima partição e  $U^e$  e  $W^e$  são, respectivamente, a energia de deformação e o trabalho das fôrças externas aplicadas ao elemento e.

É de se notar que o funcional  $F_n$  é definido de forma análoga à energia potencial total da estrutura e, na realidade, coincide com esta quando o campo de deslocamentos é compatível em toda a estrutura. Este é o caso quando as condições reduzidas de compatibilidade são suficientes para garantir a compatibilidade entre os elementos adjacentes; em caso contrário há incrustação de energia nas regiões entre as faces internas dos elementos e a energia de deformação da estrutura não coincide com  $\sum_{e=1}^m U^e$ .

Verifica-se que se os critérios estabelecidos por Melosh são satisfeitos então  $F_n$  é a energia potencial total e a obtenção da solução aproximada corresponde a minimizar a energia potencial total associada à enésima partição.

Para exemplificar suponha-se que a placa (poderia ser qualquer outro tipo de estrutura) da figura 6.1 seja submetida a sucessivas partições de forma tal que os novos elementos sejam subelementos dos elementos da partição anterior e que além disto o critério 5 seja satisfeito.



Partição 1  
(2x2)

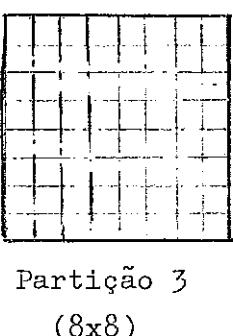
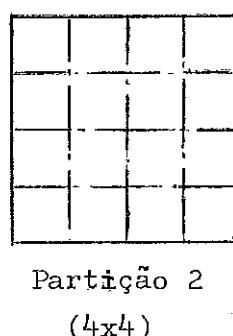
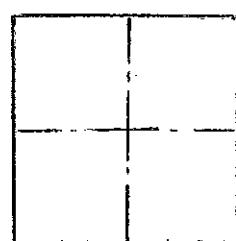


Figura 6.1

O critério 5 sendo satisfeito, qualquer configuração que se dê à partição 1 pode ser reproduzida pelas partições 2 e 3; da mesma forma, qualquer configuração que se dê à partição 2 pode ser reproduzida pela partição 3. Por outro lado há configurações associadas à partição 2 que não podem ser reproduzidas pela partição 1 assim como há configurações associadas à partição 3 que não podem ser reproduzidas nem por 1 ou por 2.

Segue-se que a energia potencial total mínima obtida com a partição 1 deve ser igual ou maior do que a obtida com a partição 2. Igualmente, a energia potencial total obtida com a partição 2 deve ser igual ou maior do que a obtida com a partição 3. Pode-se, então, escrever (o índice a indica tratar-se do valor associado à solução aproximada):

$$F_{a1} \geq F_{a2} \geq F_{a3} \quad (6.2)$$

A generalização é imediata, o que permite escrever, sendo  $F_{ex}$  a energia potencial total associada à solução exata:

$$F_{a1} \geq F_{a2} \geq \dots \geq F_{an} \geq F_{an+1} \geq \dots \geq F_{ex} \quad (6.3)$$

Examinando-se (6.3) verifica-se que a energia potencial total converge monotonamente; ressalte-se, todavia, que não há garantia de que a convergência seja para  $F_{ex}$ .

É interessante observar, entretanto, que qualquer valor aproximado  $F_{an}$  obtido constitui um limite superior para a energia potencial total exata  $F_{ex}$ .

### 6.3 - Convergência para a solução exata

Como se disse, durante algum tempo os critérios estabelecidos por Melosh serviram de base para a escolha de funções de deslocamento adequadas.

Todavia, em 1965 a equipe de Zienkiewicz apresentou um

artigo<sup>15</sup> em que discordava da necessidade absoluta de ser satisfeita o critério 4 que exigia a compatibilidade entre elementos adjacentes ao mesmo tempo em que apresentava uma condição que, satisfeita, poderia levar à convergência para a solução exata. Esta nova condição exigia que a função de deslocamento fôsse capaz de representar estados de deformação (generalizada) constante em todo o elemento independentemente da sua forma ou tamanho.

Dentro da nova filosofia os critérios reduzem-se a dois fundamentais que são apresentados na forma que se segue.

"Se a função de deformação não leva a singularidades dentro do elemento e também não leva, na junção com outros elementos, a tensões infinitas (o que para placas, por exemplo, implica na continuidade tanto do deslocamento transversal quanto das declividades), então, à medida que se refinam as subdivisões, deve-se obter convergência para a solução exata, desde que:

- 1) a função de deslocamento é tal que não é permitida a auto-deformação quando os deslocamentos nodais são causados por um deslocamento de corpo rígido;
- 2) a função de deslocamento é tal que se os deslocamentos nodais são compatíveis com uma condição de deformação (generalizada) constante tal deformação constante é realmente obtida."

Ressalte-se que não foi provada formalmente a validade destes critérios quando da sua apresentação; o bom senso inerente a eles foi, de certa forma, justificativa adequada.

É de se notar que os critérios 1 e 2 de Melosh, embora não tenham sido postos em forma de critérios por Zienkiewicz, são seguidos sistematicamente. Além disto, o critério 3 de Melosh é um caso particular do critério 2 de Zienkiewicz.

Quanto ao critério 4 de Melosh ele deve ser, como mostram as condições impostas à função de deformação ao se enunciarem os critérios de Zienkiewicz, satisfeito em princípio.

Todavia, argumentam os mentores da nova filosofia, pode-

se obter convergência para a solução exata mesmo que o critério 4 de Melosh não seja satisfeito; isto acontecerá se à medida que se refina a malha as condições de continuidade vão sendo restauradas e, no limite, esta continuidade seja realmente obtida.

Verifica-se que isto acontece com frequência se:

- a) a condição de deformação constante garante automaticamente a continuidade dos deslocamentos;
- b) o critério 2 de Zienkiewicz é satisfeito.

A experiência comprovou as conclusões da equipe de Zienkiewicz e verificou-se ser realmente possível obter convergência para a solução exata com elementos não compatíveis; no mesmo artigo<sup>15</sup> já mencionado foi ainda apresentado um elemento de placa triangular (que é o apresentado neste trabalho) não compatível que tem sido usado intensamente face aos bons resultados que permite obter. É de se ressaltar que os elementos não compatíveis, desde que satisfaçam aos critérios propostos, levam muitas vezes, para as malhas normalmente utilizadas, a melhores resultados do que elementos compatíveis semelhantes.

Como já se disse, a equipe de Zienkiewicz não se preocupou em provar a validade dos critérios apresentados; todavia, Arantes e Oliveira, trabalhando em uma linha filosófica análoga, chegou a resultados do maior interesse. Um resumo dêles, adaptado às necessidades do presente trabalho, é apresentado no item que se segue.

#### 6.4 - Comentários adicionais sobre a convergência para a solução exata

Suponha-se que as funções de deslocamento adotadas para os deslocamentos em um ponto do elemento satisfaçam aos seguintes critérios:

- 1) as expressões analíticas para os deslocamentos  $\{f\}$  em

um elemento são polinômios com um número total de parâmetros arbitrários igual ao número de deslocamentos nodais correspondentes ao elemento;

- 2) os térmos de graus superiores ao primeiro podem anular-se independentemente dos valores tomados pelo termo constante e pelos coeficientes dos térmos lineares;
- 3) o termo constante e os coeficientes dos térmos de primeiro grau são totalmente arbitrários.

Suponha-se também que a solução exata pertença ao conjunto dos campos elásticos compatíveis cujos deslocamentos tenham derivadas de segunda ordem contínuas e limitadas dentro de cada elemento.

Prova-se então que<sup>20</sup>:

- a) a sequência de soluções aproximadas, obtidas com o refinamento sucessivo das malhas, converge para a solução exata se as condições reduzidas de compatibilidade implicam em compatibilidade total entre os elementos;
- b) a sequência de soluções aproximadas, obtidas com o refinamento sucessivo das malhas, também converge para a solução exata quando as condições reduzidas de compatibilidade não implicam em compatibilidade total entre os elementos desde que as derivadas até segunda ordem dos deslocamentos permaneçam contínuas e limitadas dentro dos elementos.

No caso da teoria clássica (simplificada) de placas, na qual se despreza a deformação por esforço cortante, os critérios são alterados ligeiramente; neste caso, como se sabe,  $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y}$  e  $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$ .

Suponha-se, então, que a função de deslocamento adotada para o deslocamento transverso  $w$  satisfaça aos seguintes critérios:

- 1) a expressão analítica para o deslocamento transverso  $w$  em um elemento é um polinômio com um número total de parâmetros arbitrários igual ao número de deslocamentos nodais correspondentes ao elemento;
- 2) os térmos de graus superiores ao segundo podem anular-se independentemente dos valores tomados pelo termo constante e pelos coeficientes dos termos lineares e quadráticos;
- 3) o termo constante e os coeficientes dos térmos de primeiro e segundo graus são totalmente arbitrários.

Suponha-se ainda que a solução exata pertença ao conjunto dos campos elásticos compatíveis para os quais a deformação por esforço cortante é nula e as derivadas terceiras de  $w$  são contínuas e limitadas dentro de cada elemento.

Prova-se então que<sup>20</sup>:

- a) a sequência de soluções aproximadas, obtidas com o refinamento sucessivo das malhas, converge para a solução exata se as condições reduzidas de compatibilidade implicam em compatibilidade total entre os elementos;
- b) a sequência de soluções aproximadas, obtidas com o refinamento sucessivo das malhas, também converge para a solução exata quando as condições reduzidas de compatibilidade não implicam em compatibilidade total entre os elementos, desde que as derivadas até terceira ordem de  $w$  permaneçam contínuas e limitadas dentro dos elementos.

6.5 - O elemento triangular para estados planos de tensões e deformações à luz dos critérios para a convergência para a solução exata

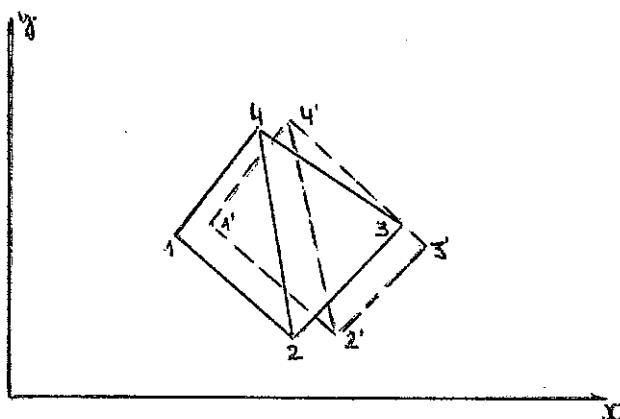


Figura 6.2

Como se sabe, as funções de deslocamento adotadas para os deslocamentos  $u$  e  $v$  foram

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (4.2)$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (4.3)$$

Elas serão agora examinadas para se saber até que ponto os critérios estabelecidos por Arantes e Oliveira são obedecidos.

São, como se vê, polinômios que envolvem seis parâmetros arbitrários; como o número de deslocamentos nodais correspondentes ao elemento é também seis, o primeiro critério é satisfeito.

Que os critérios 2 e 3 são satisfeitos é óbvio; todos os critérios são, pois, obedecidos.

Haverá, então, convergência para a solução exata se as condições reduzidas de compatibilidade implicarem em compatibilidade total entre os elementos.

Como as funções de deslocamento são lineares, os lados do elemento devem permanecer retos após a deformação.

Na figura 6.2 estão indicados dois elementos antes e após a deformação; vê-se, então, que a satisfação das condições re-

duzidas de compatibilidade, isto é, que os nós 2 e 4 dos elementos 124 e 234 permaneçam em contato após a deformação, implicam na coincidência dos dois lados adjacentes.

Como isto se repete para todos os elementos, há compatibilidade total entre os elementos e a convergência para a solução exata deve verificar-se.

### 6.6 - O elemento retangular de placa à luz dos critérios para a convergência para a solução exata

A lei de variação escolhida para o deslocamento transversal foi a expressão polinomial

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (5.1)$$

Como o número de deslocamentos nodais em um elemento retangular de placa é doze vê-se que o primeiro critério é satisfeito.

Os parâmetros  $\alpha_1, \dots, \alpha_{12}$  são totalmente arbitrários e podem, consequentemente, tomar qualquer valor; segue-se que o segundo e terceiro critérios são totalmente satisfeitos.

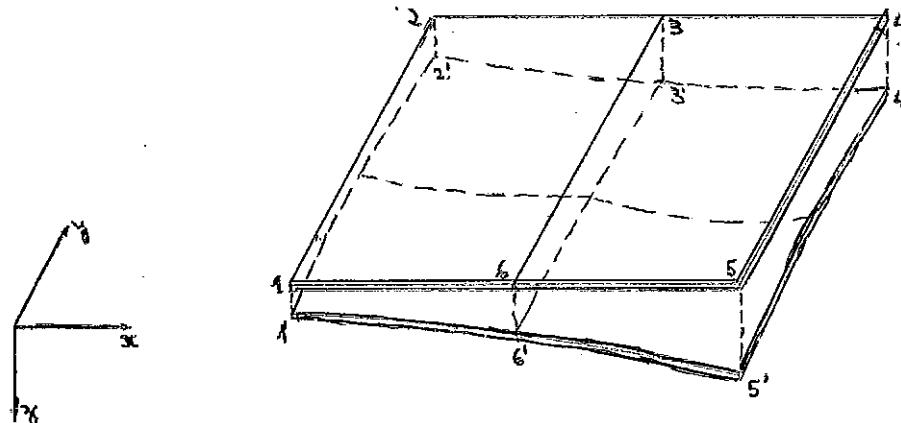


Figura 6.3

Tomando como referência a figura 6.3, na qual são apresentados dois elementos antes e depois da deformação, vai-se verificar a compatibilidade dos elementos ao longo da aresta 36.

Examinando a lei de variação (5.1) vê-se que o deslocamento transversal  $w$  ao longo dos lados dos elementos sofre uma variação do terceiro grau.

Por outro lado a satisfação das condições reduzidas de compatibilidade exige que, tanto no nó 3 como no nó 6, sejam iguais, para os dois elementos, os valores de  $w$  e  $\theta_x$ . Isto leva, naturalmente, à coincidência dos deslocamentos transversais ao longo da aresta 3'6'.

Já a variação de  $\theta_y$  ao longo da aresta 36 é quadrática; como as condições reduzidas de compatibilidade exigem que  $\theta_y$  seja igual para os dois elementos apenas nos nós 3 e 6 é possível que esta igualdade não seja obtida ao longo da aresta 3'6' (com o consequente aparecimento de uma dobra em 3'6').

Evidentemente, a satisfação das condições reduzidas de compatibilidade não implica na compatibilidade total entre os elementos. A convergência para a solução exata, neste caso, dependerá de manterem-se contínuas e limitadas dentro dos elementos, à medida que são reduzidos, as derivadas até terceira ordem de  $w$ .

Sabe-se, para este tipo de elemento, que uma malha de retângulos iguais converge para a solução exata<sup>21</sup>. Não há, na bibliografia especializada, provas formais da verificação da convergência para a solução exata em outros casos. Todavia, a experiência mostra, nos casos em que a solução exata é conhecida, que esta convergência verifica-se.

Vale dizer que frequentemente a lei de variação não se apresenta em formas simples como (5.1) e a verificação da satisfação dos critérios não é, de forma alguma, imediata. Pelo interesse do assunto vai-se indicar, estudando o mesmo elemento retangular, uma técnica possível de ser seguida quando este for o caso.

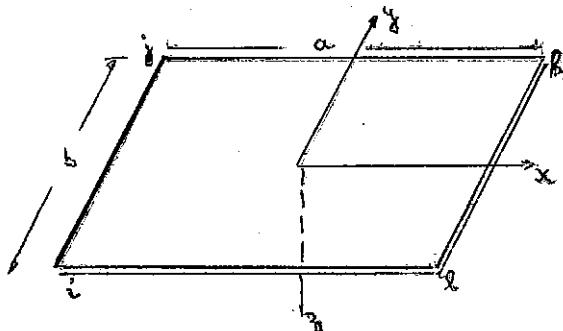


Figura 6.4

Melosh apresentou, na referência 13, a lei de variação de  $w$  em termos dos deslocamentos nodais (referir-se à figura 6.4): §

$$\begin{aligned}
 32w = & (\xi-1)(\eta-1) \left\{ (2[(\xi-1)(\eta-1) - (\xi+1)(\eta+1)]) - 4(\xi-1)(\xi+1) - 4(\eta-1)x \right. \\
 & \quad \left. - (\eta+1)w_i + 2b(\eta-1)(\eta+1)\theta_{xi} - 2a(\xi-1)(\xi+1)\theta_{yi} \right\} + \\
 & + (\xi-1)(\eta+1) \left\{ (2[(\xi-1)(\eta+1) - (\xi+1)(\eta-1)]) + 4(\xi-1)(\xi+1) + 4(\eta+1)x \right. \\
 & \quad \left. - (\eta-1)w_j + 2b(\eta-1)(\eta+1)\theta_{xj} + 2a(\xi-1)(\xi+1)\theta_{yj} \right\} + \\
 & + (\xi+1)(\eta+1) \left\{ (2[(\xi+1)(\eta+1) - (\xi-1)(\eta-1)]) - 4(\xi-1)(\xi+1) - 4(\eta-1)x \right. \\
 & \quad \left. - (\eta+1)w_k + 2b(\eta-1)(\eta+1)\theta_{xk} + 2a(\xi+1)(\xi-1)\theta_{yk} \right\} + \\
 & + (\xi+1)(\eta-1) \left\{ (2[(\xi+1)(\eta-1) - (\xi-1)(\eta+1)]) + 4(\xi-1)(\xi+1) + 4(\eta-1)x \right. \\
 & \quad \left. - (\eta+1)w_l - 2b(\eta-1)(\eta+1)\theta_{xl} - 2a(\xi-1)(\xi+1)\theta_{yl} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

onde  $\xi = 2x/a$  e  $\eta = 2y/b$  (6.5)

e  $w_i, \theta_{xi}, \dots, \theta_{yl}$  são os deslocamentos nodais dos nós  $i, j, k, l$ .

O critério 1 é, evidentemente, satisfeito.

Para que os critérios 2 e 3 sejam satisfeitos a expressão (6.4) deve ser tal que ela possa por-se na forma

$$w = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 \tag{6.6}$$

quaisquer que sejam os valores de  $A, B, \dots, F$ .

---

§ - esta lei foi apresentada posteriormente na referência 1; ambas as expressões apresentam erros de impressão.

Isto será verdade se os deslocamentos nodais calculados a partir de (6.6), e substituídos em (6.4), transformarem (6.4) em (6.6).

A partir de (6.6) obtém-se:

$$\theta_x = - \frac{\partial w}{\partial y} = - C - E_x - 2F_y \quad (6.7)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = B + 2Dx + E_y \quad (6.8)$$

Os deslocamentos nodais nos nós i, j, k e l serão dados, então, por:

$$w_i = A - \frac{Ba}{2} - \frac{Cb}{2} + \frac{Da^2}{4} + \frac{Eab}{4} + \frac{Fb^2}{4}$$

$$\theta_{xi} = - C + \frac{Ea}{2} + Fb \quad (6.9)$$

$$\theta_{yi} = B - Da - \frac{Eb}{2}$$

$$w_j = A - \frac{Ba}{2} + \frac{Cb}{2} + \frac{Da^2}{4} - \frac{Eab}{4} + \frac{Fb^2}{4}$$

$$\theta_{xj} = - C + \frac{Ea}{2} - Fb \quad (6.10)$$

$$\theta_{yj} = B - Da + \frac{Eb}{2}$$

$$w_k = A + \frac{Ba}{2} + \frac{Cb}{2} + \frac{Da^2}{4} + \frac{Eab}{4} + \frac{Fb^2}{4}$$

$$\theta_{xk} = - C - \frac{Ea}{2} - Fb \quad (6.11)$$

$$\theta_{yk} = B + Da + \frac{Eb}{2}$$

$$\begin{aligned}
 w_1 &= A + \frac{Ba}{2} - \frac{Cb}{2} + \frac{Da^2}{4} - \frac{Eab}{4} + \frac{Fb^2}{4} \\
 \theta_{x1} &= -C - \frac{Ea}{2} + Fb \quad (6.12) \\
 \theta_{y1} &= B + Da + -\frac{Eb}{2}
 \end{aligned}$$

Substituindo os deslocamentos nodais dados por (6.9), (6.10), (6.11) e (6.12) em (6.4) verifica-se que o término constante e os coeficientes dos outros termos reduzem-se a:

a) término constante =

$$\begin{aligned}
 &8(w_i + w_j + w_k + w_1) + 2b(-\theta_{xi} + \theta_{xj} + \theta_{xk} - \theta_{x1}) + 2a(\theta_{yi} + \theta_{yj} - \theta_{yk} - \theta_{y1}) = \\
 &= 8(4A + Da^2 + Fb^2) + 2b(-4Fb) + 2a(-4Da) = 32A
 \end{aligned}$$

b) coeficiente de  $\xi$  =

$$\begin{aligned}
 &12(-w_i - w_j + w_k + w_1) + 2b(\theta_{xi} - \theta_{xj} + \theta_{xk} - \theta_{x1}) + 2a(-\theta_{yi} - \theta_{yj} - \theta_{yk} - \theta_{y1}) = \\
 &= 12(2Ba) + 2b(0) + 2a(-4B) = 16Ba
 \end{aligned}$$

c) coeficiente de  $\zeta$  =

$$\begin{aligned}
 &12(-w_i + w_j + w_k - w_1) + 2b(\theta_{xi} + \theta_{xj} + \theta_{xk} + \theta_{x1}) + 2a(-\theta_{yi} + \theta_{yj} - \theta_{yk} + \theta_{y1}) = \\
 &= 12(2Cb) + 2b(-4C) + 2a(0) = 16bC
 \end{aligned}$$

d) coeficiente de  $\xi^2$  =

$$2a(-\theta_{yi} - \theta_{yj} + \theta_{yk} + \theta_{y1}) = 8Da^2$$

e) coeficiente de  $\zeta^2$  =

$$16(w_i - w_j + w_k - w_l) + 2b(-\theta_{xi} - \theta_{xj} + \theta_{xk} + \theta_{xl}) + 2a(\theta_{yi} - \theta_{yj} - \theta_{yk} + \theta_{yl}) = \\ = 16(Eab) + 2b(-2Ea) + 2a(-2Eb) = 8Eab$$

f) coeficiente de  $\eta^2$  =

$$2b(\theta_{xi} - \theta_{xj} - \theta_{xk} + \theta_{xl}) = 8Fb^2$$

g) coeficiente de  $\xi^3$  =

$$4(w_i + w_j - w_k - w_l) + 2a(\theta_{yi} + \theta_{yj} + \theta_{yk} + \theta_{yl}) = 4(-2Ba) + 2a(4B) = 0$$

h) coeficiente de  $\xi^2\eta$  =

$$2a(\theta_{yi} - \theta_{yj} + \theta_{yk} - \theta_{yl}) = 0$$

i) coeficiente de  $\xi\eta^2$  =

$$2b(-\theta_{xi} + \theta_{xj} - \theta_{xk} + \theta_{xl}) = 0$$

j) coeficiente de  $\eta^3$  =

$$4(w_i - w_j - w_k + w_l) + 2b(-\theta_{xi} - \theta_{xj} - \theta_{xk} - \theta_{xl}) = 4(2Cb) - 2b(4C) = 0$$

k) coeficiente de  $\xi^3\eta$  =

$$4(-w_i + w_j - w_k + w_l) + 2a(-\theta_{yi} + \theta_{yj} + \theta_{yk} - \theta_{yl}) = 4(-Eab) + 2a(2Eb) = 0$$

l) coeficiente de  $\xi\eta^3$  =

$$4(-w_i + w_j - w_k + w_l) + 2b(\theta_{xi} + \theta_{xj} - \theta_{xk} - \theta_{xl}) = 4(-Eab) + 2b(2Ea) = 0$$

Finalmente (6.4) pode ser escrita na forma

$$32w = 32A + 16Ba\xi + 16bC\eta + 8Da^2\xi^2 + 8Eab\xi\eta + 8Fb^2\eta^2 \quad (6.13)$$

Substituindo-se em (6.13) os valores de  $\xi$  e  $\eta$  dados por (6.5) obtém-se

$$32w = 32A + 16Ba\frac{2x}{a} + 16bC\frac{2y}{b} + 8Da^2\frac{4x^2}{a^2} + 8Eab\frac{4xy}{ab} + 8Fb^2\frac{4y^2}{b^2}$$

ou

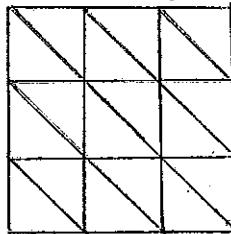
$$w = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2$$

#### 6.7 - O elemento triangular de placa à luz dos critérios para a convergência para a solução exata

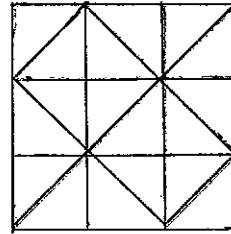
Um estudo semelhante ao desenvolvido para o elemento retangular de placa leva, para o elemento triangular, às mesmas conclusões, isto é, os critérios para a convergência para a solução exata são satisfeitos, existe compatibilidade dos deslocamentos transversais ao longo de lados adjacentes e é possível o aparecimento de dobras.

Consequentemente, a convergência para a solução exata só é possível quando as derivadas de  $w$ , até a terceira ordem, permanecem contínuas e limitadas no interior dos elementos à medida que elas são reduzidas.

Verifica-se, por exemplo, que para a malha a da figura 6.5 obtem-se convergência ao passo que para a malha b isto não acontece.<sup>15,21,22</sup>



(a)



(b)

Figura 6.5

É de se ressaltar, todavia, que a convergência no caso b faz-se para valores muito próximos dos exatos e podem, na prática, serem considerados como exatos. Para malhas irregulares deve-se esperar um êrro de aproximadamente 1%<sup>6</sup>.

## CAPÍTULO VII - APLICAÇÕES

### 7.1 - Estruturas analisadas

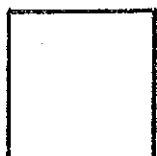
Nos seis primeiros capítulos foi feito o desenvolvimento teórico necessário à formulação, pelo Método dos Elementos Finitos, de um programa automático para a análise de placas e de problemas de estados planos de tensões e deformações. Detalhes sobre o programa serão dados no apêndice. Neste capítulo são apresentados vários casos estudados utilizando-se o referido programa.

A convenção adotada para a representação das estruturas é a seguinte:

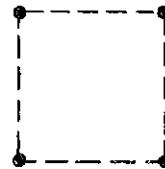
- - apoio puntual
- - apoio simples
- - bordo livre
- - malha
- - eixo de simetria
- - material diferente ou reforço.

Os casos estudados são os abaixo relacionados:

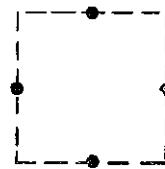
a) placas



Placa 1



Placa 2



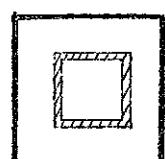
Placa 3



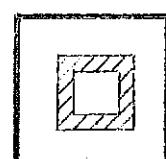
Placa 4



Placa 5



Placa 6

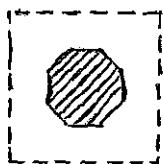


Placa 7



Placa 8

b) chapas



Chapa 1



Chapa 2

Dos casos apresentados apenas o caso Placa 1 tem solução exata; sua inclusão é feita exclusivamente para um estudo comparativo.

O caso Placa 2 já foi estudado<sup>23</sup> pelo Método das Diferenças Finitas e sua inclusão também é motivada pela necessidade e vantagens de se comparar resultados; que se saiba os outros casos são estudados pela primeira vez neste trabalho.

Certamente o leitor já foi capaz de identificar várias situações práticas em que tais casos podem aparecer; todavia, deseja-se ressaltar que os casos Placa 4 e Placa 5 levam a conclusões interessantes relativas às descontinuidades dos apoios e os casos Placa 6 e Placa 7 permitem constatar a influência benéfica de reforços colocados adequadamente.

Da mesma forma os casos Chapa 1 e Chapa 2 revelam aspectos de certo modo surpreendentes causados pela inclusão de materiais de natureza diferente em um meio homogêneo.

Detalhes de cada um dos casos serão fornecidos a seguir.

#### 7.2 - Placa 1

1) Tipo de placa: placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados; isótropa; homogênea; altura constante.

2) Carregamentos: 1º - carga uniformemente distribuída q por unidade de área;

2º - carga concentrada P em A (centro da placa).

3) Placa analisada: devido à simetria foi analisado o quadrante indicado na figura 7.1, sendo a malha final ( $8 \times 8$ ).

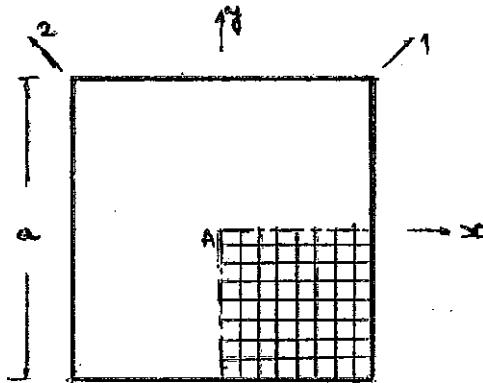


Figura 7.1

4) Verificação de convergência: são pesquisados a flecha e o momento fletor no ponto A para ambos os carregamentos ( $q=a=P=1.0$ ;  $D_x=D_y=D=1.0$ ;  $\gamma=0.3$ ).

Carga uniformemente distribuída					
Malha	Nós	w	êrro	$M_x$	êrro
(1x1)	4	0.00506	25%	0.0660	38%
(3x3)	16	0.00418	3%	0.0497	3.8%
(5x5)	36	0.00411	1.2%	0.0485	1.3%
(6x6)	49	0.00409	0.7%	0.0484	1.0%
(8x8)	81	0.00408	0.5%	0.0481	0.4%
Exata		0.00406		0.0479	

Tabela 7.1

Carga concentrada em A				
Malha	Nós	w	êrro	$M_x$
(1x1)	4	0.0138	19%	0.228
(3x3)	16	0.0120	3.5%	0.337
(5x5)	36	0.0118	1.7%	0.389
(6x6)	49	0.0117	0.9%	0.408
(8x8)	81	0.0117	0.9%	0.438
Exata		0.0116		0.438

Tabela 7.2

5) Gráficos:

- gráfico 1.1 - é o gráfico para as flechas ao longo de AB;
- gráfico 1.2 - é o gráfico dos momentos fletores  $M_x$  (ao longo de AB),  $M_1$  e  $M_2$  (ao longo de AC);
- gráfico 1.3 - é o gráfico para os momentos de torção  $M_{xy}$  ao longo de AB e CB.

6) Considerações:

- o exame do gráfico 1.2 revela a importância dos momentos  $M_1$  e  $M_2$  nas imediações dos cantos; é de se notar que os momentos  $M_2$  nesta região são negativos.

7.3 - Placa 2

1) Tipo de placa: placa quadrada de bordos livres apoiada puntualmente nos quatro cantos; isótropa; homogênea; altura constante.

2) Carregamentos: 1º - carga uniformemente distribuída q por unidade de área;  
2º - carga concentrada P em A (centro da placa).

3) Placa analisada: devido à simetria foi analisado um quadrante análogo ao da figura 7.1.

4) Verificação de convergência: são pesquisados a flecha e o momento fletor no ponto A para ambos os carregamentos ( $q=a=P=1.0$ ;  $D_x=D_y=D=1.0$ ;  $\psi=0.3$ ).

Malha	Nós	Carga unif. distr.	Carga conc. em A		
		w	$M_x$	w	$M_x$
(1x1)	4	0.0218	0.117	0.0347	0.290
(3x3)	16	0.0249	0.113	0.0386	0.419
(5x5)	36	0.0253	0.112	0.0390	0.471

(6x6)	49	0.0255	0.113	0.0392	0.491
(8x8)	81	0.0254	0.112	0.0391	0.520
Marcus <sup>23</sup>		0.0249	0.109	0.0388	

Tabela 7.3

5) Gráficos:

- a) gráfico 2.1 - é o gráfico para as flechas ao longo de AB;
- b) gráfico 2.2 - é o gráfico dos momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  (ao longo de AB),  $M_1$  e  $M_2$  (ao longo de AC);
- c) gráfico 2.3 - é o gráfico para os momentos de torção  $M_{xy}$  ao longo de AB e CB.

6) Considerações:

- a) o exame do gráfico 2.2 revela a importância dos momentos  $M_1$  e  $M_2$  nas imediações dos cantos (é de se notar que os momentos  $M_1$  nesta região são negativos);
- b) outro ponto de destaque, no mesmo gráfico, é o valor do momento  $M_y$  no ponto B; observe-se que para o carregamento uniformemente distribuído  $M_y$  em B é superior a seu valor no centro da placa;
- c) o gráfico 2.3 permite constatar a existência de momentos de torção nos bordos livres; isto não deve causar surpresa porque é uma consequência direta da teoria clássica de placas na qual se desprezam as deformações por esforço cortante - este assunto é estudado detalhadamente em várias referências<sup>8,23,24,25</sup> e, como se constata de sua leitura, os resultados obtidos pela teoria clássica são válidos à exceção das regiões próximas aos bordos (a distâncias da ordem da altura da placa); para mais detalhes ver o apêndice A6.

7.4 - Placa 3

- 1) Tipo de placa: placa quadrada de bordos livres apoiada puntualmente nos meios dos lados; isótropa; homogênea; altura constante.
- 2) Carregamentos: 1º - carga uniformemente distribuída q por unida-

de de área;

2º - carga concentrada  $P$  em  $A$  (centro da placa).

3) Placa analisada: devido à simetria foi analisado um quadrante análogo ao da figura 7.1.

4) Verificação de convergência: são pesquisados a flecha e o momento fletor no ponto  $A$  para ambos os carregamentos ( $q=a=P=1.0$ ;  $D_x=D_y=D=1.0$ ;  $\psi=0.3$ ).

Malha	Nós	Carga unif. distr.		Carga conc. em A	
		w	$M_x$	w	$M_x$
(1x1)	4	0.00499	0.0693	0.0142	0.242
(3x3)	16	0.00459	0.0446	0.0133	0.350
(5x5)	36	0.00456	0.0434	0.0131	0.402
(6x6)	49	0.00456	0.0432	0.0131	0.421
(8x8)	81	0.00456	0.0430	0.0131	0.451
(9x9)	100	0.00456	0.0430	0.0130	0.506

Tabela 7.4

5) Gráficos:

- gráfico 3.1 - é o gráfico para as flechas ao longo de AB, AD e CD;
- gráfico 3.2 - é o gráfico dos momentos fletores  $M_x$  (ao longo de AB e CD),  $M_1$  e  $M_2$  (ao longo de AD);
- gráfico 3.3 - é o gráfico para os momentos de torção  $M_{xy}$  ao longo de AB e CB.

6) Considerações:

- é sabido que o momento fletor torna-se infinito em pontos onde haja cargas concentradas; é interessante constatar que ocorre o mesmo fenômeno nos apoios puntuais, não obstante situarem-se nas bordas, com os momentos associados às direções paralelas às bordas em

foco (gráfico 3.2);

- b) a comparação das curvas  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$  (carga uniformemente distribuída) mostra, novamente, que o momento fletor máximo não ocorre no centro da placa e sim à meia distância de AD (excetuando-se, naturalmente, as regiões singulares);  
c) é notável o "achatamento" da curva  $\alpha_1$ .

#### 7.5 - Placa 4

- 1) Tipo de placa: placa quadrada com lados simplesmente apoiados até o meio e livres na outra metade; isótropa; homogênea; altura constante.
- 2) Carregamentos: 1º - carga uniformemente distribuída q por unidade de área;  
2º - carga concentrada P em A (centro da placa).
- 3) Placa analisada: foi a da figura 7.2, sendo a malha final (10x 10).

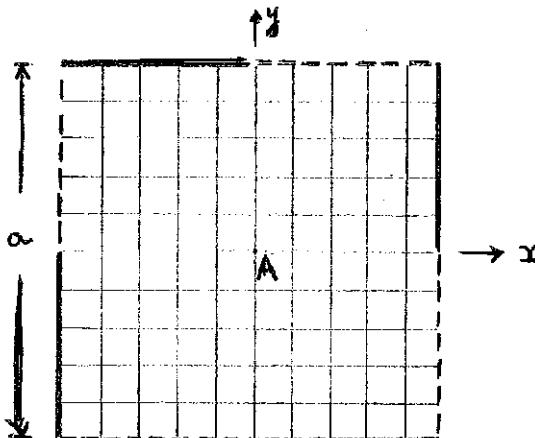


Figura 7.2

- 4) Verificação de convergência: são pesquisados a flecha e o momento fletor no ponto A para ambos os carregamentos ( $q=a=P=1.0$ ;  $D_x=D_y=D=1.0$ ;  $\nu=0.3$ ).

Malha	Nós	Carga unif. distr.		Carga conc. em A	
		w	$M_x$	w	$M_x$
(4x4)	25	0.00464	0.0526	0.0127	0.296
(6x6)	49	0.00454	0.0506	0.0124	0.338
(8x8)	81	0.00451	0.0498	0.0123	0.367
(10x10)	121	0.00450	0.0494	0.0122	0.390

Tabela 7.5

5) Gráficos:

- a) gráfico 4.1 - é o gráfico para as flechas ao longo de AB e CD;
- b) gráfico 4.2 - é o gráfico dos momentos fletores  $M_x$  (ao longo de AB e CD) e  $M_y$  (ao longo de AB);
- c) gráfico 4.3 - é o gráfico para os momentos de torção  $M_{xy}$  ao longo de AB e CB.

6) Considerações:

- a) o gráfico 4.1 mostra que as flechas ao longo de CD são pequenas comparadas às em AB; além do mais elas são aproximadamente as mesmas para ambos os carregamentos;
- b) no ponto C (gráfico 4.2) o momento  $M_x$  sofre, devido à variação das condições de apoio, uma descontinuidade; os cálculos parecem indicar que  $M_x$  tende a crescer ilimitadamente na região imediatamente à direita de C (curva  $\alpha_2$ ) para logo em seguida, à esquerda de C, cair a zero.

7.6 - Placa 5

1) Tipo de placa: placa quadrada com metade de cada lado simplesmente apoiada (parte central) e o restante livre; isótropa; homogênea; altura constante.

2) Carregamentos: 1º - carga uniformemente distribuída q por unidade de área;

2º - carga concentrada P em A (centro da placa).

3) Placa analisada: devido à simetria foi analisado um quadrante aná logo ao da figura 7.1.

4) Verificação de convergência: são pesquisados a flecha e o momento fletor no ponto A para ambos os carregamentos ( $q=a=P=1.0$ ;  $D_x=D_y=D=1.0$ ;  $\psi=0.3$ ).

Malha	Nós	Carga unif. distr.		Carga conc. em A	
		w	$M_x$	w	$M_x$
(2x2)	9	0.00458	0.0552	0.0131	0.305
(4x4)	25	0.00442	0.0517	0.0127	0.375
(6x6)	49	0.00440	0.0513	0.0126	0.417
(8x8)	81	0.00439	0.0510	0.0126	0.447
(9x9)	100	0.00439	0.0511	0.0126	0.447

Tabela 7.6

5) Gráficos:

- gráfico 5.1 - é o gráfico para as flechas ao longo de AB e AC;
- gráfico 5.2 - é o gráfico dos momentos fletores  $M_x$  (ao longo de AB),  $M_1$  e  $M_2$  (ao longo de AC);
- gráfico 5.3 - é o gráfico para os momentos de torção  $M_{xy}$  ao longo de AB e CB.

6) Considerações:

- deve-se notar a tendência que a placa tem de levantar-se nos cantos (gráfico 5.1);
- a curva  $\alpha_3$  (gráfico 5.3) foi interrompida pela impossibilidade de se determinar numéricamente o que acontece junto ao ponto C'; a comparação com a curva  $\alpha_1$  sugere que os valores permanecem finitos mas não se pode garantir a existência ou não de uma descontinuidade em C'.

7.7 - Placas 6 e 7

- 1) Tipo de placa: placas quadradas simplesmente apoiadas nos quatro lados e com reforços (ou incrustação de material diferente) conforme as figuras 7.3 e 7.4; a rigidez à flexão  $D''$  da parte achureada é 10 vezes superior à rigidez à flexão  $D'$  do restante da placa; isó - tropas;  $D'$  e  $D''$  são constantes.
- 2) Carregamentos: 1º - carga uniformemente distribuída  $q$  por unidade de área;  
2º - carga concentrada  $P$  em A (centro da placa).
- 3) Placa analisada: devido à simetria foram analisados os quadrantes indicados nas figuras 7.3 e 7.4, sendo a malha final (9x9).

13

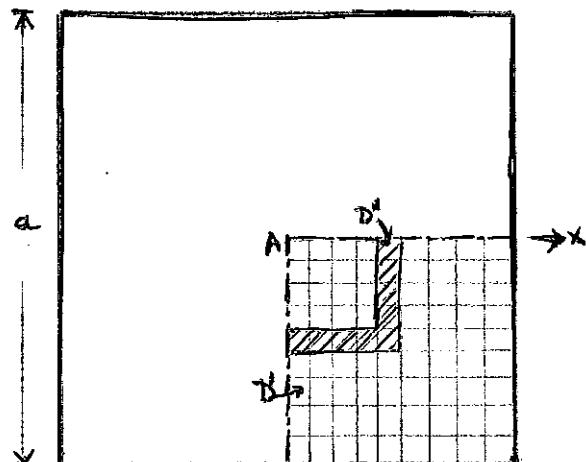


Figura 7.3

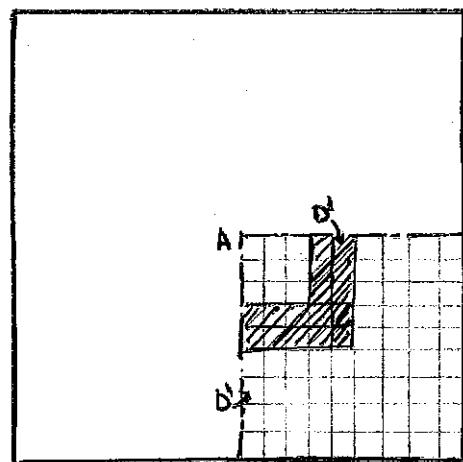


Figura 7.4

- 4) Verificação de convergência: são pesquisados a flecha e o momento fletor no ponto A para ambos os carregamentos ( $q=a=P=1.0$ ;  $D_x=D_y=D'=1.0$ ;  $D''=10.0$ ;  $\nu=0.3$ ).

Malha	Nós	Carga unif. distr.		Carga conc. em A	
		w	$M_x$	w	$M_x$
(3x3)	16	0.00282	0.0336	0.00793	0.264
(5x5)	36	0.00275	0.0319	0.00779	0.330
(6x6)	49	0.00275	0.0319	0.00778	0.330
(8x8)	81	0.00274	0.0315	0.00773	0.378
(9x9)	100	0.00274	0.0315	0.00772	0.401

Tabela 7.7 (Placa 6)

(8x8)	81	0.00211	0.0237	0.00570	0.360
(9x9)	100	0.00213	0.0238	0.00574	0.361

Tabela 7.8 (Placa 7)

5) Gráficos:

- a) gráfico 6.1 - é o gráfico das flechas ao longo de AB para as placas 6 e 7;
- b) gráfico 6.2 - é o gráfico do momento fletor  $M_x$  ao longo de AB para ambas as placas;
- c) gráfico 6.3 - é o gráfico do momento fletor  $M_y$  ao longo de AB para ambas as placas;
- d) gráfico 6.4 - é o gráfico do momento de torção  $M_{xy}$  ao longo de AB para ambas as placas.

6) Considerações:

- a) a influência dos reforços introduzidos nesta placa será estudada com mais detalhes posteriormente.

7.8 - Placa 8

- 1) Tipo de placa: placa em forma de um triângulo reto com a hipotenusa simplesmente apoiada, os catetos livres e um apoio puntual no vértice oposto à hipotenusa; isótropa; homogênea; altura constante.

- 2) Carregamentos: 1º - carga uniformemente distribuída  $q$  por unidade de área;  
 2º - carga concentrada  $P$  em A.

3) Placa analisada: devido à simetria foi analisado o triângulo reto indicado na figura 7.5, sendo a malha final ( $12 \times 12$ ).

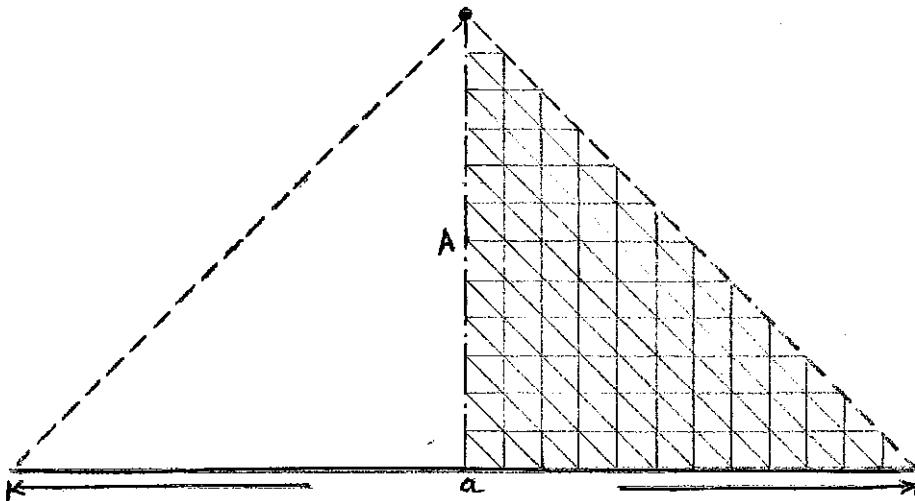


Figura 7.5

4) Verificação de convergência: são pesquisados a flecha e os momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  no ponto A para ambos os carregamentos ( $q=a=P=1.0$ ;  $D_x=D_y=D=1.0$ ;  $\nu=0.3$ ).

Malha	Nós	Carga unif. distr.			Carga conc. em A		
		w	$M_x$	$M_y$	w	$M_x$	$M_y$
(2x2)	6	0.00091	-0.0005	0.0183	0.00783	0.037	0.152
(4x4)	15	0.00111	0.00153	0.0318	0.00815	0.092	0.249
(6x6)	28	0.00114	0.00150	0.0334	0.00814	0.126	0.291
(8x8)	45	0.00115	0.00134	0.0344	0.00809	0.151	0.323
(10x10)	66	0.00116	0.00121	0.0347	0.00807	0.172	0.346
(12x12)	91	0.00116	0.00111	0.0348	0.00806	0.189	0.364

Tabela 7.9

5) Gráficos:

- a) gráfico 7.1 - é o gráfico das flechas ao longo de AB e CD para o 1º carregamento;
- b) gráfico 7.2 - é o gráfico das flechas ao longo de AB e CD para o 2º carregamento;
- c) gráfico 7.3 - é o gráfico dos momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  ao longo de AB para o 1º carregamento;
- d) gráfico 7.4 - é o gráfico dos momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  ao longo de AB para o 2º carregamento.

6) Considerações:

- a) o gráfico 7.1 mostra que as flechas, para o carregamento uniformemente distribuído, aumentam ao longo de CD à medida que se aproxima da borda; para o caso da carga concentrada (gráfico 7.2) nota-se, também, que as flechas não tendem a diminuir nas imediações da borda;
- b) nos gráficos 7.3 e 7.4 constata-se a existência de momentos  $M_x$  negativos ao longo de AB; verifica-se também que  $M_y$  não tende a anular-se nas imediações do apoio puntual A.

7.9 - Chapas 1 e 2

- 1) Tipo de chapas: chapas quadradas de bordos livres e com incrustação de material diferente (parte achurada) conforme as figuras 7.6 e 7.7; isótropas; espessuras constantes.

Para ambos os problemas foram considerados dois casos:

Módulo de elasticidade		Coeficiente de Poisson		
Chapa	Incrustação	Chapa	Incrustação	
1º caso	$E'$	$E''=2E'$	$\nu=0.15$	$\nu=0.25$
2º caso	$E'$	$E''=E'/2$	$\nu=0.15$	$\nu=0.25$

Tabela 7.10

2) Carregamento: carga uniformemente distribuída  $q$ , por unidade de área, conforme as figuras 7.6 e 7.7.

3) Chapas analisadas: devido à simetria foram analisados os quadrantes indicados nas figuras 7.6 e 7.7, sendo a malha final ( $10 \times 10$ ).

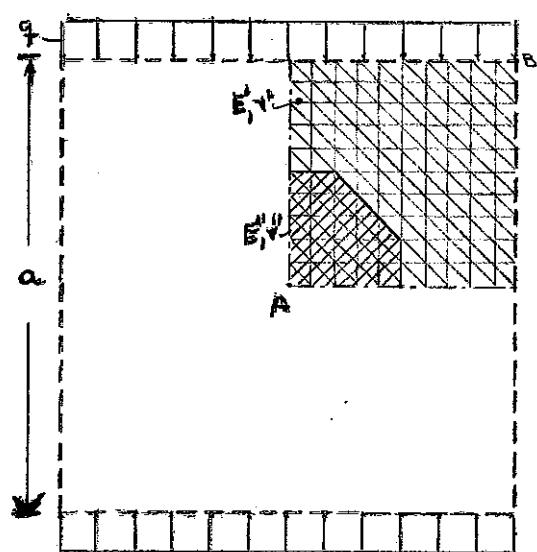


Figura 7.6 (Chapa 1)

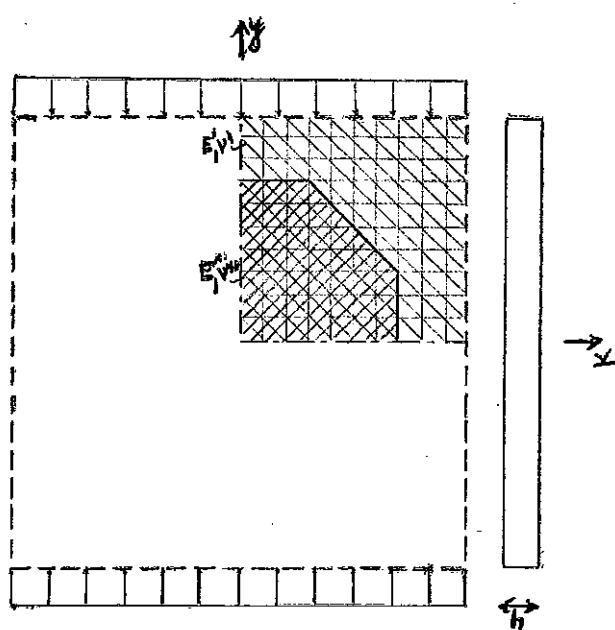


Figura 7.7 (Chapa 2)

4) Verificação de convergência: são pesquisados os deslocamentos no ponto B e as tensões normais e de cisalhamento nos pontos A e B para o 1º caso da chapa da figura 7.6 ( $q=a=h=E'=1.0$ ;  $\nu=0.15$ ;  $\nu''=0.25$ ).

Malha	Nós	$u$	$v$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
(4x4)	25	0.112	-0.489	0.0030	-0.997	-0.0030
(6x6)	49	0.114	-0.491	0.0009	-0.999	-0.0009
(8x8)	81	0.115	-0.493	-0.0007	-1.001	0.0007
(10x10)	121	0.116	-0.494	-0.0008	-1.001	0.0008

Tabela 7.11 (Ponto B)

Malha	Nós	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
(4x4)	25	-0.0894	-1.14	0.0
(6x6)	49	-0.0927	-1.13	0.0
(8x8)	81	-0.0994	-1.13	0.0
(10x10)	121	-0.0999	-1.12	0.0

Tabela 7.12 (Ponto A)

5) Gráficos:

- a) gráfico 8.1 - é o gráfico, para o 1º caso das Chapas 1 e 2, dos deslocamentos  $v$  ao longo de AB e  $u$  ao longo de BC;
- b) gráfico 8.2 - é o gráfico, para o 1º caso das Chapas 1 e 2, das tensões  $\sigma_y$  em AB e CD;
- c) gráfico 8.3 - é o gráfico, para o 1º caso das Chapas 1 e 2, das tensões  $\sigma_x$  em BA e DC;
- d) gráfico 8.4 - é o gráfico, para o 2º caso das Chapas 1 e 2, dos deslocamentos  $v$  ao longo de AB e  $u$  ao longo de BC;
- e) gráfico 8.5 - é o gráfico, para o 2º caso das Chapas 1 e 2, das tensões  $\sigma_y$  em AB e CD;
- f) gráfico 8.6 - é o gráfico, para o 2º caso das Chapas 1 e 2, das tensões  $\sigma_x$  em BA e DC.

6) Considerações:

- a) nos gráficos 8.1 e 8.4 constata-se com clareza a influência das incrustações na deformação das chapas;
- b) pode-se verificar, pelos gráficos 8.2 e 8.5, o "amaciamento" das tensões  $\sigma_y$  ao se aproximar da borda superior; note-se que o material de módulo de elasticidade superior é mais solicitado, como era de se esperar; maiores detalhes sobre as descontinuidades serão dados posteriormente;
- c) os gráficos 8.3 e 8.6 também mostram o "amaciamento" das tensões  $\sigma_x$  ao se aproximar da borda lateral; é notável a variação quase retilínea de  $\sigma_x$  na parte superior de AB;
- d) as trajetórias das tensões principais são alteradas pela existênc

cia da incrustação; verifica-se que elas são "atraídas" ou "repelidas" pela incrustação se seu módulo de elasticidade é respectivamente maior ou menor que o do meio elástico.

#### 7.10 - Descontinuidades nas tensões e momentos causadas por incrustações (reforços)

Como se pode verificar em vários gráficos, a existência de incrustações (reforços) produz descontinuidades em algumas grandezas. A seguir estuda-se este fenômeno; considerem-se, então, os meios elásticos indicados na figura 7.8, onde também estão representados dois elementos adjacentes à superfície de descontinuidade.

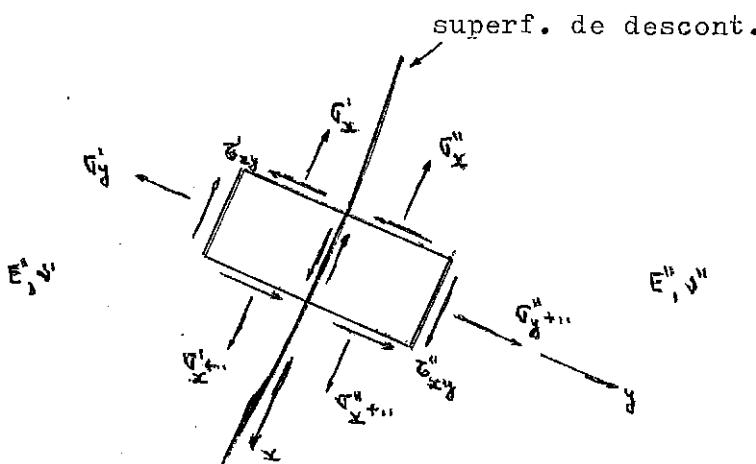


Figura 7.8

Naturalmente, quando o tamanho dos elementos representados na figura 7.8 reduz-se infinitamente, são válidas as equações:

$$\sigma'_y = \sigma''_y = \sigma_y \quad (7.1)$$

$$\tau'_{xy} = \tau''_{xy} = \tau_{xy} \quad (7.2)$$

$$\varepsilon'_x = \varepsilon''_x \quad (7.3)$$

Mas, em problemas de estados planos de tensões

$$\frac{\epsilon_x'}{E'} = \frac{\sigma_x'}{E'} - \nu' \frac{\sigma_y'}{E'} \quad (7.4)$$

e

$$\frac{\epsilon_x''}{E''} = \frac{\sigma_x''}{E''} - \nu'' \frac{\sigma_y''}{E''} \quad (7.5)$$

As equações acima permitem escrever

$$\frac{\sigma_x'}{E'} - \nu' \frac{\sigma_y'}{E'} = \frac{\sigma_x''}{E''} - \nu'' \frac{\sigma_y''}{E''}$$

ou

$$\frac{\sigma_x'}{E'} = \frac{\sigma_x'' E'}{E''} + \sigma_y (\nu' - \nu'' \frac{E'}{E''}) \quad (7.6)$$

Conclui-se, pois, que  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  não sofrem descontinuidade; porém, o mesmo não acontece com  $\sigma_x$  sendo (7.6) a equação que relaciona  $\sigma_x'$  e  $\sigma_x''$ .

Pode-se fazer um estudo análogo para placas; considere-se, então, a figura 7.9 onde estão representados os dois meios elásticos com a respectiva superfície de descontinuidade e dois elementos adjacentes a ela.

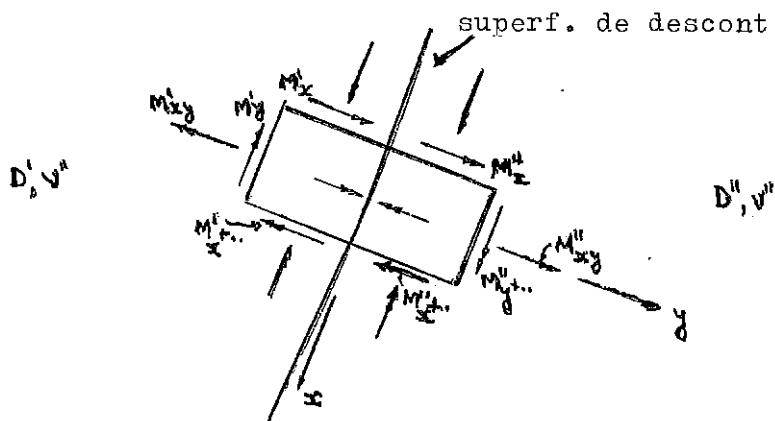


Figura 7.9

Ao se reduzir infinitamente o tamanho dos elementos representados na figura 7.9 verificam-se as equações:

$$M_y' = M_y'' = M_y \quad (7.7)$$

$$M_{xy}' = M_{xy}'' = M_{xy} \quad (7.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)' = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)'' \quad (7.9)$$

Como se sabe

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \psi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

Destes valores obtém-se

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{12}{Eh^3} (-M_x' + \psi M_y') \quad (7.10)$$

As equações (7.7), (7.9) e (7.10) permitem então escrever

$$\frac{12}{E'h'^3} (-M_x' + \psi M_y') = \frac{12}{E''h''^3} (-M_x'' + \psi'' M_y'')$$

de onde se tira

$$M_x' = \frac{E'h'^3}{E''h''^3} M_x'' + \left(\psi' - \frac{E'h'^3}{E''h''^3} \psi''\right) M_y'' \quad (7.11)$$

Verifica-se, assim, que os momentos  $M_y$  e  $M_{xy}$  não sofrem descontinuidade mas que  $M_x$  sofre, sendo (7.11) a equação que relaciona  $M_x'$  e  $M_x''$ .

As equações (7.6) e (7.11) foram utilizadas para se conferirem os resultados obtidos e representados nos gráficos; a concor-

dância foi absoluta.

Desta forma as descontinuidades que se verificam nos momentos  $M_y$  (gráfico 6.3), nas tensões  $\sigma_y$  (gráficos 8.2 e 8.5) e nas tensões  $\sigma_x$  (gráficos 8.3 e 8.6) estão em pleno acôrdo com a teoria.

#### 7.11 - Considerações adicionais sobre as placas reforçadas 6 e 7

O objetivo da inclusão das placas 6 e 7 neste trabalho foi, óbviamente, observar os efeitos causados pela inclusão dos reforços indicados; algumas comparações entre estas placas e a placa análoga sem reforços (Placa 1) devem, portanto, ser feitas.

	Flechas no centro				M. fl. no centro	
	Carga un. distr.		Carga conc.		Carga un. dis.	
	w	Redução	w	Redução	$M_x$	Redução
Placa 1	0.00406	-	0.01160	-	0.0479	-
Placa 6	0.00274	33%	0.00772	33%	0.0315	34%
Placa 7	0.00213	48%	0.00574	50%	0.0238	50%

Tabela 7.13

O exame da tabela 7.13 revela que a introdução dos reforços provoca uma substancial redução das flechas e momentos fletores no centro da placa aliviando, consequentemente, uma região normalmente sobrecarregada.

Momentos fletores  $M_x$

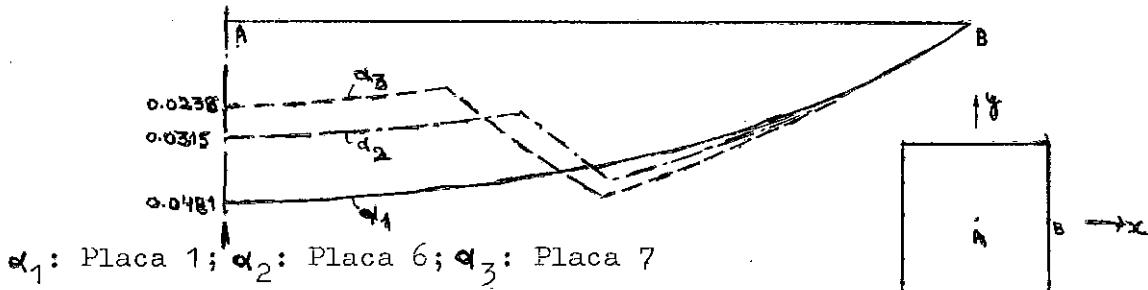


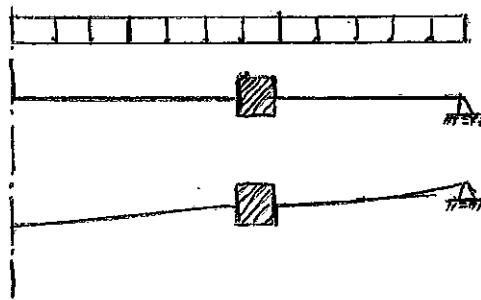
Figura 7.10

Na figura 7.10 pode-se observar a alteração sofrida pelo momento fletor  $M_x$ ; esta figura foi obtida superpondo os valores de  $M_x$  retirados dos gráficos 1.2 e 6.2.

Como se pode verificar  $M_x$  sofre uma redução substancial na região central; isto, evidentemente, reflete a existência dos reforços. Constatata-se examinando o gráfico 6.3 que estes reforços são bastante solicitados e absorvem grande parte da carga.

Deve-se ainda anotar, como indica o gráfico 6.2, a possibilidade de momentos fletores negativos no interior das placas 6 e 7. Isto não deve constituir surpresa porque as regiões centrais destas placas são, na realidade, placas com apoios elásticos (o reforço); se a rigidez deste reforço é infinita a região central constitui uma placa engastada (figura 7.11).

superf. média inderf.



superf. média defor.

Figura 7.11

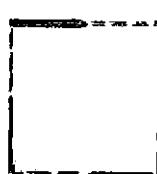
#### 7.12 - A influência dos apoios nas flechas e momentos em placas da mesma natureza

Dentre as diversas placas estudadas podem-se formar dois grupos de placas que são, de certa forma, análogos:

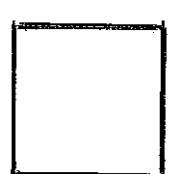
1º grupo



Placa 2

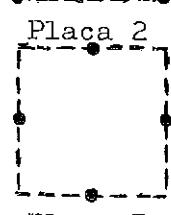


Placa 4



Placa 1

2º grupo



Placa 3



Placa 5



Placa 1

A tabela 7.14 permite a comparação de alguns valores:

Flechas no centro				M. fl. no centro		
Carga unif. distr.		Carga conc.		Carga un. distr.		
	w	Acréscimo	w	Acréscimo	M <sub>x</sub>	Acréscimo
Placa 1	0.00406	-	0.0116	-	0.0479	-
Placa 4	0.00450	11%	0.0122	5.2%	0.0494	3.4%
Placa 2	0.00540	526%	0.0391	237%	0.1120	134%

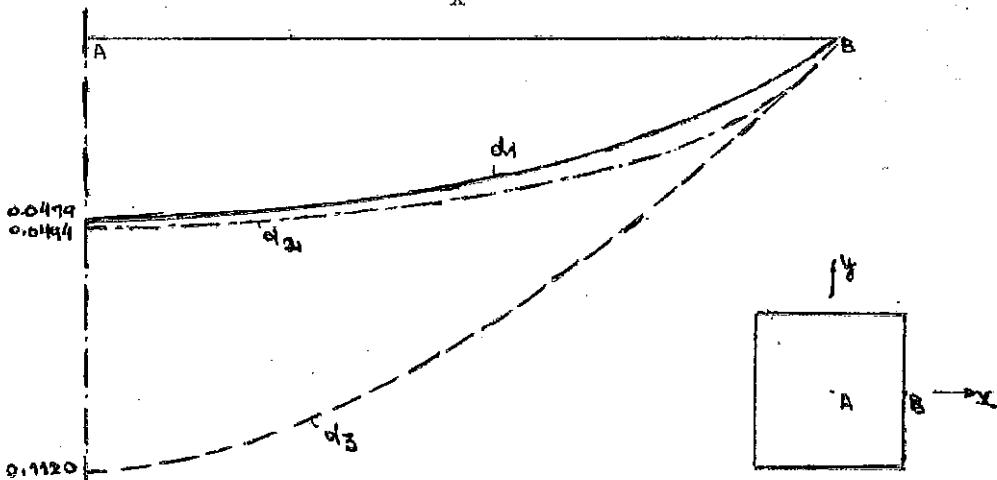
Placa 1	0.00406	-	0.0116	-	0.0479	-
Placa 5	0.00439	8.1%	0.0126	8.6%	0.0510	6.5%
Placa 3	0.00456	12%	0.0130	12%	0.0430	-10%

Tabela 7.14

É notável constatar que em ambos os grupos as variações tanto nas flechas como nos momentos do centro são pequenas, à exceção da placa apoiada nos quatro cantos; esta última é, realmente, uma placa bastante desfavorável.

Nas figuras 7.12 e 7.13 são superpostos os valores do momento  $M_x$  ao longo de AB para as três placas de cada grupo:

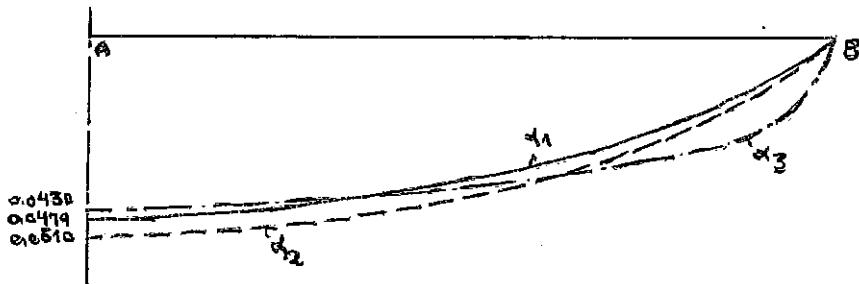
Momentos fletores  $M_x$



$\alpha_1$ : Placa 1;  $\alpha_2$ : Placa 4;  $\alpha_3$ : Placa 2

Figura 7.12

Momentos fletores  $M_x$



$d_1$ : Placa 1;  $d_2$ : Placa 5;  $d_3$ : Placa 3

Figura 7.13

Novamente verificamos, para o momento  $M_x$ , apenas pequenas variações causadas pelas diferenças de apoios. Para o momento  $M_y$  a concordância não é tão boa, como se pode comprovar pelos gráficos.

Todavia, é importante observar, examinando os gráficos das Placas 4 e 5, que seu comportamento na região central difere pouco do da placa simplesmente apoiada; somente ao se aproximar das bordas as diferenças se acentuam.

Naturalmente, ao se aumentarem os apoios destas placas a diferença diminui gradativamente; pode-se concluir, portanto, que pequenas descontinuidades nos apoios de uma placa simplesmente apoiada não alteram de modo substancial seu comportamento: é o caso das placas da figura 7.14.

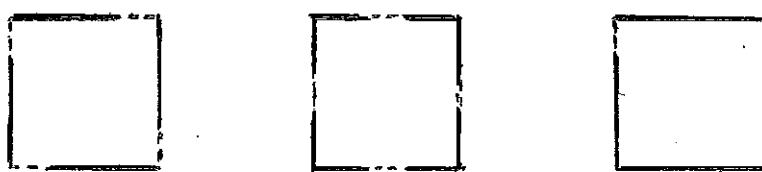


Figura 7.14

## CONCLUSÃO

Na introdução dêste trabalho disse-se que ele seria constituído essencialmente de três partes:

- a) os fundamentos teóricos;
- b) um programa automático;
- c) aplicações do método ao estudo de problemas inéditos de elasticidade plana e placas.

Examinando-se o conteúdo do trabalho e reportando-se a tudo o que já foi dito, conclui-se que há pouca coisa a se dizer a este ponto que possa ter o caráter de "conclusões".

Por exemplo, os comentários sobre os diversos problemas estudados foram feitos à altura de sua apresentação e sua natureza era, essencialmente, de "conclusões".

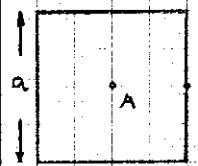
Resta ressaltar, o que já deve ser óbvio, que o Método dos Elementos Finitos, com o auxílio de um programa inteiramente automático abre novas fronteiras à análise estrutural, como se pode comprovar pelos problemas estudados.

Com relação ao programa automático, considerando-se a simplicidade do seu uso e os tempos de computação anotados (não relacionados por não apresentarem maior interesse face à diversificação dos sistemas de computação existentes), acredita-se ter sido desenvolvido o que se considera um "programa eficiente".

Como comentário final o autor deseja deixar claro que ao longo do desenvolvimento dêste trabalho foi tomando consciência, cada vez mais, da importância da área que se propuzera estudar; é sua intenção não só fazer estudos adicionais mas, principalmente, divulgar os novos métodos de análise estrutural - isto dá a melhor medida das suas próprias conclusões sobre o assunto em geral.

G R A F I C O S

DESLOCAMENTO TRANSVERSAL  $w$  ( $\downarrow = 0.3$ )



CARGA UNIF. DISTR.      CARGA CONC. EM A  
 $w = (\alpha_1 \times 10^{-3}) qa^4 / D$        $w = (\alpha_2 \times 10^{-3}) Pa^2 / D$

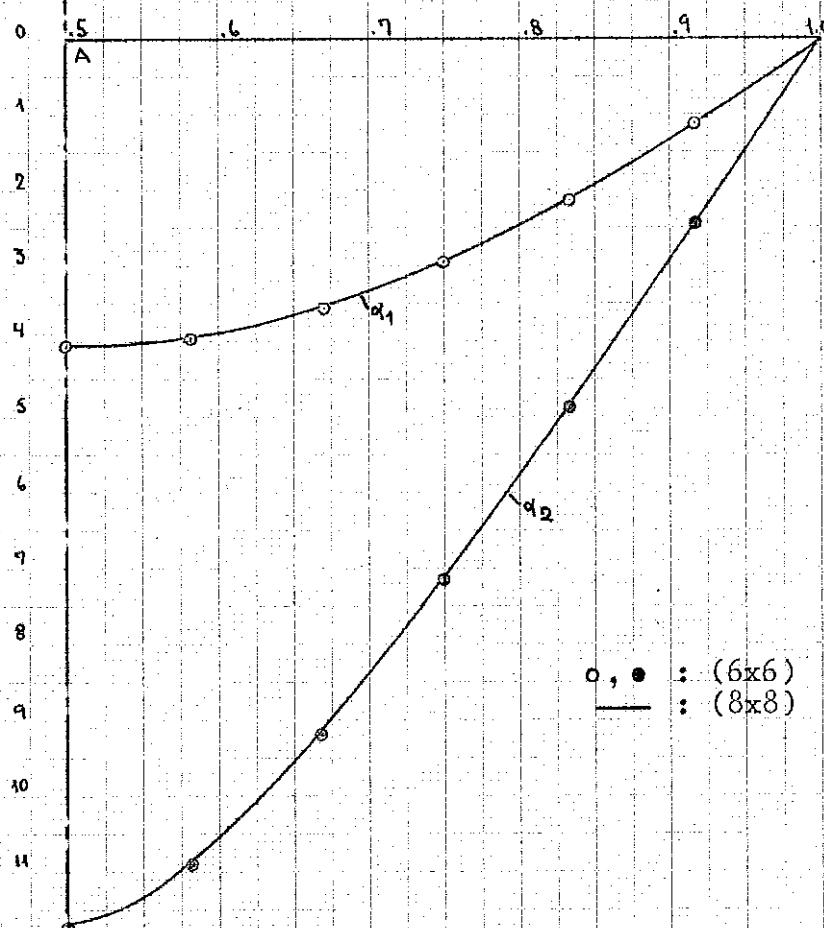
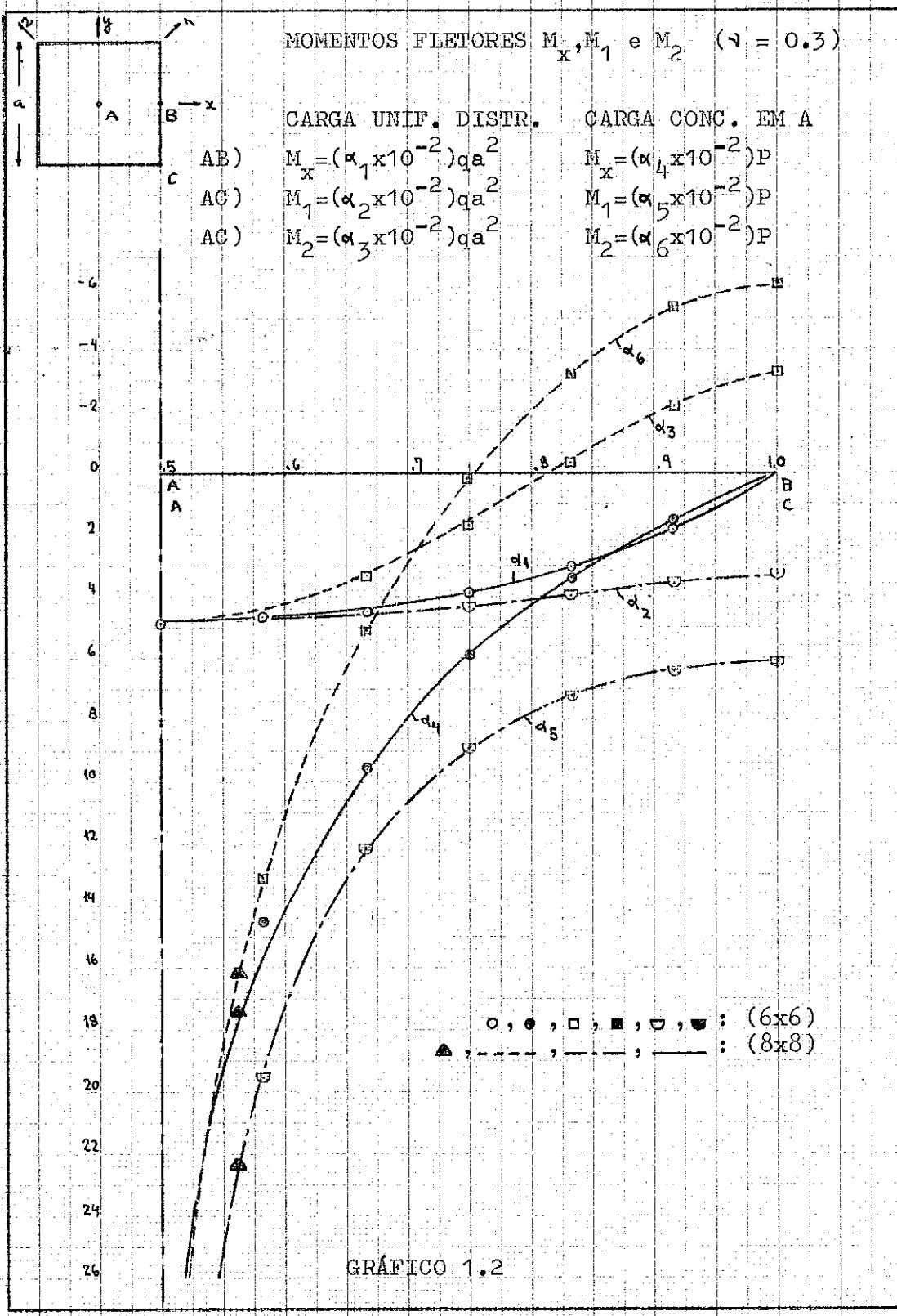
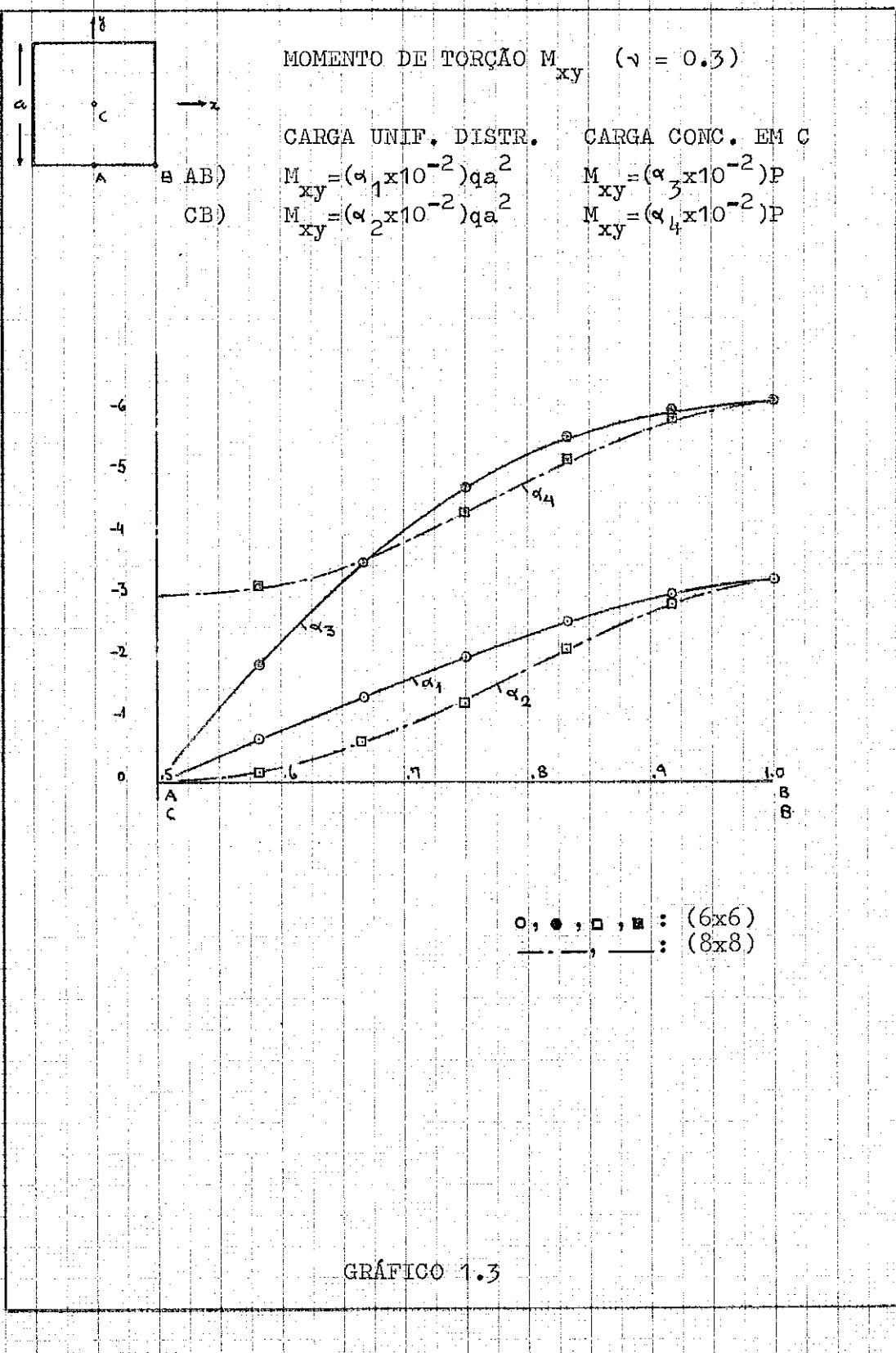


GRÁFICO 1.1





DESLIGAMENTO TRANSVERSAL  $w$  ( $\nu = 0.3$ )

CARGA UNIF. DISTR.

$$w = (\alpha_1 \times 10^{-2}) q a^4 / D$$

CARGA CONC. EM A

$$w = (\alpha_2 \times 10^{-2}) P a^2 / D$$

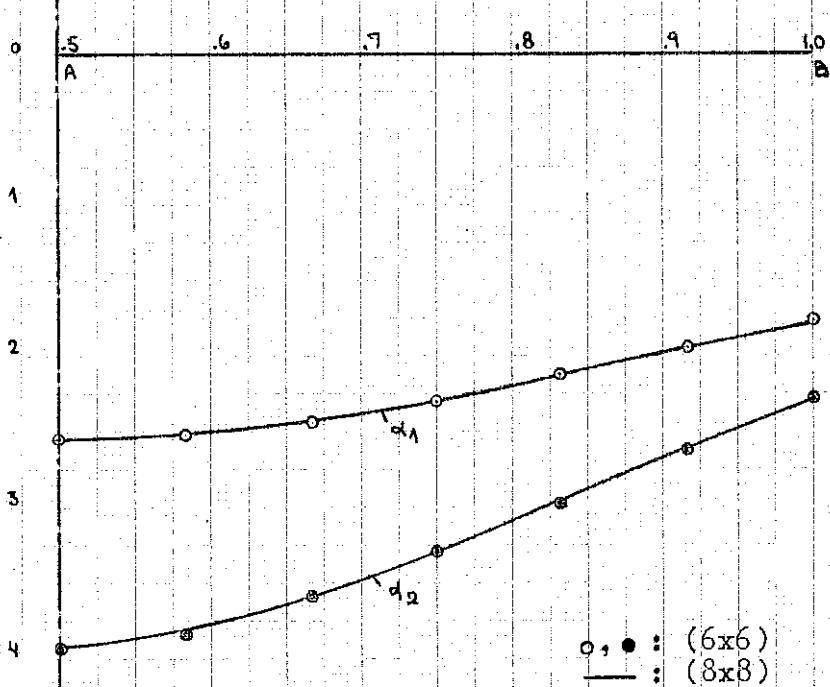


GRÁFICO 2.1

MOMENTOS FLETORES  $M_x, M_y, M_1$  e  $M_2$  ( $\gamma = 0.3$ )

CARGA UNIF. DIS.

$$AB) \quad M_x = (\alpha_1 \times 10^{-2}) qa^2$$

$$AB) \quad M_y = (\alpha_2 \times 10^{-2}) qa^2$$

$$AC) \quad M_1 = (\alpha_3 \times 10^{-2}) qa^2$$

$$AC) \quad M_2 = (\alpha_4 \times 10^{-2}) qa^2$$

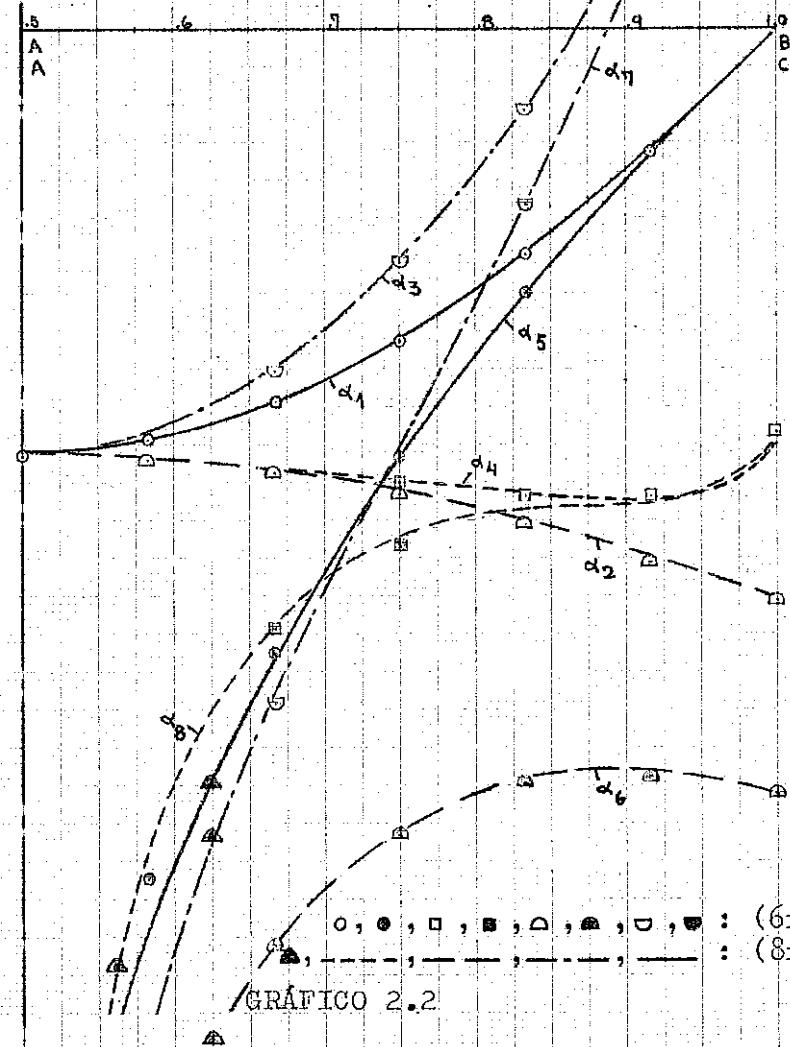
CARGA CONC. EM A

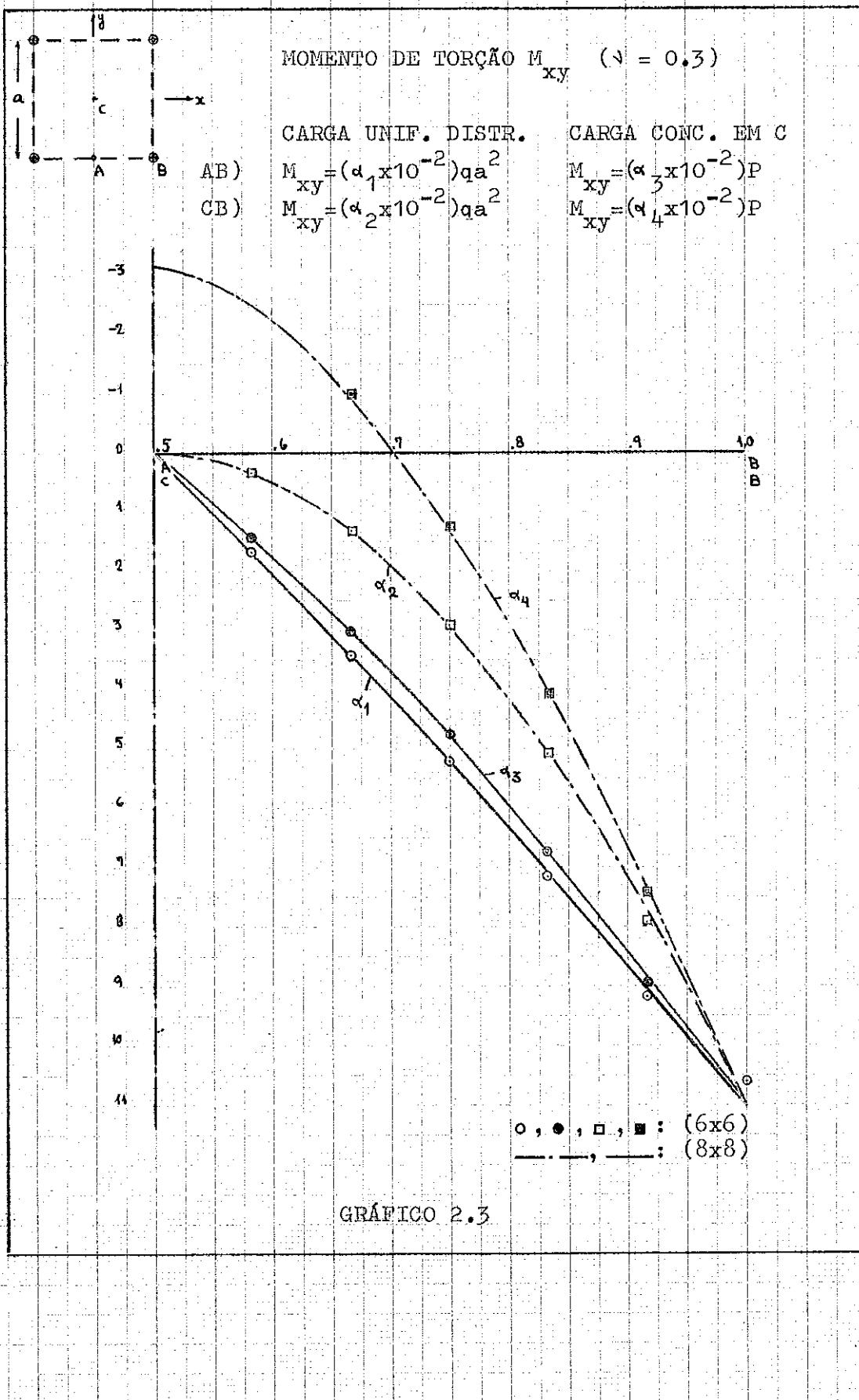
$$M_x = (\alpha_5 \times 10^{-2}) P$$

$$M_y = (\alpha_6 \times 10^{-2}) P$$

$$M_1 = (\alpha_7 \times 10^{-2}) P$$

$$M_2 = (\alpha_8 \times 10^{-2}) P$$





DESLOCAMENTO TRANSVERSAL  $w$  ( $\gamma = 0.3$ )

CARGA UNIF. DISTR.

$$w_{AB} = (\alpha_1 \times 10^{-3}) q a^4 / D$$

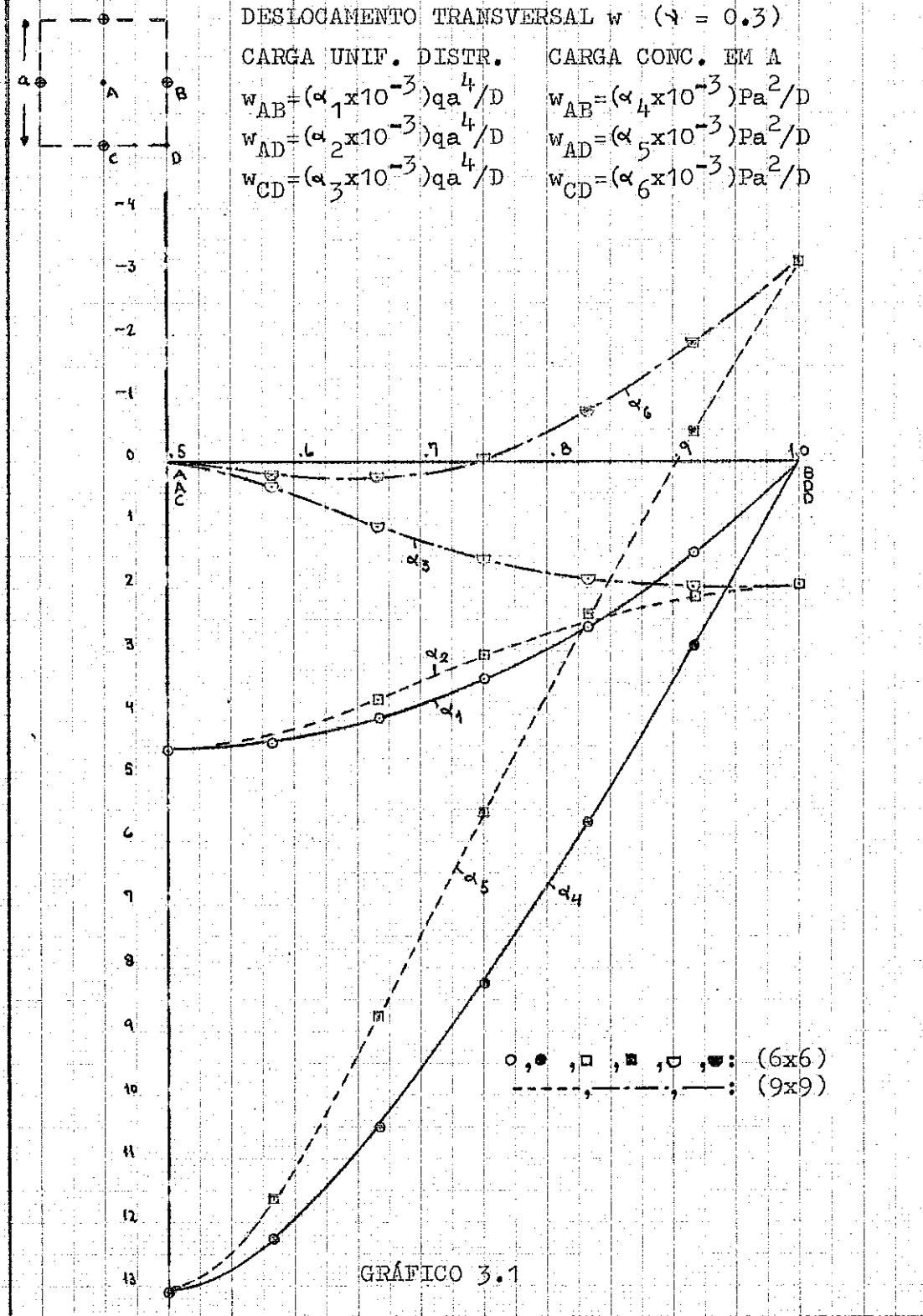
$$w_{AD} = (\alpha_2 \times 10^{-3}) q a^4 / D$$

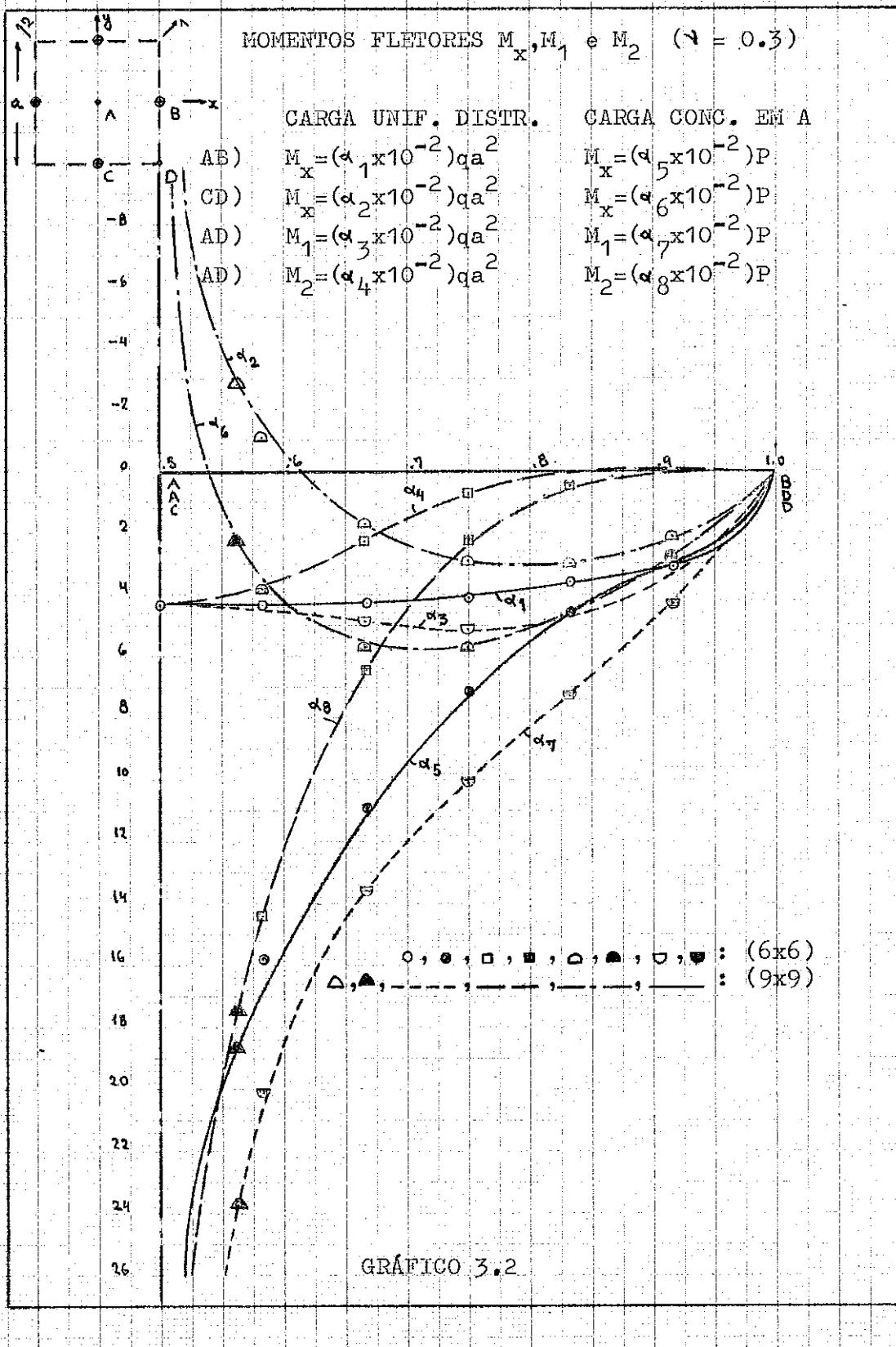
$$w_{CD} = (\alpha_3 \times 10^{-3}) q a^4 / D$$

$$w_{AB} = (\alpha_4 \times 10^{-3}) Pa^2 / D$$

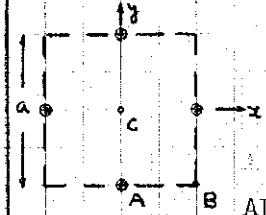
$$w_{AD} = (\alpha_5 \times 10^{-3}) Pa^2 / D$$

$$w_{CD} = (\alpha_6 \times 10^{-3}) Pa^2 / D$$





MOMENTO DE TORÇÃO  $M_{xy}$  ( $\alpha = 0.3$ )



CARGA UNIF. DISTR.

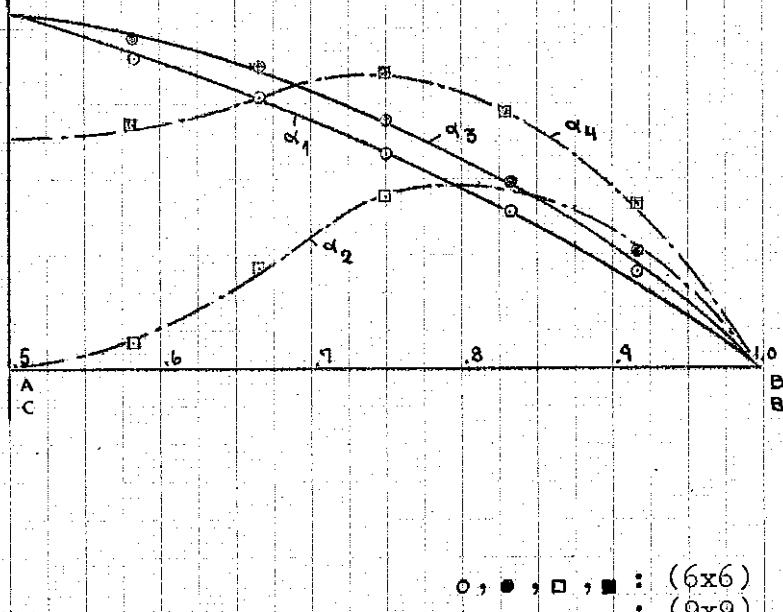
$$AB) \quad M_{xy} = (\alpha_1 \times 10^{-2}) qa^2$$

$$CB) \quad M_{xy} = (\alpha_2 \times 10^{-2}) qa^2$$

CARGA CONC. EM C

$$M_{xy} = (\alpha_3 \times 10^{-2}) P$$

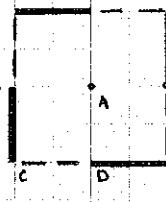
$$M_{xy} = (\alpha_4 \times 10^{-2}) P$$



$\circ, \blacksquare, \square, \blacksquare : (6 \times 6)$   
 $-, - : (9 \times 9)$

GRÁFICO 3.3

DESLOCAMENTO TRANSVERSAL  $w$  ( $\downarrow = 0.3$ )



CARGA UNIF. DISTR.

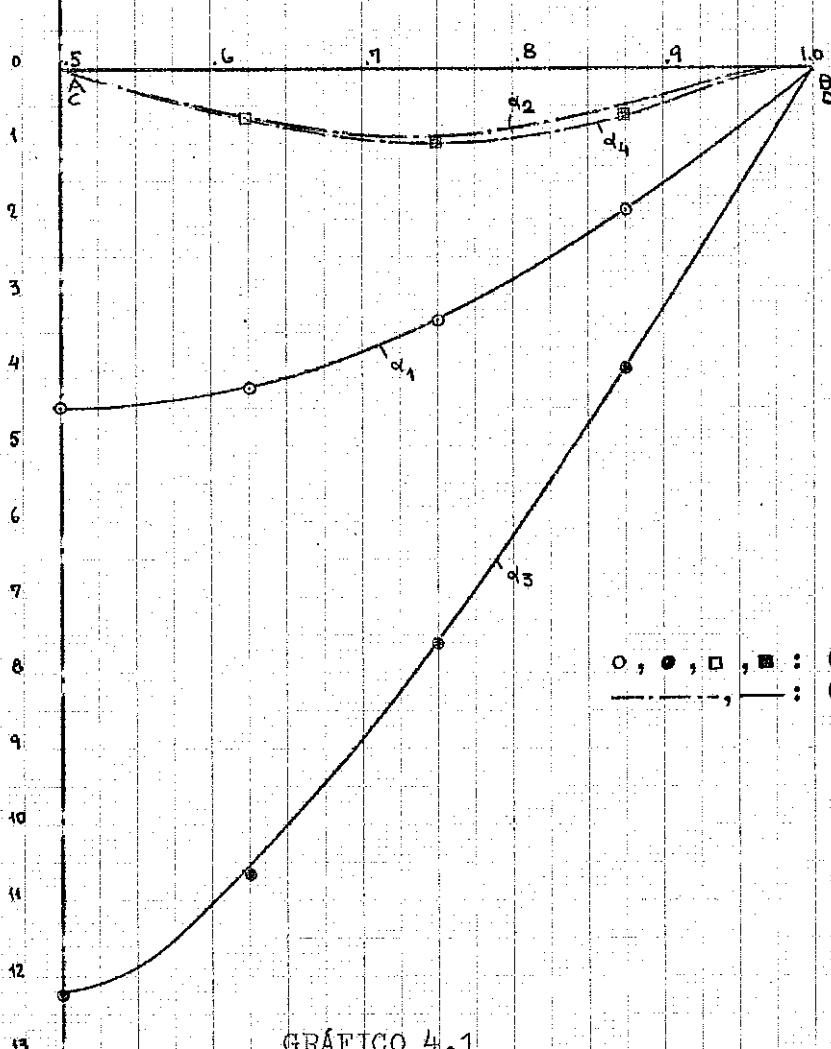
$$w_{AB} = (\alpha_1 \times 10^{-3}) qa^4 / D$$

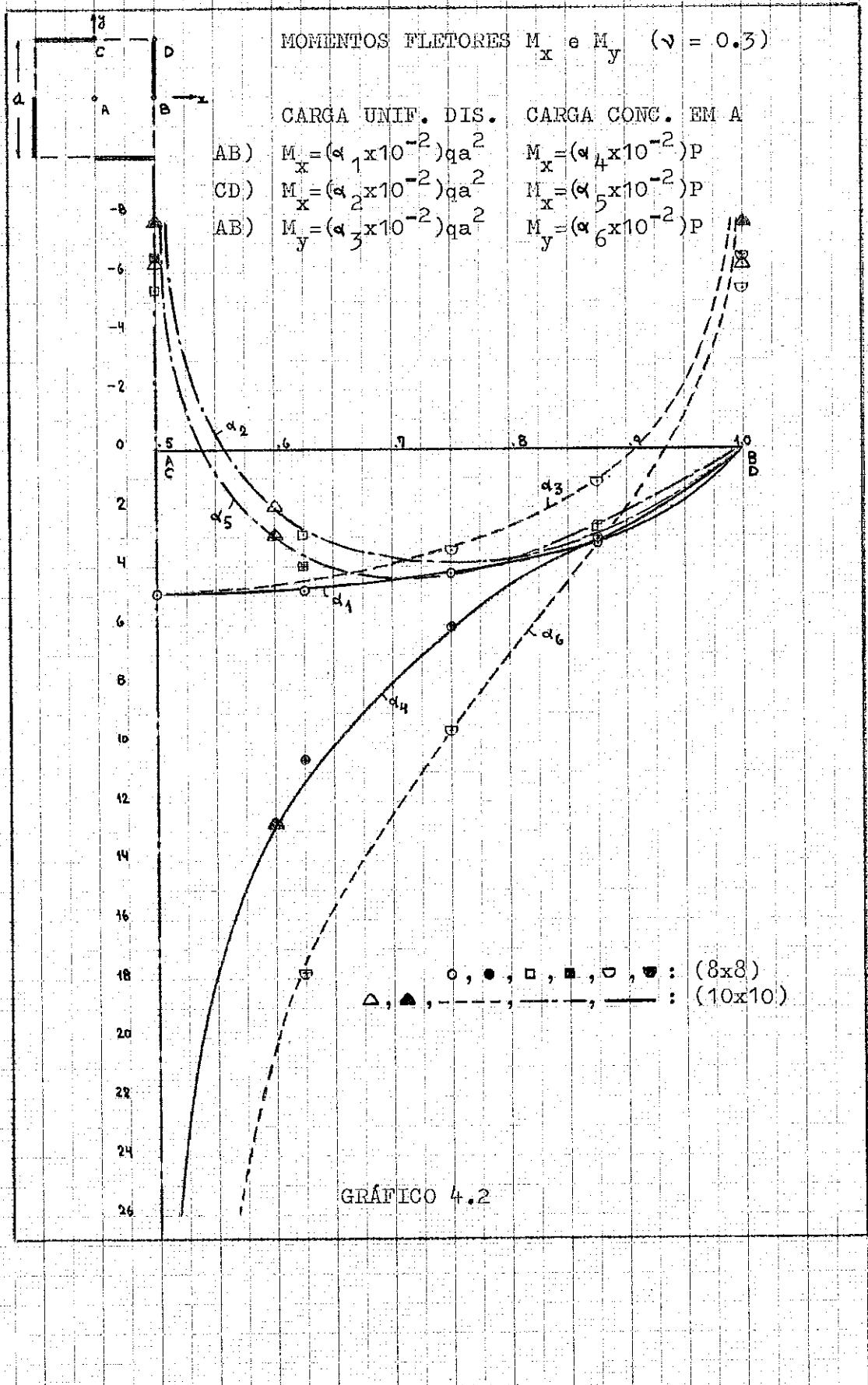
$$w_{CD} = (\alpha_2 \times 10^{-3}) qa^4 / D$$

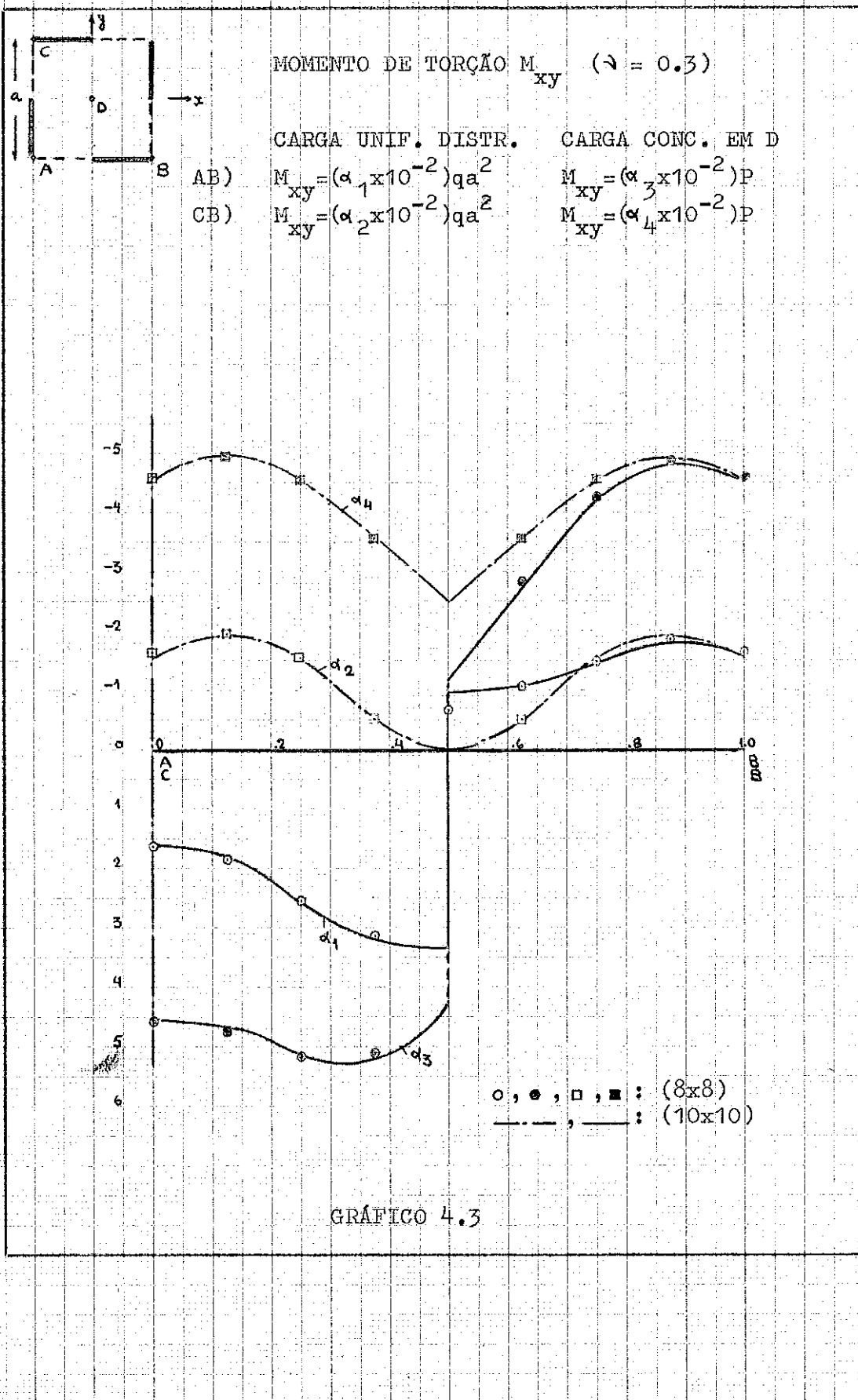
CARGA CONC. EM A

$$w_{AB} = (\alpha_3 \times 10^{-3}) Pa^2 / D$$

$$w_{CD} = (\alpha_4 \times 10^{-3}) Pa^2 / D$$





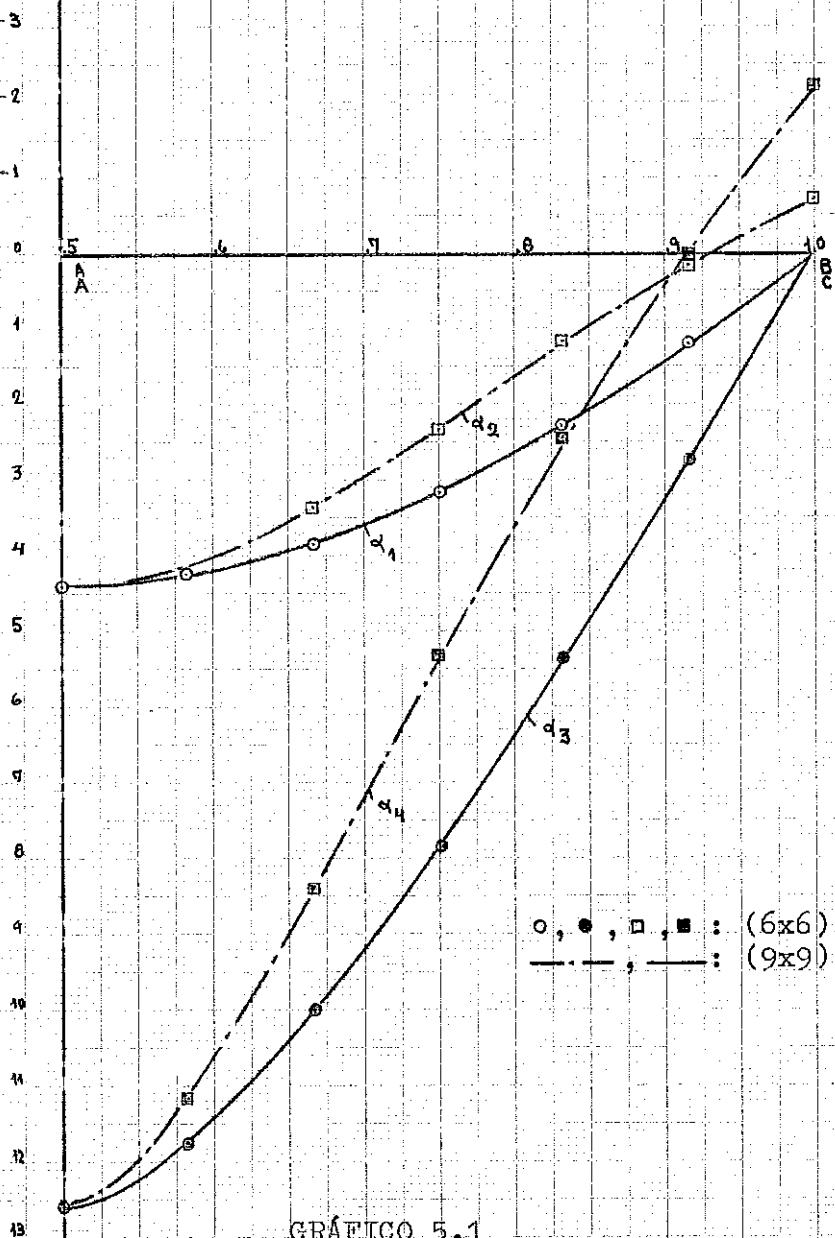


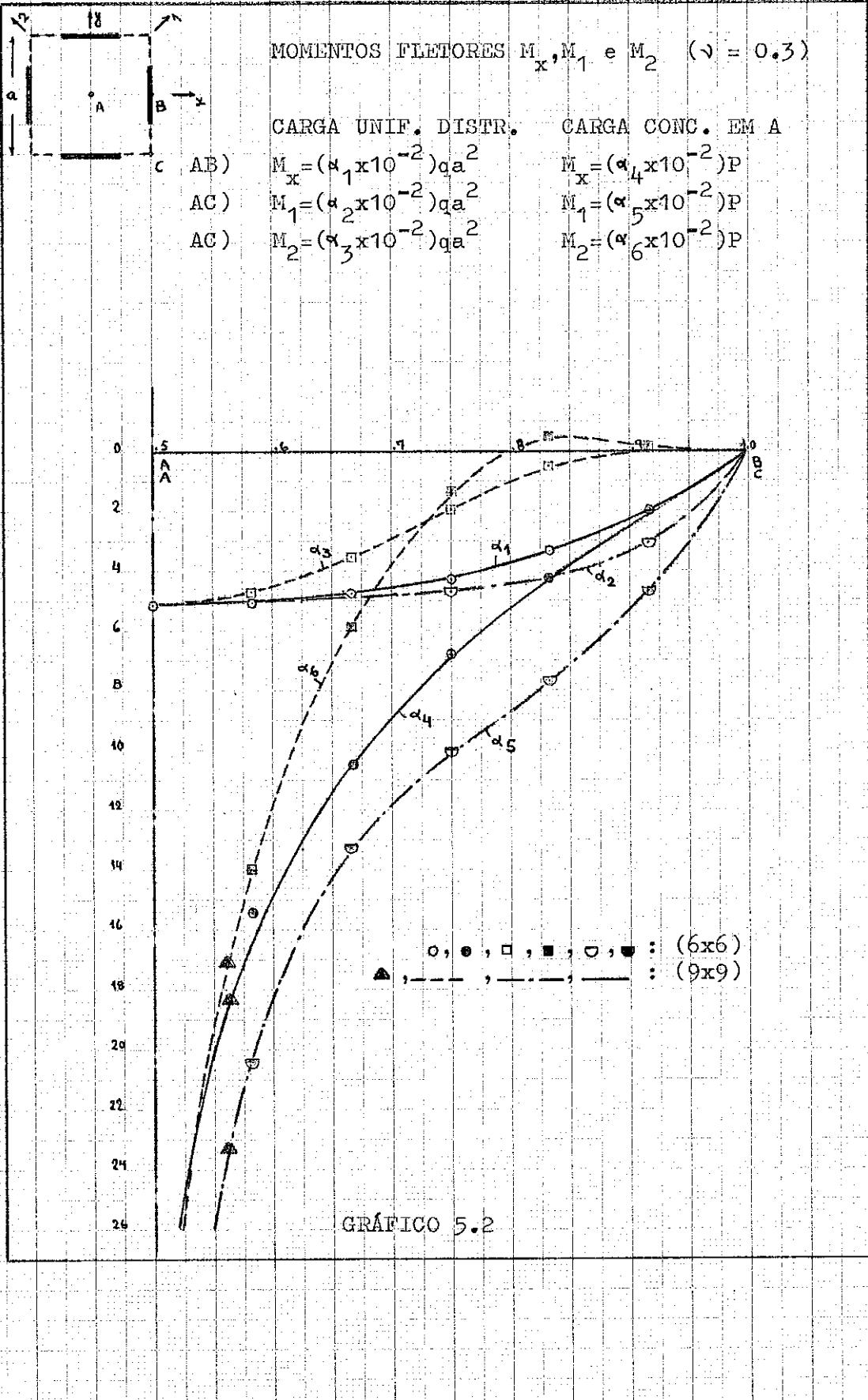
DESLOCAMENTO TRANSVERSAL  $w$  ( $\lambda = 0.3$ )

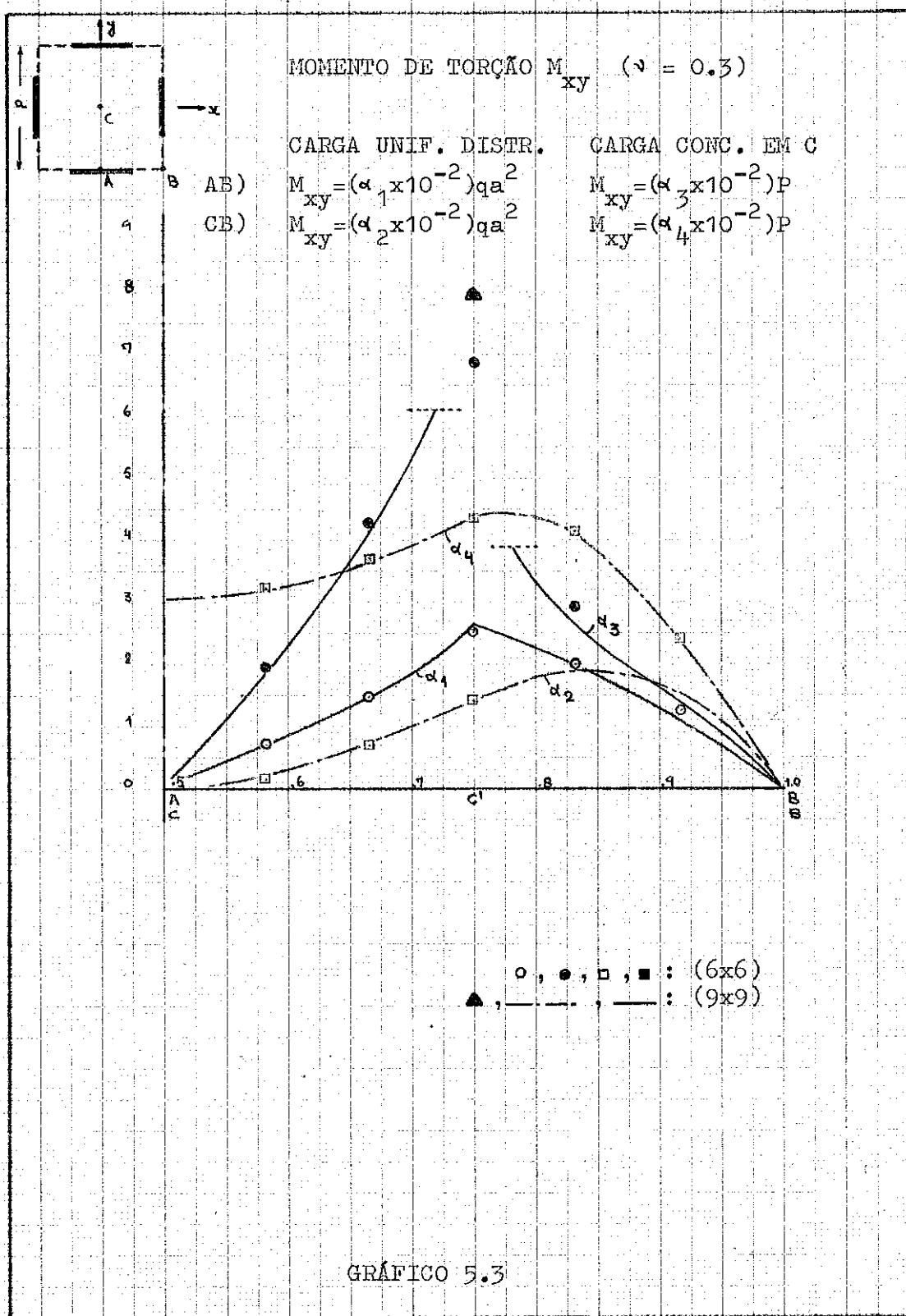
CARGA UNIF. DISTR.      CARGA CONC. EM A

$$w_{AB} = (\alpha_1 \times 10^{-3}) qa^4 / D \quad w_{AB} = (\alpha_3 \times 10^{-3}) Pa^2 / D$$

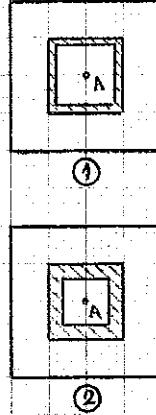
$$w_{AC} = (\alpha_2 \times 10^{-3}) qa^4 / D \quad w_{AC} = (\alpha_4 \times 10^{-3}) Pa^2 / D$$







DESLOCAMENTO TRANSVERSAL  $w$  ( $\nu = 0.3$ ;  $D' = 10D'$ )



CARGA UNIF. DISTR.

$$w^1 = (\alpha_1 \times 10^{-3}) qa^4 / D'$$

$$w^2 = (\alpha_2 \times 10^{-3}) qa^4 / D'$$

CARGA CONC. EM A

$$w^1 = (\alpha_3 \times 10^{-3}) Pa^2 / D'$$

$$w^2 = (\alpha_4 \times 10^{-3}) Pa^2 / D'$$

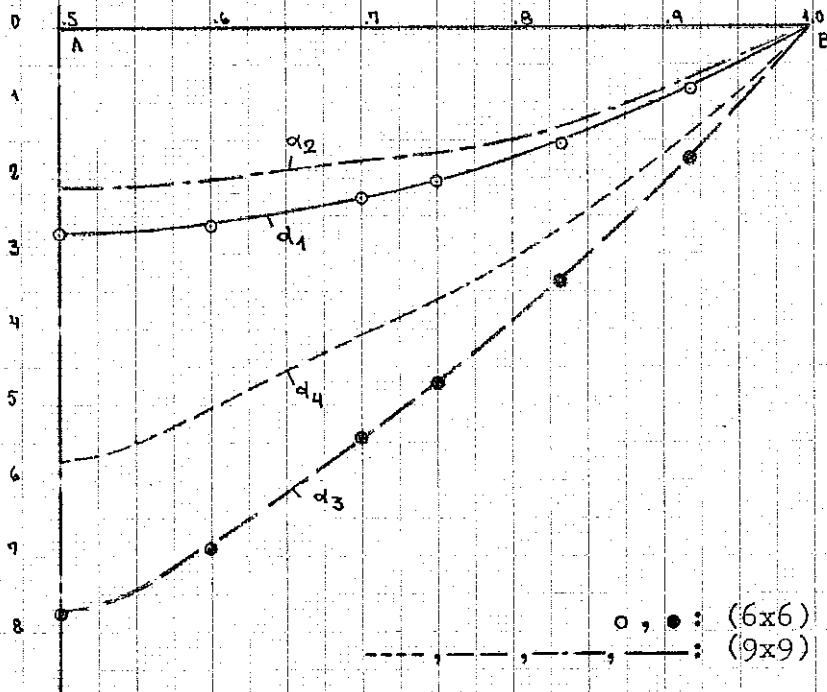
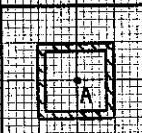


GRÁFICO 6.1

16

MOMENTO FLETOR  $M_x$  ( $\gamma = 0,5$ ;  $D'' = 10D'$ )



B →

①

CARGA UNIF. DISTR.

$$M_x^1 = (\gamma_1 \times 10^{-2}) q a^2$$

$$M_x^2 = (\gamma_2 \times 10^{-2}) q a^2$$

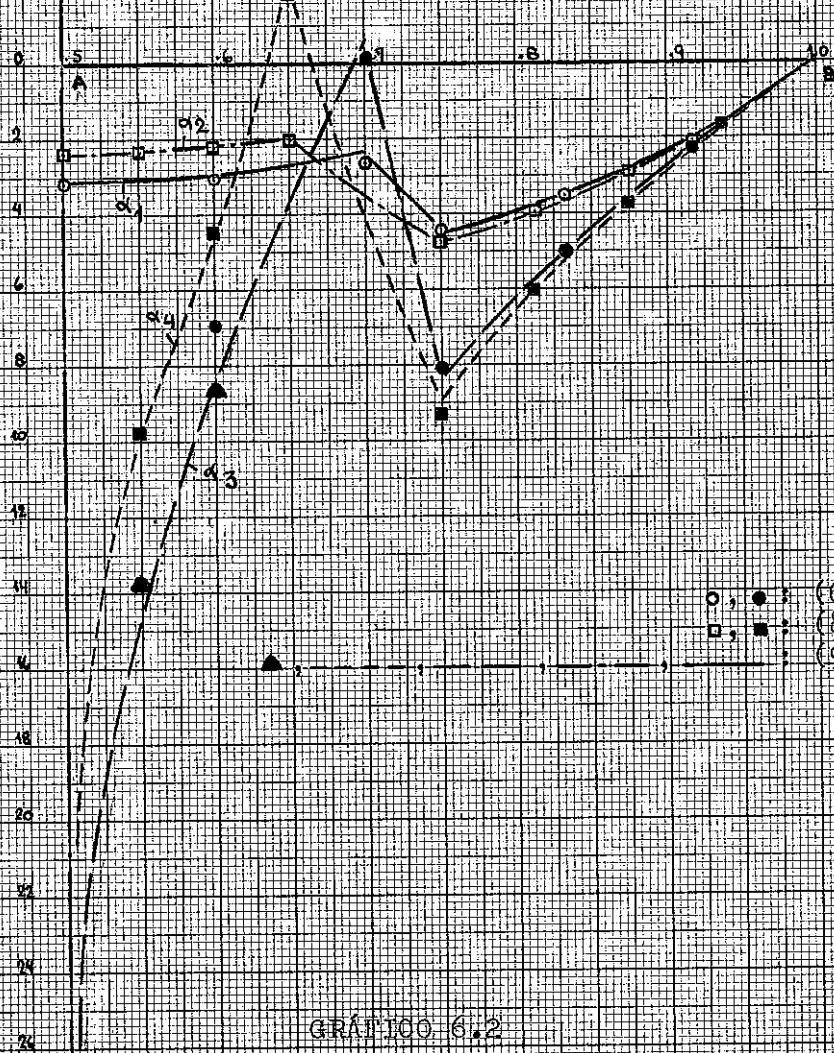


②

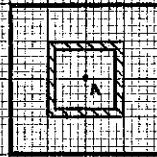
CARGA CONC. EM A

$$M_x^3 = (\gamma_3 \times 10^{-2}) P$$

$$M_x^4 = (\gamma_4 \times 10^{-2}) P$$



13



MOMENTO FLETOR  $M_y$

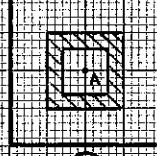
( $\gamma = 0.3$ ;  $D'' = 10D'$ )

①

CARGA UNIF. DISTR.

$$M_y^1 = (\alpha_1 \times 10^{-2}) q a^2$$

$$M_y^2 = (\alpha_2 \times 10^{-2}) q a^2$$



②

CARGA CONC. EM A

$$M_y^1 = (\alpha_3 \times 10^{-2}) P$$

$$M_y^2 = (\alpha_4 \times 10^{-2}) P$$

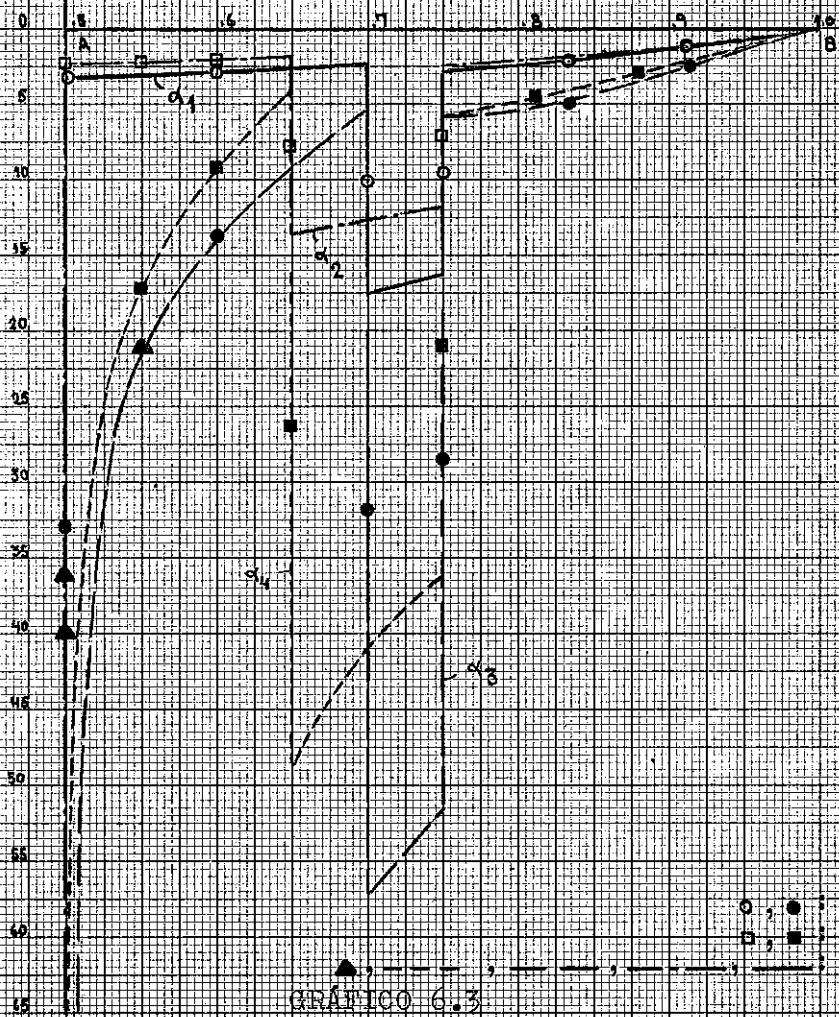


GRÁFICO 6.3

13

MOMENTO DE TORÇÃO  $M_{xy}$  ( $s = 0.3$ ;  $D = 10D'$ )



①

CARGA UNIF. DISTR.

$$M_{xy}^1 = \left(\frac{a}{2} \times 10^{-2}\right) qa^2$$

$$M_{xy}^2 = \left(\frac{a}{2} \times 10^{-2}\right) qa^2$$

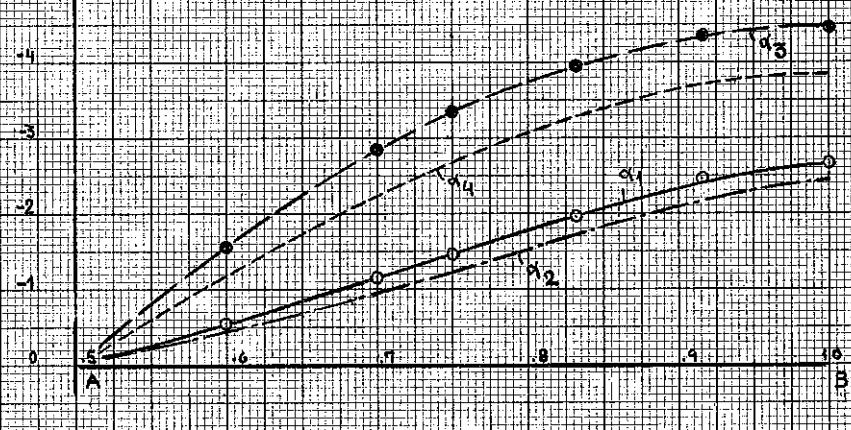


②

CARGA CONC. EM C

$$M_{xy}^1 = \left(\frac{a}{3} \times 10^{-2}\right) P$$

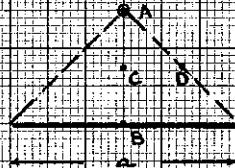
$$M_{xy}^2 = \left(\frac{a}{4} \times 10^{-2}\right) P$$



○ : (6x6)  
● : (9x9)

GRÁFICO 6.1

DESLIGAMENTO TRANSVERSAL  $w$  ( $\gamma = 0.3$ )



CARGA UNIF. DISTR.

$$w_{AB} = (\alpha_1 \times 10^{-2}) q a^2 / D$$

$$w_{CD} = (\alpha_2 \times 10^{-2}) q a^2 / D$$

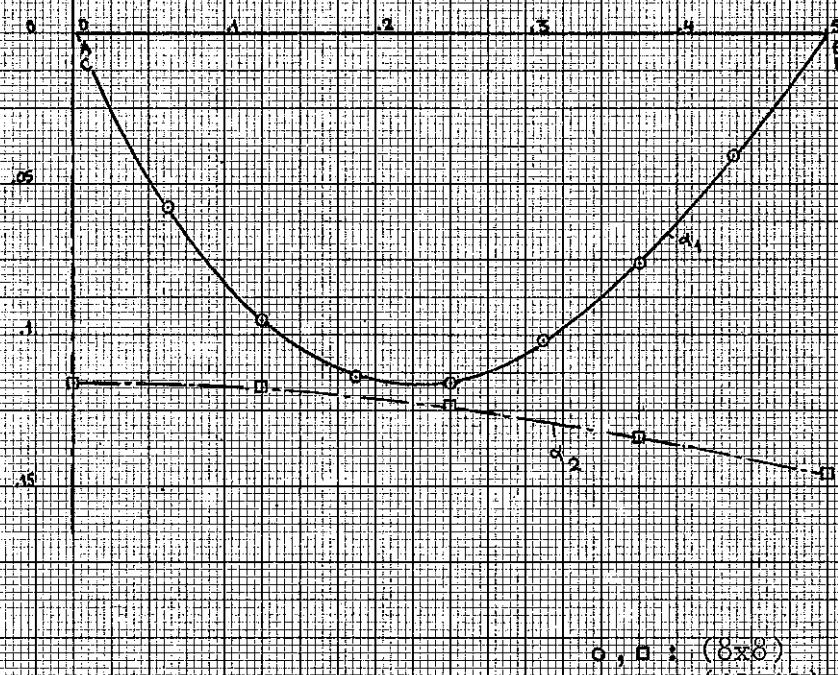
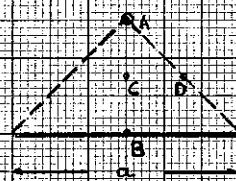


GRÁFICO 7.1

DESLOCAMENTO TRANSVERSAL  $w$  ( $\nu = 0.3$ )



CARGA CONC. EM C

$$w_{AB} = (\alpha_1 \times 10^{-3}) Pa^2/D$$

$$w_{CD} = (\alpha_2 \times 10^{-3}) Pa^2/D$$

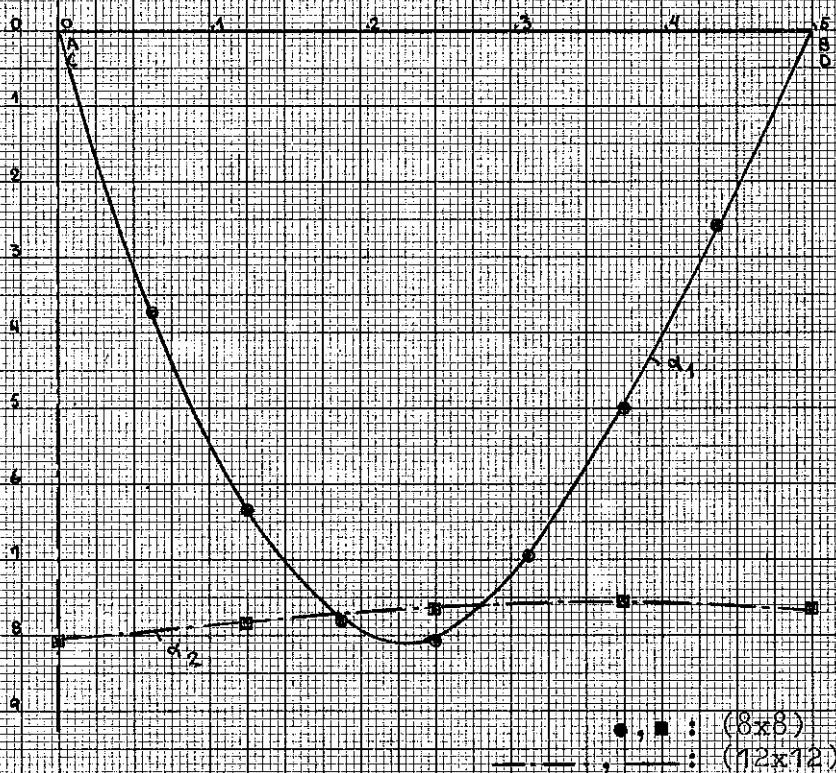
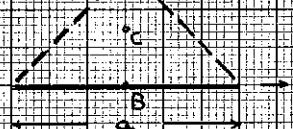


GRÁFICO 7.2

10

MOMENTOS FLETORES  $M_x$  e  $M_y$  ( $\gamma = 0.5$ )



CARGA CONG. EM G

$$M_x = (\alpha_1 \times 10^{-2}) P$$

$$M_y = (\alpha_2 \times 10^{-2}) P$$

-3

-2

-1

0

1

2

3

4

5

0

1

2

3

4

5

$s_1$

$s_2$

GRÁFICO 7.4

•, □ : (8x8)

▲, — : (12x12)



DESLOCAMENTOS  $u$  e  $v$

$$(E''=2E'; \nu'=0,15; \nu''=0,25)$$



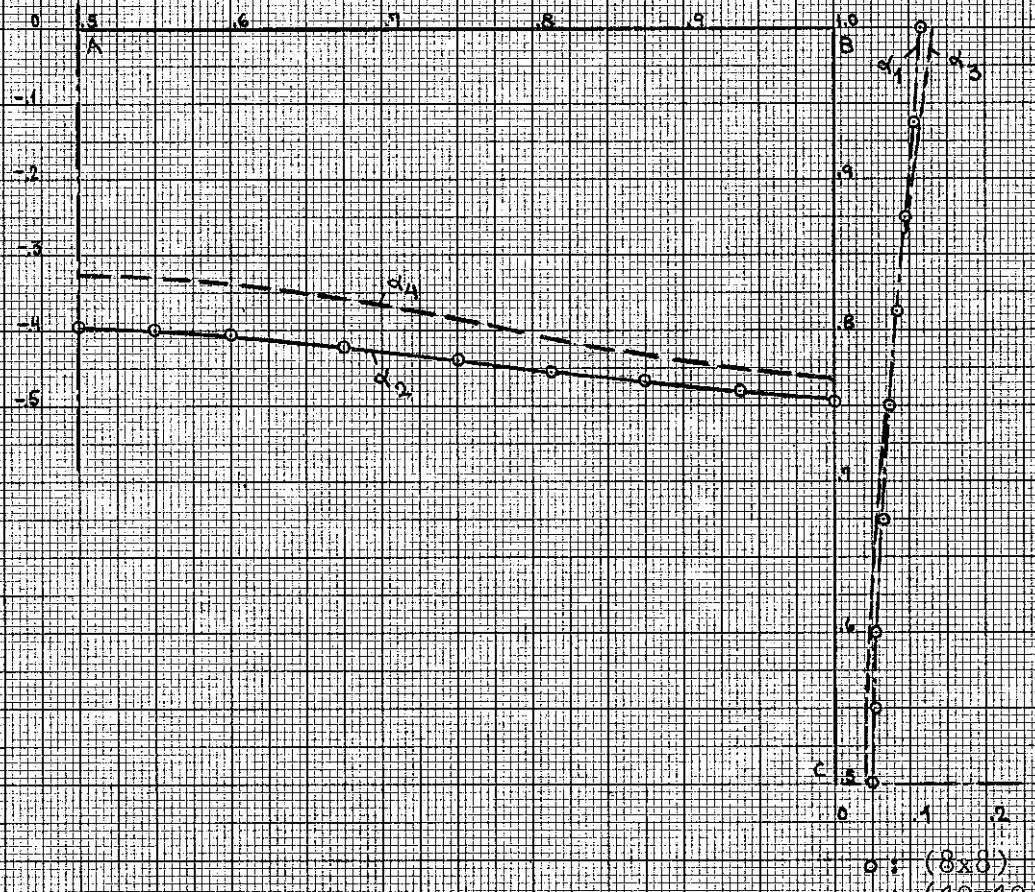
CARGA UNIT. DISTR. NOS BORDOS SUP. E INF.

$$u_{BC}^1 = \alpha_1 q a / E'$$

$$v_{AB}^1 = \alpha_2 q a / E'$$

$$u_{BC}^2 = \alpha_3 q a / E'$$

$$v_{AB}^2 = \alpha_4 q a / E'$$



C.R.F.100-3.1

MOMENTOS FLETORES  $M_x$  e  $M_y$  ( $\gamma = 0.3$ )

CARGA UNIT. DISTR.

$$M_x = (\alpha_1 \times 10^{-2}) qa^2$$

$$M_y = (\alpha_2 \times 10^{-2}) qa^2$$

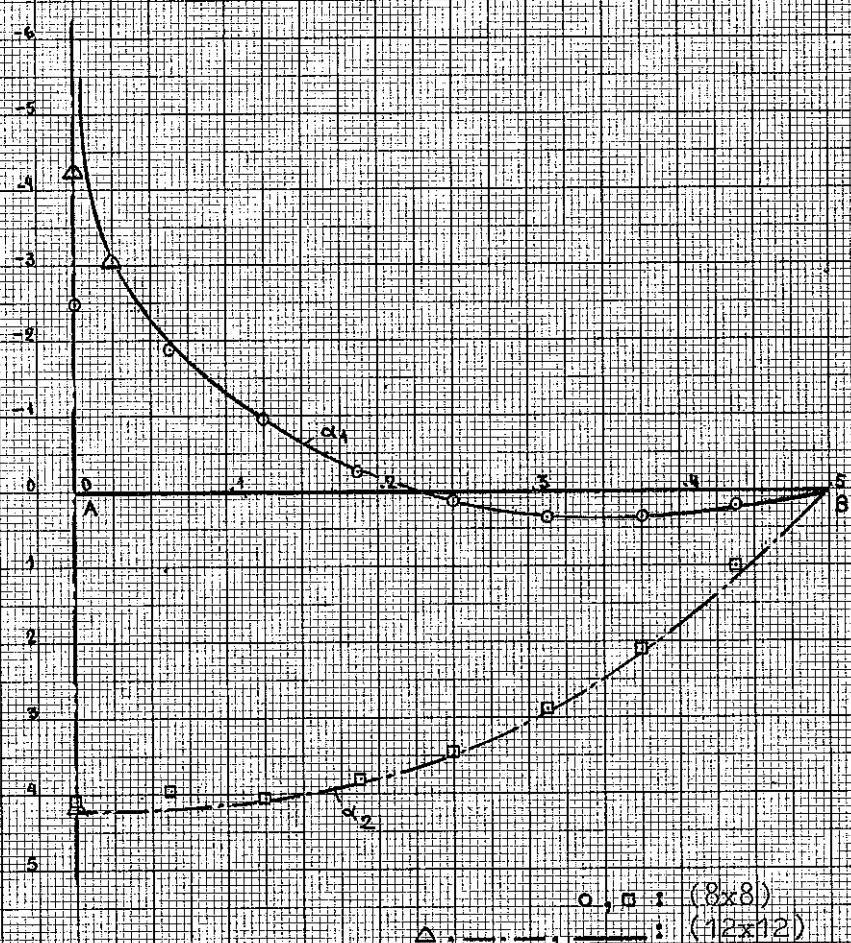


GRÁFICO 7.3



TENSÃO NORMAL  $\sigma$

$$(\varepsilon'' = 2\varepsilon'; \nu = 0.15; \gamma = 0.25)$$

① CARGA UNIF. DISTR. NOS BORDOS SUP. E INF.

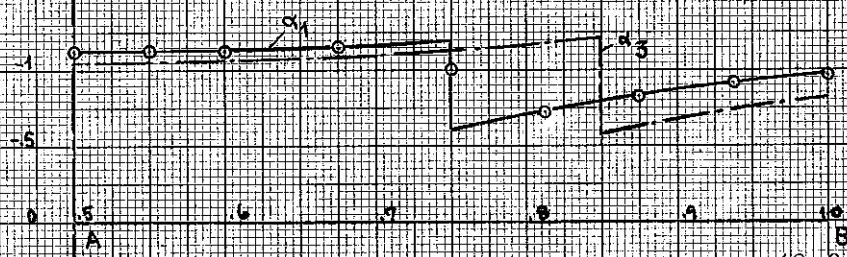
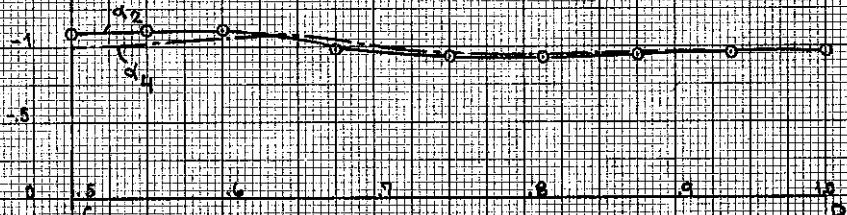
$$AB) \quad \sigma_y^1 = \alpha_1 q$$

$$\sigma_y^2 = \alpha_2 q$$

$$CD) \quad \sigma_y^1 = \alpha_3 q$$

$$\sigma_y^2 = \alpha_4 q$$

②



○ : (8x8)

— : (10x10)

GRAFIKO 8.2

8

b d



TENSÃO NORMAL  $\sigma_x$

$$(E''=2\cdot10^3; \nu'=0.15; \nu''=0.25)$$

①



CARGA UNIF. DISTR. NOS BORDOS SUP. E INF.

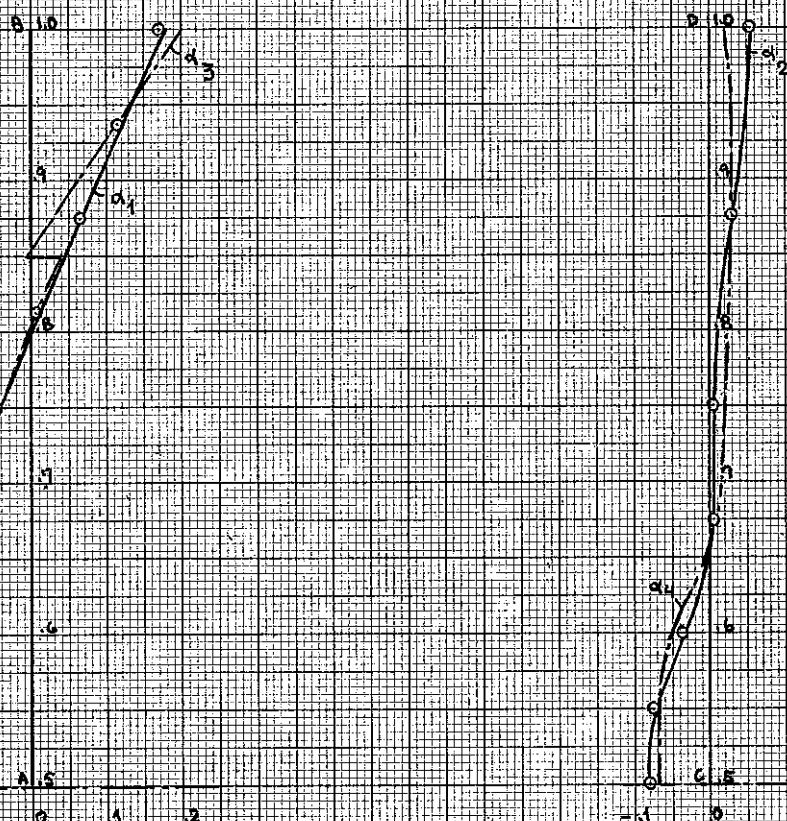
$$AB) \quad \sigma_x^1 = \alpha_1 q$$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 q$$

$$CD) \quad \sigma_x^1 = \alpha_2 q$$

$$\sigma_x^2 = \alpha_1 q$$

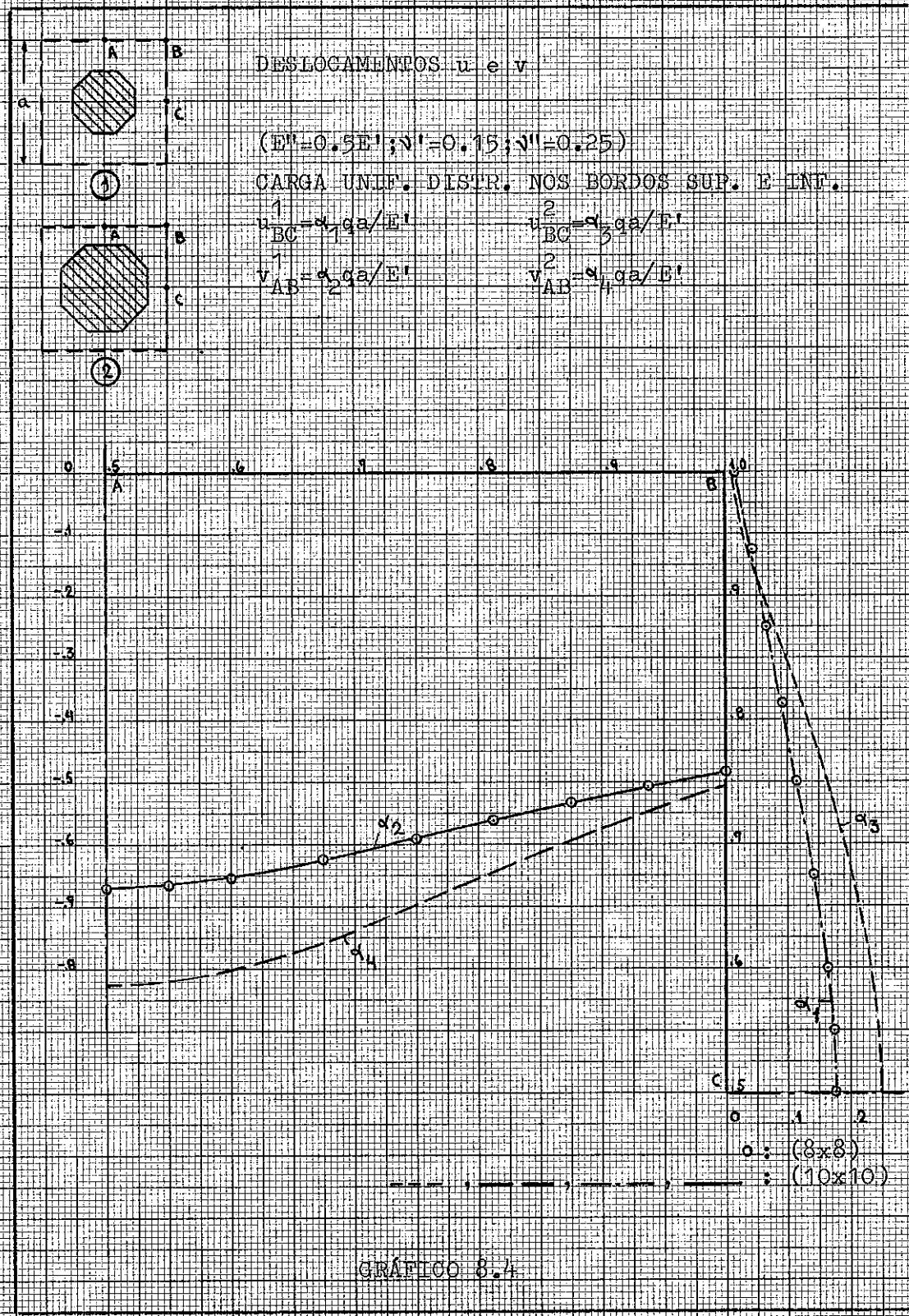
②

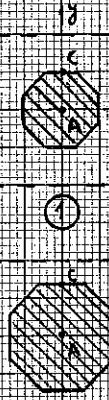


○ : (8x8)

× : (10x10)

GRÁFICO 8.3





TENSÃO NORMAL,  $\sigma_y$

$$(\sigma_y^0 = 0.5 \text{ MPa}; \alpha_1 = 0.15; \alpha_2 = 0.25)$$

CARGA UNIF. DISTR. NOS BORDOS SUP. E INF.

①

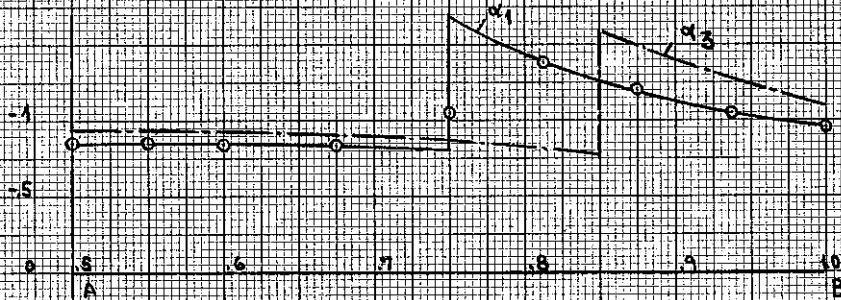
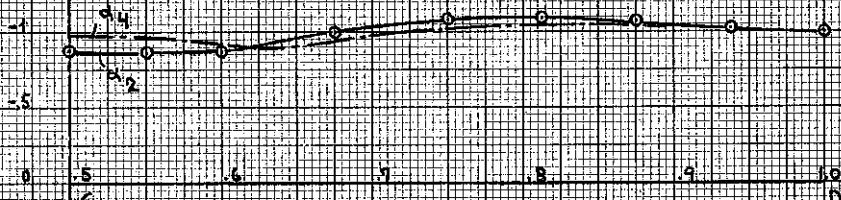
$$\sigma_y^1 = \alpha_{10}$$

$$\sigma_y^2 = \alpha_{20}$$

②

$$\sigma_y^1 = \alpha_{10}$$

$$\sigma_y^2 = \alpha_{10}$$



○ : (8x8)

— : (10x10)

GRAFICO 8.5

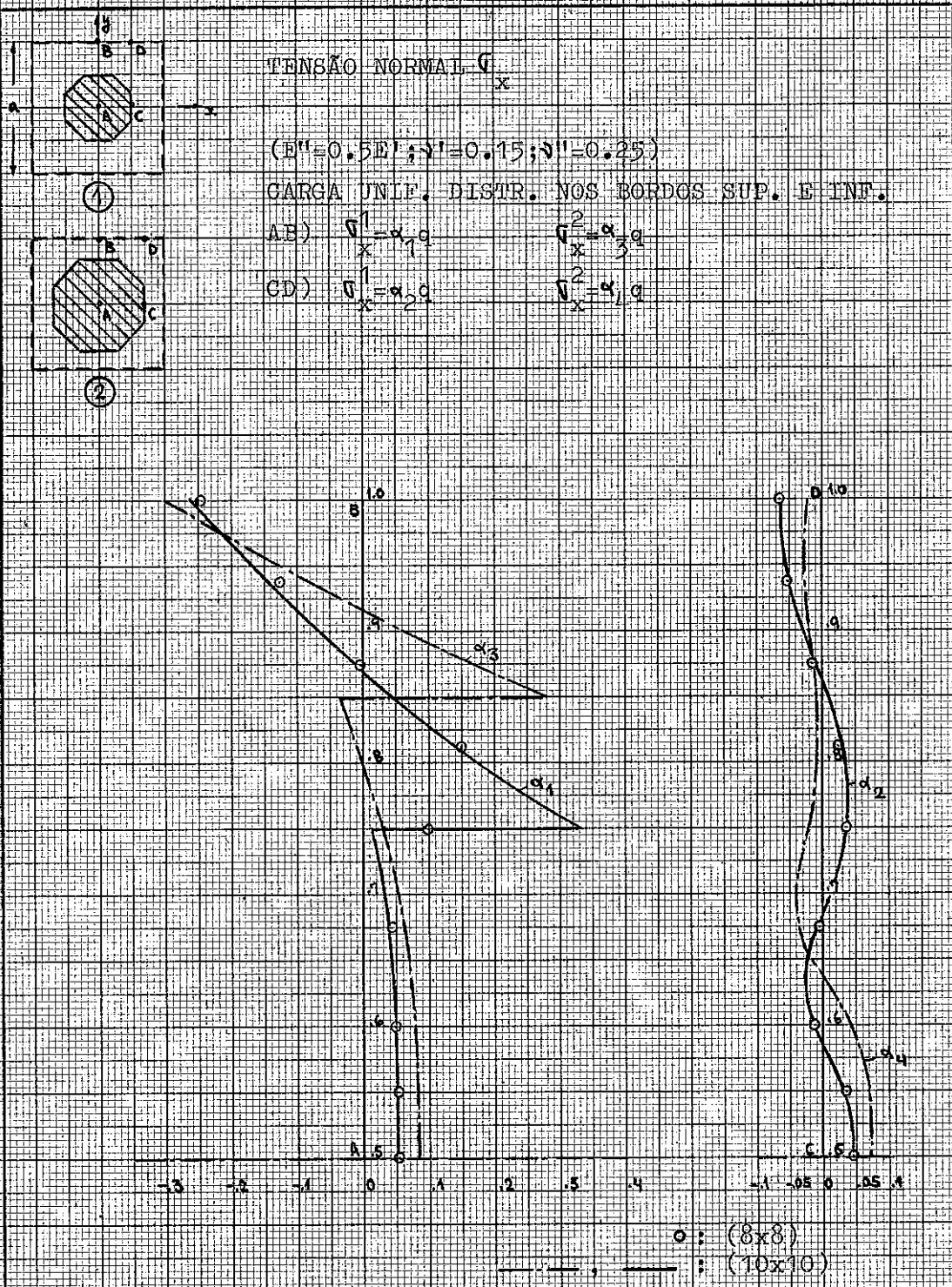


GRÁFICO 8.6

A P E N D I C E

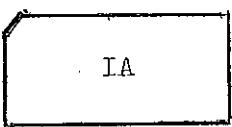
### CONVENÇÕES ADOTADAS NO FLUXOGRAMA

Não há uniformidade na literatura em relação às convenções a serem adotadas para o traçado de fluxogramas. Neste trabalho adotaram-se, até certo ponto, os símbolos sugeridos pela IBM.

Por se tratar de um fluxograma simplificado, de certa forma esquemático, não é necessário o conhecimento de uma linguagem específica para entendê-lo; serão dadas todas as informações necessárias.

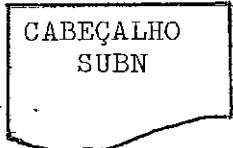
No que se segue explicam-se as convenções adotadas.

I)



este símbolo está associado à leitura de cartões. Ele causa a transferência de informações contidas no cartão para a memória do computador. No exemplo dado o valor da variável IA é transferido do cartão para a memória do computador.

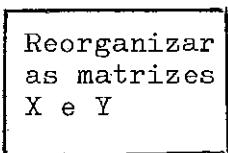
II)



este símbolo está associado à impressão em folhas de papel. Ele causa a

transferência de informações contidas na memória do computador para folhas de papel. No exemplo dado um cabeçalho previamente definido e o valor da variável SUBN são impressos.

III)

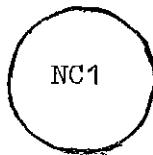


Este símbolo está associado a uma sequência de declarações (operações) necessárias para se alcançar certo objetivo. No exemplo dado este objetivo é a reorganização das matrizes X e Y.

IV) NC1

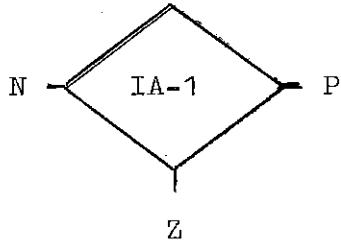
representa o número de comando 1. Estes números são usados em pontos diversos do fluxograma (ou programa) e servem de referência.

V)



Este símbolo está associado a uma declaração de transferência incondicional; ao atingi-lo deve-se passar para o ponto indicado no seu interior. No exemplo dado este ponto é o número de comando 1.

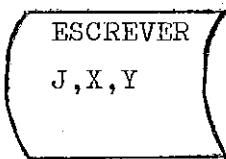
VII)



Este símbolo está associado a uma declaração de transferência condicional. Ao atingi-lo é efetuada a operação indicada no seu interior e do resultado dependerá o curso a ser seguido no fluxograma. Se este resultado é negativo o curso a ser seguido é o indicado pela letra N. Se o resultado for zero ou positivo os cur-

sos são indicados, respectivamente, pelas letras Z e P. No fluxograma, por simplicidade, estas letras não são escritas mas admite-se sempre a configuração indicada. No exemplo dado sair-se-á pela esquerda, por baixo ou pela direita do losango se a variável IA fôr respectivamente menor, igual ou maior do que 1.

VII)



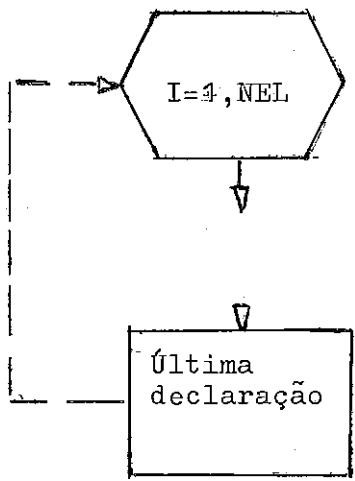
este símbolo causa a transferência de informações contidas na memória do computador para uma memória auxiliar (no programa apresentado usa-se disco magnético); também representa a operação inversa mas, neste caso, usa-se a palavra LER ao invés de ESCREVER. No exemplo dado os valores das variáveis J, X e Y são arquivados no disco.

VIII)



este símbolo indica a direção correta do curso a ser seguido.

IX)



este símbolo está associado a um controle iterativo; ele obriga a se percorrer de forma cíclica toda uma seção do fluxograma. Esta seção é limitada pela linha tracejada e o número de vezes que será percorrida é igual ao valor da variável à direita do sinal de igualdade (NEL vezes no exemplo dado). A variável à esquerda do sinal de igualdade (I no exemplo da-

do) tem sempre valor igual ao do ciclo em curso. Deve-se ressaltar que são possíveis controles iterativos mais complexos do que o exposto. Todavia, para o fluxograma apresentado este é suficiente.

A1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Já se disse ser fundamental programar o Método dos Elementos Finitos para computadores digitais.

O motivo óbvio que leva ao uso do computador digital é o elevado número de equações obtidas para o cálculo dos deslocamentos nodais, frequentemente da ordem de centenas. Todavia, ainda que se disponha de um programa para resolver o sistema de equações obtido, as demais etapas da análise são todas elas extremamente laboriosas e é necessário que sejam automatizadas ao máximo.

Não há, pois, condições de se aplicar o método se não se dispõe de um programa completo.

Infelizmente estes programas, que devem existir, não são em geral de domínio público (na referência 1 é publicado um programa, incompleto e com erros de impressão, para problemas de estados planos de tensões e deformações); pretende-se, com a publicação do programa agora apresentado neste apêndice, ajudar a preencher esta lacuna.

Este programa é, como está, utilizado na análise de placas carregadas transversalmente e na solução de problemas de estados planos de tensões e deformações.

Sua estrutura foi, contudo, idealizada de forma a permitir tratar-se outros tipos de problemas desde que se façam pequenas alterações.

Existe um programa principal, formado pelos subprogramas MEFI1 e MEFI2, que controla o fluxo das operações; nêle são realizadas operações comuns aos diversos tipos de problemas e são chamadas, adequadamente, as várias subrotinas auxiliares. Procurou-se, sempre que possível, pôr em forma de subrotina as etapas não comuns aos diferentes tipos de problemas. Desta forma é possível tratar-se novos problemas com simplicidade já que é necessário fazer apenas as subrotinas para o novo problema e alterar ligeiramente o programa principal se for o caso.

Acredita-se que a técnica utilizada em algumas etapas do programa (lista de ligações, listas cumulativas de ligações, reorganização de linhas e colunas da matriz de rigidez global simultaneamente ao espalhamento da matriz de rigidez do elemento, etc), e que é semelhante à exposta nas referências 16 e 17 para estruturas reticuladas, é aqui aplicada pela primeira vez ao Método dos Elementos Finitos (no programa da referência 1, onde a técnica adotada é diferente, tem-se que lidar com sistemas de equações substancialmente maiores).

Face à inexistência de publicações específicas sobre programas para análise de placas carregadas transversalmente espera-se que o programa que se apresenta seja bem aceito.

Apresenta-se também, juntamente com o programa principal e suas subrotinas, um fluxograma simplificado do programa principal com as devidas explicações.

A2 - EXPLICAÇÕES REFERENTES AO FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO SUBPROGRAMA MEFI1 E AO SUBPROGRAMA MEFI1.  
FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO SUBPROGRAMA MEFI1.  
SUBPROGRAMA MEFI1.

As explicações que se seguem referem-se ao fluxograma simplificado do subprograma MEFI1 assim como ao próprio subprograma.

A numeração e cabeçalhos usados no fluxograma serão repetidos aqui para facilitar a compreensão.

MEFI1

1) Adota-se o seguinte código:

- IA = 0                                  indica o término da análise;  
IA = 1                                  indica que uma nova subestrutura passa a ser considerada (subestrutura outra que não a primeira);  
IA = 2                                  indica o inicio da análise.

A divisão de uma estrutura em subestruturas menores é um

processo frequentemente usado, principalmente quando não se dispõe de computadores grandes. A técnica usada pode variar. Neste programa segue-se a técnica exposta na referência 17; como sua explicação detalhada é extensa ela não será desenvolvida aqui.

2) Nesta etapa é tomada a decisão, baseada no valor de IA, sobre o curso a seguir.

#### Informações gerais

3) Explica-se a seguir o que são as variáveis introduzidas nesta etapa:

- NPL - é um número de identificação para o problema em foco;
- NCA - é o número de sistemas de carregamento a serem considerados na análise;
- NSUS - é o número de subestruturas em que foi dividida a estrutura original;
- ITP - seu valor indica o tipo de problema a ser estudado; é 0 para problemas de estado plano de deformações, é 1 para problemas de estado plano de tensões e é 2 para análise de placas carregadas transversalmente;
- NCE - é o número cumulativo de elementos, isto é, o número total de elementos que constituem todas as subestruturas anteriores à em foco;
- NCJ - é o número cumulativo de nós, isto é, o número total de nós introduzidos até a subestrutura anterior à em foco (menos os nós comuns à imediatamente anterior e à em foco);
- NJL1A - é o número de nós com ligações do tipo 1 (a ser explicado) na subestrutura imediatamente anterior à em foco.

4) Nesta etapa são impressos um cabeçalho adequado e os valores das variáveis NPL, NCA, NSUS e ITP; naturalmente o cabeçalho pode variar dependendo do problema em foco. SUBN é o número da subestrutura em foco.

Informações relativas à malha adotada e às ligações existentes

5) Explica-se a seguir o que são as variáveis introduzidas nesta etapa:

- NEL - é o número de elementos que constituem a subestrutura em foco;
- NJU - é o número de pontos nodais existentes na subestrutura em foco;
- NL - é o número de ligações existentes na subestrutura em foco;
- NJL - é o número de pontos nodais sujeitos a ligações na subestrutura em foco;
- NET - é o número de elementos triangulares existentes na subestrutura em foco.

6) Nesta etapa são impressos um cabeçalho adequado e os valores das variáveis NEL, N, NJU, NL, NJL, NET e NER. Explica-se a seguir o que são as novas variáveis introduzidas:

- N - é o número de graus de liberdade da subestrutura em foco;
- NER - é o número de elementos retangulares existentes na subestrutura em foco.

Coordenadas dos pontos nodais

7) Nesta etapa são lidas as coordenadas X e Y dos diversos nós J. Normalmente, na análise de estruturas reticuladas (ver referências 16 e 17 ou o programa STRESS da IBM), usam-se tantos cartões quantos são os nós da estrutura para transmitir estas informações. Esta forma de leitura é impraticável no Método dos Elementos Finitos

face ao grande número de nós; isto explica a leitura sequencial adoptada no subprograma MEFI1. LIA é uma matriz auxiliar; será usada em diversos pontos do programa.

8) Nesta etapa são impressos um cabeçalho adequado e as informações lidas na etapa anterior.

#### Dados relativos aos elementos

9) Nesta etapa são lidas diversas informações referentes ao elemento I:

JI, JJ, JK, JL - são, respectivamente, os nós i, j, k e l do elemento (para elementos triangulares o valor JL não é fornecido);

LCE - o seu valor indica qual o grupo de constantes elásticas associado ao elemento;

LTE - o seu valor indica o tipo do elemento: se é 0 trata-se de elemento triangular e se é 1 trata-se de elemento retangular;

ESP - é a espessura do elemento.

10) As informações lidas na etapa anterior, assim como um cabeçalho adequado, são agora impressas.

#### Constantes elásticas

11) Se se trata de problemas de estados planos de tensões e deformações são lidos diversos grupos de valores (ou um único se for o caso) do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson.

Se, porém, tratar-se de análise de placas carregadas transversalmente ler-se-ão diversos grupos das constantes  $E_x'$ ,  $E_y'$ ,  $E''$  e G.

NGCE é o número de grupos de constantes elásticas a serem lidos.

12) As informações lidas na etapa anterior, assim como um cabeçalho

lho adequado, são agora impressas.

13) As informações referentes às coordenadas dos pontos nodais, aos grupos de constantes elásticas, às espessuras e à lista associada aos grupos de constantes elásticas (LCE) são agora arquivadas no disco para uso posterior.

#### Lista de ligações dos pontos nodais

14) Há dois tipos de ligações possíveis. O primeiro, fictício e temporário, está associado aos nós comuns a duas subestruturas e sua introdução é parte da técnica empregada (ver referência 17); o segundo refere-se às ligações introduzidas pelos apoios. Quando uma ligação fôr do primeiro tipo ela é identificada pelo número 1 e quando fôr do segundo tipo pelo número 2. Pode-se assim formar uma lista das ligações (LL) que informará, para todos os nós da subestrutura em foco, se é possível o deslocamento em certa direção (LL=0), se existe ligação do primeiro tipo (LL=1) ou do segundo tipo (LL=2). NL1 e NL2 são, respectivamente, para a subestrutura em foco, o número de ligações do tipo 1 (primeiro tipo) e o número de ligações do tipo 2 (segundo tipo).

15) As informações lidas na etapa anterior, assim como um cabeçalho adequado, são agora impressas.

#### Listas cumulativas de ligações nos pontos nodais

16) A formação de listas cumulativas de ligações faz, novamente, parte da técnica empregada. Ao iniciar-se a análise faz-se uma numeração arbitrária de todos os deslocamentos possíveis (que englobam os reais e os impedidos). As listas cumulativas permitem alterar automaticamente esta numeração e com isto reorganizar, quando houver interesse, linhas e colunas de matrizes. A primeira lista cumulativa (LCL1) refere-se às ligações do tipo 1; ela informa, para

cada deslocamento, o número de ligações do tipo 1 existentes até a quête ponto, isto é, o número de deslocamentos impedidos por ligações do tipo 1 até o deslocamento considerado (inclusive). A segunda lista cumulativa (LCL2) é análoga à primeira, apenas referindo-se a ligações do tipo 2. A terceira lista (LCL) informa o número total de ligações (ou deslocamentos impedidos) existentes até o deslocamento considerado, agora englobando os dois tipos.

#### Rearranjo das matrizes residuais de rigidez e carga

17) Ao se passar de uma subestrutura para outra a matriz de rigidez global S e a matriz das cargas totais combinadas FTC devem ser lim padas (o que corresponde a zerá-las) exceto nas partes residuais que representam a influência das subestruturas anteriores (ver referência 17). VT1 e VT2 são matrizes auxiliares.

18) Quando se está estudando a subestrutura de número SUBN todos os nós adjacentes à subestrutura SUBN+1 são impedidos de se deslocar por ligações do tipo 1. Todavia, ao se passar a estudar a subestrutura SUBN+1 as ligações do tipo 1 são removidas e podem então aparecer nestes nós, caso existam, ligações do tipo 2. A existência destas ligações exige o rearranjo das matrizes S e FTC (ver referência 17).

#### Geração da matriz de rigidez global

19) A matriz de rigidez global é gerada considerando-se sucessivamente a contribuição de cada elemento I. Por isto é usado um controle iterativo e ter-se-ão tantos ciclos quantos são os elementos (NEL).

20) A reorganização das linhas e colunas da matriz de rigidez global S é fundamental na técnica adotada. Entre outras vantagens leva à inversão de matrizes menores e à economia de memória, já que,

parte da matriz S é utilizada para guardar informações necessárias posteriormente. Se se trata de problemas de estados planos de tensões e deformações esta reorganização é feita pela subrotina SARI1; na análise de placas carregadas transversalmente a reorganização é feita pela subrotina SARI2.

21) Nesta etapa é calculada a matriz de rigidez do elemento I. Para elementos triangulares isótropos utilizados em problemas de estados planos de tensões e deformações é usada a subrotina RITET. Para elementos triangulares ortótropos ou elementos retangulares ortótropos utilizados na análise de placas carregadas transversalmente são usadas, respectivamente; as subrotinas RIPET e RIPER.

22) Após calcular-se, dentro deste processo iterativo, a matriz de rigidez SMD do elemento é necessário espalhá-la, isto é, adicionar adequadamente seus coeficientes aos coeficientes da matriz de rigidez global S. Nesta etapa a utilização da subrotina SAGES permite obter substancial economia de memória; na realidade ela foi introduzida face à necessidade de se minimizar a memória utilizada.

#### Decomposição e inversão da matriz de rigidez

23) É utilizado o método de Choleski para inversão de matrizes simétricas. Este método é composto essencialmente de duas partes: na primeira a matriz a ser invertida é decomposta em duas matrizes triangulares (uma superior e sua transposta) e na segunda obtém-se a matriz inversa a partir das matrizes triangulares obtidas. Nesta etapa a subrotina DCOMP decompõe a matriz a ser invertida, que é a submatriz de dimensões NxN situada no canto esquerdo superior da matriz S. Na hipótese da subestrutura em foco não possuir ligações de espécie alguma a matriz a ser invertida é a própria matriz S.

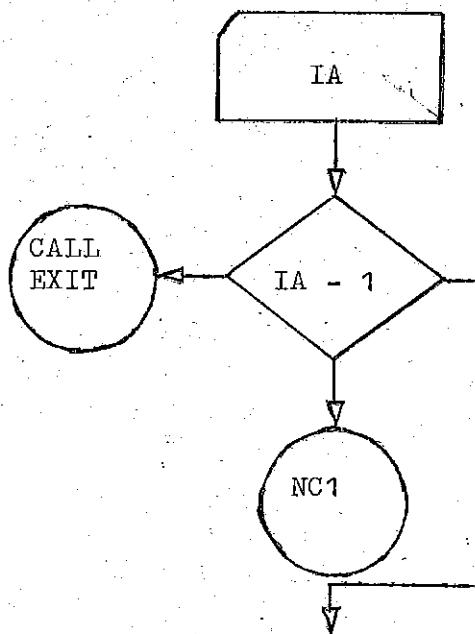
24) Agora a subrotina INVER obtém a matriz inversa procurada utilizando a matriz triangular obtida na etapa anterior pela subrotina

DCOMP.

25) Neste ponto passa-se ao fluxograma simplificado do subprograma MEF12. A divisão do programa principal em dois subprogramas foi imposta pela necessidade de se minimizar a memória utilizada.

MEFI 1

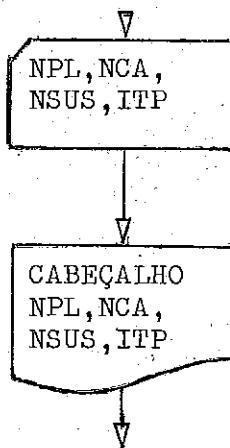
1)



2)

Informações gerais

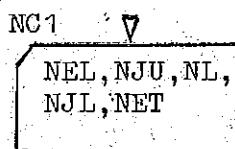
3)



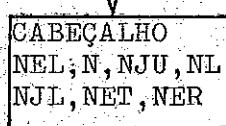
4)

Informações relativas à malha adotada e às ligações existentes

5)

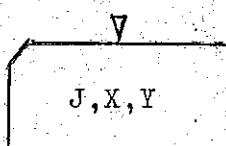


6)

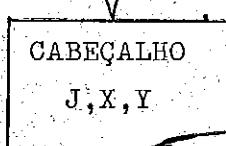


Coordenadas dos pontos nodais

7)

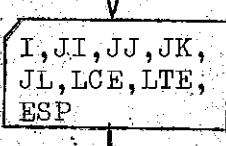


8)

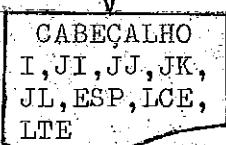


Dados relativos aos elementos

9)



10)



Constantes elásticas

11)

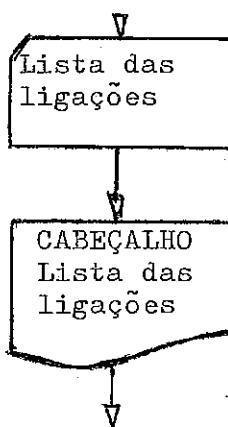


12)

13)

Lista de ligações dos pontos nodais

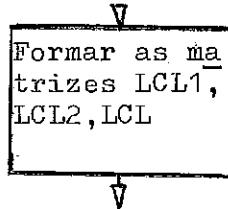
14)



15)

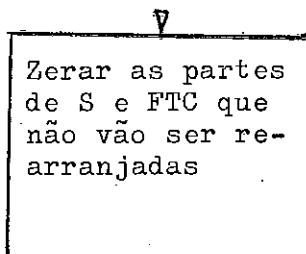
Listas cumulativas de ligações dos pontos nodais

16)

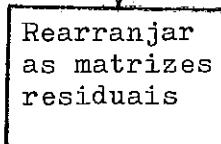


Rearranjo das matrizes residuais de rigidez e carga

17)

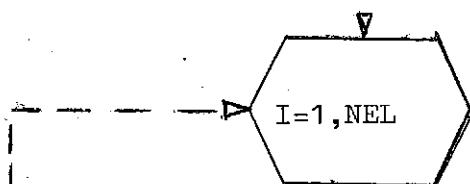


18)

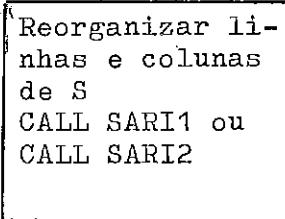


Geração da matriz de rigidez global

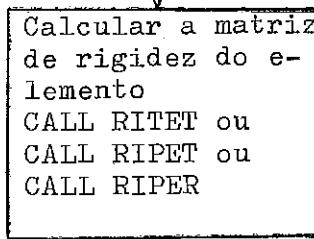
19)



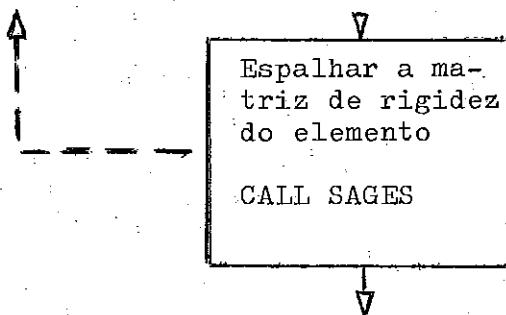
20)



21)

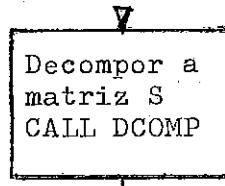


22)

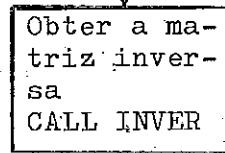


Decomposição e inversão da matriz de rigidez

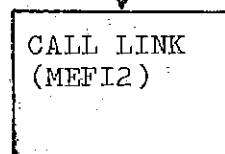
23)



24)



25)



PAGE 1

// JOB 2008

2

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	2008	2008	0002
		0OFF	0000
		1OFF	0001

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

\*EQUAT(PRNTZ,PRNZ)

\*EQUAT(CARDZ,READZ)

// FOR

\*IOCS(CARD,1132PRINTER,DISK)

\*ONE WORD INTEGERS

\*EXTENDED PRECISION

\*LIST SOURCE PROGRAM

INTEGER SUBN

DIMENSION VT1(50),VT2(2),ESP(60),EX(5),EY(5),EE(5),G(5),LCE(60),  
1LIA(156),SMD(12,12)  
COMMON S(78,78),JI(60),JJ(60),JK(60),JL(60),SUBN,NCJ,NEL,NCE,I1,I2  
I,13,J1,J2,J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,LL(78),LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL  
22(78),FTC(78,2),NSUS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJU3,NNL,NNL1,JD,JD,NJL1  
3A,X(39),Y(39),ID1,ID2,ID3,ID4,ID5,ID6,ID7,ID8,ID9,ID10,ID11,ID12,  
4ITP,NJU2

DEFINE FILE 1(682,320,U,JD),2(24,267,U,1D),3(60,99,U,1D1),4(60,99,  
1U,1D2), 5(60,99,U,1D3),6(60,99,U,1D4),7(60,99,U,1D5),8(60,99,U,1D6  
2),9(60,99,U,1D7),10(60,99,U,1D8),11(60,99,U,1D9),12(60,99,U,1D10)  
3,13(60,99,U,1D11),14(60,99,U,1D12)

C  
C ESTE PROGRAMA UTILIZA O METODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANALISAR  
C PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE E RESOLVER PROBLEMAS DE ESTADOS  
C PLANOS DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES

C  
C READ(2,5)IA  
IF(1A-1)100,102,101

100 CALL EXIT

C  
C INFORMAÇÕES GERAIS

101 READ(2,5)NPL,NCA,NSUS,ITP  
IF(1TP-1)1011,1011,1010

1010 WRITE(3,1)

1 FORMAT('1',29X,'ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE'//)  
GO TO 1012

1011 WRITE(3,2)

2 FORMAT('1',29X,'ANALISE DE PROBLEMAS ELASTICOS BI-DIMENSIONAIS'//)

1012 NCE=0

PAGE 2

```
NCJ=0
NJL1A=0
WRITE(3,3)NPL,NSUS,NCA,ITP
3   FORMAT(10X,'ANALISE NO.',I4,'. NO. DE SUBESTRUTURAS=',I3,
1'. NO. DE CARREGAMENTOS=',I3,'. ITP=',I3,'.')
SUBN=0
102  SUBN=SUBN+1
      WRITE(3,4)SUBN
4   FORMAT(10X,'DADOS RELATIVOS A SUBESTRUTURA NO.',I3,4X,*****
1*****//2X,'NEL',4X,
2'N',2X,'NJU',3X,'NL',2X,'NJI',2X,'NET',2X,'NER')
C
C   INFORMACOES RELATIVAS A MALHA ADOTADA E AS LIGACOES EXISTENTES
C
READ(2,5)NEL,NJU,NL,NJL,NET
5   FORMAT(7I5)
     IF(ITP-1)1020,1020,1021
1020 N=2*NJU-NL
     GO TO 1022
1021 N=3*NJU-NL
1022 NER=NEL-NET
      WRITE(3,5)NEL,N,NJU,NL,NJL,NET,NER
C
C   COORDENADAS DOS PONTOS NODAIS
C
WRITE(3,6)
6   FORMAT(10X,'COORDENADAS DOS NOS' //3X,'NO',7X,'X',8X,'Y',
14(5X,'NO',7X,'X',8X,'Y'))
IA=NJL1A+1
READ(2,7)(LIA(J),X(J),Y(J),J=IA,NJU)
7   FORMAT(4(I4,2F8.2))
     IF(NCJ+NJU-LIA(NJU))103,104,103
103  WRITE(3,8)
8   FORMAT(10X,'LEITURA ERRADA DE DADOS - PARE')
     STOP
104  WRITE(3,9)(LIA(J),X(J),Y(J),J=IA,NJU)
9   FORMAT(5(I5,F10.3,F9.3))
10  FORMAT(2X,'LCE',2X,'MOD. DE ELASTICIDADE',4X,'C. DE POISSON')
11  FORMAT(I5,F15.1,F21.3)
15  FORMAT(2(5I5,2I2,F11.3))
C
C   DADOS RELATIVOS AOS ELEMENTOS
C
WRITE(3,16)
16  FORMAT(10X,'DADOS RELATIVOS AOS ELEMENTOS'//1X,'ELEMENTO',4X,'JI',
1,3X,'JJ',3X,'JK',3X,'JL',6X,'ESPESSURA',3X,'LCE',2X,'LTE',5X,'ELEM
2ENTO',4X,'JI',3X,'JJ',3X,'JK',3X,'JL',6X,'ESPESSURA',3X,'LCE',2X,
3'LTE')
     READ(2,15)(LIA(I),JI(I),JJ(I),JK(I),JL(I),LCE(I),LTE(I),ESP(I),
```

PAGE 3

```
1I=1,NEL)
  IF(NCE+NEL-LIA(NEL))112,113,112
112  WRITE(3,8)
      STOP
113  IF(NER)114,115,116
114  STOP
115  WRITE(3,17)(LIA(I),JI(I),JJ(I),JK(I),ESP(I),LCE(I),LTE(I),I=1,NEL)
17   FORMAT(2(I5,I10,2I5,5X,F15.4,2I5,5X))
      GO TO 118
116  WRITE(3,18)(LIA(I),JI(I),JJ(I),JK(I),JL(I),ESP(I),LCE(I),LTE(I),
  1I=1,NEL)
18   FORMAT(2(I5,I10,3I5,F15.4,2I5,5X))
C
C      CONSTANTES ELASTICAS
C
118  READ(2,19)NGCE,I,EX(I),EY(I),EE(I),G(I)
19   FORMAT(2I5,4F15.5)
      IF(NGCE-I)119,119,118
119  IF(ITP-1)120,120,122
120  WRITE(3,10)
      DO 121 I=1,NGCE
121  WRITE(3,11)I,EX(I),EY(I)
      ID=2*(SUBN-1)+1
      WRITE(2>ID)X,Y,EX,EY,ESP,LCE
      GO TO 1250
122  WRITE(3,20)
20   FORMAT(/2X,'LCE',8X,'EX',13X,'EY',13X,'EE',14X,'G')
      DO 125 I=1,NGCE
125  WRITE(3,21)I,EX(I),EY(I),EE(I),G(I)
21   FORMAT(I5,4F15.1)
      ID=2*(SUBN-1)+1
      WRITE(2>ID)X,Y,EX,EY,EE,G,ESP,LCE
C
C      LISTA DE LIGACOES DOS PONTOS NODAIS
C
1250 IF(ITP-1)126,126,129
126  NJU2=2*NJU
      DO 127 J=1,NJU2
127  LL(J)=0
      IF(NJL)1270,1590,1270
1270 WRITE(3,22)
      READ(2,23)(LIA(3*j-2),LIA(3*j-1),LIA(3*j),J=1,NJL)
      DO 128 J=1,NJL
      IA=3*j
      JA=2*(LIA(IA-2)-NCJ)
      LL(JA-1)=LIA(IA-1)
128  LL(JA)=LIA(IA)
      WRITE(3,25)(LIA(3*j-2),LIA(3*j-1),LIA(3*j),J=1,NJL)
      GO TO 1590
```

PAGE 4

```
129 NJU3=3*NJU
      DO 157 J=1,NJU3
157  LL(J)=0
      IF(NJL)158,1590,158
158  WRITE(3,22)
22   FORMAT(10X,'LIGACOES DOS NOS',//3X,'NO',3X,'L1',3X,'L2',
      13X,'L3',3(8X,'NO',3X,'L1',3X,'L2',3X,'L3'))/
      READ(2,23)(LIA(4*j-3),LIA(4*j-2),LIA(4*j-1),LIA(4*j),j=1,NJL)
23   FORMAT(16I5)
      DO 159 J=1,NJL
      IA=4*j
      JA=3*(LIA(IA-3)-NCJ)
      LL(JA-2)=LIA(IA-2)
      LL(JA-1)=LIA(IA-1)
159  LL(JA)=LIA(IA)
      WRITE(3,24)(LIA(4*j-3),LIA(4*j-2),LIA(4*j-1),LIA(4*j),j=1,NJL)
24   FORMAT(4(4I5,5X))
25   FORMAT(4(3I5,10X))
```

C  
C LISTAS CUMULATIVAS DE LIGACOES DOS PONTOS NODAIS

```
1590 IF(SUBN-1)161,161,160
160  NL1A=NL1
161  IF(LL(1)-1)163,162,163
162  LCL1(1)=1
      LCL2(1)=0
      GO TO 166
163  IF(LL(1)-1)165,165,164
164  LCL1(1)=0
      LCL2(1)=1
      GO TO 166
165  LCL1(1)=0
      LCL2(1)=0
166  NNL=N+NL
      DO 171 K=2,NNL
          IF(LL(K)-1)168,167,168
167  LCL1(K)=LCL1(K-1)+1
      LCL2(K)=LCL2(K-1)
      GO TO 171
168  IF(LL(K)-1)170,170,169
169  LCL1(K)=LCL1(K-1)
      LCL2(K)=LCL2(K-1)+1
      GO TO 171
170  LCL1(K)=LCL1(K-1)
      LCL2(K)=LCL2(K-1)
171  CONTINUE
      DO 172 K=1,NNL
172  LCL(K)=LCL1(K)+LCL2(K)
      NL1=LCL1(NNL)
```

PAGE 5

```
NL2=NL-NL1
NNL1=N+NL1
IF(NNL-78)1716,1716,1717
1716 IF(NL1-50)1718,1718,1717
1717 WRITE(3,27)
27 FORMAT(/10X,'DIMENSAO INADEQUADA PARA S OU VT1 - PARE*')
STOP
1718 IF(SUBN-1)173,1719,173
1719 DO 1720 K=1,NNL1
      DO 1720 J=1,NNL
1720 S(J,K)=0.0
      DO 1721 K=1,NCA
      DO 1721 J=1,NNL
1721 FTC(J,K)=0.0
      GO TO 185
173  NL11=NL1A+1
C
C     REARRANJO DAS MATRIZES RESIDUAIS DE RIGIDEZ E CARGA
C
      DO 1722 K=NL11,NNL1
      DO 1722 J=1,NL1A
1722 S(J,K)=0.0
      DO 1723 K=1,NNL1
      DO 1723 J=NL11,NNL
1723 S(J,K)=0.0
      DO 1724 K=1,NCA
      DO 1724 J=NL11,NNL
1724 FTC(J,K)=0.0
      IF(NL2)174,185,174
174  DO 176 IA=1,NL1A
      I=NL1A+1-IA
      IF(LL(I)-2)176,175,176
175  DO 1750 K=I,NL1A
      DO 1750 J=1,NL1A
      S(J,K)=S(J,K+1)
1750 S(J,K+1)=0.0
176  CONTINUE
      KA=NL1A
      DO 184 IA=1,KA
      I=KA+1-IA
      IF(LL(I)-2)184,177,184
177  DO 178 K=1,NL1A
178  VT1(K)=S(I,K)
      DO 179 LN=1,NCA
179  VT2(LN)=FTC(I,LN)
      DO 1810 J=I,NL1A
      DO 180 K=1,NL1A
      S(J,K)=S(J+1,K)
180  S(J+1,K)=0.0
```

PAGE 6

```
DO 181 LN=1,NCA
  FTC(J,LN)=FTC(J+1,LN)
181  FTC(J+1,LN)=0.0
1810 CONTINUE
      J=N+NL1+LCL2(I)
      IF(J-NL1A)1811,1811,1812
1811 WRITE(3,28)
28   FORMAT(//10X,'ERRO NO REARRANJO DAS MATRIZES. N+NL1+LCL2(I) IGUAL
      10U MENOR QUE NL1A - PARE.')
      STOP
1812 DO 182 K=1,NL1A
182  S(J,K)=VT1(K)
      DO 183 LN=1,NCA
183  FTC(J,LN)=VT2(LN)
      NL1A=NL1A-1
184  CONTINUE
C
C   GERACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
C
185  I=0
186  I=I+1
      IF(I-NEL)1860,1860,215
1860 IA=JI(I)-NCJ
      JA=JJ(I)-NCJ
      KA=JK(I)-NCJ
      IF(ITP-1)1861,1861,1873
1861 CALL SARI1(IA,JA,KA)
      CALL RITET(ITP,1A,JA,KA,SMD,I,SUBN)
      IF(LL(2*IA-1)-2)1862,1863,1862
1862 CALL SAGES(I1,1,I,SMD)
1863 IF(LL(2*IA)-2)1864,1865,1864
1864 CALL SAGES(I2,2,I,SMD)
1865 IF(LL(2*JA-1)-2)1866,1867,1866
1866 CALL SAGES(J1,3,I,SMD)
1867 IF(LL(2*JA)-2)1868,1869,1868
1868 CALL SAGES(J2,4,I,SMD)
1869 IF(LL(2*KA-1)-2)1870,1871,1870
1870 CALL SAGES(K1,5,I,SMD)
1871 IF(LL(2*KA)-2)1872,186,1872
1872 CALL SAGES(K2,6,I,SMD)
      GO TO 186
1873 CALL SARI2(IA,JA,KA,LA,I)
      IF(LTE(I)-1)1875,1874,1875
1874 CALL RIPER(I,SMD)
      GO TO 1876
1875 CALL RIPET(I,SMD,JI,JJ,JK,NCJ,SUBN)
1876 IF(LL(3*IA-2)-2)207,208,207
207  CALL SAGES(I1,1,I,SMD)
208  IF(LL(3*IA-1)-2)209,210,209
```

PAGE 7

```
209 CALL SAGES(I2,2,I,SMD)
210 IF(LL(3*IA)-2)211,212,211
211 CALL SAGES(I3,3,I,SMD)
212 IF(LL(3*JA-2)-2)213,214,213
213 CALL SAGES(J1,4,I,SMD)
214 IF(LL(3*JA-1)-2)2140,2141,2140
2140 CALL SAGES(J2,5,I,SMD)
2141 IF(LL(3*JA)-2)2142,2143,2142
2142 CALL SAGES(J3,6,I,SMD)
2143 IF(LL(3*KA-2)-2)2144,2145,2144
2144 CALL SAGES(K1,7,I,SMD)
2145 IF(LL(3*KA-1)-2)2146,2147,2146
2146 CALL SAGES(K2,8,I,SMD)
2147 IF(LL(3*KA)-2)2148,2149,2148
2148 CALL SAGES(K3,9,I,SMD)
2149 IF(LTE(I)-1)186,2168,186
2168 IF(LL(3*LA-2)-2)2169,2170,2169
2169 CALL SAGES(L1,10,I,SMD)
2170 IF(LL(3*LA-1)-2)2171,2172,2171
2171 CALL SAGES(L2,11,I,SMD)
2172 IF(LL(3*LA)-2)2173,2174,2173
2173 CALL SAGES(L3,12,I,SMD)
2174 GO TO 186
C
C      DECOMPOSICAO E INVERSAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
C
215 CALL DCOMP(N,S)
      CALL INVER(N,S)
      CALL LINK(MEFI2)
      END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 19610 VARIABLES 1164 PROGRAM 2820

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORECI WS UA MEFI1 1  
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET

A3 - EXPLICAÇÕES REFERENTES AO FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO  
DO SUBPROGRAMA MEFI2 E AO SUBPROGRAMA MEFI2.  
FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO SUBPROGRAMA MEFI2.  
SUBPROGRAMA MEFI2.

As explicações que se seguem referem-se ao fluxograma simplificado do subprograma MEFI2 assim como ao próprio subprograma.

A numeração e cabeçalhos usados no fluxograma serão repetidos aqui para facilitar a compreensão.

MEFI2

Dados relativos aos sistemas de carregamento

26) O programa é feito de forma a permitir o tratamento simultâneo de vários sistemas de carregamento. Um controle iterativo permite ler sucessivamente as informações referentes a estes sistemas de carregamento. As variáveis introduzidas nesta etapa são as seguintes:

NJCA - é o número de nós da subestrutura em foco com

cargas diretamente aplicadas a êles;  
NECA - é o número de elementos, da subestrutura em foco, carregados;

ICD - o valor desta variável informa sobre os carregamentos distribuídos nos elementos; se é 0 todos os elementos da subestrutura em foco possuem o mesmo carregamento e se é 1 o carregamento não é o mesmo.

A utilização adequada das variáveis NJCA, NECA e ICD permite reduzir substancialmente o número de cartões a serem lidos.

#### Cargas diretamente aplicadas aos pontos nodais

27) Os valores FDA das cargas diretamente aplicadas aos nós são lidos nesta etapa (para o sistema de carregamento em foco).

28) As informações referentes às cargas diretamente aplicadas aos nós, assim como um cabeçalho adequado, são agora impressas.

#### Cargas nodais equivalentes ao carregamento do elemento

29) Nesta etapa são lidas e impressas as informações referentes aos carregamentos dos elementos ao mesmo tempo em que são calculadas as cargas nodais FEQ equivalentes (para o sistema de carregamento em foco). Se se trata de problemas de estados planos de tensões e deformações isto é realizado pela subrotina FOMAS; para a análise de placas carregadas transversalmente usa-se a subrotina FECA.

#### Cargas totais combinadas

30) Nesta etapa forma-se a matriz FTC das cargas totais combinadas.

31) Na técnica utilizada neste programa é importante a formação de

certas matrizes (etapa 32) que serão necessárias para se calcularem os resultados posteriormente; estas matrizes juntamente com outras informações são arquivadas, para cada subestrutura, no disco (etapa 33). Ao se chegar à última subestrutura inicia-se o cálculo dos resultados considerando-se sucessivamente subestrutura por subestrutura a partir desta última e retornando à primeira. As etapas 32 e 33 são, naturalmente, desnecessárias para a última subestrutura.

#### Formação das matrizes necessárias no retorno

32) Nesta etapa são formadas matrizes necessárias no retorno (ver referência 17).

33) Nesta etapa são arquivadas no disco as seguintes variáveis e matrizes referentes à subestrutura em foco e necessárias no retorno: NEL, N, NCE, NCJ, NL, NL1, NL2, NJU, JI, JJ, JK, JL, LL, S, FDA, FTC, LTE, NJL1A.

#### Reorganização das matrizes X e Y

34) A reorganização das matrizes X e Y evita lerem-se duas vezes as coordenadas dos nós adjacentes a duas subestruturas; isto é importante no Método dos Elementos Finitos face ao elevado número de nós nesta situação.

#### Matrizes residuais de rigidez e carga

35) Nesta etapa são calculadas as matrizes residuais de rigidez e carga (ver referência 17).

36) Neste ponto retorna-se ao subprograma MEF1 quando uma nova subestrutura passará a ser considerada.

### Deslocamentos dos pontos nodais - última subestrutura

37) Inicia-se agora a obtenção dos resultados com o cálculo dos deslocamentos dos nós da última subestrutura. As matrizes VEGA e LEGA, introduzidas nesta etapa, serão utilizadas para o cálculo da média dos esforços generalizados nos nós. Como se sabe da teoria do Método dos Elementos Finitos, os esforços em pontos nodais comuns a diversos elementos não são necessariamente coincidentes quando obtidos por expressões associadas a um ou outro elemento. A média destes esforços é, normalmente, um valor mais representativo do valor real. Na matriz VEGA serão acumuladas as contribuições dos diversos elementos para o cálculo da média dos esforços nos pontos nodais; na matriz LEGA serão registradas estas contribuições. Dividindo a soma acumulada em VEGA pelo número de contribuições correspondentes registrado em LEGA obtém-se a média desejada.

### Deslocamentos dos pontos nodais - outras subestruturas.

#### Reorganização das matrizes VEGA e LEGA.

38) Os valores anteriormente arquivados no disco na etapa 33, para a subestrutura em foco, são agora lidos (isto é, transferidos da memória auxiliar utilizada para a memória interna do computador).

39) A esta altura as matrizes VEGA e LEGA já foram utilizadas para calcular a média dos esforços nos pontos nodais referentes à última subestrutura. Todavia, para os nós adjacentes à última e penúltima subestruturas a média só poderá ser calculada quando os resultados referentes à penúltima subestrutura já forem conhecidos. É preciso, pois, que ao passar-se da última para a penúltima subestrutura sejam preservadas as informações referentes aos esforços nos nós adjacentes às duas subestruturas e que o restante das matrizes VEGA e LEGA seja limpado (zerado); é isto o que se faz nessa etapa. Naturalmente esta operação deverá ser repetida toda vez que se passar a uma nova subestrutura.

40) A matriz D é uma matriz cujas N primeiras linhas contêm, para os diversos sistemas de carregamento, os deslocamentos reais calculados para a subestrutura em foco. A matriz DJ é a matriz completa dos deslocamentos, isto é, inclui todos os deslocamentos possíveis (reais e impedidos) da subestrutura em foco para os diversos sistemas de carregamento; é organizada de acordo com a numeração inicialmente arbitrada.

Organização da matriz dos deslocamentos com a numeração inicialmente arbitrada

41) A matriz DJ é agora organizada de acordo com a numeração inicialmente arbitrada.

Cálculo das reações nos apoios

42) Nesta etapa calculam-se, para a subestrutura em foco e para os diversos sistemas de carregamento, as reações RA nos apoios.

Impressão dos resultados já obtidos

43) Imprime-se agora um cabeçalho com informação referente à subestrutura a que se referem os resultados que se seguem.

44) Como são possíveis vários sistemas de carregamento usa-se um controle iterativo para que os resultados associados a estes sistemas de carregamento sejam impressos sucessivamente.

45) Imprime-se agora um cabeçalho adequado informando qual o sistema de carregamento em foco.

46) Os deslocamentos nodais produzidos pelo sistema de carregamento em foco são agora impressos.

47) Observações análogas às da etapa 44.

48) Observações análogas às da etapa 45.

49) As reações nos apoios produzidas pelo sistema de carregamento em foco são agora impressas.

Cálculo dos esforços generalizados nos nós dos elementos

50) É usado um controle iterativo para que os elementos que formam a subestrutura em foco sejam considerados sucessivamente.

51) Nesta etapa são calculados e acumulados os esforços generalizados nos nós do elemento I. Se se trata de problemas de estados planos de tensões e deformações é a subrotina TENSA que realiza estas operações (para elementos triangulares isótropos). Para a análise de placas carregadas transversalmente usam-se as subrotinas EGET e EGER; a primeira é usada para elementos triangulares ortótropos e a segunda para elementos retangulares ortótropos.

Cálculo da média dos esforços generalizados nos pontos nodais

52) A subrotina MEGE calcula, para a subestrutura em foco, a média dos esforços generalizados nos pontos nodais; calcula, também, os esforços generalizados principais.

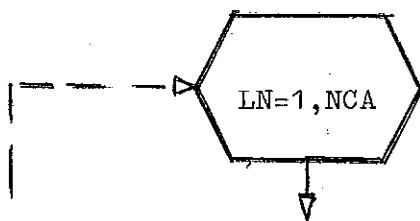
53) A seção do programa referente ao cálculo dos resultados é repetida até que todas as subestruturas tenham sido consideradas.

54) Ao concluir-se o cálculo dos resultados referentes à primeira subestrutura volta-se ao subprograma MEF11 para saber se a análise terminou ou se há um novo problema a ser considerado. Se há um novo problema recomeça-se tudo novamente.

MEFI 2

Dados relativos aos sistemas de carregamento

26)



Cargas diretamente aplicadas aos pontos nodais

27)

Cargas dire  
tamente apli  
cadas aos nós

28)

CABEÇALHO  
Cargas dire-  
tamente apli  
cadas aos  
nos

Cargas nodais equivalentes ao carregamento do elemento

29)

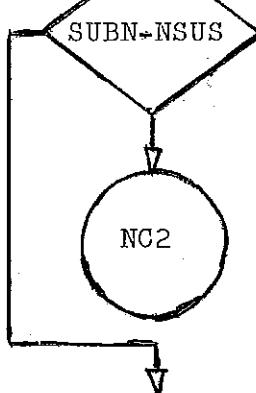
Ler e imprimir  
o carregamento  
dos elementos.  
Calcular as car-  
gas nodais equi.  
CALL FECA ou  
CALL FOMAS

Cargas totais combinadas

30)

Formar a ma-  
triz FTC das  
cargas tot.  
combinadas

31)



Formação das matrizes necessárias no retorno

32)

Formar as ma-  
trizes nece-  
sárias no re-  
torno

33)

ESCREVER  
NEL, N, NCE,  
NCJ, NL, NL1,  
NL2,.....

34)

Reorganizar  
as matrizes  
X e Y

Matrizes residuais de rigidez e carga

35)

Calcular as  
matrizes re-  
siduais de  
rig. e carga

36)

CALL LINK  
(MEFI1)

Deslocamentos dos pontos nodais - última subestrutura

37)

NC2  
▼  
Calcular os  
deslocamen-  
tos dos pon-  
tos nodais

NC4

Deslocamentos dos pontos nodais - outras subestruturas.

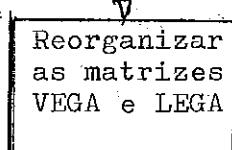
Reorganização das matrizes VEGA e LEGA

38)

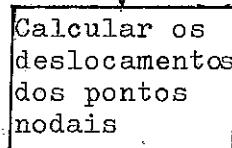
NC3  
LER  
NEL, N, NCE,  
NCJ, NL, NL1  
NL2, ....

▼

39)



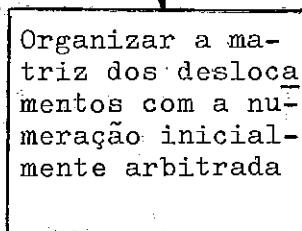
40)



Organização da matriz dos deslocamentos com a numeração inicialmente arbitrária

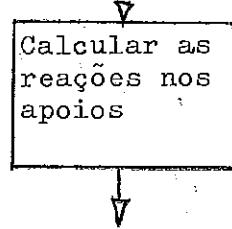
NC4

41)



Cálculo das reações nos apoios

42)



Impressão dos resultados já obtidos

43)



44)

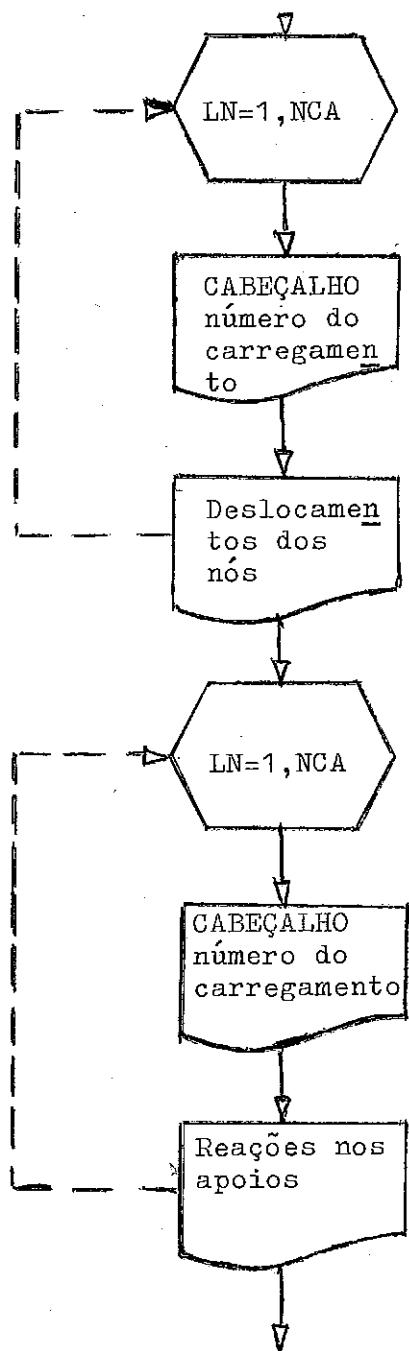
45)

46)

47)

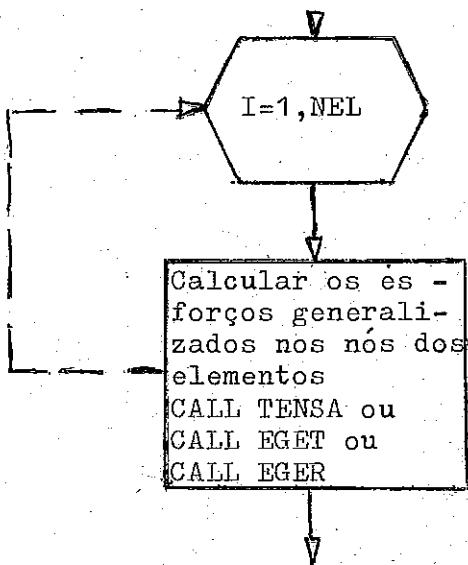
48)

49)



Cálculo dos esforços generalizados nos nós dos elementos

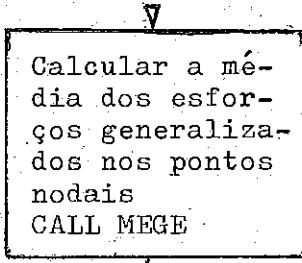
50)



51)

Cálculo da média dos esforços generalizados nos pontos nodais

52)



53)

54)

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0005	0005	0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*IOCS(CARD,1132PRINTER,DISK)

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*EXTENDED PRECISION

INTEGER SUBN

DIMENSION FDA(78,2),FEQ(78,2),RA(78,2),DJ(78,2),D(78,2),  
1VEGA(117,2),LEGA(117,2),LIA(39)  
COMMON S(78,78),J1(60),JJ(60),JK(60),JL(60),SUBN,NCA,NEL,NCE,I1,I2  
1,I3,J1,J2,J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,L(78),LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL  
22(78),FTC(78,2),NSUS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJU3,NNL,NNL1,1D,JD,NJL1  
3A,X(39),Y(39),ID1,ID2,1D3,1D4,1D5,1D6,1D7,1D8,1D9,1D10,1D11,1D12,  
4ITP,NJU2  
DEFINE FILE 1(682,320,U,JD),2(24,267,U,1D),3(60,99,U,1D1),4(60,99,  
1U,1D2),5(60,99,U,1D3),6(60,99,U,1D4),7(60,99,U,1D5),8(60,99,U,1D6  
2),9(60,99,U,1D7),10(60,99,U,1D8),11(60,99,U,1D9),12(60,99,U,1D10)  
3,13(60,99,U,1D11),14(60,99,U,1D12)

ESTE PROGRAMA E O COMPLEMENTO DO PROGRAMA MEFII

DO 217 K=1,NCA

DO 217 J=1,NNL

FDA(J,K)=0.0

217 FEQ(J,K)=0.0

DADOS RELATIVOS AOS SISTEMAS DE CARREGAMENTO

LN=0

218 LN=LN+1

IF(LN=NCA)219,219,308

219 WRITE(3,29)LN

29 FORMAT(10X,'CARREGAMENTO NO.',13/)

READ(2,30)NJCA,NECA,ICD

30 FORMAT(315)

CARGAS DIRETAMENTE APLICADAS AOS PONTOS NODAIS

IF(NJCA)292,299,292

292 WRITE(3,31)

31 FORMAT(10X,'CARGAS DIRETAMENTE APLICADAS AOS NOS'//3X,'NO',

110X,'FDA1',11X,'FDA2',11X,'FDA3'//)

IF(ITP-1)293,293,293

PAGE 2

```
293 DO 2930 J=1,NJCA
      READ(2,32)K,AT1,AT2
      IA=2*(K-NCJ)
      FDA(IA-1,LN)=AT1
      FDA(IA,LN)=AT2
2930 WRITE(3,32)K,FDA(IA-1,LN),FDA(IA,LN)
      GO TO 299
2931 DO 294 J=1,NJCA
      READ(2,32)K,AT1,AT2,AT3
      FORMAT(15,3F15.3)
      IA=3*(K-NCJ)
      FDA(IA-2,LN)=AT1
      FDA(IA-1,LN)=AT2
      FDA(IA,LN)=AT3
294 WRITE(3,32)K,FDA(IA-2,LN),FDA(IA-1,LN),FDA(IA,LN)

C C CARGAS NODAIS EQUIVALENTES AO CARREGAMENTO DO ELEMENTO
C
299 IF(MECA)2990,218,2990
2990 IF(ITP-1)304,304,300
300 IF(ICD-1)302,301,302
301 WRITE(3,33)
33 FORMAT(/4(1X,'ELEMENTO',4X,'CARGA Q!',8X)/)
      GO TO 303
302 WRITE(3,34)
34 FORMAT(/1X,'ELEMENTO',4X,'CARGA Q'/)
303 CALL FECA(FEQ,NECA,LN,ICD)
      GO TO 218
304 IF(ICD-1)305,306,305
305 WRITE(3,35)
35 FORMAT(/1X,'ELEMENTO',9X,'FMX',12X,'FMY')
      GO TO 307
306 WRITE(3,36)
36 FORMAT(/4(1X,'ELEMENTO',2X,'FMX',7X,'FMY',4X)/)
307 CALL FOMAS(FEQ,NEL,JI,JJ,JK,NCJ,LN,NECA,ICD,NCE,SUBN)
      GO TO 218

C C CARGAS TOTAIS COMBINADAS
C
308 DO 333 J=1,NNL
      IF(LL(J))329,328,329
328 K=J-LCL(J)
      GO TO 332
329 IF(LL(J)-1)330,330,331
330 K=N+LCL1(J)
      GO TO 332
331 K=N+NL1+LCL2(J)
332 DO 333 LN=1,NCA
      FTC(K,LN)=FTC(K,LN)+FDA(J,LN)+FFQ(J,LN)
```

PAGE 3

339 CONTINUE  
IF (ITP=1) 3330, 3330, 3331  
3330 IL1=2  
GO TO 3332  
3331 IL1=3  
3332 IF (SUBN=NSUS) 3340, 367, 3340  
C  
C FORMACAO DAS MATRIZES NECESSARIAS NO RETORNO  
C  
3340 DO 334 J=1,N  
DO 334 LN=1,NCA  
FDA(J,LN)=0.0  
DO 334 K=1,N  
334 FDA(J,LN)=FDA(J,LN)+S(J,K)\*FTC(K,LN)  
N1=N+1  
DO 335 J=1,N  
DO 335 I=N1,NNL1  
S(J,I)=0.0  
DO 335 K=1,N  
335 S(J,I)=S(J,I)+S(J,K)\*S(I,K)  
JD=62\*(SUBN-1)+1  
WRITE(11) JD,NEL,N,NCE,NCJ,NL,NL1,NL2,NJU,JI,JJ,JK,JL,LL,S,FDA,  
1 FTC,LTE,NJL1A  
C  
C REORGANIZACAO DAS MATRIZES X E Y  
C  
Njl1a=Nl1/Il1  
IA=Nju-Njl1a  
DO 336 J=1,Njl1a  
KA=J+IA  
X(J)=X(KA)  
Y(J)=Y(KA)  
336  
C  
C MATRIZES RESIDUAIS DE RIGIDEZ E CARGA  
C  
DO 361 J=N1,NNL1  
IA=J-N  
DO 361 LN=1,NCA  
FTC(IA,LN)=FTC(J,LN)  
DO 361 K=1,N  
361 FTC(IA,LN)=FTC(IA,LN)-S(J,K)\*FDA(K,LN)  
DO 362 J=N1,NNL1  
DO 362 K=N1,NNL1  
DO 362 I=1,N  
362 S(J,K)=S(J,K)-S(J,I)\*S(I,K)  
DO 363 J=1,NL1  
IA=J+N  
DO 363 K=1,NL1  
KA=K+N

PAGE 4

363  $S(J,K) = S(IA,KA)$   
 $NCE = NCE + NEL$   
 $NCJ = NCJ + NJU - NL1/IL1$   
CALL LINK(MEFI1)

DESLOCAMENTOS DOS PONTOS NODAIS - ULTIMA SUBESTRUTURA.

367 DO 368 J=1,N  
DO 368 LN=1,NCA  
 $D(J,LN) = 0.0$   
DO 368 K=1,N  
368  $D(J,LN) = D(J,LN) + S(J,K) * FTC(K,LN)$   
 $IA = 3 * NJU$   
DO 3680 LN=1,NCA  
DO 3680 J=1,IA  
 $VEGA(J,LN) = 0.0$   
3680  $LEGA(J,LN) = 0$   
GO TO 387

DESLOCAMENTOS DOS PONTOS NODAIS - OUTRAS SUBESTRUTURAS.  
REORGANIZACAO DAS MATRIZES VEGA E LEGA.

369  $SUBN = SUBN - 1$   
 $JD = 62 * (SUBN - 1) + 1$   
READ(1,JD) NEL, N, NCE, NCJ, NL, NL1, NL2, NJU, JI, JJ, JK, JL, LL, S, FDA,  
IFTC, LTE, NJL1A  
 $N1 = N + 1$   
 $NNL = N + NL$   
 $NNL1 = N + NL1$   
 $JA = 8 * (NL1 / IL1)$   
 $IA = 3 * NJU - JA$   
DO 370 LN=1,NCA  
DO 370 J=1,JA  
 $KA = IA + J$   
 $VEGA(KA,LN) = VEGA(J,LN)$   
370  $LEGA(KA,LN) = LEGA(J,LN)$   
DO 371 LN=1,NCA  
DO 371 J=1,IA  
 $VEGA(J,LN) = 0.0$   
371  $LEGA(J,LN) = 0$   
DO 385  $IA = N1, NNL1$   
 $J = NNL1 + N1 - IA$   
 $KA = J - N$   
DO 385 LN=1,NCA  
385  $D(J,LN) = DJ(KA,LN)$   
DO 386 J=1,N  
DO 386 LN=1,NCA  
 $D(J,LN) = FDA(J,LN)$   
DO 386 K=N1,NNL1



PAGE 6

```
        WRITE(3,42)LN
42      FORMAT(10X,'CARREGAMENTO NO.',13/)
        IF(ITP-1)4030,4030,404
4030    WRITE(3,44)(LIA(J),DJ(2+J-1,LN),DJ(2*J,LN),J=1,KA)
        GO TO 405
404    WRITE(3,43)(LIA(J),DJ(3+J-2,LN),DJ(3*J-1,LN),DJ(3*J,LN),J=1,KA)
43      FORMAT(3(I5+2X,3F11.7))
44      FORMAT(3(I5,2X,2F11.7,1X))
405    CONTINUE
        IF(NL2)406,410,406
406    WRITE(3,50)
50      FORMAT(10X,'REACOES NOS APOIOS
1,12X,'RA3')/
        DO 409 LN=1,NCA
        WRITE(3,42)LN
        IF(ITP-1)4060,4060,4064
4060    DO 4063 K=I,NJU
        KA=2*K
        IF(LL(KA)-2)4061,4062,4061
4061    IF(LL(KA)-2)4063,4062,4063
4062    IA=NCJ+K
        WRITE(3,51)IA,RA(KA-1,LN),RA(KA,LN)
4063    CONTINUE
        GO TO 409
4064    DO 4080 K=I,NJU
        KA=3*K
        IF(LL(KA-2)-2)407,408,407
407    IF(LL(KA-1)-2)4070,408,4070
4070    IF(LL(KA)-2)4080,408,4080
408    IA=NCJ+K
        WRITE(3,51)IA,RA(KA-2,LN),RA(KA-1,LN),RA(KA,LN)
51      FORMAT(15,5X,3F15.4)
4080    CONTINUE
409    CONTINUE
C
C      CALCULO DOS ESFORCOS GENERALIZADOS NOS NOS DOS ELEMENTOS
C
410    DO 413 I=1,NEL
        IF(ITP-1)4100,4100,4101
4100    CALL TENDA(DJ,I,VEGA,LEGA,SUBN,CA)
        GO TO 413
4101    IF(LTE(I))412,411,412
411    CALL EGET(DJ,I,VEGA,LEGA,SUBN,NEA)
        GO TO 413
412    CALL EGER(DJ,I,VEGA,LEGA)
413    CONTINUE
C
C      CALCULO DA MEDIA DOS ESFORCOS GENERALIZADOS NOS PONTOS NODAIS
C
```

PAGE 7

CALL MEGE(NJL1A,NJU,VEGA,LEGA,NCA,NCJ,ITP)

IF(SUBN-1)414,414,369

414 CALL LINK(MEF11)

END.

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

EXTENDED PRECISION

IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR

COMMON 19610 VARIABLES 3442 PROGRAM 2550

END OF COMPIILATION

// DUP

\*STORECI WS JA MEF12 1

\*LOCAL, EGER, FECA, EGET, FOMAS, TENSA

FILES ALLOCATION

1	0000	02AA	0005	021F
2	02AA	0018	0005	021F
3	02C2	0014	0005	021F
4	02D6	0014	0005	021F
5	02EA	0014	0005	021F
6	02FE	0014	0005	021F
7	0312	0014	0005	021F
8	0326	0014	0005	021F
9	033A	0014	0005	021F
10	034E	0014	0005	021F
11	0362	0014	0005	021F
12	0376	0014	0005	021F
13	038A	0014	0005	021F
14	039E	0014	0005	021F

STORAGE ALLOCATION

R 41 0170 (HEX) WDS UNUSED BY CORE LOAD

CALL TRANSFER VECTOR

ECOS 2814

ESIN 281C

EATAN 277E

EABS 2772

ESORT 25BE

MEGE 23DB

TENSA 2A73 LOCAL

FOMAS 2DBD LOCAL

EGET 2B1F LOCAL

FECA 2B3C LOCAL

EGER 2BCR LOCAL

LIBF TRANSFER VECTOR

A4 - SUBROTINAS ASSOCIADAS AO SUBPROGRAMA MEFI1

1) Subrotina SARI1

Esta é uma subrotina auxiliar utilizada ao se espalhar a matriz de rigidez SMD do elemento I considerado. É usada quando o elemento I possui 3 nós e são possíveis 2 deslocamentos por nó. Ela altera a numeração inicialmente arbitrada para os deslocamentos dos nós do elemento I visando obter a matriz de rigidez global S com suas linhas e colunas já reorganizadas.

2) Subrotina SARI2

Esta é uma subrotina auxiliar utilizada ao se espalhar a matriz de rigidez SMD do elemento I considerado. É utilizada quando o elemento I possui 3 ou 4 nós e são possíveis 3 deslocamentos por nó. Ela altera a numeração inicialmente arbitrada para os deslocamentos dos nós do elemento I visando obter a matriz de rigidez global S com suas linhas e colunas já reorganizadas.

3) Subrotina SAGES

Esta é uma subrotina auxiliar utilizada ao se espalhar a matriz de rigidez SMD do elemento I considerado. Ela adiciona aos coeficientes adequados da coluna IN1 da matriz de rigidez global S a contribuição da coluna IN2 da matriz SMD.

#### 4) Subrotina RITET

Esta subrotina refere-se a elementos triangulares isótrapos utilizados em problemas de estados planos de tensões e deformações. Ela calcula a matriz DB (produto das matrizes D e B) necessária ao cálculo das tensões e a matriz de rigidez SMD do elemento I considerado.

#### 5) Subrotina RIPET

Esta subrotina refere-se a elementos triangulares ortotrapos utilizados na análise de placas carregadas transversalmente. Ela calcula a matriz de rigidez SMD do elemento I considerado e a matriz B'T (produto das matrizes B' e T) necessárias ao cálculo dos momentos fletores e de torção.

#### 6) Subrotina RIPER

Esta subrotina refere-se a elementos retangulares ortotrapos utilizados na análise de placas carregadas transversalmente. Ela calcula a matriz de rigidez SMD do elemento I considerado.

#### 7) Subrotina DCOMP

As subrotinas DCOMP e INVER invertem matrizes simétricas utilizando o método de Choleski. Nesta subrotina a matriz S (ou a submatriz NxN nela contida) é decomposta fornecendo a matriz triangular superior necessária à sua inversão.

8) Subrotina INVER

As subrotinas DCOMP e INVER invertem matrizes simétricas utilizando o método de Choleski. Nesta subrotina obtém-se a matriz inversa de S (ou da submatriz NxN nela contida) utilizando a matriz obtida na subrotina DCOMP.

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0005	0005	0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*EXTENDED PRECISION

\*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE SARI1(IA,JA,KA)

INTEGER SUBN

COMMON S(78,78),JI(60),JJ(60),JK(60),JL(60),SUBN,Ncj,NEL,NCE,I1,I2  
1,I3,J1,J2,J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,LL(78),LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL  
22(78),FTC(78,2),NSUS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJU3,NNL,NNL1,JD,NJL1  
3A,X(39),Y(39),ID1,ID2,ID3,ID4,ID5,ID6,ID7,ID8,ID9,ID10,ID11,ID12,  
4ITP,NJU2

C  
C ESTA E UMA SUBROUTINE AUXILIAR UTILIZADA AO SE ESPALHAR A MATRIZ  
C DE RIGIDEZ SMD DO ELEMENTO I CONSIDERADO. E USADA QUANDO O ELEMEN-  
C TO I POSSUI 3 NOS E SAO POSSIVEIS 2 DESLOCAMENTOS POR NO. ELA  
C ALTERA A NUMERACAO INICIALMENTE ARBITRADA PARA OS DESLOCAMENTOS  
C DOS NOS DO ELEMENTO I VISANDO OBTER A MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL S  
C COM SUAS LINHAS E COLUNAS JA REORGANIZADAS.

I1=2\*IA-1

I2=2\*IA

J1=2\*JA-1

J2=2\*JA

K1=2\*KA-1

K2=2\*KA

IF(LL(I1))187,187,188

187 I1=I1-LCL(I1)

GO TO 191

188 IF(LL(I1)-1)189,189,190

189 I1=N+LCL1(I1)

GO TO 191

190 I1= NNL1+LCL2(I1)

191 IF(LL(I2))192,192,193

192 I2=I2-LCL(I2)

GO TO 196

193 IF(LL(I2)-1)194,194,195

194 I2=N+LCL1(I2)

GO TO 196

195 I2= NNL1+LCL2(I2)

196 IF(LL(J1))197,197,198

197 J1=J1-LCL(J1)

GO TO 201

PAGE 2

```
198 IF(LL(J1)-1)199,199,200
199 J1=N+LCL1(J1)
    GO TO 201
200 J1= NNL1+LCL2(J1)
201 IF(LL(J2))202,202,203
202 J2=J2-LCL(J2)
    GO TO 206
203 IF(LL(J2)-1)204,204,205
204 J2=N+LCL1(J2)
    GO TO 206
205 J2= NNL1+LCL2(J2)
206 IF(LL(K1))2061,2061,2062
2061 K1=K1-LCL(K1)
    GO TO 2065
2062 IF(LL(K1)-1)2063,2063,2064
2063 K1=N+LCL1(K1)
    GO TO 2065
2064 K1= NNL1+LCL2(K1)
2065 IF(LL(K2))2066,2066,2067
2066 K2=K2-LCL(K2)
    GO TO 2070
2067 IF(LL(K2)-1)2068,2068,2069
2068 K2=N+LCL1(K2)
    GO TO 2070
2069 K2= NNL1+LCL2(K2)
2070 RETURN
    END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR SARI1  
COMMON 19610 VARIABLES 2 PROGRAM 406

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA SARI1  
CART ID 0005 DB ADDR 1B5C DB CNT 001A

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0005	0005	0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

\*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE SARI2(IA,JA,KA,LA,I)

INTEGER SUBN

COMMON S(78,78),JI(60),JJ(60),JK(60),JL(60),SUBN,NCJ,NEL,NCE,I1,I2  
1,I3,J1,J2,J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,LL(78),LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL  
22(78),FTC(78,2),NSUS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJU3,NNL,NNL1,JD,NJL1  
3A,X(39),Y(39),ID1,ID2,ID3,ID4,ID5,ID6,ID7,ID8,ID9,ID10,ID11,ID12,  
4ITP,NJU2

C ESTA E UMA SUBROUTINE AUXILIAR UTILIZADA AO SE ESPALHAR A MATRIZ  
C DE RIGIDEZ SMD DO ELEMENTO I CONSIDERADO. E USADA QUANDO O ELEMENTO I POSSUI 3 OU 4 NOS E SAO POSSIVEIS 3 DESLOCAMENTOS POR NO.  
C ELA ALTERA A NUMERACAO INICIALMENTE ARBITRADA PARA OS DESLOCAMENTOS DOS NOS DO ELEMENTO I VISANDO OBTER A MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL S COM SUAS LINHAS E COLUNAS REORGANIZADAS.

I1=3\*IA-2

I2=3\*IA-1

I3=3\*IA

J1=3\*JA-2

J2=3\*JA-1

J3=3\*JA

K1=3\*KA-2

K2=3\*KA-1

K3=3\*KA

IF(LL(I1))187,187,188

187 I1=I1-LCL(I1)

GO TO 191

188 IF(LL(I1)-1)189,189,190

189 I1=N+LCL1(I1)

GO TO 191

190 I1= NNL1+LCL2(I1)

191 IF(LL(I2))192,192,193

192 I2=I2-LCL(I2)

GO TO 1950

193 IF(LL(I2)-1)194,194,195

194 I2=N+LCL1(I2)

GO TO 1950

195 I2= NNL1+LCL2(I2)

PAGE 2

1950 IF(LL(I3))1951,1951,1952  
1951 I3=I3-LCL(I3)  
GO TO 196  
1952 IF(LL(I3)-1)1953,1953,1954  
1953 I3=N+LCL1(I3)  
GO TO 196  
1954 I3= NNL1+LCL2(I3)  
196 IF(LL(J1))197,197,198  
197 J1=J1-LCL(J1)  
GO TO 201  
198 IF(LL(J1)-1)199,199,200  
199 J1=N+LCL1(J1)  
GO TO 201  
200 J1= NNL1+LCL2(J1)  
201 IF(LL(J2))202,202,203  
202 J2=J2-LCL(J2)  
GO TO 2050  
203 IF(LL(J2)-1)204,204,205  
204 J2=N+LCL1(J2)  
GO TO 2050  
205 J2= NNL1+LCL2(J2)  
2050 IF(LL(J3))2051,2051,2052  
2051 J3=J3-LCL(J3)  
GO TO 206  
2052 IF(LL(J3)-1)2053,2053,2054  
2053 J3=N+LCL1(J3)  
GO TO 206  
2054 J3= NNL1+LCL2(J3)  
206 IF(LL(K1))2061,2061,2062  
2061 K1=K1-LCL(K1)  
GO TO 2065  
2062 IF(LL(K1)-1)2063,2063,2064  
2063 K1=N+LCL1(K1)  
GO TO 2065  
2064 K1= NNL1+LCL2(K1)  
2065 IF(LL(K2))2066,2066,2067  
2066 K2=K2-LCL(K2)  
GO TO 2070  
2067 IF(LL(K2)-1)2068,2068,2069  
2068 K2=N+LCL1(K2)  
GO TO 2070  
2069 K2= NNL1+LCL2(K2)  
2070 IF(LL(K3))2071,2071,2072  
2071 K3=K3-LCL(K3)  
GO TO 2075  
2072 IF(LL(K3)-1)2073,2073,2074  
2073 K3=N+LCL1(K3)  
GO TO 2075  
2074 K3= NNL1+LCL2(K3)

PAGE 3

2075 IF(LTE(I)-1)2091,2076,2091  
2076 LA=JL(I)-NCJ  
L1=3\*LA-2  
L2=3\*LA-1  
L3=3\*LA  
IF(LL(L1))2077,2077,2078  
2077 L1=L1-LCL(L1)  
GO TO 2081  
2078 IF(LL(L1)-1)2079,2079,2080  
2079 L1=N+LCL1(L1)  
GO TO 2081  
2080 L1= NNL1+LCL2(L1)  
2081 IF(LL(L2))2082,2082,2083  
2082 L2=L2-LCL(L2)  
GO TO 2086  
2083 IF(LL(L2)-1)2084,2084,2085  
2084 L2=N+LCL1(L2)  
GO TO 2086  
2085 L2= NNL1+LCL2(L2)  
2086 IF(LL(L3))2087,2087,2088  
2087 L3=L3-LCL(L3)  
GO TO 2091  
2088 IF(LL(L3)-1)2089,2089,2090  
2089 L3=N+LCL1(L3)  
GO TO 2091  
2090 L3= NNL1+LCL2(L3)  
2091 RETURN  
END

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR SARI2  
COMMON 19610 VARIABLES 2 PROGRAM 834

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA SARI2  
CART ID 0005 DB ADDR 1B76 DB CNT 0034

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0005	0005	0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

\*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE SAGES(IN1,IN2,I,SMD)

INTEGER SUBN

DIMENSION SMD(12,12)

COMMON S(78,78),JI(60),JJ(60),JK(60),JL(60),SUBN,NCJ,NEL,NCE,I1,I2  
1,I3,J1,J2,J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,LL(78),LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL  
22(78),FTC(78,2),NSUS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJU3,NNL,NNL1,JD,NJL1  
3A,X(39),Y(39),ID1,ID2,ID3,ID4,ID5,ID6,JD,NJL1  
4ITP,NJU2

C

C ESTA E UMA SUBROUTINE AUXILIAR UTILIZADA AO SE ESPALHAR A MATRIZ  
C DE RIGIDEZ SMD DO ELEMENTO I CONSIDERADO. ELA ADICIONA AOS  
C COEFICIENTES ADEQUADOS DA COLUNA IN1 DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL  
C S A CONTRIBUICAO DA COLUNA IN2 DA MATRIZ SMD.

C

IF(ITP-1)99,99,100

99 S(I1,IN1)=S(I1,IN1)+SMD(1,IN2)  
S(I2,IN1)=S(I2,IN1)+SMD(2,IN2)  
S(J1,IN1)=S(J1,IN1)+SMD(3,IN2)  
S(J2,IN1)=S(J2,IN1)+SMD(4,IN2)  
S(K1,IN1)=S(K1,IN1)+SMD(5,IN2)  
S(K2,IN1)=S(K2,IN1)+SMD(6,IN2)

GO TO 102

100 S(I1,IN1)=S(I1,IN1)+SMD(1,IN2)  
S(I2,IN1)=S(I2,IN1)+SMD(2,IN2)  
S(I3,IN1)=S(I3,IN1)+SMD(3,IN2)  
S(J1,IN1)=S(J1,IN1)+SMD(4,IN2)  
S(J2,IN1)=S(J2,IN1)+SMD(5,IN2)  
S(J3,IN1)=S(J3,IN1)+SMD(6,IN2)  
S(K1,IN1)=S(K1,IN1)+SMD(7,IN2)  
S(K2,IN1)=S(K2,IN1)+SMD(8,IN2)  
S(K3,IN1)=S(K3,IN1)+SMD(9,IN2)

IF(LTE(I)-1)102,101,102

101 S(L1,IN1)=S(L1,IN1)+SMD(10,IN2)  
S(L2,IN1)=S(L2,IN1)+SMD(11,IN2)  
S(L3,IN1)=S(L3,IN1)+SMD(12,IN2)

102 RETURN  
END

PAGE 2

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR SAGES

COMMON 19610 VARIABLES 16 PROGRAM 516

END OF COMPIILATION

// DUP

\*STORE WS UA SAGES

D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE  
0000 0005 0005 0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

\*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE RITET(ITP,IA,JA,KA,SMD,I,SUBN)

INTEGER SUBN

DIMENSION D(3,3),B(3,6),SMD(12,12),DB(3,6),ESP(60),LCE(60),X(39),  
1Y(39),E(5),CP(5)

C

C ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ELEMENTOS TRIANGULARES ISOTROPOS  
C UTILIZADOS EM PROBLEMAS DE ESTADOS PLANOS DE TENSOES E DEFORMA-  
C COES. ELA CALCULA A MATRIZ DB (PRODUTO DAS MATRIZES D E B) NECES-  
C SARIA AO CALCULO DAS TENSOES E A MATRIZ DE RIGIDEZ SMD DO ELEMEN-  
C TO I CONSIDERADO.

C

ID=2\*(SUBN-1)+1

READ(2>ID)X,Y,E,CP,ESP,LCE

DO 101 K=1,3

DO 101 J=1,3

101 D(J,K)=0.0

DO 102 K=1,6

DO 102 J=1,3

102 B(J,K)=0.0

II=LCE(I)

EE=E(II)

COP=CP(II)

IF(ITP)104,105,106

104 STOP

C

C MATRIZ DE TRANSFORMACAO D PARA ESTADO PLANO DE DEFORMACOES

C

105 VA=EE\*(1.0-COP)/(1.0+COP)/(1.0-2.0\*COP)

D(1,1)=VA

D(2,1)=VA\*COP/(1.0-COP)

D(1,2)=D(2,1)

D(2,2)=D(1,1)

D(3,3)=VA\*(1.0-2.0\*COP)/(2.0-2.0\*COP)

GO TO 107

C

C MATRIZ DE TRANSFORMACAO D PARA ESTADO PLANO DE TENSOES

C

106 VA=EE/(1.0-COP\*\*2)

PAGE 2

```
D(1,1)=VA  
D(2,1)=VA*COP  
D(1,2)=D(2,1)  
D(2,2)=D(1,1)  
D(3,3)=VA*(1.0-COP)/2.0
```

C  
C MATRIZ DE TRANSFORMACAO B E MATRIZ DB  
C

```
107 GX=(X(IA)+X(JA)+X(KA))/3.0  
GY=(Y(IA)+Y(JA)+Y(KA))/3.0  
AR2=3.0*((X(JA)-GX)*(Y(KA)-GY)-(Y(JA)-GY)*(X(KA)-GX))  
B(1,1)=(Y(JA)-Y(KA))/AR2  
B(3,1)=(X(KA)-X(JA))/AR2  
B(2,2)=B(3,1)  
B(3,2)=B(1,1)  
B(1,3)=(Y(KA)-Y(IA))/AR2  
B(3,3)=(X(IA)-X(KA))/AR2  
B(2,4)=B(3,3)  
B(3,4)=B(1,3)  
B(1,5)=(Y(IA)-Y(JA))/AR2  
B(3,5)=(X(JA)-X(IA))/AR2  
B(2,6)=B(3,5)  
B(3,6)=B(1,5)  
DO 108 K=1,6  
DO 108 J=1,3  
DB(J,K)=0.0  
DO 108 L=1,3  
108 DB(J,K)=DB(J,K)+D(J,L)*B(L,K)  
IID=2+SUBN  
WRITE(IID'I')((DB(J,K),J=1,3),K=1,6),IA,JA,KA
```

C  
C MATRIZ DE RIGIDEZ SMD  
C

```
VOL=AR2*ESP(I)/2.0  
DO 109 K=1,6  
DO 109 J=1,6  
SMD(J,K)=0.0  
DO 109 L=1,3  
109 SMD(J,K)=SMD(J,K)+B(L,J)*DB(L,K)*VOL  
RETURN  
END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR RITET  
COMMON 0 VARIABLES

690 PROGRAM

774

PAGE 1

// JOR

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0005	0005	0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE RIPET(I,SMD,JI,JJ,JK,NCJ,SUBN)

INTEGER SUBN

DIMENSION SMD(12,12),EX(5),EY(5),EE(5),G(5),ESP(60),LCE(60),T(7,9)  
I,H(7,9),B(3),C(3),E(7),XI(7),YI(7),JI(60),JJ(60),JK(60),X(39),  
2Y(39)

C  
C ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ELEMENTOS TRIANGULADES ORTOROTROPOS UTILIZADOS NA ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE. ELA CALCULA A MATRIZ DE RIGIDEZ SMD DO ELEMENTO I CONSIDERADO E A MATRIZ B/T (PRODUTO DAS MATRIZES B/E T) NECESSARIAS AO CALCULO DOS MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO.

ID=2\*(SUBN-1)+1  
READ(2>ID)X,Y,EX,EY,EE,G,ESP,LCE  
IA=JI(I)-NCJ  
JA=JJ(I)-NCJ  
KA=JK(I)-NCJ  
II=LCE(I)  
VA=ESP(I)\*\*3/12.0  
DX=EX(II)\*VA  
DY=EY(II)\*VA  
DI=EE(II)\*VA  
DXY=G(II)\*VA  
XG=(X(IA)+X(JA)+X(KA))/3.0  
XG=(X(IA)+X(JA)+X(KA))/3.0  
YG=(Y(IA)+Y(JA)+Y(KA))/3.0  
X1=X(IA)-XG  
X2=X(JA)-XG  
X3=X(KA)-XG  
Y1=Y(IA)-YG  
Y2=Y(JA)-YG  
Y3=Y(KA)-YG  
B(1)=Y2-Y3  
B(2)=Y3-Y1  
B(3)=Y1-Y2  
C(1)=X3-X2  
C(2)=X1-X3  
C(3)=X2-X1

PAGE 2

A=X2\*Y3-X3\*Y2

AR=1.5\*A

AR2=2.0\*AR

DO 101 K=1,9

DO 101 J=1,7

T(J,K)=0.0

101

C

C

CALCULO DA MATRIZ T

DO 102 K=1,3

K1=3\*(K-1)+1

DO 102 J=1,3

J1=2\*(J-1)+1

T(J1,K1)=C(K)/AR2

102

T(J1+1,K1)=-B(K)/AR2

T(1,2)=1.0

T(2,3)=1.0

T(3,5)=1.0

T(4,6)=1.0

T(5,8)=1.0

T(6,9)=1.0

C

C

C

CALCULO DA MATRIZ B'

E(1)=A\*(B(1)\*B(2)+B(2)\*B(3)+B(3)\*B(1))

E(2)=A\*(C(1)\*B(2)+B(1)\*C(2)+C(2)\*B(3)+B(2)\*C(3)+C(3)\*B(1)+B(3)\*

1\*C(1))

E(3)=A\*(C(1)\*C(2)+C(2)\*C(3)+C(3)\*C(1))

E(4)=B(1)\*B(2)\*B(3)

E(5)=C(1)\*B(2)\*B(3)+C(2)\*B(3)\*B(1)+C(3)\*B(1)\*B(2)

E(6)=C(1)\*C(2)\*B(3)+C(2)\*C(3)\*B(1)+C(3)\*C(1)\*B(2)

E(7)=C(1)\*C(2)\*C(3)

DO 107 II=1,3

IF(II-2)103,104,105

103

J=2

K=3

GO TO 106

104

J=3

K=1

GO TO 106

105

J=1

K=2

106

X1(1)=B(11)\*A\*(B(11)+2.0\*B(1))

X1(2)=2.0\*A\*(B(11)\*C(11)+B(12)\*C(11)+B(11)\*C(12))

X1(3)=C(11)\*A\*(C(11)+2.0\*C(12))

X1(4)=B(11)\*\*2\*B(1)

X1(5)=B(11)\*(2.0\*C(11)\*B(12)+B(11)\*C(12))

X1(6)=C(11)\*(C(11)\*B(12)+2.0\*B(11)\*C(12))

X1(7)=C(11)\*\*2\*C(12)

PAGE 3

```
YI(1)=B(I I)*A*(B(I I)+2.0*B(K))
YI(2)=2.0*A*(B(I I)*C(I I)+B(K)*C(I I)+B(I I)*C(K))
YI(3)=C(I I)*A*(C(I I)+2.0*C(K))
YI(4)=B(I I)**2*B(K)
YI(5)=B(I I)*(2.0*C(I I)*R(K)+B(I I)*C(K))
YI(6)=C(I I)*(C(I I)*B(K)+2.0*R(I I)*C(K))
YI(7)=C(I I)**2*C(K)
FI=(B(K)-B(J))/2.0
GI=(C(K)-C(J))/2.0
IIA=2*I I
DO 107 LA=1,7
H(LA,IIA-1)=XI(LA)*B(K)-YI(LA)*B(J)+E(LA)*FI
107 H(LA,IIA)=XI(LA)*C(K)-YI(LA)*C(J)+E(LA)*GI
```

C CALCULO DO PRODUTO B\*T

```
DO 108 K=1,9
DO 108 J=1,7
SMD(J,K)=0.0
DO 108 LA=1,6
108 SMD(J,K)=SMD(J,K)+H(J,LA)*T(LA,K)
DO 109 J=1,7
DO 109 K=1,J
109 T(J,K)=0.0
```

C CALCULO DA MATRIZ QUE SUBSTITUE A INTEGRAL

```
SQX=X1**2+X2**2+X3**2
SXY=X1*Y1+X2*Y2+X3*Y3
SQY=Y1**2+Y2**2+Y3**2
VA=0.015625/AR**5
T(1,1)=4.0*DX*VA
T(3,1)=4.0*D1*VA
T(2,2)=4.0*DXY*VA
T(3,3)=4.0*DY*VA
T(4,4)=3.0*DX*SQX*VA
T(5,4)=DX*SXY*VA
T(6,4)=D1*SOX*VA
T(7,4)=3.0*D1*SXY*VA
T(5,5)=(DX*SQY/3.0+1.333333*DXY*SQX)*VA
T(6,5)=(D1*SXY/3.0+1.333333*DXY*SQY)*VA
T(7,5)=D1*SQY*VA
T(6,6)=(DY*SQX/3.0+1.333333*DXY*SQY)*VA
T(7,6)=DY*SXY*VA
T(7,7)=3.0*DY*SQY*VA
DO 110 J=1,7
DO 110 K=1,J
110 T(K,J)=T(J,K)
```

PAGE 4

C CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ SMD

```
DO 111 K=1,9
DO 111 J=1,7
H(J,K)=0.0
DO 111 LA=1,7
111 H(J,K)=H(J,K)+T(J,LA)*SMD(LA,K)
DO 112 K=1,9
DO 112 J=1,7
112 T(J,K)=SMD(LJ,K)
DO 113 K=1,9
DO 113 J=1,9
SMD(J,K)=0.0
DO 113 LA=1,7
113 SMD(J,K)=SMD(J,K)+T(LA,J)*H(LA,K)
IID=2+SUBN
WRITE(IID'I)DX,DY,D1,DXY,AR,((T(J,K),K=1,9),J=1,3),IA,JA,KA
RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR RIPET

COMMON 0 VARIABLES 1098 PROGRAM 2040

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA RIPET  
CART ID 0005 DB ADDR 1C37 DB CNT 0093

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0005	0005	0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE RIMER(I,SMD)

INTEGER SUBN

DIMENSION SMD(12,12),EX(5),EY(5),EE(5),G(5),ESP(60),LCE(60),  
1VEL(12)  
COMMON S(78,78),JI(60),JJ(60),JK(60),JL(60),SUBN,NCJ,NEL,NCE,I1,I2  
1,I3,J1,J2,J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,LL(78),LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL  
22(78),FTC(78,2),NSUS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJU3,NNL,NNL1,JD,NJL1  
3A,X(39),Y(39),ID1,ID2,IDL,IDL4,IDL5,IDL6,IDL7,IDL8,IDL9,IDL10,  
IDL11,IDL12,  
4ITP,NJUP

C

C ESTA SURROUTINE REFERE-SE A ELEMENTOS RETANGULARES ORTOTROPICOS  
C UTILIZADOS NA ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE. ELA  
C CALCULA A MATRIZ DE RIGIDEZ SMD DO ELEMENTO I CONSIDERADO.

ID=2\*(SUPN-1)+1

READ(2>ID)X,Y,EX,EY,EE,G,ESP,LCE

IA=JI(I)-NCJ

JA=JJ(I)-NCJ

LA=JL(I)-NCJ

A=SQRT((X(LA)-X(IA))\*\*2+(Y(LA)-Y(IA))\*\*2)

B=SQRT((X(JA)-X(IA))\*\*2+(Y(JA)-Y(IA))\*\*2)

P2=A\*\*2/B\*\*2

II=LCE(1)

VA1=0.06666666/A/B

VA2=ESP(I)\*\*3/12.0

DX=EX(II)\*VA2

DY=EY(II)\*VA2

D1=EE(II)\*VA2

DXY=G(II)\*VA2

SMD(1,1)=60.0/P2\*DX+60.0\*P2\*DY+30.0\*D1+84.0\*DXY

SMD(2,1)=-30.0\*P2\*DY-15.0\*D1-6.0\*DXY

SMD(3,1)=30.0/P2\*DX+15.0\*D1+6.0\*DXY

SMD(4,1)=30.0/P2\*DX-60.0\*P2\*DY-30.0\*D1-84.0\*DXY

SMD(5,1)=-30.0\*P2\*DY-6.0\*DXY

SMD(6,1)=15.0/P2\*DX-15.0\*D1-6.0\*DXY

SMD(7,1)=-30.0/P2\*DX-30.0\*P2\*DY-30.0\*D1+84.0\*DXY

SMD(8,1)=-15.0\*P2\*DY+6.0\*DXY

SMD(9,1)=15.0/P2\*DX-6.0\*DXY

PAGE 2

SMD(10,1)=-60.0/P2\*DX+30.0\*P2\*DY-30.0\*D1-84.0\*DXY  
SMD(11,1)=-15.0\*P2\*DY+15.0\*D1+6.0\*DXY  
SMD(12,1)=30.0/P2\*DX+6.0\*DXY  
SMD(2,2)=20.0\*P2\*DY+8.0\*DXY  
SMD(3,2)=-15.0\*D1  
SMD(4,2)=-SMD(5,1)  
SMD(5,2)=10.0\*P2\*DY-2.0\*DXY  
SMD(6,2)=0.0  
SMD(7,2)=-SMD(8,1)  
SMD(8,2)=5.0\*P2\*DY+2.0\*DXY  
SMD(9,2)=0.0  
SMD(10,2)=SMD(11,1)  
SMD(11,2)=10.0\*P2\*DY-8.0\*DXY  
SMD(12,2)=0.0  
SMD(3,3)=20.0/P2\*DX+8.0\*DXY  
SMD(4,3)=SMD(6,1)  
SMD(5,3)=0.0  
SMD(6,3)=10.0/P2\*DX-8.0\*DXY  
SMD(7,3)=-SMD(9,1)  
SMD(8,3)=0.0  
SMD(9,3)=5.0/P2\*DX+2.0\*DXY  
SMD(10,3)=-SMD(12,1)  
SMD(11,3)=0.0  
SMD(12,3)=10.0/P2\*DX-2.0\*DXY  
SMD(4,4)=SMD(1,1)  
SMD(5,4)=-SMD(2,1)  
SMD(6,4)=SMD(3,1)  
SMD(7,4)=SMD(10,1)  
SMD(8,4)=-SMD(11,1)  
SMD(9,4)=SMD(12,1)  
SMD(10,4)=SMD(7,1)  
SMD(11,4)=-SMD(8,1)  
SMD(12,4)=SMD(9,1)  
SMD(5,5)=SMD(2,2)  
SMD(6,5)=-SMD(3,2)  
SMD(7,5)=-SMD(11,1)  
SMD(8,5)=SMD(11,2)  
SMD(9,5)=0.0  
SMD(10,5)=SMD(8,1)  
SMD(11,5)=SMD(8,2)  
SMD(12,5)=0.0  
SMD(6,6)=SMD(3,3)  
SMD(7,6)=-SMD(12,1)  
SMD(8,6)=0.0  
SMD(9,6)=SMD(12,3)  
SMD(10,6)=-SMD(9,1)  
SMD(11,6)=0.0  
SMD(12,6)=SMD(9,3)  
SMD(7,7)=SMD(1,1)

PAGE 3

```
SMD(8,7)=-SMD(2,1)
SMD(9,7)=-SMD(3,1)
SMD(10,7)=SMD(4,1)
SMD(11,7)=-SMD(5,1)
SMD(12,7)=-SMD(6,1)
SMD(8,8)=SMD(2,2)
SMD(9,8)=SMD(3,2)
SMD(10,8)=SMD(5,1)
SMD(11,8)=SMD(5,2)
SMD(12,8)=0.0
SMD(9,9)=SMD(3,3)
SMD(10,9)=-SMD(6,1)
SMD(11,9)=0.0
SMD(12,9)=SMD(6,3)
SMD(10,10)=SMD(1,1)
SMD(11,10)=SMD(2,1)
SMD(12,10)=-SMD(3,1)
SMD(11,11)=SMD(2,2)
SMD(12,11)=-SMD(3,2)
SMD(12,12)=SMD(3,3)
DO 100 J=1,4
VEL(3*j-2)=1.0
VEL(3*j-1)=8
100 VEL(3*j)=A
DO 101 J=1,12
DO 101 K=1,J
SMD(J,K)=VEL(J)*SMD(J,K)+VEL(K)*VA1
101 SMD(K,J)=SMD(J,K)
RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR RIPER

COMMON 19610 VARIABLES

394 PROGRAM 1468

END OF COMPIRATION

// DUP

\*STORE WS UA RIPER
CART ID 0005 DB ADDR 1RAA DB CNT 006E

PAGE 1

// JOR

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE  
0000 0005 0005 0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE DCOMP(N,S)

DIMENSION S(78,78)

C  
C AS SUBROUTINES DCOMP E INVER INVERTEM MATRIZES SIMETRICAS UTILI-  
C ZANDO O METODO DE CHOLESKI. NESTA SUBROUTINE A MATRIZ S (OU A SUB-  
C MATRIZ NXN NELA CONTIDA) E' DECOMPOSTA FORNECENDO A MATRIZ TRIAN-  
C GULAR SUPERIOR NECESSARIA A SUA INVERSAO.

DO 108 I=1,N  
DO 108 J=I,N  
STE=S(I,J)  
K1=I-1  
IF(I-1)101,103,101  
101 DO 102 K=1,K1  
102 STE=STE-S(K,I)\*S(K,J)  
103 IF(J-I)107,104,107  
104 IF(STE)105,105,1050  
105 WRITE(3,1) I,J,STE  
1 FORMAT(//1X,'ELEMENTO NA DIAGONAL NEGATIVO OU NULO-PARE. I=',I5,  
1' J=',I5,' STE=',F15.4,'')  
STOP  
1050 IF(STE-0.1)1051,106,106  
1051 WRITE(3,2)STE  
2 FORMAT(//1X,'STE=',F15.5)  
106 VAUX=1.0/SQRT(STE)  
S(I,J)=VAUX  
GO TO 108  
107 S(I,J)=STE\*VAUX  
108 CONTINUE  
RETURN  
END

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS,  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR DCOMP  
COMMON 0 VARIABLES

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE  
0000 0005 0005 0000

V20 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*EXTENDED PRECISION

    SUBROUTINE INVER(N,S)

    DIMENSION S(78,78)

C  
C AS SUBROUTINES DCOMP E INVER INVERTEM MATRIZES SIMETRICAS UTILI-  
C ZANDO O METODO DE CHOLESKI. NESTA SUBROUTINE OBTEM-SE A MATRIZ  
C INVERSA DE S (OU DA SUBMATRIZ NXN NELA CONTIDA) UTILIZANDO A MA-  
C TRIZ OBTIDA NA SUBROUTINE DCOMP.

I1=N-1  
DO 102 I=1,I1  
J1=I+1  
DO 102 J=J1,N  
STE=0.0  
K1=J-1  
DO 101 K=I,K1  
STE=STE-S(K,I)\*S(K,J)  
S(J,I)=STE\*S(J,J)  
102 CONTINUE  
DO 104 I=1,N  
DO 104 J=I,N  
STE=0.0  
DO 103 K=J,N  
STE=STE+S(K,I)\*S(K,J)  
S(I,J)=STE  
S(J,I)=STE  
104 CONTINUE  
RETURN  
END

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR INVER  
COMMON 0 VARIABLES

END OF COMPILATION

A5 - SUBROTINAS ASSOCIADAS AO SUBPROGRAMA MEFI2

1) Subrotina FOMAS

Esta subrotina refere-se a problemas de estados planos de tensões e deformações. Ela calcula, para elementos triangulares, as cargas nodais equivalentes a fôrças de massa quando suas componentes  $F_{MX}$  e  $F_{MY}$  são constantes em cada elemento (podendo todavia variar de elemento para elemento).

2) Subrotina FECA

Esta subrotina refere-se à análise de placas carregadas transversalmente. Ela calcula, para elementos retangulares, as cargas nodais equivalentes a um carregamento uniformemente distribuído sobre o elemento. Faz o mesmo para elementos triangulares.

3) Subrotina TENSA

Esta subrotina refere-se a elementos triangulares isótropos.

pos utilizados em problemas de estados planos de tensões e deformações. Ela calcula as tensões normais e de cisalhamento nos nós do elemento I ao mesmo tempo em que as adiciona às matrizes VEGA e LEGA. Estas matrizes permitirão o cálculo da média das tensões normais e de cisalhamento em cada ponto nodal.

4) Subrotina EGER

Esta subrotina refere-se a elementos retangulares ortotropos utilizados na análise de placas carregadas transversalmente. Ela calcula os momentos fletores e de torção nos nós do elemento I ao mesmo tempo em que os adiciona às matrizes VEGA e LEGA. Estas matrizes permitirão o cálculo da média dos momentos fletores e de torção em cada ponto nodal.

5) Subrotina EGET

Esta subrotina refere-se a elementos triangulares ortotropos utilizados na análise de placas carregadas transversalmente. Ela calcula os momentos fletores e de torção nos nós do elemento I ao mesmo tempo em que os adiciona às matrizes VEGA e LEGA. Estas matrizes permitirão o cálculo da média dos momentos fletores e de torção em cada ponto nodal.

6) Subrotina MEGE

Esta subrotina calcula a média dos esforços generalizados (tensões normais e de cisalhamento ou momentos fletores e de torção) nos pontos nodais. Em seguida calcula os esforços principais.

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0005	0005	0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE FOMAS(FEQ,NEL,JI,JJ,JK,NCJ,LN,NECA,ICD,NCE,SUBN)  
INTEGER SUBN

DIMENSION X(39),Y(39),FEQ(78,2),ESP(60),JI(60),JJ(60),JK(60),E(5),  
ICP(5),LIA(60),FMX(60),FMY(60)

C  
C ESTA SURROUTINE REFERE-SE A PROBLEMAS DE ESTADOS PLANOS DE TENSÕES  
C E DEFORMAÇÕES. ELA CALCULA, PARA ELEMENTOS TRIANGULARES, AS CARGAS  
C NODAIS EQUIVALENTES A FORÇAS DE MASSA QUANDO SUAS COMPONENTES FMX  
C E FMY SÃO CONSTANTES EM CADA ELEMENTO (PODENDO TODAVIA VARIAR DE  
C ELEMENTO PARA ELEMENTO).

101 ID=2\*(SUBN-1)+1  
1 READ(2,1)X,Y,E,CP,ESP  
1 IF(ICD)103,101,103  
101 READ(2,1)IA,VA1,VA2  
1 FORMAT(4(I4,2F8.3))  
DO 102 I=1,NEL  
1 LIA(I)=I+NCE  
1 FMX(I)=VA1  
102 FMY(I)=VA2  
2 WRITE(3,2)VA1,VA2  
2 FORMAT(13X,'TODOS',2F15.3)  
GO TO 104  
103 READ(2,1)(LIA(I),FMX(I),FMY(I),I=1,NECA)  
103 WRITE(3,3)(LIA(I),FMX(I),FMY(I),I=1,NECA)  
3 FORMAT(4(I5,F11.3,F10.3,3X))  
104 DO 105 IM=1,NECA  
104 I=LIA(IM)-NCE  
104 IA=JI(I)-NCJ  
104 JA=JJ(I)-NCJ  
104 KA=JK(I)-NCJ  
104 GX=(X(IA)+X(JA)+X(KA))/3.0  
104 GY=(Y(IA)+Y(JA)+Y(KA))/3.0  
104 AR=1.5\*((X(JA)-GX)\*(Y(KA)-GY)-(Y(JA)-GY)\*(X(KA)-GX))  
104 VA=ESP(I)\*AR/3.0  
104 FMXT=FMX(I)\*VA  
104 FMYT=FMY(I)\*VA  
11=2\*IA-1

PAGE 2

I2=2\*IA  
J1=2\*JA-1  
J2=2\*JA  
K1=2\*KA-1  
K2=2\*KA  
FEQ(I1,LN)=FEQ(I1,LN)+FMXT  
FEQ(I2,LN)=FEQ(I2,LN)+FMYT  
FEQ(J1,LN)=FEQ(J1,LN)+FMXT  
FEQ(J2,LN)=FEQ(J2,LN)+FMYT  
FEQ(K1,LN)=FEQ(K1,LN)+FMXT  
FEQ(K2,LN)=FEQ(K2,LN)+FMYT

105 CONTINUE  
RETURN  
END

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR FOMAS  
COMMON 0 VARIABLES 922 PROGRAM 524

END OF COMPILEATION

// DUP

\*STORE WS UA FOMAS  
CART ID 0005 DB ADDR 1CF0 DB CNT 0025

PAGE 1

// JOB 00FF 10FF

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0002
		2013	0001

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*EXTENDED PRECISION

\*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE FECA(FEQ,NECA,LN,ICD)

INTEGER SUBN

DIMENSION FEQ(78,2),Q(60),LIA(60)

COMMON S(78,78),JI(60),JJ(60),JK(60),JL(60),SUBN,NCJ,NEL,NCE,I1,I2  
1,I3,J1,J2,J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,LL(78),LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL  
22(78),FTC(78,2),NSUS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJU3,NNL,NNL1,JD,NJL1  
3A,X(39),Y(39),ID1,ID2,ID3,ID4,ID5,ID6,ID7,ID8,ID9,ID10,ID11,ID12,  
4ITP,NJU2

C  
C  
C  
C  
C  
C

ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE. ELA CALCULA, PARA ELEMENTOS RETANGULARES, AS CARGAS NODUAIS EQUIVALENTES A UM CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDO SOBRE O ELEMENTO. FAZ O MESMO PARA ELEMENTOS TRIANGULARES.

ID=2\*(SUBN-1)+1  
READ(2>ID)X,Y  
IF(ICD)103,101,103  
101 READ(2,1)IA,VA  
1 FORMAT(4(I5,F15.3,8X))  
DO 102 I=1,NEL  
LIA(I)=I+NCE  
102 Q(I)=VA  
WRITE(3,2)VA  
2 FORMAT( 3X,'TODOS',F12.3)  
GO TO 104  
103 READ(2,3)(LIA(I),Q(I),I=1,NECA)  
3 FORMAT(4(I5,F15.3))  
WRITE(3,1)(LIA(I),Q(I),I=1,NECA)  
104 DO 110 IM=1,NECA  
I=LIA(IM)-NCE  
IA=JI(I)-NCJ  
JA=JJ(I)-NCJ  
KA=JK(I)-NCJ  
IF(LTE(I))108,107,108  
107 CAT=((X(JA)\*Y(KA)-Y(JA)\*X(KA))+X(IA)\*(Y(JA)-Y(KA))+Y(IA)\*  
1(X(KA)-X(JA)))\*Q(I)/6.0  
FEQ(3\*IA-2,LN)=FEQ(3\*IA-2,LN)+CAT

PAGE 2

```
FEQ(3*JA-2,LN)=FEQ(3*JA-2,LN)+CAT
FEQ(3*KA-2,LN)=FEQ(3*KA-2,LN)+CAT
GO TO 110
108 LA=JL(I)-NCJ
A=SQRT((X(LA)-X(IA))**2+(Y(LA)-Y(IA))**2)
B=SQRT((X(JA)-X(IA))**2+(Y(JA)-Y(IA))**2)
CAT=Q(I)*A*B
FEQ(3*IA-2,LN)=FEQ(3*IA-2,LN)+CAT/4.0
FEQ(3*IA-1,LN)=FEQ(3*IA-1,LN)-CAT*B/24.0
FEQ(3*IA,LN)=FEQ(3*IA,LN)+CAT*A/24.0
FEQ(3*JA-2,LN)=FEQ(3*JA-2,LN)+CAT/4.0
FEQ(3*JA-1,LN)=FEQ(3*JA-1,LN)+CAT*B/24.0
FEQ(3*JA,LN)=FEQ(3*JA,LN)+CAT*A/24.0
FEQ(3*KA-2,LN)=FEQ(3*KA-2,LN)+CAT/4.0
FEQ(3*KA-1,LN)=FEQ(3*KA-1,LN)+CAT*B/24.0
FEQ(3*KA,LN)=FEQ(3*KA,LN)-CAT*A/24.0
FEQ(3*LA-2,LN)=FEQ(3*LA-2,LN)+CAT/4.0
FEQ(3*LA-1,LN)=FEQ(3*LA-1,LN)-CAT*B/24.0
FEQ(3*LA,LN)=FEQ(3*LA,LN)-CAT*A/24.0
110 CONTINUE
RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR FECA  
COMMON 19610 VARIABLES 282 PROGRAM 718

END OF COMPIILATION

// DUP

\*STORE WS UA FECA
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE  
0000 0005 0005 0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*EXTENDED PRECISION.

SUBROUTINE TENSA(DJ,I,VEGA,LEGA,SUBN,NCA)

INTEGER SUBN

DIMENSION DB(3,6),DJ(78,2),SIG(3),DJA(6),VEGA(117,2),LEGA(117,2),  
LAJ(3)

C

C ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ELEMENTOS TRIANGULARES ISOTROPOS UTILIZADOS EM PROBLEMAS DE ESTADOS PLANOS DE TENSOES E DEFORMACOES.  
C ELA CALCULA AS TENSOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO NOS NOS DO ELEMENTO I AO MESMO TEMPO EM QUE AS ADICIONA AS MATRIZES VEGA E LEGA.  
C ESTAS MATRIZES PERMITIRAO O CALCULO DA MEDIA DAS TENSOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO EM CADA PONTO NODAL.

C

I ID=2+SUBN

READ(IID,I)((DB(J,K),J=1,3),K=1,6);IA,JA,KA

C

MATRIZ DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO I

C

DO 112 LN=1,NCA

DJA(1)=DJ(2\*IA-1,LN)

DJA(2)=DJ(2\*IA,LN)

DJA(3)=DJ(2\*JA-1,LN)

DJA(4)=DJ(2\*JA,LN)

DJA(5)=DJ(2\*KA-1,LN)

DJA(6)=DJ(2\*KA,LN)

C

TENSOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO NO ELEMENTO I

C

DO 101 II=1,3

SIG(II)=0.0

DO 101 J=1,6

101

SIG(II)=SIG(II)+DR(II,J)\*DJA(J)

LAJ(1)=IA

LAJ(2)=JA

LAJ(3)=KA

C

MATRIZES VEGA E LEGA

C

DO 106 J=1,3

PAGE 2

```
II=3*LAJ(J)
VEGA(II-2,LN)=VEGA(II-2,LN)+SIG 1)
VEGA(II-1,LN)=VEGA(II-1,LN)+SIG 2)
VEGA(II,LN)=VEGA(II,LN)+SIG(3)
LEGA(II-2,LN)=LEGA(II-2,LN)+1
LEGA(II-1,LN)=LEGA(II-1,LN)+1
106 LEGA(II,LN)=LEGA(II,LN)+1
112 CONTINUE
      RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR TENSA

COMMON 0 VARIABLES 104 PROGRAM 378

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA TENSA
CART ID 0005 DB ADDR 1D15 DB CNT 001A

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0005	0005	0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*EXTENDED PRECISION

```
      SUBROUTINE EGER(DJ, I, VEGA, LEGA)
      REAL MAT(12,12)
      INTEGER SUBN
      DIMENSION DJ(78,2),DJA(12),EX(5),EY(5),EE(5),G(5),VEGA(117,2),
      1ESP(60),VEG(12),LAJ(4),LCE(60),LEGA(117,2)
      COMMON S(78,78),JI(60),JJ(60),JK(60),JL(60),SUBN,NCJ,NEL,NCE,I1,I2
      1,I3,J1,J2,J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,LL(78),LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL
      22(78),FTC(78,2),NSUS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJU3,NNL,NNL1,JD,JD,NJL1
      3A,X(39),Y(39),ID1,ID2,ID3,ID4,ID5,ID6,ID7,ID8,ID9,ID10,ID11,ID12,
      4ITP,NJU2
      EQUIVALENCE (S(1,1),MAT(1,1))
```

C  
C ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ELEMENTOS RETANGULARES ORTOTROPICOS UTI-
C LIZADOS NA ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE. ELA CAL-
C CULA OS MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO NOS NOS DO ELEMENTO I AO
C MESMO TEMPO EM QUE OS ADICIONA AS MATRIZES VEGA E LEGA. ESTAS MA-
C TRIZES PERMITIRAO O CALCULO DA MEDIA DOS MOMENTOS FLETORES E DE
C TORCAO EM CADA PONTO NODAL.

```
ID=2*(SUBN-1)+1
READ(2>ID)X,Y,EX,EY,EE,G,ESP,LCE
DO 112 LN=1,NCA
IF(LN-1)1050,101,1050
101 IA=JI(I)-NCJ
JA=JJ(I)-NCJ
KA=JK(I)-NCJ
LA=JL(I)-NCJ
A=SQRT((X(LA)-X(IA))**2+(Y(LA)-Y(IA))**2)
B=SQRT((X(JA)-X(IA))**2+(Y(JA)-Y(IA))**2)
P=A/B
PX=A*B
II=LCE(I)
VA=ESP(I)**3/12.0
DX=EX(II)*VA
DY=EY(II)*VA
D1=EE(II)*VA
DXY=G(II)*VA
DO 104 K=1,6
```

PAGE 2

```
DO 104 J=1,12
104 MAT(J,K)=0.0
    MAT(1,1)=6.0*(DX/P+D1*P)/PX
    MAT(2,1)=6.0*(DY*P+D1/P)/PX
    MAT(3,1)=-2.0*DXY/PX
    MAT(4,1)=-6.0*P*D1/PX
    MAT(5,1)=-6.0*P*DY/PX
    MAT(6,1)=MAT(3,1)
    MAT(9,1)=MAT(3,1)
    MAT(10,1)=-6.0*DX/P/PX
    MAT(11,1)=-6.0*D1/P/PX
    MAT(12,1)=MAT(3,1)
    MAT(1,2)=-4.0*D1/B
    MAT(2,2)=-4.0*DY/B
    MAT(3,2)=2.0*DXY/A
    MAT(4,2)=2.0*D1/B
    MAT(5,2)=2.0*DY/B
    MAT(12,2)=MAT(3,2)
    MAT(1,3)=4.0*DX/A
    MAT(2,3)=4.0*D1/A
    MAT(3,3)=-2.0*DXY/B
    MAT(6,3)=MAT(3,3)
    MAT(10,3)=-2.0*DX/A
    MAT(11,3)=-2.0*D1/A
    MAT(1,4)=MAT(4,1)
    MAT(2,4)=MAT(5,1)
    MAT(3,4)=-MAT(6,1)
    MAT(4,4)=MAT(1,1)
    MAT(5,4)=MAT(2,1)
    MAT(6,4)=-MAT(3,1)
    MAT(7,4)=MAT(10,1)
    MAT(8,4)=MAT(11,1)
    MAT(9,4)=-MAT(12,1)
    MAT(12,4)=-MAT(9,1)
    MAT(1,5)=-MAT(4,2)
    MAT(2,5)=-MAT(5,2)
    MAT(4,5)=-MAT(1,2)
    MAT(5,5)=-MAT(2,2)
    MAT(6,5)=MAT(3,2)
    MAT(9,5)=MAT(12,2)
    MAT(3,6)=-MAT(6,3)
    MAT(4,6)=MAT(1,3)
    MAT(5,6)=MAT(2,3)
    MAT(6,6)=-MAT(3,3)
    MAT(7,6)=MAT(10,3)
    MAT(8,6)=MAT(11,3)
    DO 105 J=1,6
    J6=J+6
    MAT(J,7)=MAT(J6,1)
```

PAGE 3

```
MAT(J6,7)=MAT(J,1)
MAT(J,8)=-MAT(J6,2)
MAT(J6,8)=-MAT(J,2)
MAT(J,9)=-MAT(J6,3)
MAT(J6,9)=-MAT(J,3)
MAT(J,10)=MAT(J6,4)
MAT(J6,10)=MAT(J,4)
MAT(J,11)=-MAT(J6,5)
MAT(J6,11)=-MAT(J,5)
MAT(J,12)=-MAT(J6,6)
105 MAT(J6,12)=-MAT(J,6)
```

C  
C MATRIZ DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO I  
C

```
1050 DJA(1)=DJ(3*IA-2,LN)
DJA(2)=DJ(3*IA-1,LN)
DJA(3)=DJ(3*IA,LN)
DJA(4)=DJ(3*JA-2,LN)
DJA(5)=DJ(3*JA-1,LN)
DJA(6)=DJ(3*JA,LN)
DJA(7)=DJ(3*KA-2,LN)
DJA(8)=DJ(3*KA-1,LN)
DJA(9)=DJ(3*KA,LN)
DJA(10)=DJ(3*LA-2,LN)
DJA(11)=DJ(3*LA-1,LN)
DJA(12)=DJ(3*LA,LN)
```

C  
C MATRIZ DOS MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO NOS NOS DO ELEMENTO I  
C

```
DO 106 J=1,12
VEG(J)=0.0
DO 106 K=1,12
106 VEG(J)=VEG(J)+MAT(J,K)*DJA(K)
LAJ(1)=IA
LAJ(2)=JA
LAJ(3)=KA
LAJ(4)=LA
```

C  
C MATRIZES VEGA E LEGA  
C

```
DO 111 J=1,4
II=3*LAJ(J)
VEGA(II-2,LN)=VEGA(II-2,LN)+VEG(3*J-2)
VEGA(II-1,LN)=VEGA(II-1,LN)+VEG(3*J-1)
VEGA(II,LN)=VEGA(II,LN)+VEG(3*J)
LEGA(II-2,LN)=LEGA(II-2,LN)+1
LEGA(II-1,LN)=LEGA(II-1,LN)+1
111 LEGA(II,LN)=LEGA(II,LN)+1
112 CONTINUE
```

PAGE 4

RETURN  
END

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR EGER  
COMMON 19610 VARIABLES 434 PROGRAM 1388

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA EGER  
CART ID 0005 DB ADDR 1D8D DB CNT 0064

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0005	0005	0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE EGET(DJ,I,VEGA,LEGA,SUBN,NCA)

INTEGER SUBN

DIMENSION DJ(78,2),T(3,9),DA(3,3),ESF(3,9),DJA(9),VEGA(117,2),  
1LEGA(117,2),LAJ(3)

C  
C ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ELEMENTOS TRIANGULARES ORTOTROPOS UTI-  
LIZADOS NA ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE. ELA CAL-  
CULA OS MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO NOS NOS DO ELEMENTO I AO  
C MESMO TEMPO EM QUE OS ADICIONA AS MATRIZES VEGA E LEGA. ESTAS MA-  
C TRIZES PERMITIRAO O CALCULO DA MEDIA DOS MOMENTOS FLETORES E DE  
C TORCAO EM CADA PONTO NODAL.

IID=2+SUBN  
READ(IID)DX,DY,D1,DXY,AR,((T(J,K)+K=1,9),J=1,3),IA,JA,KA  
DO 112 LN=1,NCA  
IF(LN-I)104,100,104  
100 DO 101 K=1,3  
DO 101 J=1,3  
101 DA(J,K)=0.0  
VA=0.125/AR\*\*3  
DA(1,1)=-2.0\*DX\*VA  
DA(2,1)=-2.0\*D1\*VA  
DA(3,2)=2.0\*DXY\*VA  
DA(1,3)=DA(2,1)  
DA(2,3)=-2.0\*DY\*VA  
DO 102 K=1,9  
DO 102 J=1,3  
ESF(J,K)=0.0  
DO 102 II=1,3  
102 ESF(J,K)=ESF(J,K)+DA(J,II)\*T(II,K)  
C  
C MATRIZ DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO I  
C  
104 DJA(1)=DJ(3\*IA-2,LN)  
DJA(2)=DJ(3\*IA-1,LN)  
DJA(3)=DJ(3\*IA,LN)  
DJA(4)=DJ(3\*JA-2,LN)  
DJA(5)=DJ(3\*JA-1,LN)

PAGE 2

DJA(6)=DJ(3\*JA,LN)  
DJA(7)=DJ(3\*KA-2,LN)  
DJA(8)=DJ(3\*KA-1,LN)  
DJA(9)=DJ(3\*KA,LN)  
VT1=0.0  
VT2=0.0  
VT3=0.0

C  
C      MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO NO ELEMENTO I  
C

DO 105 J=1,9  
105 VT1=VT1+ESF(1,J)\*DJA(J)  
VT2=VT2+ESF(2,J)\*DJA(J)  
VT3=VT3+ESF(3,J)\*DJA(J)  
LAJ(1)=IA  
LAJ(2)=JA  
LAJ(3)=KA

C  
C      MATRIZES VEGA E LEGA  
C

DO 106 J=1,3  
106 II=3\*LAJ(J)  
VEGA(II-2,LN)=VT1+VEGA(II-2,LN)  
VEGA(II-1,LN)=VT2+VEGA(II-1,LN)  
VEGA(II,LN)=VT3+VEGA(II,LN)  
LEGA(II-2,LN)=LEGA(II-2,LN)+1  
LEGA(II-1,LN)=LEGA(II-1,LN)+1  
LEGA(II,LN)=LEGA(II,LN)+1  
CONTINUE  
112 RETURN  
END

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR EGRET

COMMON      0 VARIABLES      270 PROGRAM      622

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE      WS    UA    EGRET  
CART ID 0005    DB ADDR 1D2F

DB CNT      002B

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0005	0005	0000

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE MEGE(NJL1A,NJU,VEGA,LEGA,NCA,NCJ,ITP)

REAL MXD,MYD,MXYD,M1,M2

DIMENSION VEGA(117,2),LEGA(117,2)

C

C ESTA SUBROUTINE CALCULA A MEDIA DOS ESFORCOS GENERALIZADOS (TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO OU MOMENTOS FLETORES E DE TORÇÃO) NOS PONTOS NODAIS. EM SEGUIDA CALCULA OS ESFORCOS PRINCIPAIS.

IF(ITP=1)100,100,101

100 WRITE(3,3)

GO TO 102

101 WRITE(3,1)

1 FORMAT(/10X,'MOMENTOS FLETORES E DE TORÇÃO. MOMENTOS FLETORES PRINCIPAIS.'//3X,'NO1',9X,'MXD',12X,'MYD',12X,'MXYD',8X,'ALFA',12X,

2'M1',13X,'M2')/)

102 IA=NJL1A+1

DO 112 LN=1,NCA

WRITE(3,2)LN

2 FORMAT(/10X,'CARREGAMENTO NO.',13/)

3 FORMAT(/10X,'TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSÕES NORMAIS PRINCIPAIS.'//3X,'NO1',7X,'SIGXX',10X,'SIGYY',11X,'SIGXY',8X,

2'ALFA',10X,'SIG1',11X,'SIG2')/)

DO 112 J=IA,NJU

MXD=VEGA(3\*j-2,ln)/LEGA(3\*j-2,ln)

MYD=VEGA(3\*j-1,ln)/LEGA(3\*j-1,ln)

MXYD=VEGA(3\*j,ln)/LEGA(3\*j,ln)

IF(ITP=1)104,104,105

104 MXYD=-MXYD

105 P=ABS(MXD)+ABS(MYD)

IF(1.0E-15-P)106,106,109

106 IF(0.0005-ABS(MYD-MXD)/P)110,107,107

107 IF(0.0005-ABS(MXYD)/P)109,108,108

108 ALFA=0.0

GO TO 111

109 ALFA=0.7853981

GO TO 111

110 ALFA=ATAN(2\*MXYD/(MYD-MXD))/2.0

111 SA=SIN(ALFA)

PAGE 2

CA=COS(ALFA)  
M1=MXD\*CA\*\*2+MYD\*SA\*\*2-2.0\*MXYD\*SA\*CA  
M2=MXD\*SA\*\*2+MYD\*CA\*\*2+2.0\*MXYD\*SA\*CA  
ALFA=ALFA\*180.0/3.14159  
JA=J+NCJ  
IF(ITP-1)1110,1110,1111  
1110 MXYD=-MXYD  
1111 WRITE(3,4)JA,MXD,MYD,MXYD,ALFA,M1,M2  
4 112 FORMAT(15,3F15.5,F11.2,ZF15.5)  
112 CONTINUE  
RETURN  
END

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR MEGE  
COMMON 0 VARIABLES

46 PROGRAM 544

END OF COMPIILATION

// DUP

*STORE	WS	UA	MEGE		
CART ID: 0005	DB	ADDR	1CCA	DB CNT	0026

A6 - CONSIDERAÇÕES SÔBRE AS CONDIÇÕES DE CONTÔRNO NO BORDO LIVRE DE UMA PLACA

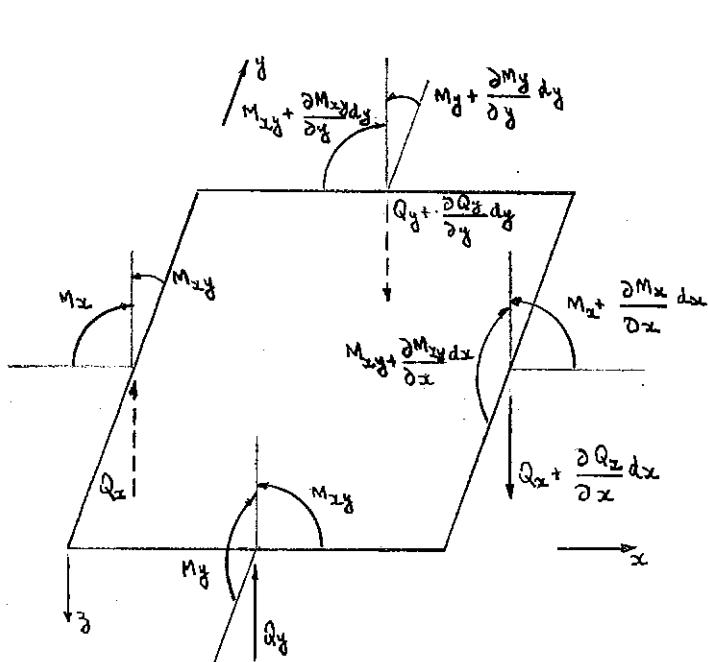


Figura A6.1

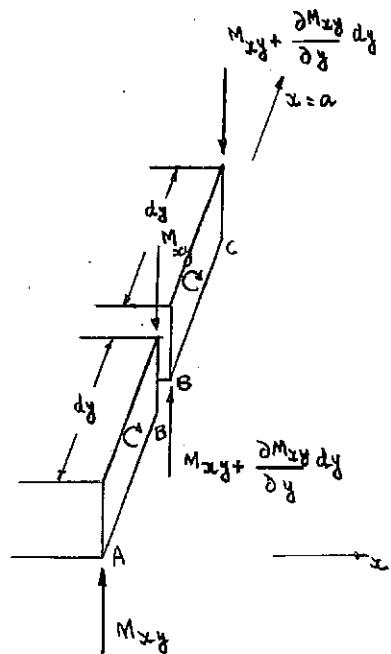


Figura A6.2

No bordo livre de uma placa (por exemplo  $x=a$ ) é de se esperar, por considerações físicas, que sejam nulos os momentos fletores e de torção assim como o esfôrço cortante  $Q_x$ :

$$(M_x)_{x=a} = 0 \quad (M_{xy})_{x=a} = 0 \quad (Q_x)_{x=a} = 0 \quad (\text{A6.1})$$

Todavia, Kirchoff, valendo-se do cálculo variacional, mostrou que na teoria simplificada de placas, na qual se desprezam as deformações por esfôrço cortante, têm-se apenas duas condições de contorno no bordo livre.

Na realidade se a teoria não fosse simplificada a equação diferencial obtida seria de 6a ordem<sup>25</sup> e então as condições de contorno seriam do tipo (A6.1); como a equação para a teoria simplificada é de 4a ordem as três condições (A6.1) devem reduzir-se a duas conforme constatado por Kirchoff - esta redução é feita combinando-se em uma única as condições  $(M_{xy})_{x=a} = (Q_x)_{x=a} = 0$ .

O exame da figura A6.2 permite visualizar esta redução; nela estão representados dois elementos adjacentes situados no bordo  $x=a$  e que foram desenhados separados apenas para facilitar a compreensão. Vê-se que o momento de torção atuando em cada um deles pode ser substituído por duas forças verticais estaticamente equivalentes. Com esta substituição aparece no ponto B a força  $Q'_x dy = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$  dirigida para cima; obtem-se assim uma nova força vertical a qual combinada com  $Q_x dy$  resulta no esforço equivalente  $V_x dy$ .

$$V_x dy = (Q_x + Q'_x)dy = (Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y})dy$$

ou, por unidade de comprimento,

$$V_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (A6.2)$$

Lógicamente deve-se exigir no bordo livre  $V_x = 0$ ; assim as condições de contorno reduzem-se a

$$(M_x)_{x=a} = 0 \quad (V_x)_{x=a} = 0 \quad (A6.3)$$

Isto explica a existência de momentos de torção e esforços cortantes em bordos livres; note-se, novamente que, combinados, resultam em um sistema de forças nulo.

Com relação à validade destas conclusões cita-se Marcus<sup>23</sup>: "Através das importantes pesquisas de Kelvin e Tait ficou claro que, com exceção de uma estreita faixa na imediata vizinhança da borda, o estado de tensões da placa não muda quando os esforços de borda  $M_{xy}$  e  $Q_x$  são substituídos pelo sistema estaticamente equivalente

$$V_x = Q_x + Q'_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} ."$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) Zienkiewicz, O. C.: 'The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics', McGraw-Hill Publishing Company Limited, Berkshire, England, 1967
- 2) Przemienieki, J. S.: 'Theory of Matrix Structural Analysis', McGraw-Hill Book Company, New York, N.Y., 1968
- 3) Oliveira, E. R. A.: 'General Methods for Computer Analysis of Plane Elasticity Problems', Memória no 238, LNEC, Lisboa, 1964
- 4) Pedro, J. O.: 'Dimensionamento de barragens de betão pelo Método dos Elementos Finitos', Tese apresentada a concurso para especialista do LNEC, Lisboa, 1967
- 5) Zienkiewicz, O. C. and Y. K. Cheung: 'The Finite Element Method for analysis of elastic, isotropic and orthotropic slabs', Proc. Inst. Civil Engrs., London, 28: 471-478, 1964
- 6) Zienkiewicz, O. C. and Y. K. Cheung: 'Slab bridges with arbitrary shape and support condition: a general method of analysis based on finite elements', Proc. Inst. Civil Engrs., London, paper 7059, 1968
- 7) Oliveira; E. R. A.: 'Theoretical Foundations of the Finite Element Method', Int. J. Solids Structures,

vol. 4, no 10, October 1968, pp 929-952

- 8) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S.: 'Theory of Plates and Shells', McGraw-Hill, 2nd ed., 1959
- 9) Zienkiewicz and Holister: 'Stress Analysis', John Wiley and Sons Ltd, London, 1965
- 10) Clough, R. W.: 'The Finite Element in plane stress analysis', Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., September 1960
- 11) Timoshenko, S. and Goodier, J. N.: 'Theory of Elasticity', 2nd ed., McGraw-Hill, 1951
- 12) Clough, R. W. and J. L. Tocher: 'Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending', Proc. Conf. Matrix Methods Struc. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965
- 13) Melosh, R. J.: 'Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method', J. Am. Inst. Aeron. Astron., 1:1631-1637, 1963
- 14) Melosh, R. J.: 'A Stiffness Matrix for the Analysis of Thin Plates in Bending', J. Aerospace Sci., 28:34-42, 64, 1961
- 15) Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M. and Zienkiewicz, O. C.: 'Triangular Elements in Plate Bending: Conforming and Nonconforming solutions', Proc. Conf. Matrix Methods in Struc. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965

- 16) Gere, J.M. and W. Weaver: 'Analysis of Framed Structures', D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1965
- 17) Weaver, W.: 'Computer Programs for Structural Analysis', D. Van Nostrand Company, Inc., N.J., 1967
- 18) McCracken, Daniel D.: 'A guide do FORTRAN IV programming', John Wiley and Sons, Inc., N.Y., 1965
- 19) Pacitti, Tércio: 'FORTRAN - MONITOR, Princípios', Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1967
- 20) Oliveira, E.R.A.: 'Completeness and Convergence in the Finite Element Method', 2<sup>nd</sup> Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1968
- 21) Irons, B., Zienkiewicz, O.C., Oliveira, E.R.A.: Comment on 'Theoretical Foundations of the Finite Element Method', a ser publicado
- 22) Oliveira, E.R.A.: 'Curso 109 - Elementos Finitos', Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 1969
- 23) Marcus, H.: 'Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten', Verlag von Julius Springer, 1932
- 24) Beluzzi, O.: 'Scienza Delle Construzioni', Volume Terzo, Zanichelli editore, Bologna, 1965
- 25) Reissner, E.: 'The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates', J. Applied Mech., vol. 67, pp A69-77, 1945

REFERÉNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMPLEMENTARES

- 26) Argyris, J.H.: 'Energy Theorems and Structural Analysis', Butterworth Scientific Publications, London, 1960
- 27) Argyris, J.H.: 'Continua and Discontinua', Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965
- 28) Fraeijs de Veubeke, B.M.: 'Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis', in 'Matrix Methods of Structural Analysis', AGARDograph, 72:165-201, 1964
- 29) Fraeijs de Veubeke, B.M.: 'Bending and Stretching of Plates: Special Models for Upper and Lower Bounds', Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965
- 30) Kalmanok, A.S.: 'Manual para calculo de placas', Editora Inter Ciencia, 1961
- 31) Langhaar, H.L.: 'Energy Methods in Applied Mechanics', John Wiley and Sons, Inc., N.Y., 1962
- 32) Santos, Sydney M.G.: Curso seriado sobre Teoria das Placas publicado na revista Estrutura - volumes diversos
- 33) Beyer, K.: 'Estatica del Hormigon Armado', Tomo II, Libreria y Editorial NIGAR, S.R.L., Buenos Aires, 1959
- 34) Pian, T.H.H.: 'Derivation of Element Stiffness Matrices', J. Am. Inst. Aeron. Astron., 2:576-577, 1964
- 35) Czerny F.: pp 162-216, 'Beton Kalender', Verlag Von Wilhelm Ernst & Sohn, 1969

NOTA BIOGRÁFICA DE ALCEBÍADES DE VASCONCELLOS FILHO

Data do nascimento: 21 de julho de 1939

Local de nascimento: Belo Horizonte, MG, Brasil

1) Formação profissional

1958-1962	Engenheiro Civil pela Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais (EEUFMG)
1961-1962	Estágio no escritório de cálculo estrutural do engenheiro José Zamarion Ferreira Diniz
1962-1962	Visita, a convite do Departamento de Estado Norte-Americano, a importantes centros de engenharia na região leste dos Estados Unidos
1965-1965	Curso de Aperfeiçoamento de Matemática (pós-graduação) na EEUFMG
1966-1968	Mestre em Ciência (M.Sc.) pela "Stanford University" (California-Estados Unidos) em "Engineering Mechanics"
1969-1969	Estágio de aperfeiçoamento no Serviço de Edifícios e Pontes (Divisão de Matemática Aplicada) do Laboratório Nacional de Engenharia Civil em Lisboa

2) Atividades exercidas

1960-1962	Monitor de Mecânica Racional na EEUFMG (por concurso)
1963-1968	Instrutor de Mecânica Geral na EEUFMG
1963-1968	Instrutor de Mecânica Técnica na EEUFMG
1963-1963	Calculista de Estruturas (como profissional liberal)
1964-1966	Chefe do Departamento de Engenharia da Mesbla S.A. (Belo Horizonte)
1964-1966	Chefe do Departamento VEDIR da Mesbla S.A.

1965-1965	Professor assistente de Mecânica Geral na Escola de Engenharia Kennedy (Belo Horizonte)
1968-1968	Instrutor no Programa de Engenharia Civil da COPPE
1968-1968	Instrutor no Programa de Engenharia Mecânica da COPPE
1969-1970	Professor assistente no Programa de Engenharia Civil da COPPE
1969-	Professor assistente no Instituto de Ciências Exatas da UFMG
1969-1969	Professor Visitante na Universidad del Valle em Cali (Colômbia) a convite da UNESCO

3) Cursos ministrados

Mecânica Geral	EEUFMG
Mecânica Técnica	EEUFMG
Mecânica Geral	Escola de Engenharia Kennedy
Mecânica Clássica	COPPE (pós-graduação)
Teoria das Placas	COPPE (pós-graduação)
Análise Matricial das Estruturas	COPPE (pós-graduação)
Método dos Elementos Finitos	COPPE (pós-graduação)
Aplicação de Computadores Digitais a Problemas de Estruturas	Universidad del Valle

4) Trabalhos publicados

1969	Análise de Vigas Contínuas por Computadores Digitais	COPPE
1969	Análise de Pórticos por Computadores Digitais	COPPE

5) Congressos, colóquios, etc, em que foram apresentadas contribuições

1969	VI Semana de Engenharia Civil	Instituto Superior Técnico (Lisboa)
1969	Colóquio de Matemática Aplicada	Laboratório Nacional de Engenharia Civil (Lisboa)

6) Prêmios conferidos e classificações

1962	Prêmio Arthur Guimarães (Medalha de Ouro) - 1º colocado na turma de engenheiros civis da EEUFGM
1962	Prêmio Diretório Central dos Estudantes - melhor aluno da EEUFGM
1965	1º colocado do Curso de Aperfeiçoamento de Matemática da EEUFGM
1968	Considerado "top student" na "Stanford University"