BIFURCAÇÃO SECUNDÁRIA INSTÁVEL EM PLACAS RETANGULARES

Renato Bertolino Júnior

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Ronaldo Carvalho Batista
(Presidente)

Sergio Fernandes Villaça

Marco Antonio Souza

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 1984

BERTOLINO JÚNIOR, RENATO

Bifurcação Secundária Instável em Placas Retangulares (Rio de Janeiro) 1984.

VIII, 109p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1984).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Estabilidade Elástica Estrutural I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

Dedico à minha esposa

ANA MARIA

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Ronaldo Carvalho Batista pela valiosa orientação em todas as etapas deste trabalho.

Ao Prof. João Cyro André e Prof. Jairo Porto que sempre me incentivaram e apoiaram na realização dos estudos de pós-graduação.

A todos os professores da COPPE e da ESCOLA DE ENGENHARIA DE LINS pelos ensinamentos recebidos.

À minha esposa e filha, pela paciência, dedicação e estímulo.

Aos meus pais e familiares, pela força e motivação.

A todos os colegas e amigos que contribuiram, direta e indiretamente, para a realização deste trabalho.

À Universidade Estadual Paulista (UNESP - "Campus de Ilha Solteira") e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES-PICD), financiaram meus estudos de pós-graduação.

À Maurícia pelo excelente trabalho de desenho.

À Lilian pela esmerada elaboração gráfica deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

BIFURCAÇÃO SECUNDÁRIA INSTÁVEL EM PLACAS RETANGULARES

Renato Bertolino Júnior

JUNHO DE 1984

Orientador: Prof. Ronaldo Carvalho Batista
Programa: Engenharia Civil

O comportamento não-linear elástico de placas esbeltas sob os efeitos das imperfeições iniciais e acoplamento de modos é analisado no presente trabalho.

Através dessa análise são detectados pontos de bifurcação secundária ao longo do caminho fundamental imperfeito de equilíbrio que podem ser de caráter estável ou instável.

A análise dos resultados apresentados neste trabalho, vem demonstrar que mesmo para geometrias práticas, uma placa sob compressão axial, pode perder sua estabilidade ainda em regime elástico e portanto antes da ocorrência de colapso plástico.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requiriments for the degree of Master of Science (M.Sc.)

UNSTABLE SECONDARY BIFURCATIONS IN FLAT RETANGULAR PLATES

Renato Bertolino Jūnior

JUNE, 1984

Chairman: Prof. Ronaldo Carvalho Batista
Department: Civil Engineering

The non-linear elastic behaviour in thin flat plates under the effects of initial imperfections and coupled modes is analysed in the presented work.

Through this analysis it is detected, along the imperfect fundamental equilibrium path, secondary points of bifurcation which may be stable or unstable.

The obtained results show that even for practical geometries, a flat plate under uniaxial compression may loose its stability in the elastic regime and therefore, before the occurence of plastic colapse.

ÍNDICE

Pág.

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO TEÓRICA DO PROBLEMA 4

II.1 Hipóteses Básicas Adotadas 4

II.2 Energia de Deformação Elástica 6

II.3 Energia Potencial das Cargas Externas Aplicadas 9

II.4 Energia Potencial Total 10

II.4.1 Variação Total da Energia Potencial Total 11

II.5 Equações Diferenciais Não-Lineares de Equilíbrio 14

II.5.1 Equações Diferenciais Não-Lineares Incluindo Imperfeições Geométricas Iniciais 15

II.5.2 Equações Diferenciais Não-Lineares Incluindo Imperfeições Iniciais Equivalentes Causadas por Pressão Lateral 18

II.6 Equações Algébricas Não-Lineares de Equilíbrio 21

CAPÍTULO III - ESTABILIDADE DE PLACAS GEOMETRICAMENTE PERFEITAS 31

III.1 Introdução 31

III.2 Modo Não-Acoplado de Deformação 32

III.2.1 Caminho Fundamental de Equilíbrio e Ponto Crítico 32

Pág.

III.2.2 Caminho Pós-Crítico de Equilíbrio 35

III.3 Modo Acoplado de Deformação 41

CAPÍTULO IV - ESTABILIDADE DE PLACAS COM IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS INICIAIS 52

IV.1 Introdução 52

IV.2 Imperfeição Geométrica Inicial em um Único Modo Crítico 57

IV.2.1 Modo de Imperfeição na Mesma Forma que do Modo Crítico Dominante 57

IV.2.2 Modo de Imperfeição em Forma Distinta do Modo Crítico Dominante 61

IV.3 Imperfeições Geométricas Iniciais em Ambos os Modos Críticos 71

CAPÍTULO V - RELEVÂNCIA DOS RESULTADOS DA ANÁLISE NO PROJETO ESTRUTURAL 82

V.1 Introdução 82

V.2 Comparação e Análise dos Resultados para Distribuições de Tensões 84

CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES 93

BIBLIOGRAFIA 94

NOMENCLATURA 99

ANEXO 105

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

É bem sabido que a teoria clássica da estabilidade indica que uma placa sob compressão axial em seu próprio plano tem um comportamento pós-crítico estável, e portanto tem sido sempre considerada como sendo insensível à imperfeições iniciais.

Entretanto, estudos experimentais e teóricos recentes têm mostrado a possibilidade de ocorrência de mudança brusca de formas modais durante o processo de flambagem e como consequência final mudança de rigidez axial.

Para estudar este fenômeno, o presente trabalho enfoca o caso de acoplamento entre as formas modais simétrica e antimétrica, para a placa geometricamente perfeita e em presença de imperfeições geométricas iniciais.

Mostra-se que a presença de imperfeições geométricas iniciais, poderá levar à um acoplamento das formas modais em função da magnitude dessas imperfeições, originando pontos de bifurcações secundárias estáveis e instáveis, ao longo de caminhos imperfeitos de equilíbrio.

Inicia-se este desenvolvimento no Capítulo II que apresenta a formulação teórica do problema, considerando as hipóte-

ses básicas para uma placa esbelta.

As equações diferenciais não-lineares de equilíbrio e de compatibilidade, do tipo VON KÁRMÁN, para grandes deslocamentos considerando imperfeições geométricas iniciais, são obtidas via extremização do funcional de energia potencial total.

As equações algébricas não-lineares de equilíbrio são desenvolvidas para uma placa simplesmente apoiada em todo o seu contorno e submetida à uma força de compressão axial em seu plano médio.

A solução dessas equações algébricas não-lineares de equilíbrio mostram que: a interação entre as formas modais simétrica e antimétrica, dependem das imperfeições, isto é, não havendo nenhuma imperfeição na placa, três soluções são possíveis, duas não-acopladas e a terceira acoplada; ocorrendo uma imperfeição inicial quer na forma simétrica ou antimétrica, duas soluções são possíveis, uma não-acoplada e outra acoplada; quando as imperfeições estão presentes em ambas as formas modais, existe uma única solução e esta é acoplada.

O Capítulo III apresenta o estudo da estabilidade de placas geometricamente perfeitas, levando a obtenção do caminho fundamental de equilíbrio (que corresponde a um estado de equilíbrio da membrana) e do caminho pós-crítico de equilíbrio, envolvendo deslocamentos fora de seu plano médio.

Este estudo mostra que o primeiro caminho pós-crítico bifurcado do caminho fundamental de equilíbrio, assumirá a forma modal simétrica, quando o número de meias-ondas senoidais na forma simétrica (n) for igual à razão entre os lados da placa (γ), e assumirá a forma modal antimétrica, quando o número de meias-ondas na forma antimétrica (m) for igual à razão entre os lados da placa (γ). Se $n \neq \gamma$ e $m \neq \gamma$, o primeiro caminho pós-crítico bifurcado do caminho fundamental de equilíbrio assumirá a forma modal simétrica quando $\gamma^2 < m \cdot n$ e antimétrica quando $\gamma^2 > m \cdot n$.

O Capítulo IV apresenta o estudo da estabilidade de placas, em presença de imperfeições geométricas iniciais que contrariamente à postulação da teoria clássica, ao invés de sempre destruir pontos de bifurcação, podem originar, em função do acoplamento entre as formas modais, bifurcações secundárias estáveis, ou o que é mais surpreendente no caso de placas planas, bifurcações secundárias instáveis ao longo de caminhos imperfeitos de equilíbrio.

Finalmente, o Capítulo V demonstra, com base na análise dos resultados apresentados e no entendimento do comportamento não-linear estrutural, que uma placa imperfeita pode sob o efeito adicional da interação entre modos, ocasionadas por estas mesmas imperfeições, perder sua estabilidade em regime elástico antes da ocorrência de um colapso plástico. Evidências qualitativas e quantitativas através de análises da distribuição de tensões normais e comparações com prescrições de normas de projeto são ainda apresentadas neste Capítulo.

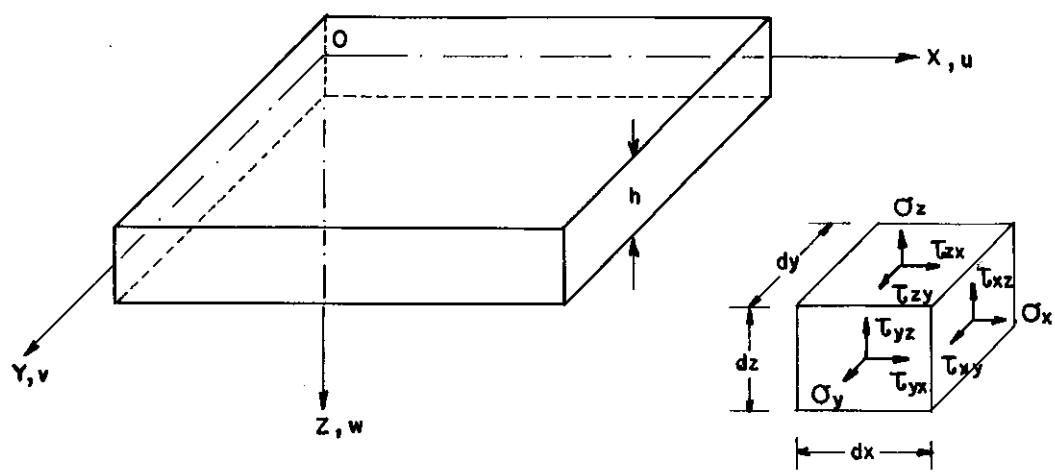
CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO TEÓRICA DO PROBLEMA

II.1 HIPÓTESES BÁSICAS ADOTADAS

O presente trabalho se restringe à análise não-clássica da estabilidade de placas retangulares de espessura constante 'h', comprimento 'a' e largura 'b', constituída de material homogêneo isotrópico de comportamento elástico linear.

A placa é referida ao sistema de eixos cartesianos x, y, z, onde os eixos x e y coincidem com os bordos da placa e o plano formado por eles, localiza-se na superfície média, conforme mostra a Figura II.1.a.



a. COORDENADAS DA PLACA RETANGULAR

b. TENSÕES NO ELEMENTO IFINITESIMAL DA PLACA

FIG. II-1. SISTEMA DE EIXOS E COMPONENTES POSITIVAS DOS DESLOCAMENTOS E DAS TENSÕES (35)

As componentes positivas dos deslocamentos, u, v, w e das tensões que atuam em cada face de um elemento infinitesimal, são indicadas respectivamente na Figura II.1.a e b.

Para uma placa esbelta, cuja espessura é pequena comparada com as outras dimensões, duas hipóteses básicas são consideradas com respeito ao seu comportamento,

a. as deformações de cisalhamento γ_{xz} e γ_{yz} são desprezíveis, e as linhas normais à superfície média antes da deformação, permanecerão retas e normais à superfície média após a deformação da placa;

b. as tensões normais σ_z e a sua correspondente deformação ε_z são desprezíveis, e portanto a deflexão transversal em qualquer ponto (x,y,z) é igual a deflexão transversal correspondente ao ponto (x,y,0), da superfície média da placa.

Para a análise da estabilidade de placas esbeltas, sujeitas à carregamento atuando em seu plano médio, a seguinte hipótese pode ainda ser adotada,

c. se as condições de contorno, estáticas e cinemáticas adotadas são tais que rotações pré-críticas não são induzidas (ou pelo menos são restringidas a vizinhança dos contornos; portanto desprezíveis), então, o estado de deformação pré-crítico pode ser considerado como um estado de membrana;

e além disso,

d. para tais condições de contorno, o alongamento da superfície média causada pela flexão, devida a um carregamento lateral adicional, pode ser desprezado; o que é equivalente – conforme será demonstrado – as imperfeições geométricas iniciais na forma de meia-onda senoidal.

Como consequência das hipóteses 'a' e 'b', conhecidas como hipóteses de KIRCHOFF (10), a placa pode ser tratada como um problema bi-dimensional de tensões, e as hipóteses 'c' e 'd' permitem descrever o comportamento da placa através de uma equação diferencial com coeficientes constantes.

As equações diferenciais de equilíbrio, lineares e não-lineares, serão obtidas via extremização do funcional de energia potencial total, a qual é composta das parcelas da energia de deformação elástica, U, e da parcela da energia potencial das cargas externas aplicadas, Ω.

II.2 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA

A energia de deformação elástica para um elemento isotrópico tridimensional, Figura II.1.b, referido ao sistema de coordenadas ortogonais arbitrárias, pode ser escrita,

$$U = \frac{1}{2} \int_{vol.} \underset{\sim}{\bar{\tau}}\ \underset{\sim}{\bar{\varepsilon}}\ dvol. \qquad (II-1)$$

onde, $\underset{\sim}{\bar{\tau}}$ representa o tensor de tensões e $\underset{\sim}{\bar{\varepsilon}}$ o tensor de deformações; ou ainda, levando em consideração as hipóteses básicas 'a' e 'b', a equação (II-1), fica:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_y \bar{\varepsilon}_y + \bar{\tau}_{xy} \bar{\gamma}_{xy}) dxdydz \qquad (II-2)$$

e, introduzindo as relações tensões-deformações,

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_x + \nu\ \bar{\varepsilon}_y)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_y + \nu\ \bar{\varepsilon}_x) \qquad (II-3)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\ \bar{\gamma}_{xy}$$

na expressão (II-2) e reagrupando os termos, obtém-se

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{\varepsilon}_y^2 + 2\nu \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \frac{1-\nu}{2}\ \bar{\gamma}_{xy}^2) dxdydz \qquad (II-4)$$

onde, $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ e $\bar{\gamma}_{xy}$ são as deformações de um ponto qualquer da placa esbelta que, em termos das deformações específicas e mudanças de curvatura da superfície média, podem ser descritas como,

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x - z\,\chi_x$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_y - z\,\chi_y \qquad \text{(II-5)}$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \gamma_{xy} - 2z\,\chi_{xy}$$

No que se segue são utilizadas as aproximações da teoria não-linear para placas esbeltas de VON KÁRMÁN (4), tomando-se as relações deformação-deslocamento, referidas a superfície média como

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \qquad \text{(II-6)}$$

$$\gamma_{xy} = v_{,x} + u_{,y} + w_{,x} w_{,y}$$

e as mudanças de curvatura lineares referidas ao plano xy

$$\chi_x = w_{,xx}$$

$$\chi_y = w_{,yy} \qquad \text{(II-7)}$$

$$\chi_{xy} = w_{,xy}$$

Substituindo-se a expressão (II-5) na equação de energia de deformação (II-4) e integrando-se ao longo da espessura da placa, obtém-se a expressão para a energia de deformação elástica, composta da energia de deformação de membrana, U_M, e

da energia de deformação por flexão da placa, U_F,

$$U = U_M + U_F =$$

$$= \frac{K}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_{xy}^2 \right] dxdy +$$

$$+ \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\chi_x^2 + \chi_y^2 + 2\nu\chi_x\chi_y + 2(1-\nu)\chi_{xy}^2 \right] dxdy \qquad \text{(II-8)}$$

onde,

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2} \qquad \text{e} \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

referem-se a rigidez de membrana e de flexão, respectivamente.

II.3 ENERGIA POTENCIAL DAS CARGAS EXTERNAS APLICADAS

A energia potencial das cargas externas aplicadas, Ω, para um sistema de forças conservativas, é igual ao trabalho negativo realizado pelas cargas externas, $W_{EXT.}$, quando a estrutura se deforma

$$\Omega = - W_{EXT.} \qquad \text{(II-9)}$$

Considerando um elemento de placa retangular, onde atuam as cargas externas constantes N_x, N_y e N_{xy}, no seu plano médio, e p uma pressão lateral, normal ao seu plano médio, todas uniformemente distribuídas, conforme ilustra a Figura II.2, a energia potencial será,

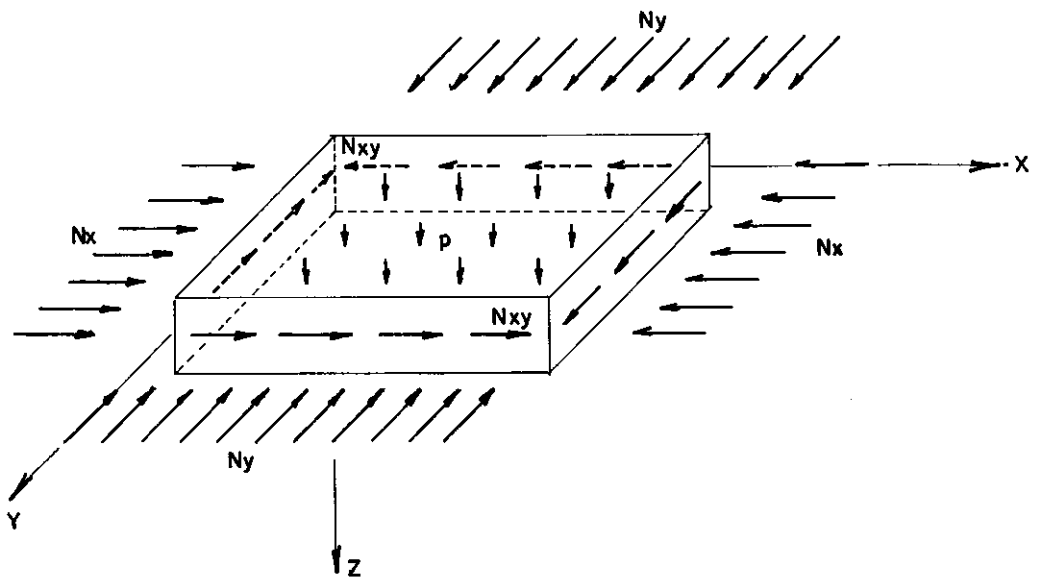


FIG. II-2. FORÇAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS APLICADAS NA PLACA

$$\Omega = -\int_0^a\int_0^b \left[pw + N_x u_{,x} + N_y v_{,y} + N_{xy}(u_{,y}+v_{,x})\right] dxdy \qquad \text{(II-10)}$$

II.4 ENERGIA POTENCIAL TOTAL

A energia potencial total, V, da placa retangular, constitui-se das parcelas da energia de deformação elástica, U_M e U_F, e da parcela de energia potencial das cargas externas aplicadas, Ω.

$$V = U + \Omega = U_M + U_F + \Omega \qquad \text{(II-11)}$$

$$V = \frac{K}{2}\int_0^a\int_0^b \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_{xy}^2\right] dxdy +$$

$$+ \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\chi_x^2 + \chi_y^2 + 2\nu\chi_x\chi_y + 2(1-\nu)\chi_{xy}^2 \right] dxdy -$$

$$- \int_0^a \int_0^b \left[p\, w + N_x u_{,x} + N_y v_{,y} + N_{xy}(u_{,y} + v_{,x}) \right] dxdy \qquad \text{(II-12)}$$

II.4.1 Variação Total da Energia Potencial Total

Considerando que o campo de deslocamentos da estrutura deformada em uma configuração vizinha à fundamental é definido por $\underset{\sim}{u}^F + \underset{\sim}{u}^I$, as deformações específicas e as mudanças de curvatura correspondentes ficam,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^F + \varepsilon_x^I \qquad \chi_x = \chi_x^F + \chi_x^I$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^F + \varepsilon_y^I \qquad \text{e,} \qquad \chi_y = \chi_y^F + \chi_y^I \qquad \text{(II-13)}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^F + \gamma_{xy}^I \qquad \chi_{xy} = \chi_{xy}^F + \chi_{xy}^I$$

onde os super-índices 'F' e 'I', referem aos campos fundamental e incremental, respectivamente.

Considerando que o estado fundamental da placa comprimida axialmente seja um estado de membrana, tem-se que,

$$\chi_x^F = \chi_y^F = \chi_{xy}^F = 0$$

$$\varepsilon_x^F = u_{,x} \qquad \text{(II-14)}$$

$$\varepsilon_y^F = - \nu u_{,x} = - \nu \varepsilon_x^F$$

$$\gamma_{xy}^F = 0$$

Por conveniência de escrita abandona-se a seguir o super-índice 'I', apresentado em (II-13) reescrevendo as parcelas incrementais nas formas,

$$\varepsilon_x^I = \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' \qquad \chi_x^I = \chi_x'$$

$$\varepsilon_y^I = \varepsilon_y' + \varepsilon_y'' \qquad \text{e,} \qquad \chi_y^I = \chi_y' \qquad \text{(II-15)}$$

$$\gamma_{xy}^I = \gamma_{xy}' + \gamma_{xy}'' \qquad \chi_{xy}^I = \chi_{xy}'$$

onde (') e (") denotam respectivamente, componentes lineares e quadráticas.

Com a transformação $V(\underset{\sim}{u};\lambda) \rightarrow V(\underset{\sim}{u}^F+\underset{\sim}{u}^I;\lambda)$, que implica na substituição de (II-13), (II-14) e (II-15) em (II-12), a variação total da energia potencial total, é dada por

$$V(\underset{\sim}{u}^F+\underset{\sim}{u}^I;\lambda) - V(\underset{\sim}{u}^F;\lambda) = \Delta V = V_1+V_2+V_3+V_4 \qquad \text{(II-16)}$$

onde,

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[N_x^F \varepsilon_x' + \eta_x' \varepsilon_x^F + N_y^F \varepsilon_y' + \eta_y' \varepsilon_y^F + N_{xy}^F \gamma_{xy}' + \eta'_{xy} \gamma_{xy}^F \right] dxdy +$$

$$+ \Delta\Omega \; ; \qquad \text{(II-17)}$$

$$V_2 = \frac{K}{2}\int_0^a\int_0^b\left[(\varepsilon_x')^2+(\varepsilon_y')^2+ 2\nu\varepsilon_x'\varepsilon_y' + \frac{1-\nu}{2}(\gamma_{xy}')^2\right]dxdy +$$

$$+ \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b\left[(\chi_x')^2 +(\chi_y')^2 + 2\nu\chi_x'\chi_y' + 2(1-\nu)(\chi_{xy}')^2\right] dxdy+$$

$$+ \int_0^a\int_0^b (pw + N_x^F\varepsilon_x'' + N_y^F\varepsilon_y'' + N_{xy}^F\gamma_{xy}'')dxdy; \qquad \text{(II-18)}$$

$$V_3 = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\eta_x'\varepsilon_x''+\eta_x''\varepsilon_x'+\eta_y'\varepsilon_y''+\eta_y''\varepsilon_y'+\eta_{xy}'\gamma_{xy}''+\eta_{xy}''\gamma_{xy}'\right]dxdy; \qquad \text{(II-19)}$$

$$V_4 = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\eta_x''\varepsilon_x'' + \eta_y''\varepsilon_y'' + \eta_{xy}''\gamma_{xy}''\right] dxdy \qquad \text{(II-20)}$$

onde,

$$N_x^F = K(\varepsilon_x^F+\nu\varepsilon_y^F); \qquad \eta_x' = K(\varepsilon_x'+\nu\varepsilon_y'); \qquad \eta_x'' = K(\varepsilon_x''+\nu\varepsilon_y'')$$

$$N_y^F = K(\varepsilon_y^F+\nu\varepsilon_x^F); \qquad \eta_y' = K(\varepsilon_y'+\nu\varepsilon_x'); \qquad \eta_y'' = K(\varepsilon_y''+\nu\varepsilon_x'')$$

$$N_{xy}^F = K\frac{(1-\nu)}{2}\gamma_{xy}^F; \qquad \eta_{xy}' = K\frac{(1-\nu)}{2}\gamma_{xy}'; \qquad \eta_{xy}'' = K\frac{(1-\nu)}{2}\gamma_{xy}''$$

(II-21)

II.5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES DE EQUILÍBRIO

As equações diferenciais de equilíbrio crítico são as equações de Euler para o integrando da variação total de V,

$$\delta(\Delta V) = \delta(V_1+V_2+V_3+V_4) = 0 \qquad \text{(II-22)}$$

Introduzindo a função de tensões de Airy,

$$\phi_{,yy} = \frac{N_x}{h}, \quad \phi_{,xx} = \frac{N_y}{h} \quad \text{e} \quad \phi_{,xy} = -\frac{N_{xy}}{h} \qquad \text{(II-23)}$$

onde,

$$N = N^F + \eta' + \eta''$$

e as equações constitutivas na forma,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\phi_{,yy} - \nu\phi_{,xx})$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\phi_{,xx} - \nu\phi_{,yy}) \qquad \text{(II-24)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{-2(1+\nu)}{E}\phi_{,xy}$$

na expressão do integrando para a variação total de V, obtém-se,

$$\Delta V = \frac{h}{2E}\int_0^a\int_0^b \left[\phi^2_{,yy}+\phi^2_{,xx}-2\nu\phi_{,xx}\phi_{,yy}+2(1+\nu)\phi^2_{,xy}\right] dxdy +$$

$$+ \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[(\chi_x')^2 + (\chi_y')^2 + 2\nu \chi_x' \chi_y' + 2(1-\nu)(\chi_{xy}')^2 \right] dxdy +$$

$$+ h \int_0^a \int_0^b (p\, w + \phi,_{yy} \varepsilon_x'' + \phi,_{xx} \varepsilon_y'' - \phi,_{xy} \gamma_{xy}'')dxdy \quad \text{(II-25)}$$

II.5.1 Equações Diferenciais Não-Lineares Incluindo Imperfeições Geométricas Iniciais

As imperfeições geométricas são usualmente descritas por desvios normais, $\bar{w}(x,y)$, da superfície média idealizada da placa perfeita, e são introduzidas no problema admitindo-se que o deslocamento normal total, w_T, é dado pela soma dos deslocamentos da placa sob a ação do carregamento axial e dessas imperfeições $\bar{w}$,

$$w_T = w + \bar{w} \quad \text{(II-26)}$$

As deformações incrementais que ocorrem na placa sob ação da compressão axial, serão dadas pela diferença entre aquelas associadas ao deslocamento total, w_T, menos as que seriam produzidas por supostos deslocamentos, $\bar{w}$, conforme ilustra a Figura II.3.

As relações deformação-deslocamento e as mudanças de curvatura correspondentes a pontos da superfície média da placa retangular imperfeita são dados por, (10),

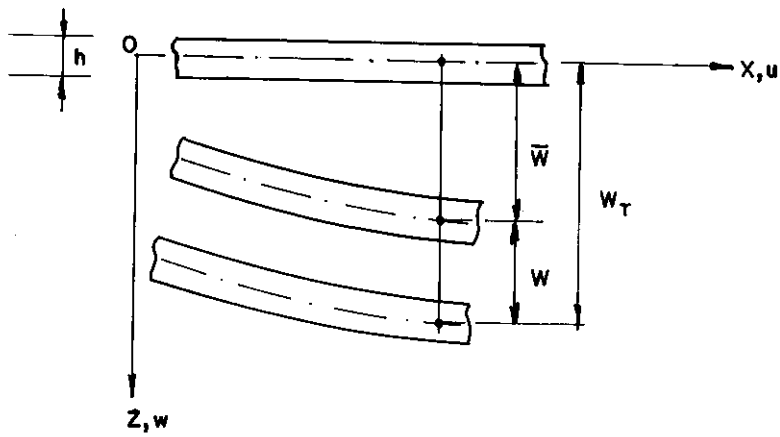


FIG. II-3. DESLOCAMENTOS DA SUPERFÍCIE MÉDIA DA PLACA

$$\hat{\varepsilon}_x = \varepsilon_x^F + u_{,x} + \bar{w}_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} \bar{w}^2_{,x}$$

$$\hat{\varepsilon}_y = \varepsilon_y^F + v_{,y} + \bar{w}_{,y} w_{,y} + \frac{1}{2} \bar{w}^2_{,y}$$

$$\hat{\gamma}_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + \bar{w}_{,x} w_{,y} + \bar{w}_{,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y} \qquad \text{(II-27)}$$

$$\hat{\chi}_x = w_{,xx}$$

$$\hat{\chi}_y = w_{,yy}$$

$$\hat{\chi}_{xy} = w_{,xy}$$

Utilizando-se as expressões (II-27), e procedendo-se como anteriormente, chega-se a expressão de ΔV, incluindo imperfeições geométricas iniciais,

$$\Delta V = \frac{h}{2E}\int_0^a\int_0^b \left[\phi^2_{,yy}+\phi^2_{,xx} - 2\nu\phi_{,xx}\phi_{,yy} + 2(1+\nu)\phi^2_{,xy}\right] dxdy+$$

$$+ \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left[w^2_{,xx}+w^2_{,yy} + 2\nu w_{,xx}w_{,yy} + 2(1-\nu)w^2_{,xy}\right]dxdy +$$

$$+ h\int_0^a\int_0^b \left[p(w+\bar{w})+\phi_{,yy}(\bar{w}_{,x}w_{,x}+ \frac{1}{2} w^2_{,x})+\phi_{,xx}(\bar{w}_{,y}w_{,y}+ \frac{1}{2} w^2_{,y})-\right.$$

$$\left. - \phi_{,xy} (\bar{w}_{,x}w_{,y} + \bar{w}_{,y}w_{,x} + w_{,x}w_{,y})\right]dxdy \qquad \text{(II-28)}$$

Introduzindo o integrando de (II-28), F, nas equações de Euler,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial \phi_{,xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial \phi_{,yy}} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial \phi_{,xy}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial w_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial w_{,y}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \bar{w}_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \bar{w}_{,y}} + \qquad \text{(II-29)}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial w_{,xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial w_{,yy}} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial w_{,xy}} = 0$$

obtém-se as equações diferenciais não-lineares do tipo VON KÁRMÁN (4), para grandes deslocamentos considerando imperfeições geométricas iniciais,

$$\nabla^4\phi = E(w^2_{,xy} - w_{,xx}w_{,yy} + 2\bar{w}_{,xy}w_{,xy} - w_{,xx}\bar{w}_{,yy} -$$

$$- \bar{w}_{,xx}w_{,yy}) \qquad \text{(II-30)}$$

representando a equação de compatibilidade das deformações no plano médio da placa, e

$$\nabla^4 w = \frac{h}{D}\left[\frac{p}{h} + \phi_{,yy}(w_{,xx}+\bar{w}_{,xx}) + \phi_{,xx}(w_{,yy}+\bar{w}_{,yy}) -\right.$$

$$\left. - 2\,\phi_{,xy}(w_{,xy} + \bar{w}_{,xy})\right] \qquad \text{(II-31)}$$

representando a equação de equilíbrio da placa.

Deve-se salientar que os deslocamentos w, em (II-30) e (II-31), são tomados a partir da configuração inicialmente imperfeita descrita por $\bar{w}$, como indicado na Figura II.3.

II.5.2 Equações Diferenciais Não-Lineares Incluindo Imperfeições Iniciais Equivalentes Causadas por Pressão Lateral

Atuando uma pressão lateral, normal à superfície média da placa, esta induz uma configuração deformada inicial, tratada a seguir, como uma imperfeição geométrica equivalente, conforme ilustra a Figura II.4.

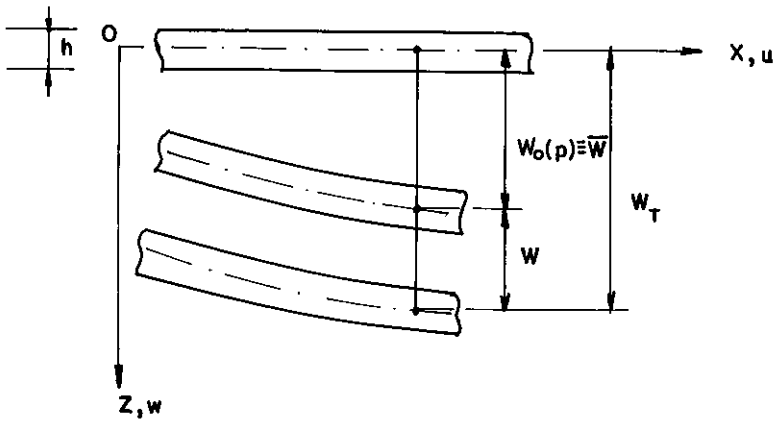


FIG. II-4. DESLOCAMENTOS DA SUPERFÍCIE MÉDIA DA PLACA

Deve-se aqui ressaltar a diferença conceitual entre este caso e aquele de imperfeições geométricas iniciais em que a placa está livre de tensões.

As imperfeições iniciais equivalentes causadas por pressão lateral, são representadas por w_0 e os deslocamentos por w, que devem ser tomados em referência a situação indeformada da placa plana; em virtude de ter-se tensões iniciais nesta configuração deformada.

Substituindo em (II-27), a expressão

$$w = w_T - w_0 \qquad \text{(II-32)}$$

as relações deformação-deslocamento e as mudanças de curvatura, são dadas por

$$\hat{\varepsilon}_x = \varepsilon_x^F + u_{,x} + \frac{1}{2} w_{T,x}^2 - \frac{1}{2} w_{0,x}^2$$

$$\hat{\varepsilon}_y = \varepsilon_y^F + v_{,y} + \frac{1}{2} w_{T,y}^2 - \frac{1}{2} w_{0,y}^2$$

$$\hat{\gamma}_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{T,x} w_{T,y} - w_{0,x} w_{0,y} \qquad \text{(II-33)}$$

$$\hat{\chi}_x = w_{,xx}$$

$$\hat{\chi}_y = w_{,yy}$$

$$\hat{\chi}_{xy} = w_{,xy}$$

Utilizando-se as expressões (II-33), e procedendo-se analogamente a secção II.5.1, chega-se as equações diferenciais não-lineares de compatibilidade e de equilíbrio, em referência a situação indeformada da placa,

$$\nabla^4 \phi = E \left[w_{T,xy}^2 - w_{T,xx} w_{T,yy} - (w_{0,xy}^2 - w_{0,xx} w_{0,yy}) \right] \qquad \text{(II-34)}$$

e,

$$\nabla^4 (w_T - w_0) = \frac{h}{D} \left(\frac{p}{h} + \phi_{,yy} w_{T,xx} - 2\phi_{,xy} w_{T,xy} + \phi_{,xx} w_{T,yy} \right) \qquad \text{(II-35)}$$

As equações (II-30) e (II-31) ou (II-34) e (II-35), serão usadas para a análise, tanto do comportamento de placas retangulares imperfeitas, quanto das perfeitas, fazendo-se neste último caso $\bar{w} = 0$ ou $w_0 = 0$.

II.6 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NÃO-LINEARES DE EQUILÍBRIO

As equações diferenciais não-lineares, apresentadas nas secções II.5.1 e II.5.2, são equivalentes, e a diferença aparece no referencial adotado da medida dos deslocamentos.

As soluções destas equações, são geralmente desconhecidas, porém, nestes casos utiliza-se formas de soluções aproximadas, que por sua vez são combinações de soluções conhecidas do problema linearizado.

Considera-se o problema da placa simplesmente apoiada em todo seu contorno e submetida a uma força de compressão axial, N_x, por unidade de comprimento, conforme ilustra a Figura II.5. As condições de apoio dos bordos da placa, baseiam-se nas seguintes hipóteses (ítens 'c' e 'd' da secção II.1),

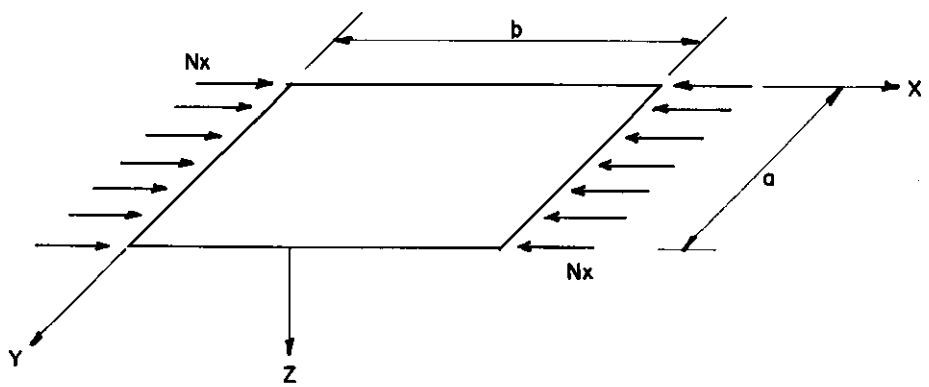


FIG. II-5. FORÇA DE COMPRESSÃO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA DIREÇÃO X

a. não ocorre nenhuma deflexão fora do plano nos contornos;

b. os bordos carregados permanecem retos;

c. os bordos longitudinais não se deformam no plano da placa.

Admite-se também, que não há nenhuma restrição no plano da placa, quanto a sua expansão lateral. Essas condições de contorno, podem ser escritas como,

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\quad w_T = 0; \quad x = 0,a \\
&\text{(ii)}\quad w_T = 0; \quad y = 0,b \\
&\text{(iii)}\quad (w_{T,xx} + \nu w_{T,yy}) = 0; \quad x = 0,a \\
&\text{(iv)}\quad (w_{T,yy} + \nu w_{T,xx}) = 0; \quad y = 0,b
\end{aligned} \tag{II-36}$$

A solução procurada que satisfaz as condições de contorno (II-36), é expressa por, (13),

$$w_T = h \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \left(A \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} + B \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}\right) \tag{II-37}$$

e

$$w_0 = h \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \left(A_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} + B_0 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}\right) \tag{II-38}$$

composta dos modos de deslocamentos nas formas críticas, simétrico e antimétrico, tendo amplitudes incógnitas 'A' e 'B', respectivamente. Esses modos de deslocamentos ocorrem na direção x, enquanto que na direção y, o modo crítico corresponde a uma meia

-onda senoidal, conforme ilustra a Figura II.6; e as imperfeições geométricas iniciais equivalentes, w_0, são consideradas na mesma forma modal.

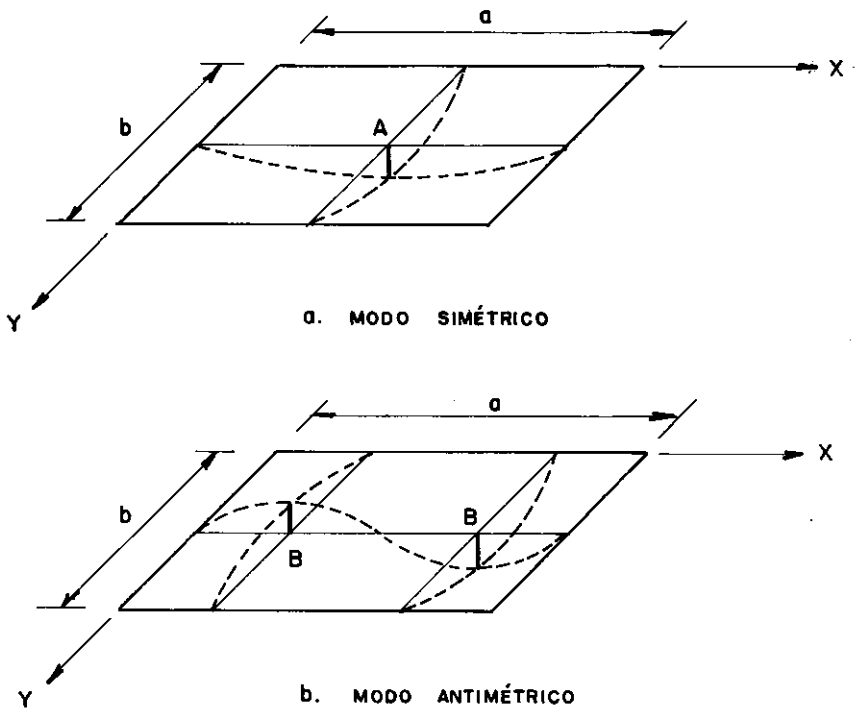


FIG. II-6. MODOS DE DESLOCAMENTOS

Nas equações (II-37) e (II-38), o valor de 'n' é tomado como um número inteiro impar e 'm' como um número inteiro par, representando o número de meias-ondas senoidais da forma deformada simétrica (n,A) e antimétrica (m,B), respectivamente.

Substituindo a expressão (II-37) e (II-38), na equação de compatibilidade (II-34), tem-se

$$\nabla^4\phi = Eh^2 \frac{n^2\pi^4}{\gamma^2 b^4}(A^2-A_0^2)(\cos^2\frac{\pi y}{b}\cos^2\frac{n\pi x}{a} -$$

$$- \operatorname{sen}^2\frac{\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}) +$$

$$+ Eh^2 \frac{m^2\pi^4}{\gamma^2 b^4}(B^2-B_0^2)(\cos^2\frac{\pi y}{b}\cos^2\frac{m\pi x}{a} -$$

$$- \operatorname{sen}^2\frac{\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}) +$$

$$+ Eh^2 \frac{2nm\pi^4}{\gamma^2 b^4}(AB-A_0B_0)\cos^2\frac{\pi y}{b}\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi x}{a} -$$

$$- Eh^2 \frac{\pi^4}{\gamma^2 b^4}(n^2+m^2)(AB-A_0B_0)\operatorname{sen}^2\frac{\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad \text{(II-39)}$$

A solução de (II-39), é composta de uma solução particular e outra homogênea,

$$\phi = \phi_p + \phi_h \qquad \text{(II-40)}$$

sendo a equação homogênea, $\nabla^4\phi = 0$, equivalente à $w = 0$; correspondendo assim a uma distribuição uniforme de tensões no plano médio da placa, antes desta deformar-se lateralmente. Assim,

$$\sigma_x = \frac{\Lambda}{b\ h} \qquad \text{(II-41)}$$

sendo Λ, a carga total aplicada no plano médio da placa, ou seja

$$\Lambda = \int_0^b N_x dy = \int_0^b \sigma_{xx} h \, dy \qquad \text{(II-42)}$$

Considerando forma da solução homogênea, como

$$\phi_h = ky^2 \qquad \text{(II-43)}$$

que satisfaz

$$\frac{N_x^F}{h} = \phi_{h,yy} = -\sigma_x \qquad \text{(II-44)}$$

para,

$$k = -\frac{\Lambda}{2bh} \qquad \text{(II-45)}$$

ficando (II-43),

$$\phi_h = -\frac{\Lambda}{2bh} y^2 \qquad \text{(II-46)}$$

que sendo a solução da equação homogênea, representa uma distribuição uniforme de tensões no plano médio da placa antes da ocorrência do deslocamento lateral, w. Consequentemente, a solução particular corresponde a uma mudança da distribuição de tensões no plano médio da placa, após deformação lateral ($w \neq 0$).

Considerando a forma da solução particular como sendo,

$$\phi_p = k_1 \cos \frac{2n\pi x}{a} + k_2 \cos \frac{2m\pi x}{a} + k_3 \cos \frac{2\pi y}{a} +$$

$$+ k_4 \cos (n+m) \frac{\pi x}{a} + k_5 \cos (m-n) \frac{\pi x}{a} +$$

$$+ k_6 \cos \frac{2\pi y}{b} \cos (m+n) \frac{\pi x}{a} + k_7 \cos \frac{2\pi y}{b} \cos (m-n) \frac{\pi x}{a}$$

(II-47)

e, introduzindo (II-47) no operador $\nabla^4\phi$ e igualando os coeficientes dos termos correspondentes em (II-39), obtém-se a solução particular da função de tensão, (13),

$$\phi_p = \frac{Eh^2}{32} \left[\frac{n^2}{\gamma^2} (A^2-A_0^2) + \frac{m^2}{\gamma^2} (B^2-B_0^2) \right] \cos \frac{2\pi y}{b} +$$

$$+ \frac{Eh^2}{32} \frac{\gamma^2}{n^2} (A^2-A_0^2) \cos \frac{2n\pi x}{a} +$$

$$+ \frac{Eh^2}{32} \frac{\gamma^2}{m^2} (B^2-B_0^2) \cos \frac{2m\pi x}{a} +$$

$$+ \frac{Eh^2}{4} \gamma^2 (AB-A_0B_0) \left[\frac{1}{(m+n)^2} \cos (m+n) \frac{\pi x}{a} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(m-n)^2} \cos(m-n) \frac{\pi x}{a} \right] +$$

$$+ \frac{Eh^2}{4} \gamma^2 (AB-A_0B_0) \cos \frac{2\pi y}{b} \left[- \alpha \cos (m+n) \frac{\pi x}{a} + \right.$$

$$\left. + \beta \cos (m-n) \frac{\pi x}{a} \right] \qquad \text{(II-48)}$$

sendo

$$\alpha = \left[\frac{(m-n)}{(m+n)^2+4\gamma^2} \right]^2 \quad e \quad \beta = \left[\frac{(m+n)}{(m-n)^2+4\gamma^2} \right]^2$$

e, a solução geral da função de tensão será a soma de (II-46) com (II-48).

As equações algébricas não-lineares de equilíbrio, são obtidas, introduzindo (II-37), (II-38), (II-46) e (II-48), na equação diferencial não-linear de equilíbrio (II-35). Devido a aproximação utilizada para os deslocamentos, a equação (II-35) não será satisfeita completamente, aparecendo um resíduo

$$R = \nabla^4(w-w_0) - \frac{h}{D}\left(\frac{p}{h} + \phi_{,yy}w_{,xx} - 2\phi_{,xy}w_{,xy} + \right.$$

$$\left. + \phi_{,xx}w_{,yy} \right) \qquad \text{(II-49)}$$

A minimização do resíduo, R, próprio da aproximação adotada, se faz através da técnica de RITZ-GALERKIN, integrando-se sobre a superfície da placa as equações,

$$\int_0^a \int_0^b R \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \, dxdy = 0 \qquad \text{(II-50)}$$

e,

$$\int_0^a \int_0^b R \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \, dxdy = 0 \qquad \text{(II-51)}$$

no qual fornecem as equações algébricas não-lineares de equilíbrio em termos de 'A' e 'B', e contendo os parâmetros 'A_0' e 'B_0', apresentados a seguir

$$E_1(\overline{A}^2-\overline{A}_0^2)\overline{A} + E_2(\overline{B}^2-\overline{B}_0^2)\overline{A} + E_3(\overline{AB}-\overline{A}_0\overline{B}_0)\overline{B} +$$

$$+ E_4(\overline{A}-\overline{A}_0) - E_5\overline{p} - \overline{\Lambda}\,\overline{A} = 0 \qquad \text{(II-52)}$$

e,

$$H_1(\overline{B}^2-\overline{B}_0^2)\overline{B} + H_2(\overline{A}^2-\overline{A}_0^2)\overline{B} + H_3(\overline{AB}-\overline{A}_0\overline{B}_0)\overline{A} +$$

$$+ H_4(\overline{B}-\overline{B}_0) - \overline{\Lambda}\,\overline{B} = 0 \qquad \text{(II-53)}$$

sendo

$$\overline{A} = \frac{A}{h} \; ; \quad \overline{B} = \frac{B}{h} \; ; \quad \overline{A}_0 = \frac{A_0}{h} \; ; \quad \overline{B}_0 = \frac{B_0}{h}$$

$$\overline{\Lambda} = \frac{\Lambda b}{4\pi^2 D} \quad \text{e} \quad \overline{p} = p \cdot \frac{10^8}{E}$$

onde, os parâmetros $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A}_0$ e $\overline{B}_0$, são os parâmetros adimensionais de deslocamento, $\overline{\Lambda}$ o parâmetro adimensional de carga de compressão axial, e $\overline{p}$ o parâmetro adimensional de pressão lateral que causa uma deformada equivalente a uma certa imperfeição geométrica inicial. Assim, a equação algébrica não-linear de equilíbrio, (II-52), serve tanto ao caso da secção II.5.1 (para $\overline{p} = 0$), quanto ao caso da secção II.5.2 (para $\overline{p} \neq 0$). As constantes são iguais a,

$$E_1 = 12(1-\nu^2)\,\frac{\gamma^2}{4n^2}\left(\frac{n^4}{\gamma^4} + 1\right); \quad H_1 = 12(1-\nu^2)\,\frac{\gamma^2}{4m^2}\left(\frac{m^4}{\gamma^4} + 1\right)$$

$$E_2 = 12(1-\nu^2)\,\frac{m^2}{64\gamma^2} \; ; \qquad H_2 = 12(1-\nu^2)\,\frac{n^2}{64\gamma^2}$$

$$E_3 = 12(1-\nu^2)\left(\frac{\gamma^2}{n^2}J - \frac{m^2}{64\gamma^2}\right); \qquad H_3 = 12(1-\nu^2)\left(\frac{\gamma^2}{m^2}J - \frac{n^2}{64\gamma^2}\right)$$

$$E_4 = \frac{\gamma^2}{4n^2}\left(\frac{n^2}{\gamma^2} + 1\right)^2 \quad ; \qquad H_4 = \frac{\gamma^2}{4m^2}\left(\frac{m^2}{\gamma^2} + 1\right)^2$$

$$E = 48(1-\nu^2)\ \frac{\gamma^2 b^4}{n^3\pi^6 h^3 10^8}\ ;$$

$$J = \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\left\{\left[\frac{(m-n)^2}{(m+n)^2+4\gamma^2}\right]^2 + \left[\frac{(m+n)^2}{(m-n)^2+4\gamma^2}\right]^2 + \frac{m^2n^2}{\gamma^4}\right\}$$

A solução das equações algébricas não-lineares de equilíbrio (II-52) e (II-53), descreve o comportamento da placa em função da forma modal considerada. Se a solução envolver somente um parâmetro de amplitude de deslocamento, $\overline{A}$ ou $\overline{B}$, o modo de deslocamento é não-acoplado. Quando a solução envolver ambos os parâmetros de amplitudes de deslocamentos, $\overline{A}$ e $\overline{B}$, o modo de deslocamento é acoplado.

Com relação a interação entre os modos de deslocamento, $\overline{A}$ e $\overline{B}$, as soluções (II-52) e (II-53), admitem as seguintes formas,

(i) se $\overline{A}_0 = \overline{B}_0 = 0$; existem três soluções, duas não-acopladas ($\overline{A} \neq 0$; $\overline{B} = 0$ e $\overline{A} = 0$; $\overline{B} \neq 0$) e a terceira acoplada ($\overline{A} \neq 0$; $\overline{B} \neq 0$);

(ii) se $\overline{A}_0 \neq 0$; $\overline{B}_0 = 0$ ou $\overline{A}_0 = 0$; $\overline{B}_0 \neq 0$; existem duas soluções, uma não-acoplada ($\overline{A} \neq 0$; $\overline{B} = 0$ ou $\overline{A} = 0$; $\overline{B} \neq \neq 0$) e outra acoplada ($\overline{A} \neq 0$; $\overline{B} \neq 0$);

(iii) se $\overline{A}_0 \neq 0$; $\overline{B}_0 \neq 0$; existe uma única solução, e esta é acoplada ($\overline{A} \neq 0$; $\overline{B} \neq 0$).

CAPÍTULO III

ESTABILIDADE DE PLACAS GEOMETRICAMENTE PERFEITAS

III.1 INTRODUÇÃO

A não consideração das imperfeições geométricas iniciais, $\overline{A}_0 = 0$ e $\overline{B}_0 = 0$, e da imperfeição inicial equivalente, $\overline{p} = 0$ (pois a pressão lateral induz uma configuração deformada que apresenta as mesmas características ao de uma imperfeição geométrica inicial no modo simétrico de deformação), nas equações (II-52) e (II-53), implica em três possíveis soluções, para a placa geometricamente perfeita,

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \overline{A} \neq 0;\ \overline{B} = 0 \\ &\text{(ii)} \quad \overline{A} = 0;\ \overline{B} \neq 0 \\ &\text{(iii)} \quad \overline{A} \neq 0;\ \overline{B} \neq 0 \end{aligned} \qquad \text{(III-1)}$$

correspondendo as soluções (III-1.i) e (III-i.ii), aos modos não-acoplados de deformação e a solução (III-1.iii) ao modo acoplado de deformação.

As equações não-lineares de equilíbrio, sem imperfeições geométricas iniciais, ficam

$$\overline{A}\left[E_1\overline{A}^2 + (E_2+E_3)\overline{B}^2 + E_4 - \overline{\Lambda}\right] = 0 \qquad \text{(III-2)}$$

e

$$\overline{B}\left[H_1\overline{B}^2 + (H_2+H_3)\overline{A}^2 + H_4 - \overline{\Lambda}\right] = 0 \qquad \text{(III-3)}$$

e a eliminação do parâmetro $\overline{\Lambda}$, permite escrever uma relação entre as amplitudes de deslocamentos, $\overline{A}$ e $\overline{B}$, para o caso de acoplamento entre os modos de deformação,

$$\overline{AB}\left[(E_1-H_2-H_3)\overline{A}^2 + (E_2+E_3-H_1)\overline{B}^2 + E_4 - H_4\right] = 0 \qquad \text{(III-4)}$$

a qual representa a projeção do caminho não-linear de equilíbrio sobre o plano $\overline{A}$ x $\overline{B}$.

III.2 MODO NÃO-ACOPLADO DE DEFORMAÇÃO

III.2.1 Caminho Fundamental de Equilíbrio e Ponto Crítico

A busca de uma solução na forma do modo simétrico de deformação, dada por (III-1.i) aplicada em (II-37), faz com que as equações não-lineares de equilíbrio (III-2) e (III-3), se reduzam a

$$\overline{A}(E_1\overline{A}^2 + E_4 - \overline{\Lambda}) = 0 \qquad \text{(III-5)}$$

e

$$\overline{B} = 0 \qquad \text{(III-6)}$$

sendo (III-5) satisfeita pela solução trivial

$$\overline{A} = 0 \qquad \text{(III-7)}$$

que fornece o caminho fundamental de equilíbrio (w = 0) para a placa em um estado de equilíbrio de membrana; e pela solução de

$$E_1\overline{A}^2 + E_4 - \overline{\Lambda} = 0 \qquad \text{(III-8)}$$

que fornece o caminho pós-crítico de equilíbrio envolvendo deslocamentos fora do seu plano médio, $w \neq 0$.

A determinação da carga crítica, isto é, o valor da carga no qual ocorre uma bifurcação ao longo do caminho fundamental de equilíbrio ($\overline{A} = 0$), em um caminho pós-crítico de equilíbrio da placa, é efetuada através da extremização da segunda variação de V,

$$\delta(V_2) = 3E_1\overline{A}^2 + E_4 - \overline{\Lambda} = 0 \qquad \text{(III-9)}$$

no ponto de bifurcação, $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_c$ e $\overline{A} = 0$, resultando em

$$\overline{\Lambda}_c = E_4 = \frac{\gamma^2}{4n^2}\left(\frac{n^2}{\gamma^2} + 1\right)^2; \quad \Lambda_c = \frac{4\pi^2 D}{b}\,\overline{\Lambda}_c \qquad \text{(III-10)}$$

onde pode-se notar que o valor da carga crítica, Λ_c, depende das dimensões e propriedades físicas da placa e também, do número de meias-ondas, n, na direção x, do modo simétrico de deformação da placa. Na direção y, a deformada da placa, corresponde à um modo simétrico dado por uma única meia-onda senoidal, em conformidade com a teoria clássica.

A minimização de (III-10) em relação à n, fornece o menor valor de $\overline{\Lambda}_c$ (carga crítica clássica), a qual está associada a relação entre o número de meias-ondas senoidais, n, e a razão

entre os lados da placa, γ, isto é,

$$n = \gamma \qquad \text{(III-11)}$$

Calculando os valores do parâmetro de carga crítica, $\bar{\Lambda}_c$, para vários valores de γ e para cada valor fixo de n (ímpar), pode-se traçar curvas representando $\bar{\Lambda}_c$ como uma função de γ. Procedendo-se analogamente para o modo antimétrico de deformação, associado ao número de meias-ondas senoidais m (par) na direção x, resulta no espectro mostrado na Figura III.1.

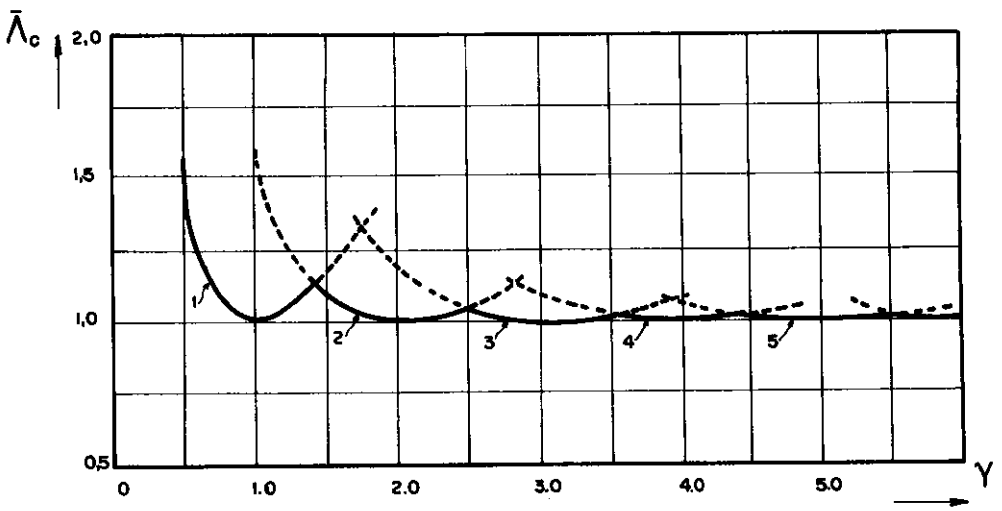


FIG. III-1. CARGAS CRÍTICAS DOS MODOS DE DESLOCAMENTOS NÃO-ACOPLADOS (24)

Observa-se nesta Figura, que o valor de n ou m que fornece o menor valor da carga crítica, $\bar{\Lambda}_c$, depende da razão γ, sempre associada a valores inteiros; e quanto maior o valor de γ, $\bar{\Lambda}_c$ tende a um valor unitário.

III.2.2 Caminho Pós-Crítico de Equilíbrio.

O caminho pós-crítico de equilíbrio, para a condição não-acoplada (III-1.i) e (III-1.ii), intercepta o caminho fundamental de equilíbrio no ponto crítico, $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_c$ e $\overline{A} = 0$ ou $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_c$ e $\overline{B} = 0$, sendo dados pelas soluções das equações não-lineares de equilíbrio pós-crítico (III-5)

$$\overline{A}(E_1\overline{A}^2 + E_4 - \overline{\Lambda}) = 0$$

para o plano $\overline{\Lambda}$ x $\overline{A}$, e

$$\overline{B}(H_1\overline{B}^2 + H_4 - \overline{\Lambda}) = 0 \qquad \text{(III-12)}$$

para o plano $\overline{\Lambda}$ x $\overline{B}$.

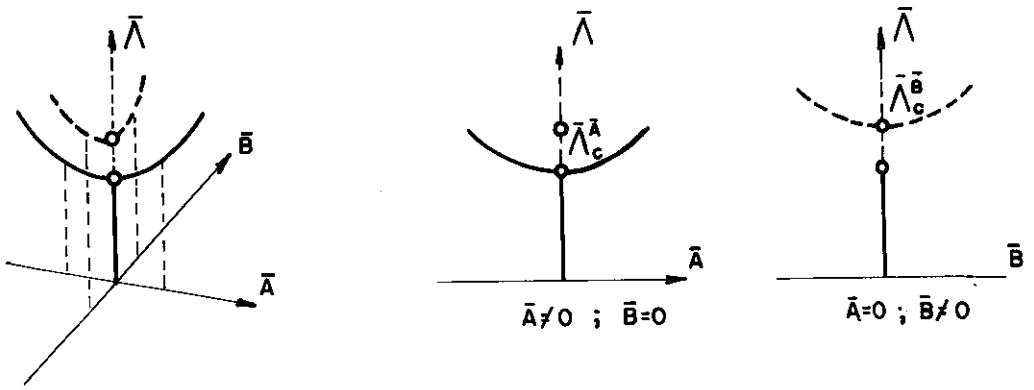
O modo simétrico não-acoplado ($\overline{A} \neq 0$; $\overline{B} = 0$) originará o primeiro caminho pós-crítico bifurcando do caminho fundamental de equilíbrio, quando $n = \gamma$ e o antimétrico ($\overline{A} = 0$; $\overline{B} \neq 0$), quando $m = \gamma$. Se $n \neq \gamma$ e $m \neq \gamma$, o primeiro caminho pós-crítico bifurcado do caminho fundamental de equilíbrio, será

(i) o modo simétrico, quando $\gamma^2 < n \cdot m$; ou,

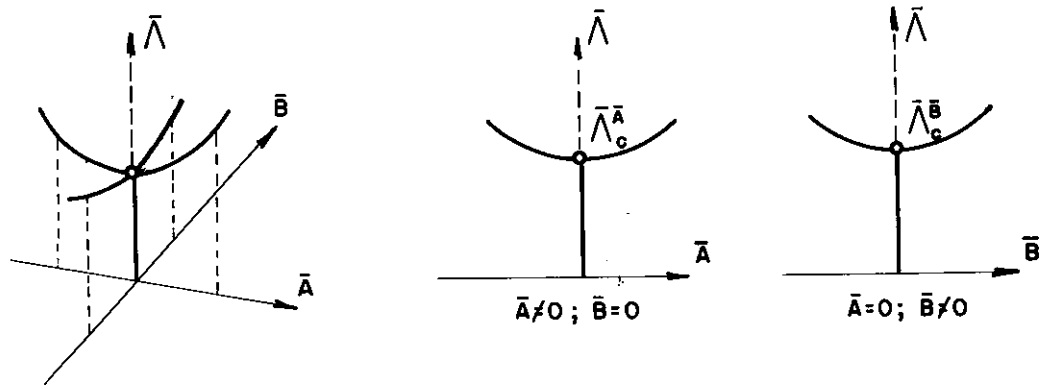
(ii) o modo antimétrico, quando $\gamma^2 > n \cdot m$;

conforme ilustrado na Figura III.2.

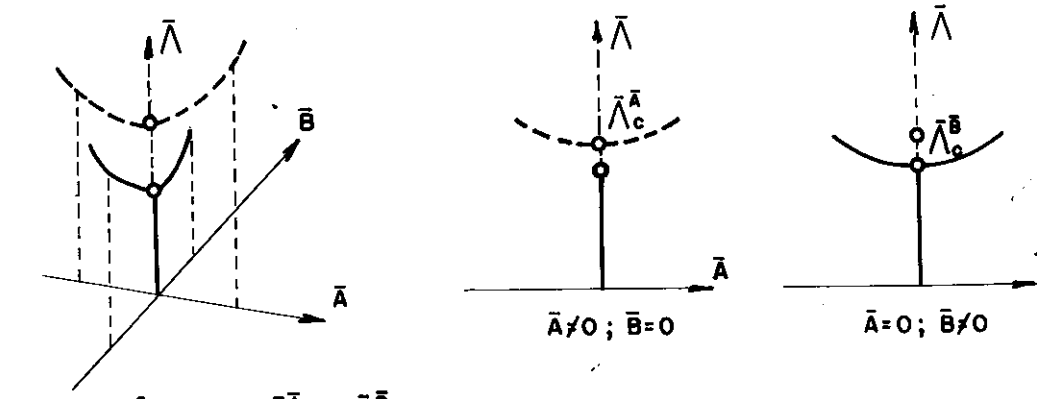
A verificação da estabilidade do estado crítico de equilíbrio ($\overline{\Lambda}_{c_{min}}$) e pós-crítico inicial associado ao primeiro caminho não-acopla



a. $\Upsilon^2 < n.m$, $\bar{\Lambda}_c^{\bar{A}} < \bar{\Lambda}_c^{\bar{B}}$



b. $\Upsilon^2 = n.m$, $\bar{\Lambda}_c^{\bar{A}} = \bar{\Lambda}_c^{\bar{B}}$



c. $\Upsilon^2 > n.m$, $\bar{\Lambda}_c^{\bar{A}} > \bar{\Lambda}_c^{\bar{B}}$

——— CAMINHOS ESTÁVEIS

– – – – – – CAMINHOS INSTÁVEIS

FIG. III-2. CAMINHOS NÃO-ACOPLADOS PÓS-CRÍTICOS DE EQUILÍBRIO

do pós-crítico de equilíbrio, é feita através da investigação do sinal da quarta variação da energia potencial total, com respeito aos parâmetros de deslocamentos $\overline{A}$ e $\overline{B}$, e avaliada no ponto $(\overline{\Lambda}^{\overline{A}}_{c};\ \overline{A} \neq 0,\ \overline{B} = 0)$ ou $(\overline{\Lambda}^{\overline{B}}_{c};\ \overline{A} = 0,\ \overline{B} \neq 0)$

$$V_4 = G_1\ \overline{A}^4 + G_2\ \overline{B}^4 \qquad \text{(III-13)}$$

onde,

$$G_1 = \frac{9ab\pi^4}{256b^4}\left(\frac{K}{2}\frac{n^4}{\gamma^4} + 1\right) \quad \text{e} \quad G_2 = \frac{9ab\pi^4}{256b^4}\left(\frac{K}{2}\frac{m^4}{\gamma^4} + 1\right).$$

Para o modo simétrico ($\overline{A} \neq 0$; $\overline{B} = 0$), verifica-se que, $V_4 > 0$ para qualquer valor arbitrário e pequeno de $\overline{A}$; e para o modo antimétrico ($\overline{A} = 0$; $\overline{B} \neq 0$), que também, $V_4 > 0$ para qualquer valor arbitrário e pequeno de $\overline{B}$. Assim, tanto o estado crítico de equilíbrio, quando os estados pós-críticos iniciais associados ao modo simétrico ou antimétrico, são estáveis.

Como mostra a Figura III.2, os caminhos pós-críticos de equilíbrio associados a $\overline{\Lambda}_c > \overline{\Lambda}_{c_{min}}$ (primeiro caminho) são instáveis, já que os estados de equilíbrio, para cargas maiores que a carga crítica clássica, são sempre instáveis.

Apresenta-se nas Figuras III.3, os caminhos pós-críticos de equilíbrios, para cinco valores distintos de γ, obtidos com a solução numérica das equações não-lineares (III-5) e (III-12); que correspondem às situações apresentadas pela Figura III.2.

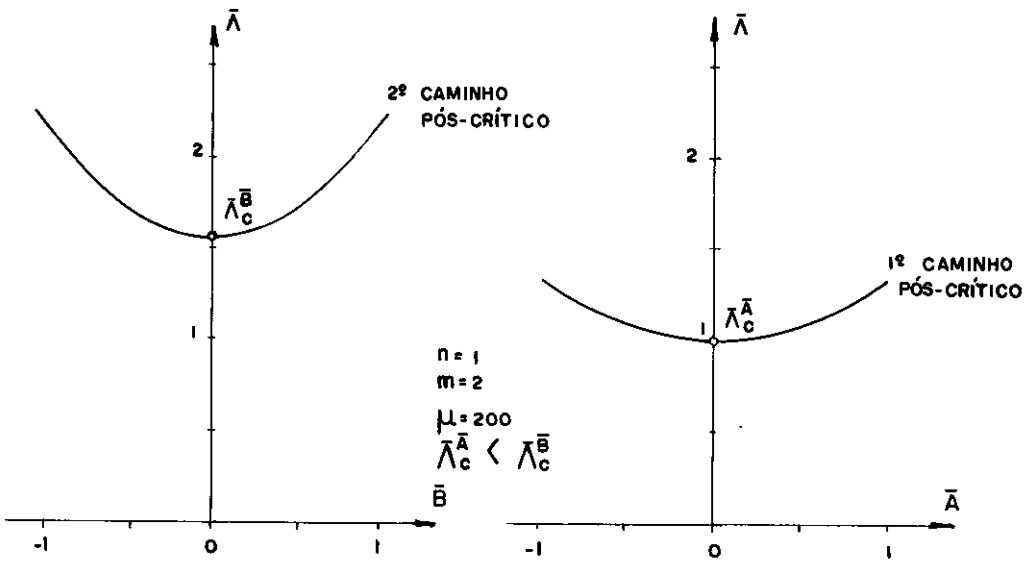


FIG. III-3a. CAMINHOS PÓS-CRÍTICOS DE EQULÍBRIO, $\gamma = 1.0$

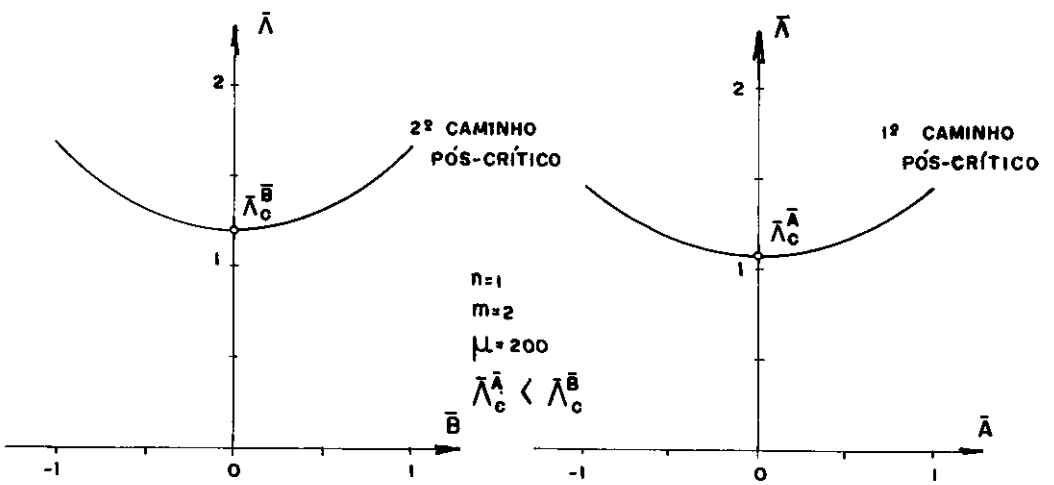


FIG. III-3b. CAMINHOS PÓS-CRÍTICOS DE EQUILÍBRIO, $\gamma = 1.3$

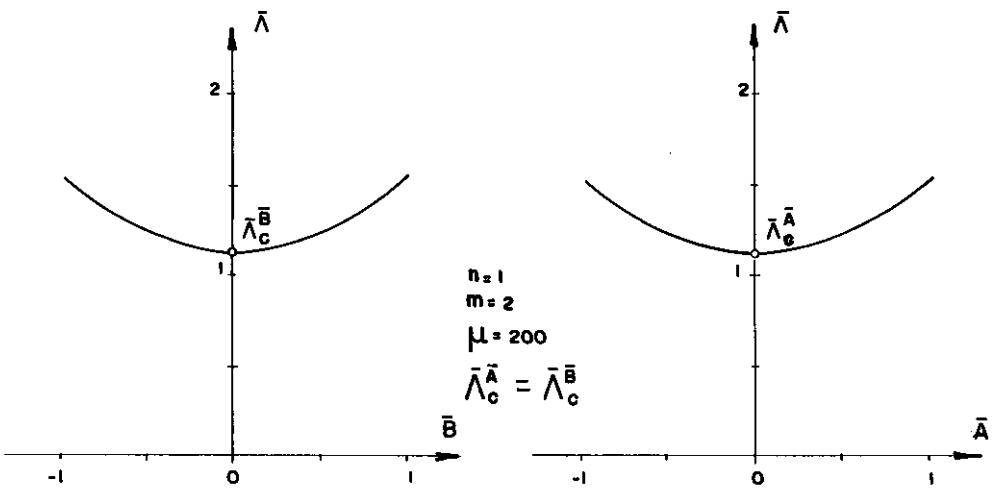


FIG. III-3c. CAMINHOS PÓS-CRÍTICOS DE EQUILÍBRIO, $\gamma = \sqrt{2}$

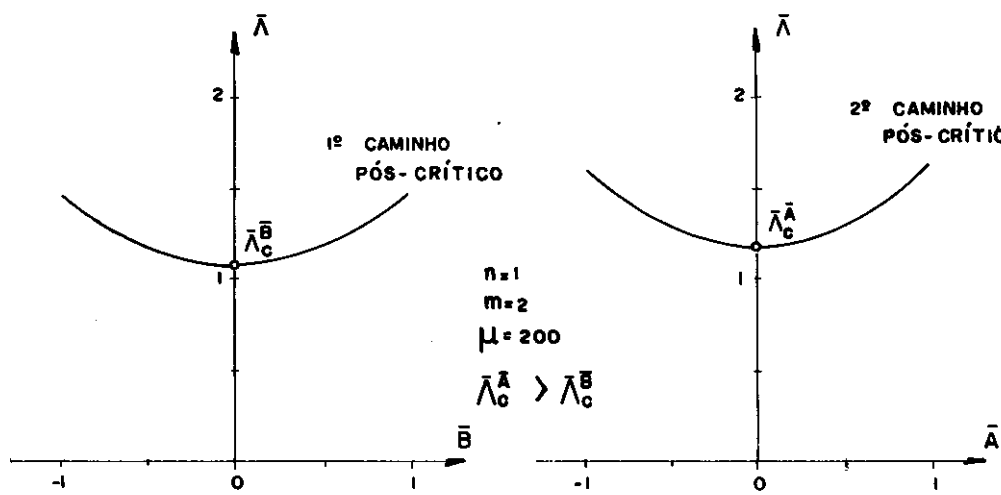


FIG.III-3d. CAMINHOS PÓS-CRÍTICOS DE EQUILÍBRIO, $\gamma = 1.5$

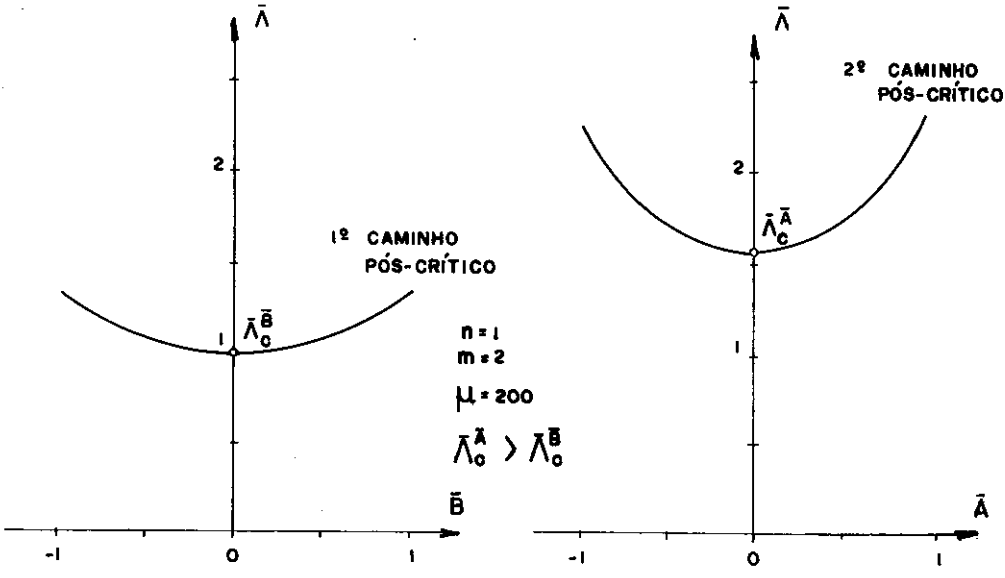


FIG. III-3e. CAMINHOS PÓS-CRÍTICOS DE EQUILÍBRIO, $\gamma = 2.0$

Pode-se notar na Figura III.3, que quando,

(i) $\gamma = 1{,}0$ e $\gamma = 1{,}3$, ($\gamma < \sqrt{2}$) Figura III.3.a e b, $\gamma^2 < n \cdot m$, o primeiro caminho pós-crítico bifurcado do caminho fundamental de equilíbrio é o do modo simétrico;

(ii) $\gamma = \sqrt{2}$, Figura III.3.c, $\gamma^2 = n \cdot m$, $\overline{\Lambda}_c^{\overline{A}} \equiv \overline{\Lambda}_c^{\overline{B}}$, *indicando que haverá sempre o acoplamento entre os modos simétrico e antimétrico*;

(iii) $\gamma = 1{,}5$ e $\gamma = 2{,}0$, ($\gamma > \sqrt{2}$) Figura III.3.d e e, $\gamma^2 > n \cdot m$, o primeiro caminho pós-crítico bifurcado do caminho fundamental é o do modo antimétrico.

III.3 MODO ACOPLADO DE DEFORMAÇÃO

A condição de acoplamento (III-1.iii), entre os modos simétrico e antimétrico, é expressa pelas equações (III-2) e (III-3) ou alternativamente por (III-4),

$$\overline{AB}\left[(E_1-H_2-H_3)\overline{A}^2 + (E_2+E_3-H_1)\overline{B}^2 + E_4 - H_4\right] = 0$$

que representa a projeção da solução no plano $\overline{A}$ x $\overline{B}$, podendo assumir neste plano a forma de uma elipse ou de uma hipérbole, dependendo dos valores dos parâmetros envolvidos. As possíveis situações de acoplamento, entre modos isolados de deformação, a partir de pontos de bifurcação sobre caminhos pós-críticos de equilíbrio, estão mostradas na Figura III.4.

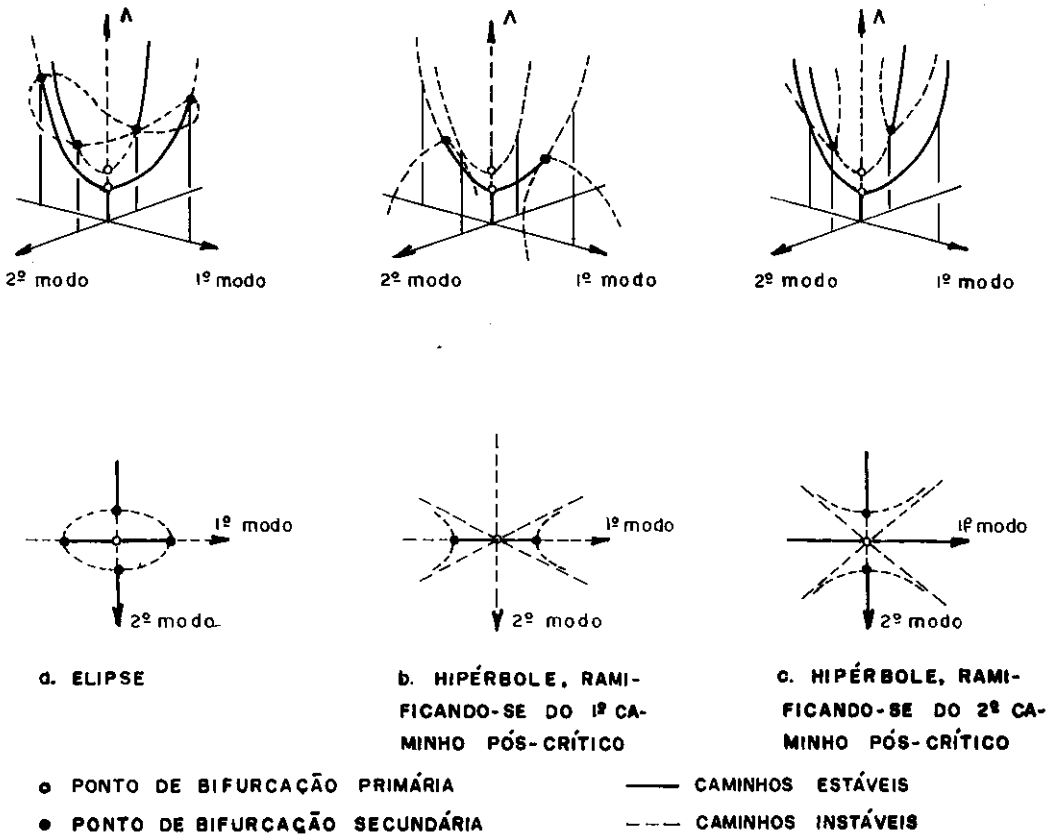


FIG. III-4. FORMAS DE ACOPLAMENTOS ENTRE MODOS ISOLADOS PARA SISTEMAS ESTRUTURAIS IDEAIS (5)

No presente caso, de uma placa retangular, a projeção da solução acoplada de (III-4), resulta sempre em uma hipérbole, ilustrada pela Figura III.4.c; representando o comportamento pós-crítico típico quando se considera o acoplamento entre modos simétrico e antimétrico; isto será demonstrado mais adiante através da solução numérica de (III-2), (III-3) e (III-4).

As projeções dos caminhos acoplados de equilíbrio sobre o plano $\overline{A}$ x $\overline{B}$, representados pela elipse, Figura III.4.a, e as hipérboles, Figura III.4.b e c, assumem uma grande importância, pois *o caminho não-acoplado pós-crítico inicialmente está*

vel, pode perder sua estabilidade em um ponto de bifurcação secundário, implicando em uma mudança de configuração deformada da placa, associada ao caminho acoplado de equilíbrio.

Na Figura III.4, as intersecções da projeção acoplada (III-4), com os eixos coordenados ($\overline{A}$, $\overline{B}$), representam os pontos de bifurcação secundária sobre os caminhos não-acoplados pós-críticos de equilíbrio.

Para uma placa sob compressão uniforme axial em seu plano médio, os modos críticos podem ser, tanto o simétrico como o antimétrico, dependendo da relação entre lados, γ.

Considerando que o primeiro caminho pós-crítico não-acoplado seja no modo simétrico, a bifurcação ocorrerá ao longo ao segundo caminho pós-crítico não-acoplado, correspondente ao modo antimétrico; este ponto de bifurcação é obtido de (III-4), tomando-se $\overline{A} = 0$ e $\overline{B} \neq 0$ (intersecção da projeção com o eixo $\overline{B}$),

$$ {}^{c}\overline{B}_{b} = \left[\frac{(H_4 - E_4)}{(E_2 + E_3 - H_1)} \right]^{1/2} \qquad \text{(III-14)} $$

que substituindo em (III-12) fornece o valor do parâmetro de carga crítica, associada ao ponto de bifurcação secundária,

$$ {}^{c}\overline{A}_{b} = \overline{A}_{c} + \left[\frac{H_1 (H_4 - E_4)}{(E_2 + E_3 - H_1)} \right] \qquad \text{(III-15)} $$

Analogamente, considerando o modo antimétrico o primeiro modo não-acoplado, e o modo simétrico o segundo, as expressões para o ponto de intersecção – agora com o eixo $\overline{A}$ – e para

a carga crítica associada, são

$$ {}^{c}\overline{\Lambda}_b = \left[\frac{(H_4 - E_4)}{(E_1 - H_2 - H_3)} \right]^{1/2} \qquad \text{(III-16)} $$

e,

$$ {}^{c}\overline{\Lambda}_b = \overline{\Lambda}_c + \left[\frac{E_1 (H_4 - E_4)}{(E_1 - H_2 - H_3)} \right] \qquad \text{(III-17)} $$

Para cada valor fixo de γ e combinações de pares de valores inteiros (n,m) pode-se, com ${}^{c}\overline{\Lambda}_b\left[\gamma;(n,m)\right]$ dado por (III-15) ou (III-17), traçar curvas representando ${}^{c}\overline{\Lambda}_b$ como uma função de γ, resultando no espectro mostrado na Figura III.5.

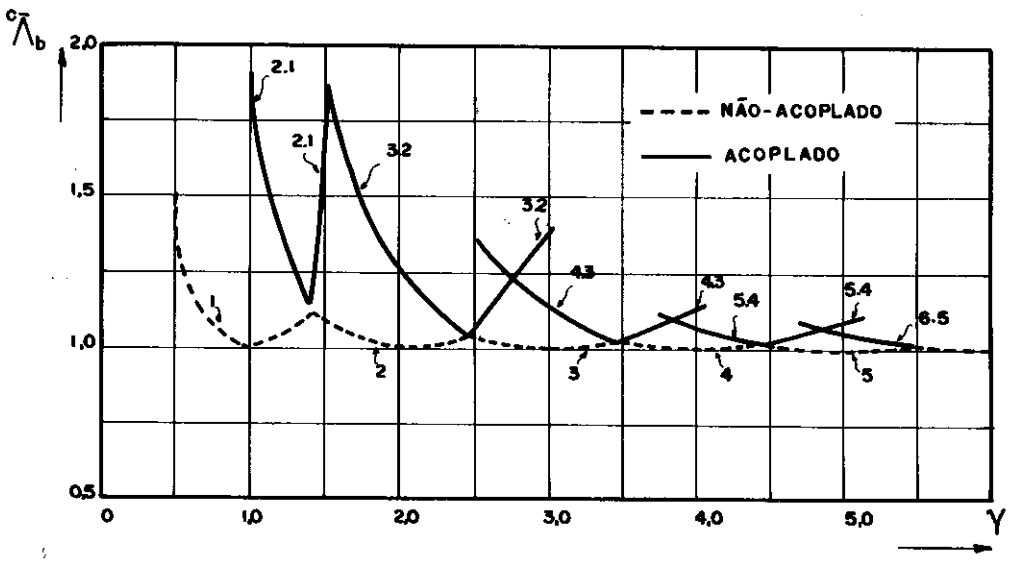


FIG. III-5. CARGAS CRÍTICAS DOS MODOS DE DESLOCAMENTOS ACOPLADOS

Observa-se nesta Figura, que em cada caso o menor valor da carga crítica de bifurcação, ${}^{c}\overline{\Lambda}_b$, associada ao acoplamento entre os modos simétrico e antimétrico, é obtida quando

$\gamma^2 = n \cdot m$, que coincide com a carga crítica clássica, $\bar{\Lambda}_c$. Também, ${}^c\bar{\Lambda}_b$ converge para um valor unitário com o aumento de γ, só que mais lentamente do que $\bar{\Lambda}_c$.

Apresenta-se nas Figuras III.6, as projeções dos caminhos acoplados de equilíbrio sobre os planos $\bar{\Lambda}$ x $\bar{A}$, $\bar{\Lambda}$ x $\bar{B}$ e $\bar{A}$ x $\bar{B}$, obtidos com a solução numérica das equações não-lineares (III-2), (III-3) e (III-4), para os mesmos valores de γ das Figuras III.3.

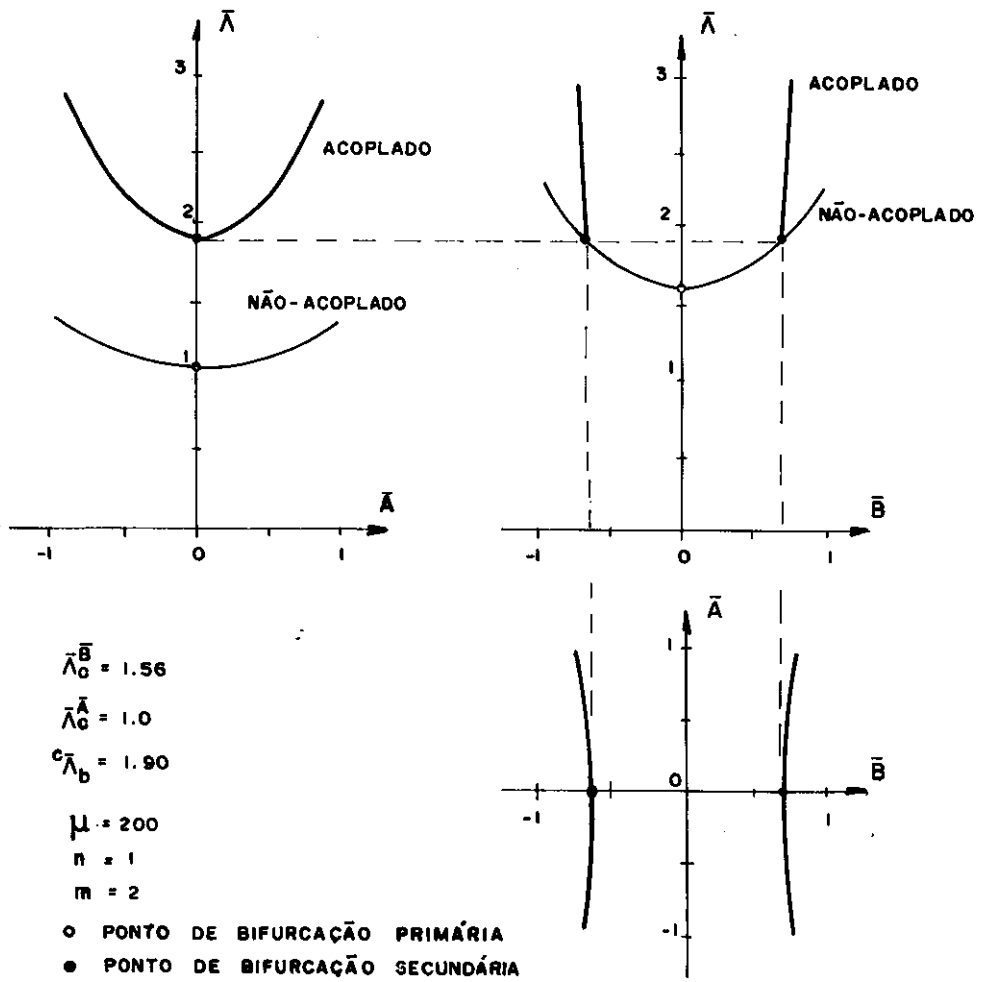


FIG. III-6a. CAMINHOS ACOPLADOS DE EQUILÍBRIO, $\gamma = 1.0$

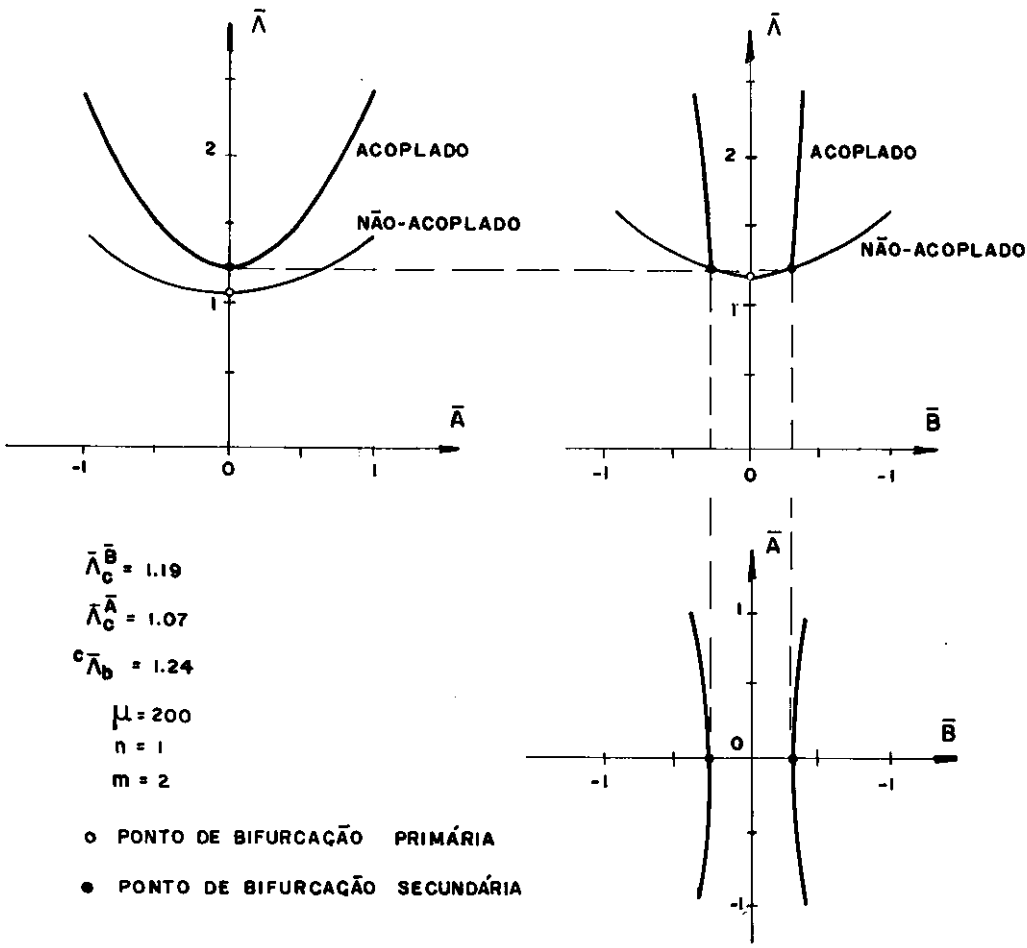


FIG. III-6b. CAMINHOS ACOPLADOS DE EQUILÍBRIO, $\bar{\gamma}$ = 1.3

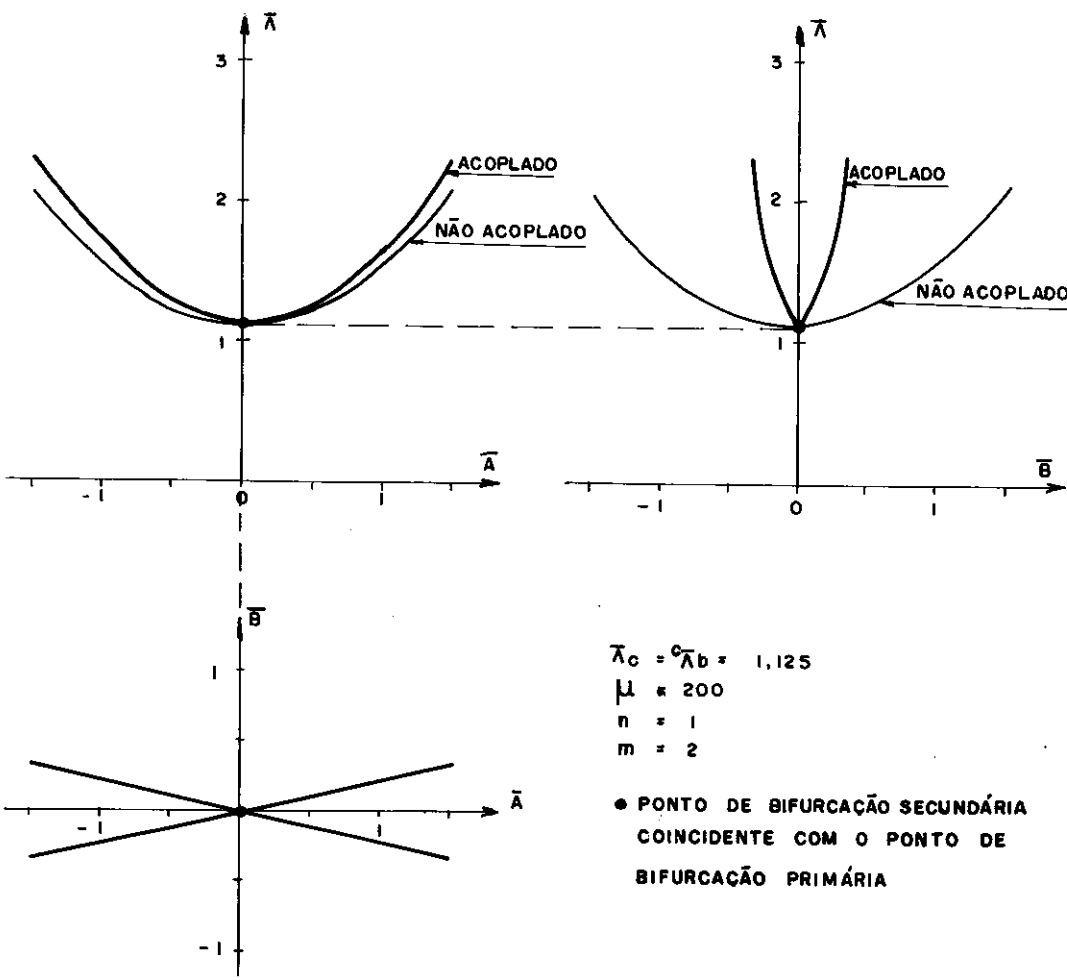


FIG. III-6c. CAMINHOS ACOPLADOS DE EQUILÍBRIO, $\bar{\Lambda} = \sqrt{2}$

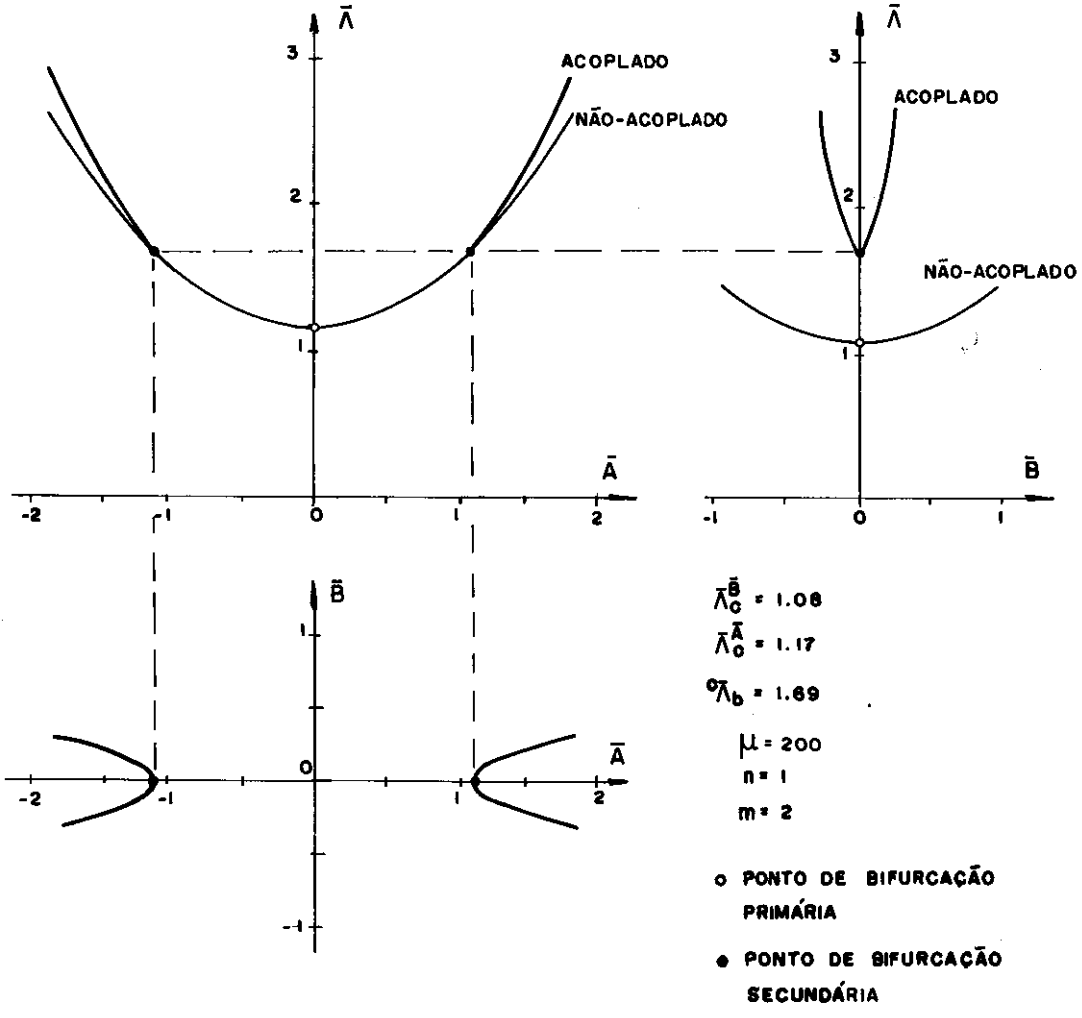


FIG. III - 6d. CAMINHOS ACOPLADOS DE EQUILÍBRIO, $\delta^{\Lambda} = 1.5$

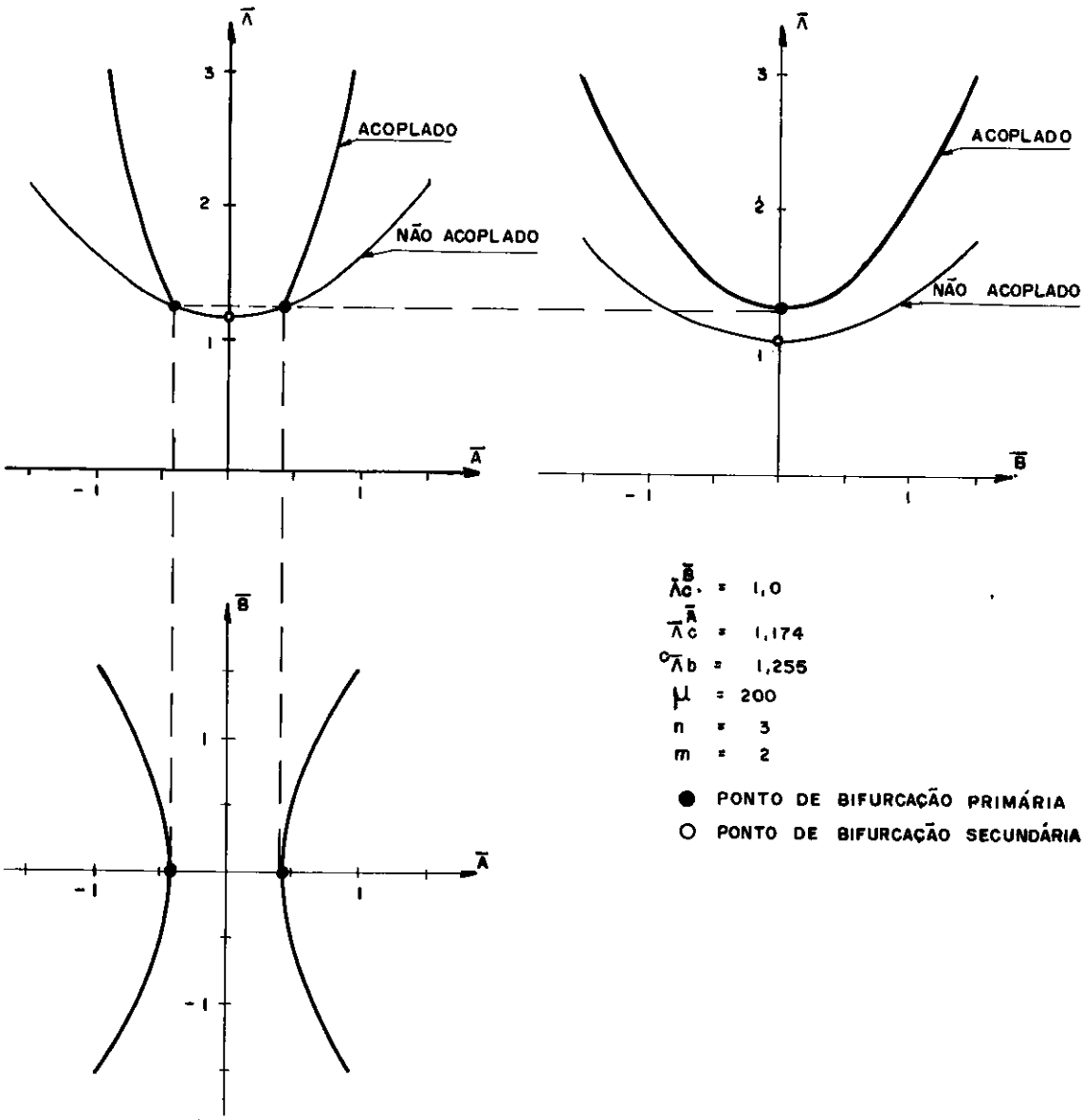


FIG. III-6a. CAMINHOS ACOPLADOS DE EQUILÍBRIO, $\gamma = 2.0$

Pode-se notar nas Figuras III.6, que quando,

(i) $\gamma = 1{,}0$ e $\gamma = 1{,}3$; o primeiro caminho não-acoplado de equilíbrio é o do modo simétrico, e o caminho de equilíbrio acoplado bifurca-se do segundo caminho não-acoplado pós-crítico de equilíbrio, associado ao modo antimétrico;

(ii) $\gamma = \sqrt{2}$; o ponto crítico de bifurcação primária é coincidente com o ponto crítico de bifurcação secundária, ambos ao longo do caminho fundamental de equilíbrio. Neste caso a projeção dos caminhos acoplados de equilíbrio sobre o plano $\overline{A}$ x $\overline{B}$, se degenera em duas retas (vide equação (III-4)),

$$\pm \overline{A} = \mp \left[\frac{-(E_2+E_3-H_1)}{(E_1-H_2-H_3)} \right]^{1/2} \overline{B} \qquad \text{(III-18)}$$

(iii) $\gamma = 1{,}5$ e $\gamma = 2{,}0$; o primeiro caminho não-acoplado de equilíbrio é o do modo antimétrico, e o caminho de equilíbrio acoplado bifurca-se do segundo caminho não-acoplado pós-crítico de equilíbrio, associado ao modo simétrico.

Deve-se notar na Figura III.6, que para $\gamma = 2{,}0$ os modos envolvidos são $(n,m) \equiv (3,2)$, conforme indicado no espectro da Figura III.5.

Nas situações apresentadas na Figura III.6, para a placa, ambos os caminhos não-acoplados de equilíbrios são estáveis (vide secção III.2.2) e portanto, segundo teorema apresentado por SUPPLE (6), o caminho de equilíbrio acoplado bifurca-se do segundo caminho não-acoplado de equilíbrio e é sempre estável.

CAPÍTULO IV

ESTABILIDADE DE PLACAS COM IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS INICIAIS

IV.1 INTRODUÇÃO

No Capítulo anterior, apresentou-se a análise do comportamento não-linear da placa retangular geométricamente perfeita, comprimida uniaxialmente. Essa análise indicou a existência de pontos de bifurcação primários (carga crítica clássica) e secundário, ao longo de caminhos pós-críticos de equilíbrio não-acoplados; sendo os caminhos pós-bifurcados nesses casos, sempre estáveis.

Neste Capítulo, mostra-se que a presença de imperfeições geométricas iniciais, ao invés de sempre destruir pontos de bifurcação (resultado este dos mais conhecidos da teoria clássica), pode originar, em função do acoplamento entre modos, bifurcações secundárias estáveis, ou o que é mais surpreendente no caso de placas planas, *bifurcações secundárias instáveis* ao longo de caminhos imperfeitos de equilíbrio; as Figuras IV.1.a e b, IV.2 e IV.3, ilustram estes comportamentos.

A Figura IV.1 mostra o comportamento não-linear típico de situações em que o *modo de imperfeição é na mesma forma que o modo crítico dominante*, ao qual está associado o primeiro ca-

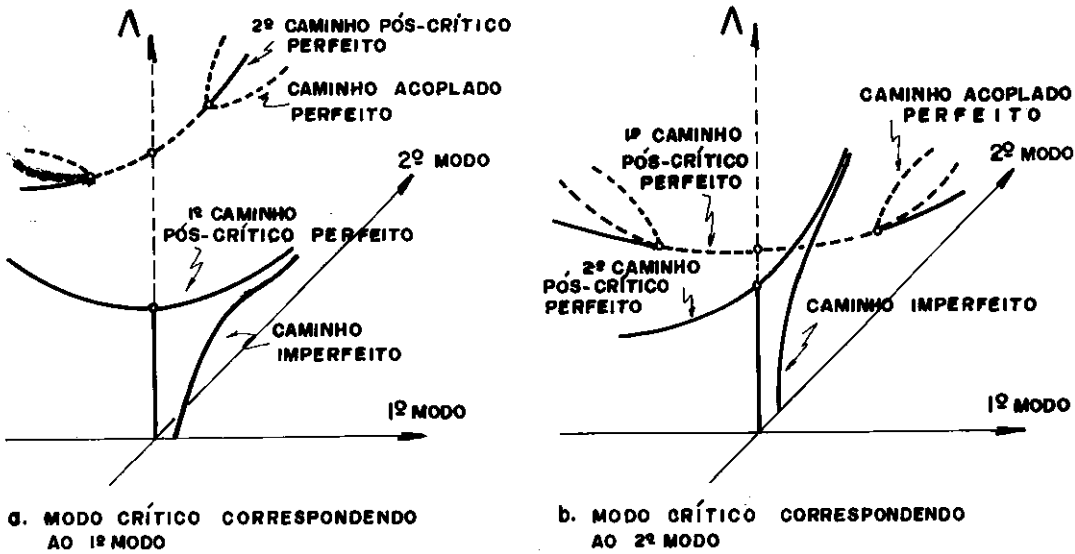


FIG. IV-1. CAMINHOS IMPERFEITOS DE EQUILÍBRIO NA MESMA FORMA DO MODO CRÍTICO DOMINANTE

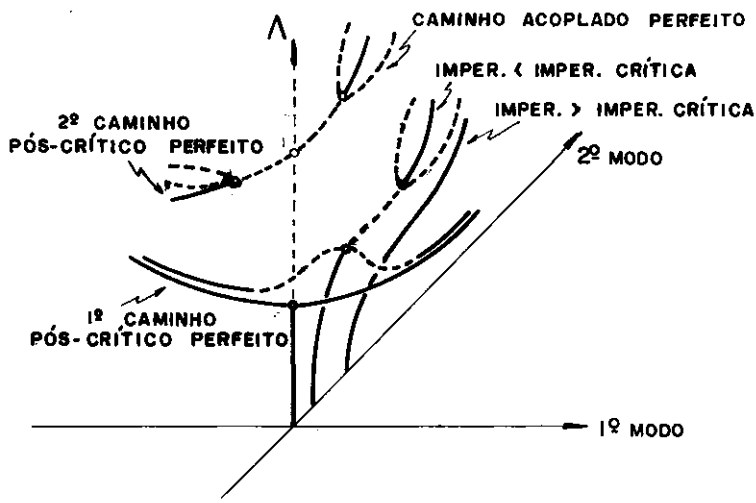


FIG. IV-2. CAMINHOS IMPERFEITOS DE EQUILÍBRIO EM FORMA DISTINTA DO MODO CRÍTICO DOMINANTE, COM IMPERFEIÇÃO INICIAL DIFERENTE DA IMPERFEIÇÃO INICIAL CRÍTICA

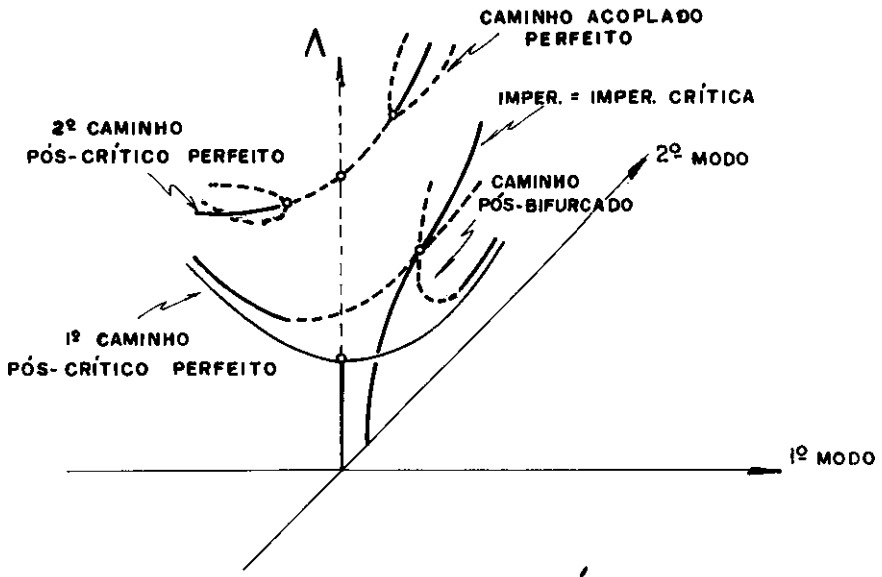


FIG. IV-3. CAMINHOS IMPERFEITOS DE EQUILÍBRIO EM FORMA DISTINTA DO MODO CRÍTICO DOMINANTE, COM IMPERFEIÇÃO INICIAL IGUAL AO DA IMPERFEIÇÃO INICIAL CRÍTICA

minho pós-crítico de equilíbrio (vide Figura III.4 e comentários da secção III.3). Deve-se notar que nesse caso não há acoplamento entre modos e a imperfeição geométrica inicial apenas destrói o ponto de bifurcação primária. Isto se dá sempre que modos de deformação e de imperfeição são de mesma forma, isto é, ou ambos simétricos ou ambos antimétricos.

A Figura IV.2, mostra o comportamento não-linear típico de situações em que *o modo de imperfeição é em forma distinta do modo crítico dominante*; por exemplo, o modo crítico simétrico (ou antimétrico) e modo de imperfeição antimétrico (ou simétrico). Neste caso poderá haver um acoplamento entre esses modos em função da magnitude da imperfeição.

Para pequenas amplitudes de imperfeição, menores que um certo valor crítico, podem ocorrer duas bifurcações secundárias ao longo do caminho imperfeito de equilíbrio. A primeira originando uma bifurcação instável a qual está associada um caminho acoplado de equilíbrio que retorna assintoticamente ao primeiro caminho pós-crítico perfeito. A segunda bifurcação promove uma reestabilização do caminho imperfeito original.

Para amplitudes de imperfeição maiores que o valor crítico, os pontos de bifurcação secundária são destruídos, e a resposta não-linear indicada na Figura IV.2, representa um comportamento semelhante àquele da Figura IV.1, isto é, o caminho imperfeito será assintótico no caminho pós-crítico perfeito associado à mesma forma do modo de imperfeição.

Quando a amplitude de imperfeição é a crítica, os dois pontos de bifurcação, descritos anteriormente, coalescem e formam um *único ponto de bifurcação secundário instável* ao longo do caminho imperfeito original de equilíbrio estável; isto é ilustrado na Figura IV.3, onde pode-se observar que o caminho acoplado (pós-bifurcado) resultante é assintótico ao primeiro caminho pós-crítico perfeito.

O caso mais geral de comportamento não-linear é aquele resultante do efeito simultâneo de imperfeições nas formas de ambos os modos de deformação. Neste caso a presença de tais imperfeições geométricas iniciais induz um certo tipo de resposta não-linear nesses modos acoplados; dependendo do par de imperfeições iniciais a estabilidade deste caminho imperfeito de equilíbrio é perdida em um ponto de bifurcação secundária, sendo esta

última instável.

A discussão extensiva de cada caso de comportamento acima descrito, será feita nas próximas secções tomando por base as soluções numéricas das equações não-lineares (II-52) e (II-53),

$$E_1(\overline{A}^2-\overline{A}_0^2)\overline{A} + E_2(\overline{B}^2-\overline{B}_0^2)\overline{A} + E_3(\overline{AB}-\overline{A}_0\overline{B}_0)\overline{B} +$$

$$+ E_4(\overline{A}-\overline{A}_0) - E_5\overline{p} - \overline{\Lambda}\,\overline{A} = 0$$

e,

$$H_1(\overline{B}^2-\overline{B}_0^2)\overline{B} + H_2(\overline{A}^2-\overline{A}_0^2)\overline{B} + H_3(\overline{AB}-\overline{A}_0\overline{B}_0)\overline{A} +$$

$$+ H_4(\overline{B}-\overline{B}_0) - \overline{\Lambda}\,\overline{B} = 0$$

sob as condições a seguir indicadas.

Na secção IV.2, que trata dos efeitos causados por imperfeições em um único modo crítico, assume-se as condições,

$$\text{(i) } \overline{A}_0 \neq 0 \text{ (ou } \overline{p} \neq 0);\ \overline{B}_0 = 0$$

ou, (IV-1)

$$\text{(ii) } \overline{A}_0 = 0 \text{ (ou } \overline{p} = 0);\ \overline{B}_0 \neq 0$$

Na secção IV.3, que trata dos efeitos causados por imperfeições em ambos os modos críticos, assume-se a condição,

$$\overline{A}_0 \neq 0 \text{ (ou } \overline{p} \neq 0);\ \overline{B}_0 \neq 0 \qquad \text{(IV-2)}$$

IV.2 IMPERFEIÇÃO GEOMÉTRICA INICIAL EM UM ÚNICO MODO CRÍTICO

As equações não-lineares (II-52) e (II-53), sob as condições (IV-1), apresentam, duas possíveis soluções,

(i) $\overline{A} \neq 0$; $\overline{B} = 0$, ou, $\overline{A} = 0$; $\overline{B} \neq 0$ (respostas não-acopladas

e, (IV-3)

(ii) $\overline{A} \neq 0$; $\overline{B} \neq 0$ (respostas acopladas)

que corresponde as respostas não-lineares mostradas respectivamente, nas Figuras IV.1.a e b, para o caso (IV-3.i) e nas Figuras IV.2 e IV.3, para o caso (IV-3.ii).

Cabe ressaltar que as imperfeições geométricas iniciais de amplitude A_0, associada na forma do modo simétrico de deformação, pode ser originada por uma certa pressão normal sobre a superfície da placa, p, e portanto no que se segue, se fará uso alternadamente dos parâmetros, $\overline{A}_0$ e de seu equivalente $\overline{p}$.

IV.2.1 Modo de Imperfeição na Mesma Forma que do Modo Crítico Dominante

Neste caso, buscam-se respostas não-lineares dos tipos (IV-3.i), através das equações não-lineares imperfeitas,

$$E_1(\overline{A}^2-\overline{A}_0^2)\overline{A} + E_4(\overline{A}-\overline{A}_0) - E_5\overline{p} - \overline{\Lambda}\,\overline{A} = 0$$

$$\overline{B} = 0 \qquad \text{(IV-4)}$$

e

$$\overline{A} = 0 \qquad \text{(IV-5)}$$

$$H_1(\overline{B}^2-\overline{B}_0^2)\overline{B} + H_4(\overline{B}-\overline{B}_0) - \overline{\Lambda}\,\overline{B} = 0$$

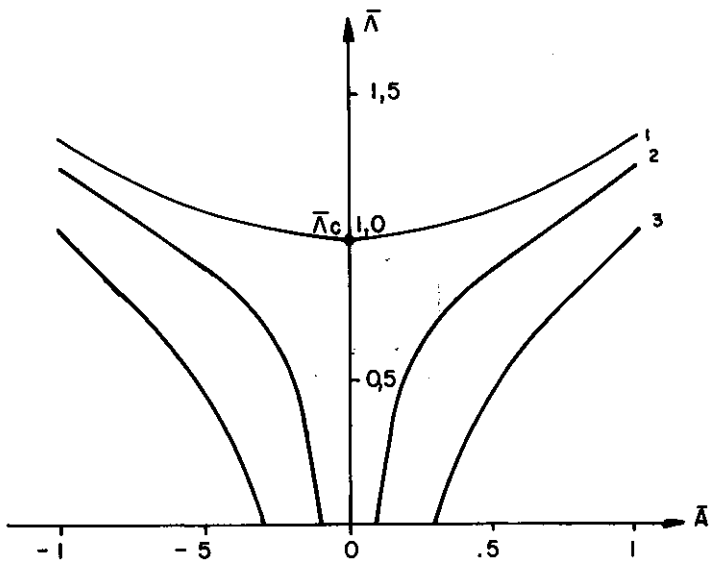
As soluções numéricas de (IV-4) e (IV-5), são apresentadas nas Figuras IV.4, IV.5 e IV.6, para três valores distintos de γ. Deve-se observar, com relação a essas Figuras, que para cada valor de γ, o primeiro caminho pós-crítico perfeito de equilíbrio está associado a um modo crítico dominante (associada a carga crítica clássica), conforme indicado na Figura III.1; por exemplo, para $\gamma = 1{,}0$ o modo crítico axial tem uma meia-onda, para $\gamma = 1{,}5$ o modo crítico axial tem duas meias-ondas, para $\gamma = \sqrt{2}$, este modo crítico tem indiferentemente uma ou duas meias-ondas.

Nas Figuras IV.4 e IV.6, respectivamente, para $\gamma = 1{,}0$ e $\gamma = 1{,}5$, a presença de imperfeições na mesma forma do modo crítico dominante, destrói o ponto de bifurcação primária, e quanto maior essas imperfeições, mais o caminho imperfeito de equilíbrio se afasta deste ponto, sendo posteriormente assintótico ao primeiro caminho pós-crítico perfeito de equilíbrio. Na Figura IV.5, para $\gamma = \sqrt{2}$, a não existência de um modo crítico dominante, implica em que o caminho imperfeito de equilíbrio esteja associado, ou somente ao modo simétrico, ou somente ao antimétrico, dependendo da existência de imperfeições geométricas iniciais, em um modo ou no outro; em qualquer dos dois casos, quanto maior as imperfeições, mais o caminho imperfeito de equilíbrio se afasta do ponto de bi

1 - CASO PERFEITO ($\bar{A}o = \bar{p} = 0$)

2 - $\bar{A}o = 0,1$ ($\bar{p} = 0,141$)

3 - $\bar{A}o = 0,3$ ($\bar{p} = 0,435$)



● PONTO DE BIFURCAÇÃO , $\bar{\Lambda}c = 1,0$

$\gamma = 1,0$, $\mu = 200$

$n = 1$

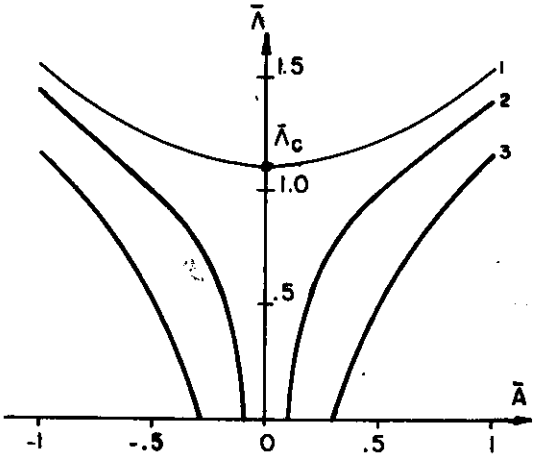
$m = 2$

FIG. IV-4. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO COM IMPERFEIÇÃO NA MESMA FORMA QUE DO MODO CRÍTICO DOMINANTE

1 - CASO PERFEITO ($\bar{A}_o = \bar{p} = 0$)

2 - $\bar{A}_o = 0.1$ ($\bar{p} = 0.141$)

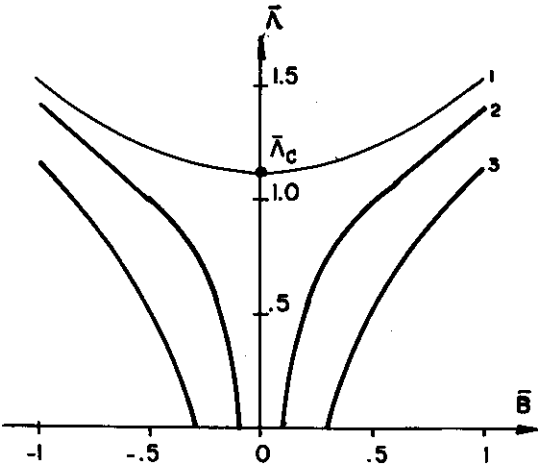
3 - $\bar{A}_o = 0.3$ ($\bar{p} = 0.453$)



1 - CASO PERFEITO ($\bar{B}_o = 0$)

2 - $\bar{B}_o = 0.1$

3 - $\bar{B}_o = 0.3$



• PONTO DE BIFURCAÇÃO, $\bar{\Lambda}_c = 1.125$

$\gamma = \sqrt{2}$, $\mu = 200$

$n = 1$

$m = 2$

FIG. IV-5. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO COM IMPERFEIÇÃO NA MESMA FORMA QUE DO MODO CRÍTICO DOMINANTE

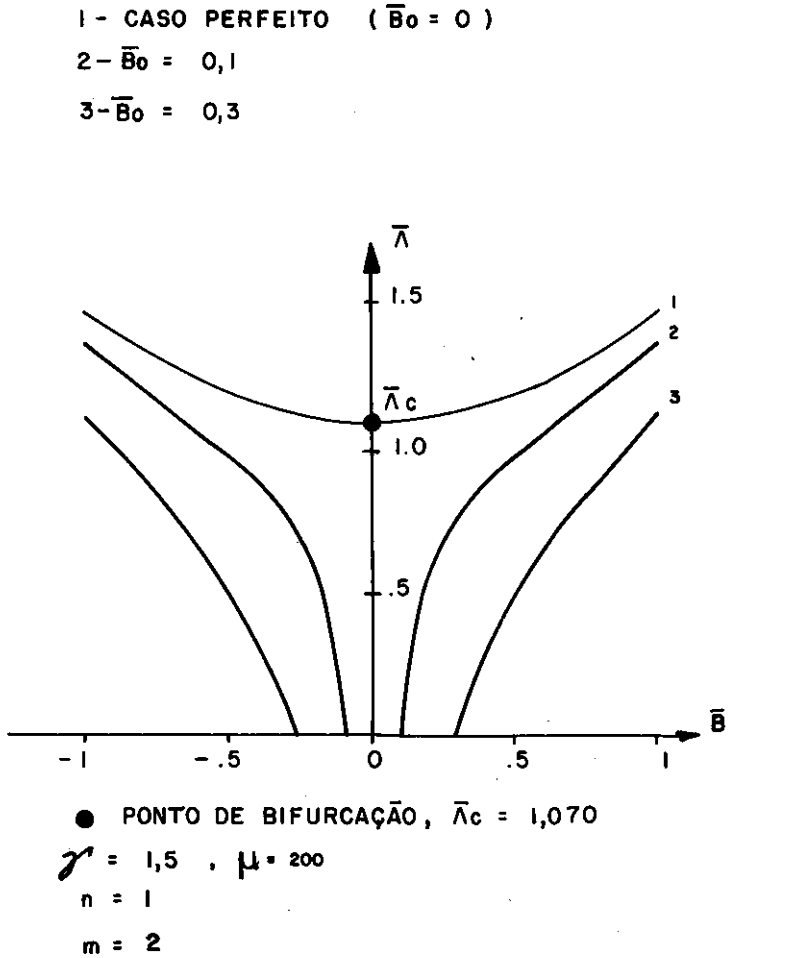


FIG. IV-6. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO COM IMPERFEIÇÃO NA MESMA FORMA QUE DO MODO CRÍTICO DOMINANTE

furcação primária, e será também assintótico ao primeiro caminho pós-crítico perfeito correspondente.

IV.2.2 Modo de Imperfeição em Forma Distinta do Modo Crítico Dominante

Quando o modo de imperfeição é em forma distinta do modo crítico dominante, poderá ocorrer o acoplamento entre os modos simétrico e antimétrico, vide Figuras IV.2 e IV.3, dependendo da magnitude da imperfeição. As equações não-lineares imper-

feitas (II-52) e (II-53) com as condições dadas em (IV-1.i), admitem a solução (IV-3.ii), quando escritas na forma,

$$E_1(\overline{A}^2-\overline{A}_0^2)\overline{A} + (E_2+E_3)\overline{A}\,\overline{B}^2 + E_4(\overline{A}-\overline{A}_0) - E_5\overline{p} - \overline{\Lambda}\,\overline{A} = 0 \qquad \text{(IV-6)}$$

e,

$$H_1\overline{B}^3 + H_2(\overline{A}^2-\overline{A}_0^2)\overline{B} + H_3\overline{A}^2\overline{B} + H_4\overline{B} - \overline{\Lambda}\,\overline{B} = 0 \qquad \text{(IV-7)}$$

e a eliminação do parâmetro $\overline{\Lambda}$, permite escrever uma relação entre as amplitudes de deslocamentos, $\overline{A}$ e $\overline{B}$, para o caso de acoplamento entre os modos de deformação,

$$\overline{B}\left\{(E_1-H_2-H_3)\overline{A}^3 + (E_2+E_3-H_1)\overline{A}\,\overline{B}^2 + \left[(H_2-E_1)\overline{A}_0^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + E_4 - H_4\right]\overline{A} - E_4\overline{A}_0 - E_5\overline{p}\right\} = 0 \qquad \text{(IV-8)}$$

a qual representa a projeção do caminho não-linear imperfeito sobre o plano $\overline{A}$ x $\overline{B}$.

Nas equações (IV-6), (IV-7) e (IV-8), se $\overline{B} = 0$, a solução do problema correspondente ao da secção anterior, isto é,não há acoplamento. Para que haja acoplamento, é necessário em (IV-8), que

$$\overline{B} \neq 0 \qquad \text{(IV-9)}$$

e,

$$(E_1-H_2-H_3)\overline{A}^3 + (E_2+E_3-H_1)\overline{A}\,\overline{B}^2 + \left[(H_2-E_1)\overline{A}_0^2 + \right.$$

$$\left. + E_4 - H_4\right]\overline{A} - E_4\overline{A}_0 - E_5\overline{p} = 0$$

Como o modo de imperfeição é em forma distinta do modo crítico dominante, o caminho imperfeito de equilíbrio está inicialmente associado à forma do modo de imperfeição, vide Figura IV.2, podendo entretanto, ocorrer ao longo deste caminho imperfeito, pontos de bifurcação, que representam as intersecções com caminhos acoplados (pós-bifurcados) de equilíbrio.

Estes pontos de bifurcação secundária quando projetado sobre o plano $\bar{A}$ x $\bar{B}$, representam as intersecções da solução de (IV-8) com um dos eixos coordenados deste plano (no caso, o eixo $\bar{A}$). Nestes pontos de bifurcação, $\bar{B}_b = 0$, que substituindo em (IV-9) fornece uma equação cúbica em função do parâmetro de deslocamento $\bar{A}$,

$$(E_1-H_2-H_3)\bar{A}^3 + \left[(H_2-E_1)\bar{A}_0^2 + E_4 - H_4\right] \bar{A} - E_4\bar{A}_0 - E_5\bar{p} = 0 \qquad \text{(IV-10)}$$

que admitem, uma raiz real e duas imaginárias, ou duas raízes reais iguais e uma distinta, ou três raízes reais distintas. Estas raízes quando reais, fornecem os valores do parâmetro $\bar{A}_b$, pontos de bifurcação secundária, ao longo do caminho original imperfeito de equilíbrio, conforme Figuras IV.2 e IV.3.

Em qualquer um dos casos, uma das raízes reais é sempre negativa, representando um ponto de bifurcação secundária ao longo do caminho complementar de equilíbrio; por ser de interesse apenas teórico, essas raízes serão aqui desprezadas, tomando-se a seguir na análise somente as outras raízes.

Na Figura IV.7, ilustra os três possíveis comportamentos,

(i) no caso em que as duas raízes reais e distintas são positivas, há ocorrência de dois pontos de bifurcação (um deles sendo instável) conforme ilustra a Figura IV.7.a. Neste caso $\bar{p} < \bar{p}^*$, determinado a seguir;

(ii) no caso em que as duas raízes reais e positivas são iguais, os dois pontos de bifurcação, Figura IV.7.a, coalescem e formam um único ponto de bifurcação instável, conforme ilustrado na Figura IV.7.b. Neste caso, o discriminante de (IV-10) é igual a zero,

$$\frac{1}{27}\left[(H_2-E_1)\bar{A}_0^2+E_4-H_4\right]^3+\frac{1}{4}(E_1-H_2-H_3)(E_4\bar{A}_0+E_5\bar{p})^2=0 \qquad \text{(IV-11)}$$

ou explicitando para $\bar{p} = \bar{p}^*$,

$$\bar{p}^* = \frac{1}{E_5}\left\{\frac{-4\left[(H_2-E_1)\bar{A}_0^2+E_4-H_4\right]^3}{27(E_1-H_2-H_3)}\right\}^{1/2} - \frac{E_4}{E_5}\bar{A}_0 \qquad \text{(IV-12)}$$

que é o valor da pressão lateral crítica que produz uma configuração deformada equivalente a uma imperfeição geométrica inicial crítica de forma simétrica;

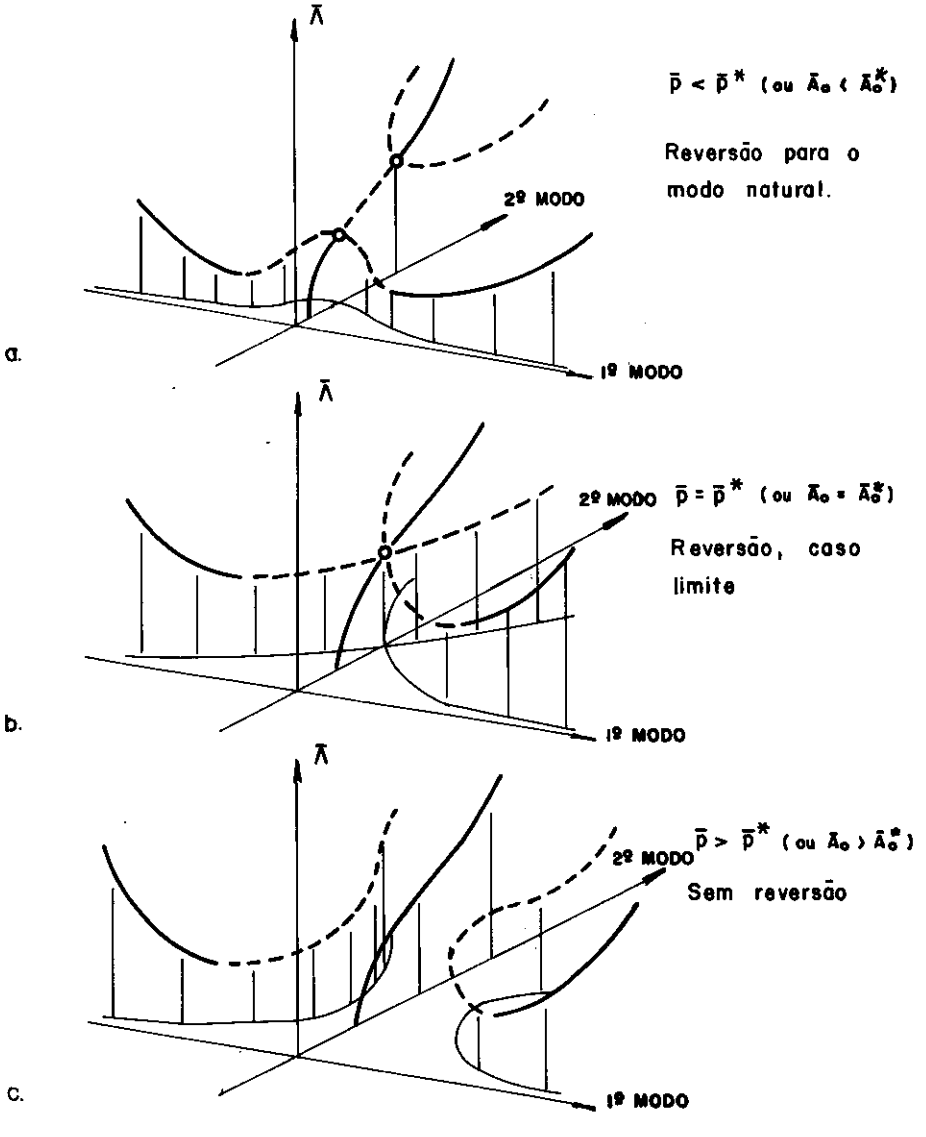


FIG. IV-7. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO COM IMPERFEIÇÃO EM FORMA DISTINTA DO MODO CRÍTICO DOMINANTE, PARA VÁRIOS VALÔRES DE $\bar{p}$ (ou $\bar{A}_o$). (13)

(iii) no caso de duas raízes imaginárias, $\bar{p} > \bar{p}^*$, não há ocorrência de bifurcação secundária, ao longo do caminho imperfeito original, conforme ilustra a Figura IV.7.c.

Deve-se ressaltar aqui que $\bar{p}^*$ produz uma imperfeição na forma simétrica, equivalente à amplitude $\bar{A}_0^*(\bar{p}^*)$, e deve-se lembrar que o desenvolvimento até aqui foi feito para o caso de imperfeição na forma simétrica distinta do modo crítico dominante, neste caso antimétrico (no caso, $\gamma > \sqrt{2}$).

No caso do modo crítico dominante ser o simétrico (por exemplo, no caso $\gamma < \sqrt{2}$), a ocorrência de coalescência entre pontos de bifurcação secundária se dará para um certo valor crítico $\bar{B}_0^*$ de imperfeição geométrica, na forma antimétrica. Isto é, obtido de forma análoga ao caso anterior à partir das equações não lineares imperfeitas (II-52) e (II-53), com as condições dadas em (IV-1.iii), e também admitindo a solução (IV-3.ii); ou a projeção de sua solução sobre o plano $\bar{A}$ x $\bar{B}$, dada por

$$\bar{A}\left\{(E_1-H_2-H_3)\bar{A}^2\bar{B}+\left[(H_1-E_2)\bar{B}_0^2+E_4-H_4\right]\bar{B}+\right.$$

$$\left.+\,(E_2+E_3-H_1)\bar{B}^3+H_4\bar{B}_0\right\}=0 \qquad \text{(IV-13)}$$

fornecendo o valor da imperfeição crítica,

$$\bar{B}_0^* = \left\{\frac{-(E_4-H_4)^3}{3(H_1-E_2)(E_4-H_2)^2+\frac{27}{4}(E_2+E_3-H_1)H_4^2}\right\}^{1/2} \qquad \text{(IV-14)}$$

A seguir, apresentam-se nas Figuras IV.8 e IV.9,os comportamentos já descritos, para valores de $\gamma < \sqrt{2}$ e $\gamma > \sqrt{2}$, respectivamente. Quando $\gamma = \sqrt{2}$, os pontos de bifurcações, primários e secundários, coincidem em um único ponto (conforme mostram as Figuras III.2 e III.6.c) e portanto, qualquer imperfeição inicial destrói todos esses pontos críticos, resultando em comportamentos não-lineares idênticos àqueles descritos na secção IV.2.1 (vide Figura IV.5).

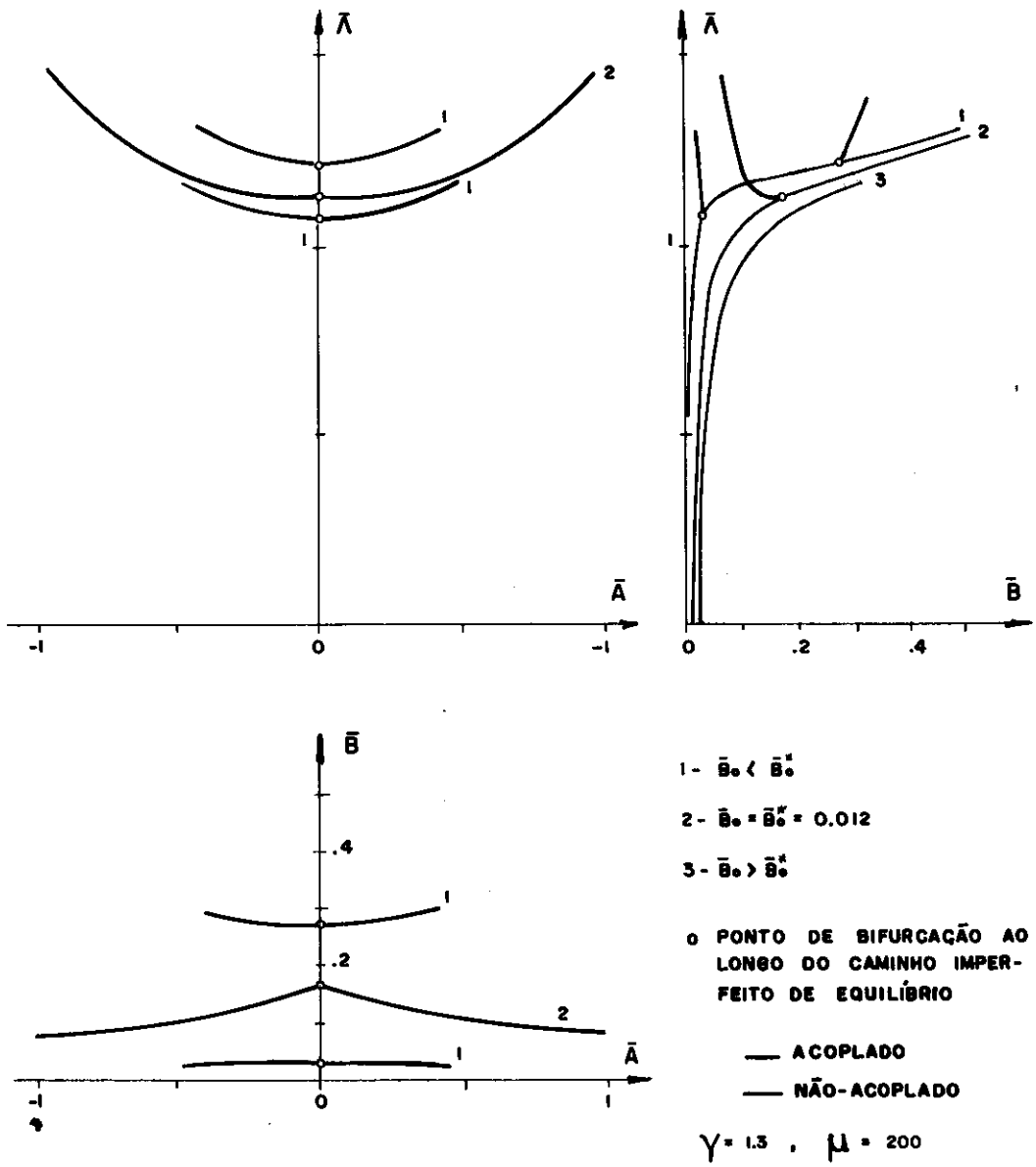


FIG. IV-8. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO COM IMPERFEIÇÃO EM FORMA DISTINTA DO MODO CRÍTICO DOMINANTE

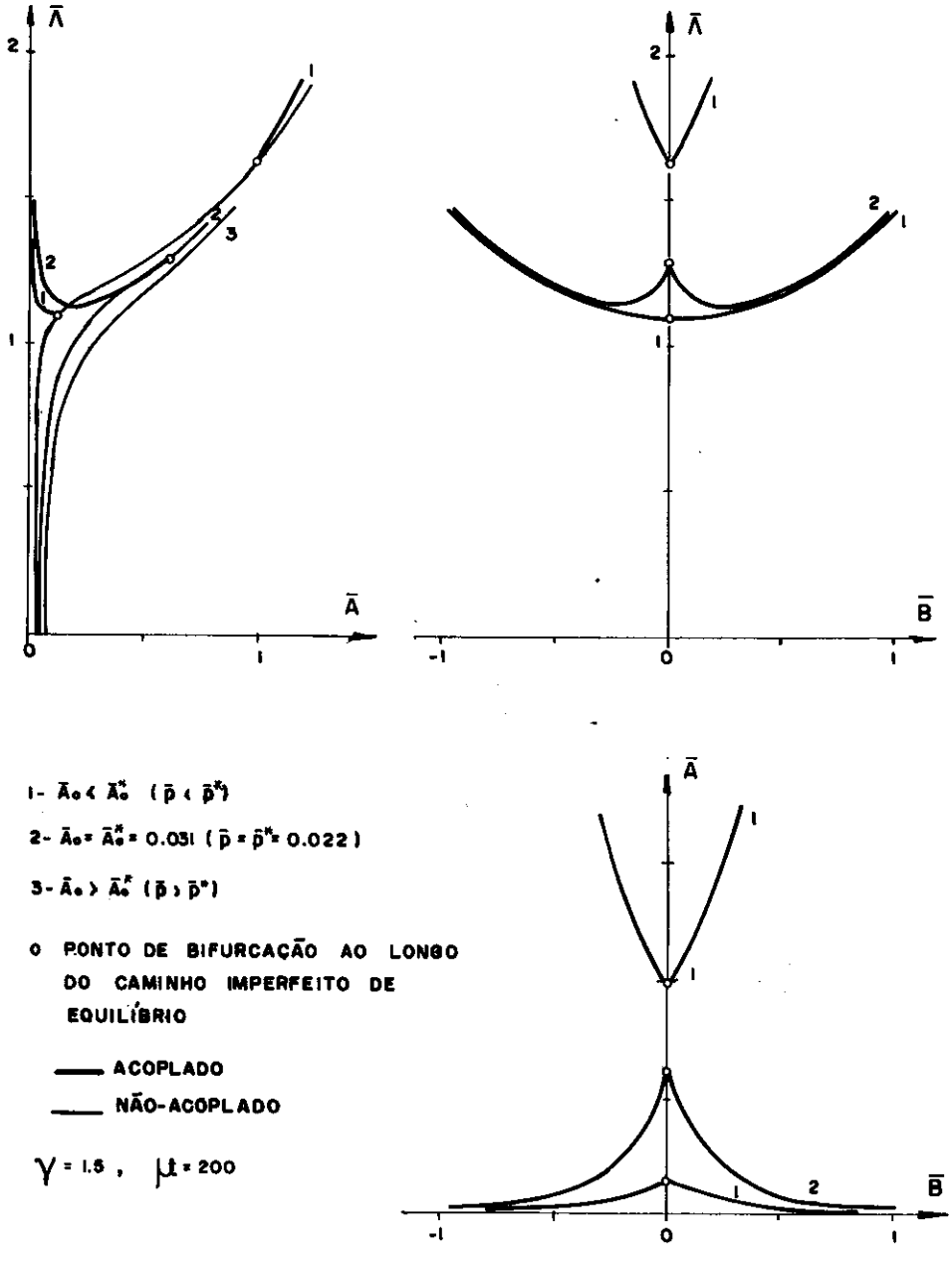


FIG. IV-9. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO COM IMPERFEIÇÃO EM FORMA DISTINTA DO MODO CRÍTICO DOMINANTE

Na Figura IV.10, está representado o espectro de valores dos parâmetros das cargas de bifurcação secundária, $\bar{\Lambda}_b$ ao longo do caminho original imperfeito de equilíbrio, em função de γ. Para qualquer valor de γ, observa-se que o parâmetro $\bar{\Lambda}_b$, é sempre menor do que o parâmetro de carga crítica de acoplamento, ${}^c\bar{\Lambda}_c$, ocorrendo assim, uma redução de carga quando se tem imperfeições críticas iniciais em forma distinta do modo crítico dominante.

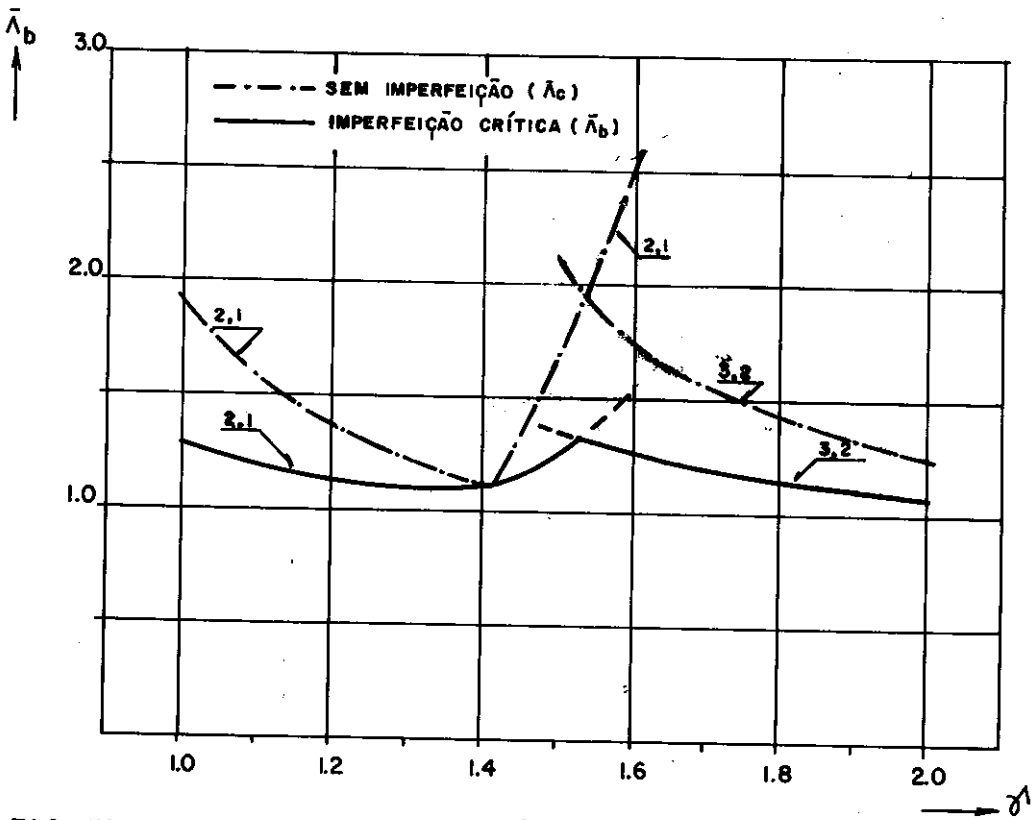


FIG. IV-10. CARGAS DE BIFURCAÇÃO SECUNDÁRIA

Para cada par de valores ($\bar{\Lambda}_b$; γ), existe um único valor do parâmetro de imperfeição crítica, $\bar{A}_0^*$ (ou $\bar{p}^*$) ou $\bar{B}_0^*$, que conduz a um comportamento instável em função do acoplamento entre modos, podendo-se notar na Figura IV.10 que os maiores valores de $\bar{\Lambda}_b$, ocorrem para valores de γ entre 1,5 e 1,6, resultando entre-

tanto, nestes casos em um comportamento acoplado com maior sensibilidade à imperfeição, conforme ilustra a Figura IV.9 quando comparada à Figura IV.8, e mais claramente a diferença entre "picos" em torno de $\gamma = 1{,}55$, mostrada na Figura IV.10.

Mantendo-se constante o valor do parâmetro de imperfeição crítica em forma distinta do modo crítico dominante e considerando também imperfeições adicionais, na mesma forma do modo crítico dominante, o ponto de bifurcação secundária é destruído gerando pontos limites, ao longo de caminhos imperfeitos de equilíbrio; quanto maiores estas imperfeições adicionais, estes pontos limites também são destruídos, conforme ilustra a Figura IV.11.

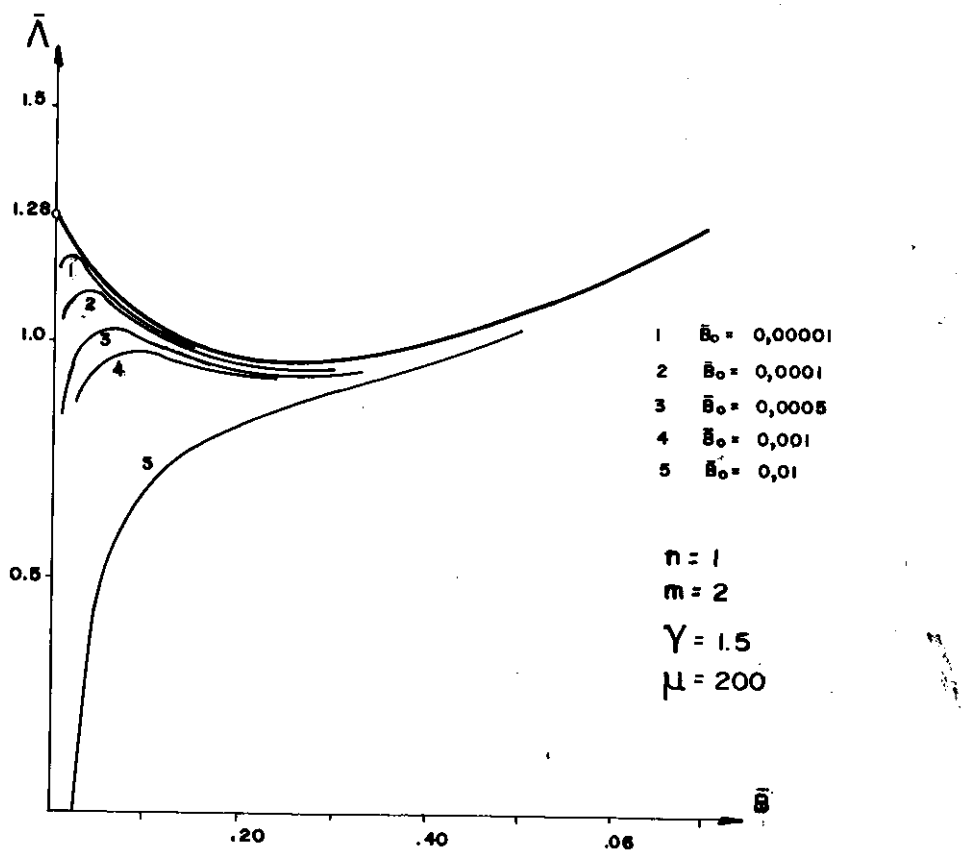


FIG. IV-11. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO COM IMPERFEIÇÕES ADICIONAIS NA MESMA FORMA DO MODO CRÍTICO DOMINANTE

IV.3 IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS INICIAIS EM AMBOS OS MODOS DE DEFORMAÇÃO

Considera-se agora, o problema geral (IV-2), quando as imperfeições geométricas iniciais $\overline{A}_0$ (ou $\overline{p}$) e $\overline{B}_0$ são ambas não-nulas; este será obviamente o caso que ocorre mais frequentemente nos sistemas estruturais práticos. A relação $\overline{A}$-$\overline{B}$ dos caminhos de equilíbrio (isto é, a projeção destas soluções sobre o plano $\overline{A}$-$\overline{B}$), pode ser obtida das equações não-lineares de equilíbrio (II-52) e (II-53) explicitando o parâmetro de carga, $\overline{\Lambda}$, na primeira equação e substituindo-o na segunda, ficando da seguinte forma:

$$(E_1-H_2-H_3)\overline{A}^3\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\left[\overline{A}_0^2(H_2-E_1) + \overline{B}_0^2(H_1-E_2) + E_4-H_4\right] +$$

$$+ (E_2+E_3-H_1)\overline{A}\,\overline{B}^3 + H_4\overline{B}_0\overline{A} - (E_4\overline{A}_0+E_5\overline{p})\overline{B} = 0 \qquad \text{(IV-15)}$$

Singularidades as quais ocorrem para a equação (IV-15) podem representar bifurcações (pontos críticos) – quando um caminho de equilíbrio ramifica-se de outro no espaço $\overline{\Lambda}$-$\overline{A}$-$\overline{B}$. A diferenciação parcial da equação (IV-15) com respeito à $\overline{B}$, fornece

$$\frac{\partial\overline{A}}{\partial\overline{B}} = -\frac{(E_1-H_2-H_3)\overline{A}^3+\overline{A}\left[\overline{A}_0^2(H_2-E_1)+\overline{B}_0^2(H_1-E_2)+E_4-H_4\right]+3(E_2+E_3-H_1)\overline{A}\,\overline{B}^2-(E_4\overline{A}_0+E_5\overline{p})}{3(E_1-H_2-H_3)\overline{A}^2\overline{B}+\overline{B}\left[\overline{A}_0^2(H_2-E_1)+\overline{B}_0^2(H_1-E_2)+E_4-H_4\right]+(E_2+E_3-H_1)\overline{B}^3 + H_4\overline{B}_0}$$

$$= \frac{f(\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{A}_0,\ \overline{p})}{g(\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{B}_0)} \qquad \text{(IV-16)}$$

onde $\overline{A}_0$, $\overline{p}$ e $\overline{B}_0$ são parâmetros.

Na equação (IV-16) da forma

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \qquad \text{(IV-17)}$$

as funções f e g são contínuas. Neste caso, vide ELSGOLTZ (22), as funções $f(x,y)/g(x,y)$ e $g(x,y)/f(x,y)$ serão simultaneamente descontínuas somente nos pontos (x_0,y_0) nos quais

$$f(x_0,y_0) = 0$$

e $$\qquad \text{(IV-18)}$$

$$g(x_0,y_0) = 0$$

sendo x_0,y_0 pontos singulares (ou críticos).

No presente caso os pontos de bifurcação (ou críticos) são dados pela solução simultânea das equações

$$f(\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{A}_0,\ \overline{p}) = 0$$

e $$\qquad \text{(IV-19)}$$

$$g(\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{B}_0) = 0$$

Quando os valores $(E_4\bar{A}_0 + E_5\bar{p})$ e $(H_4\bar{B}_0)$ das equações (IV-19) são substituídos na equação (IV-15), a projeção sobre o plano $\bar{A}$-$\bar{B}$ do lugar geométrico dos pontos de bifurcação é dada por

$$-(E_1-H_2-H_3)\bar{A}^2 - (E_2+E_3-H_1)\bar{B}^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\bar{A}_0^2(H_2-E_1) + \bar{B}_0^2(H_1-E_2) + E_4 - H_4\right] \qquad \text{(IV-20)}$$

da qual expressões explicitadas para $\bar{A}$ e $\bar{B}$ podem ser substituídas na equação (IV-19) fornecendo as relações

$$E_4\bar{A}_0 + E_5\bar{p} = -2(E_1-H_2-H_3)\bar{A}^3$$

e, $\qquad$ (IV-21)

$$H_4\bar{B}_0 = 2(E_2+E_3-H_1)\bar{B}^3$$

sendo $\bar{A}$ e $\bar{B}$, os valores dos parâmetros de deslocamentos do ponto de bifurcação ao longo do caminho acoplado de equilíbrio, ou seja, $\bar{A}_b$ e $\bar{B}_b$.

Substituindo $\bar{A}_b$ e $\bar{B}_b$ nas equações (IV-21) de volta na equação (IV-20), esta fornece o lugar geométrico das imperfeições críticas (isto é, os pares de valores $\left[\bar{A}_0^*$ (ou $\bar{p}^*)$; $\bar{B}_0^*\right]$ que produzem pontos de bifurcação ao longo do caminho acoplado de equilíbrio), dado por

$$-(E_1-H_2-H_3)\left[\frac{E_4\bar{A}_0+E_5\bar{p}}{-2(E_1-H_2-H_3)}\right]^{2/3} - (E_2+E_3-H_1)\left[\frac{H_4\bar{B}_0}{2(E_2+E_3-H_1)}\right]^{2/3} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\bar{A}_0^2(H_2-E_1) + \bar{B}_0^2(H_1-E_2) + E_4 - H_4\right] \qquad \text{(IV-22)}$$

Tomando-se $\bar{B}_0 = 0$ ou $\bar{A}_0 = 0$ (e $\bar{p} = 0$) na equação (IV-22) obtém-se, respectivamente, as equações de imperfeições críticas (IV-12) e (IV-13), já descritas na Secção IV.2.2.

Apresenta-se a seguir na Figura IV.12, o lugar geométrico de imperfeições iniciais críticas para valores de γ igual a 1,0; 1,3; $\sqrt{2}$; 1,5 e 2,0. As imperfeições geométricas iniciais na forma do modo simétrico, $\bar{A}_0^*$, foram tomadas equivalentes aquela produzida por uma pressão lateral, $\bar{p}^*$.

Note-se que cada curva do lugar geométrico de imperfeições críticas divide o plano $\bar{A}_0^*$ (ou $\bar{p}^*$) - $\bar{B}_0^*$ em duas regiões distintas. Tomando-se um par de imperfeições igual as imperfeições iniciais críticas (isto é, sobre a curva do lugar geométrico), obter-se-á um ponto de bifurcação ao longo do caminho acoplado de equilíbrio e o caminho pós-bifurcado de equilíbrio será assintótico ao modo crítico dominante, conforme ilustra o caminho de equilíbrio '1' na Figura IV.13.

Tomando-se um par de imperfeições $\left[\bar{A}_0 \text{ (ou } \bar{p}); \bar{B}_0\right]$ diferente do par crítico, o ponto de bifurcação é destruído e se o par de imperfeições iniciais estiver compreendido entre a curva do lugar geométrico e o eixo das imperfeições iniciais na forma do modo simétrico de deformação, o caminho acoplado de equilíbrio será assintótico ao caminho perfeito de equilíbrio associado ao modo simétrico. Se o par de imperfeições iniciais estiver

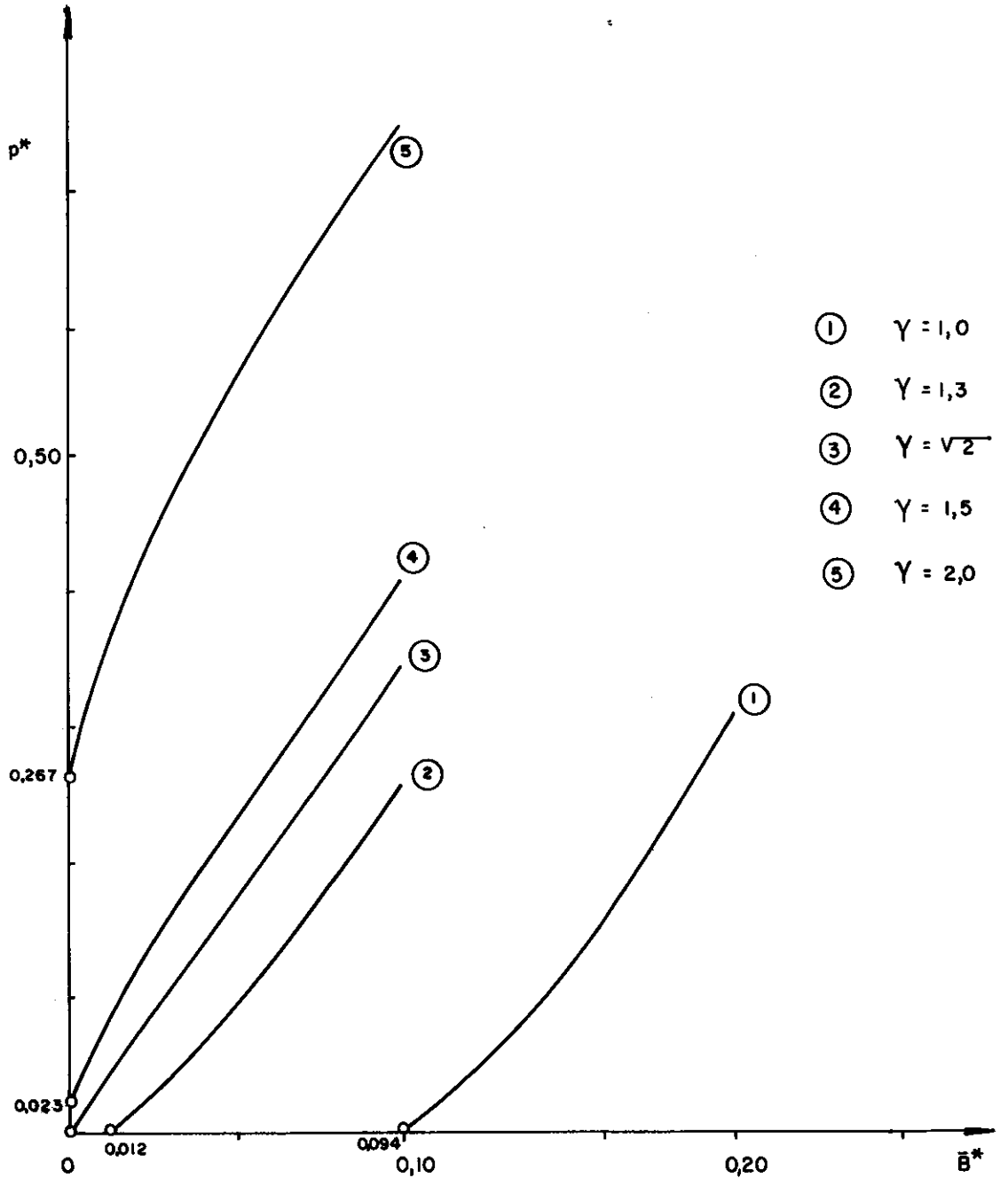


FIG. IV-12. LUGAR GEOMÉTRICO DAS IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS CRÍTICAS INICIAIS, PARA VÁRIOS VALÔRES DE $\gamma = a/b$

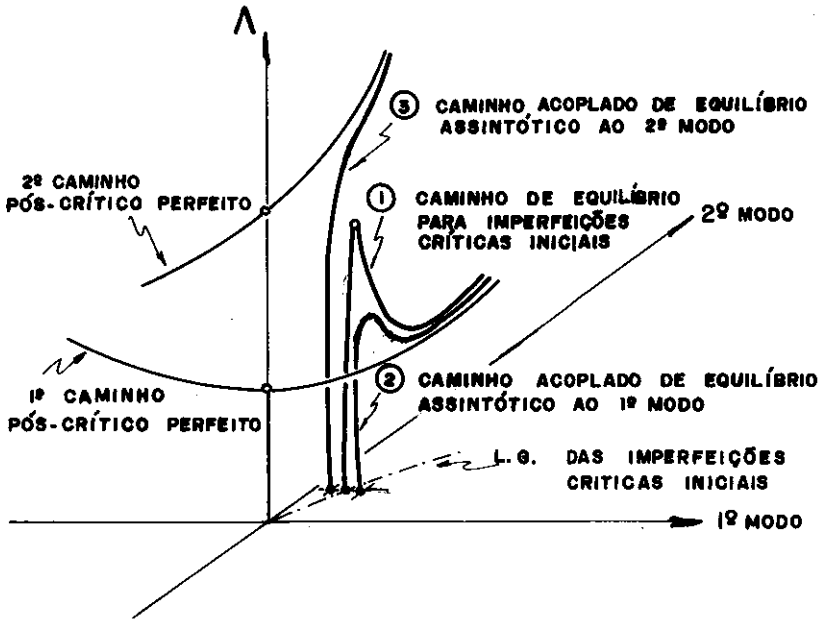
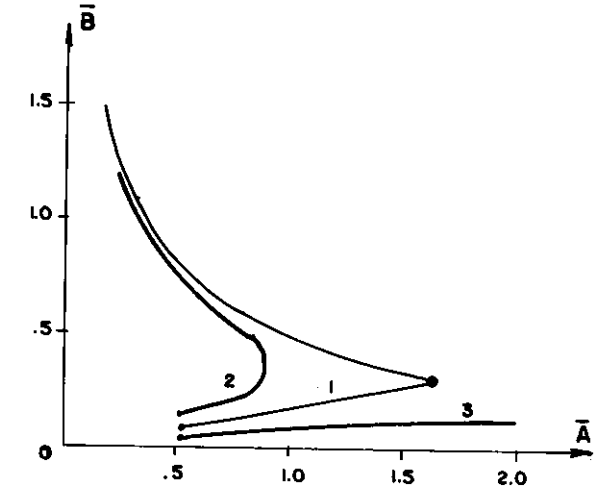


FIG. IV-13. COMPORTAMENTO DOS CAMINHOS ACOPLADOS DE EQUILÍBRIO, COM IMPERFEIÇÕES INICIAIS EM AMBOS OS MODOS

agora na outra região, isto é, entre a curva do lugar geométrico e o eixo das imperfeições iniciais na forma do modo antimétrico, o caminho acoplado de equilíbrio será assintótico ao caminho perfeito de equilíbrio associado ao modo antimétrico. Estes casos são ilustrados, respectivamente, pelos caminhos de equilíbrio '2' e '3' na Figura IV.13.

Estes comportamentos obtidos pela solução numérica das equações não-lineares de equilíbrio (II-52) e (II-53), são mostrados na Figura IV.14, para o caso de $\gamma = 1{,}5$, através das projeções dos caminhos acoplados de equilíbrio nos respectivos planos $\overline{A}$-$\overline{A}$, $\overline{A}$-$\overline{B}$ e $\overline{A}$-$\overline{B}$.



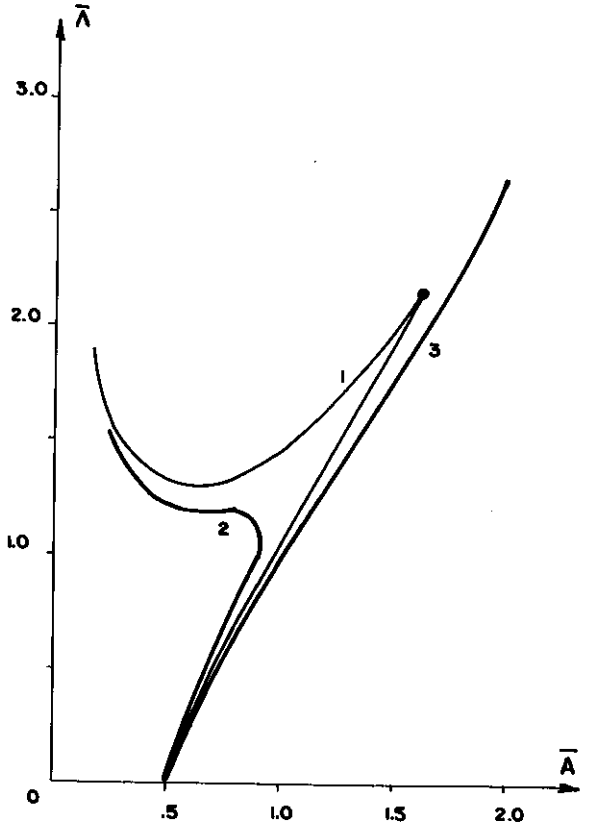
2 - $\bar{A}_o = \bar{A}_o^*$, $\bar{B}_o > \bar{B}_o^*$

1 - $\bar{A}_o^* = 0{,}507$ ($\bar{p}^* = 0{,}409$)
$\bar{B}_o^* = 0{,}10$

3 - $\bar{A}_o = \bar{A}_o^*$, $\bar{B}_o < \bar{B}_o^*$

● PONTO DE BIFURCAÇÃO

$\gamma = 1.5$
$n = 1$
$m = 2$
$\mu = 200$



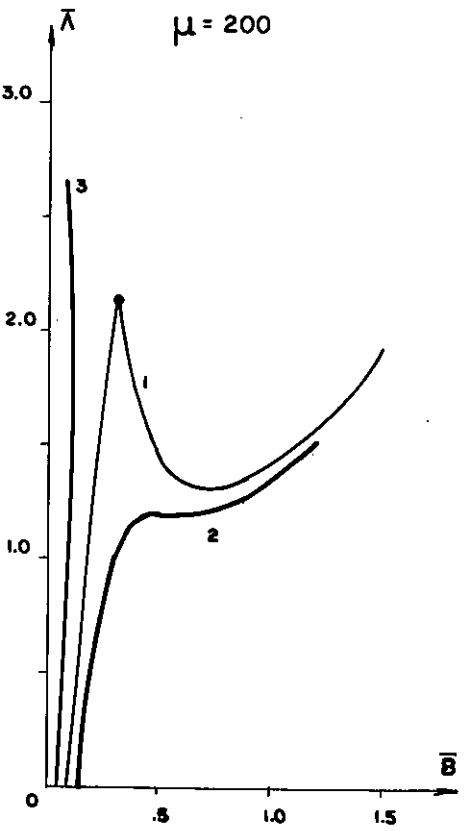
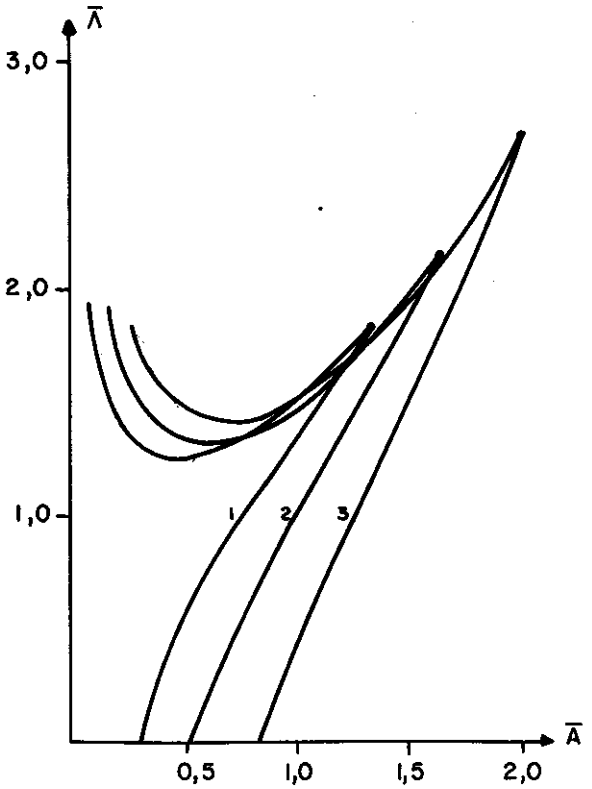


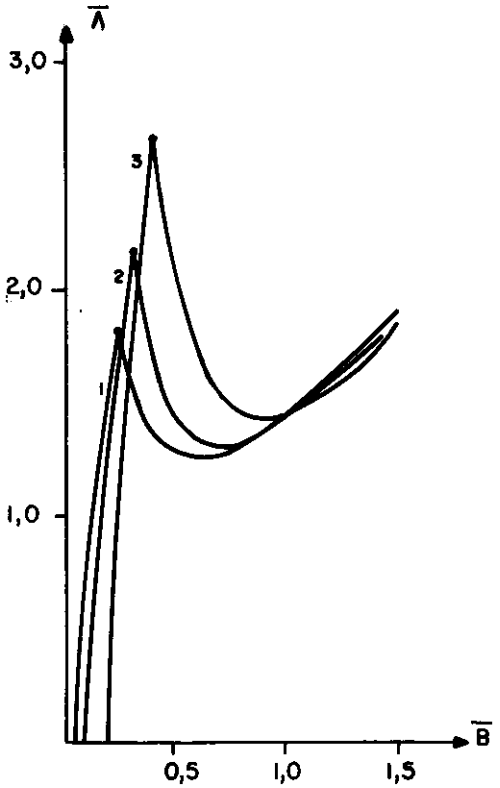
FIG. IV-14. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO PARA PARES DE IMPERFEIÇÕES IGUAIS E DIFERENTES A IMPERFEIÇÃO CRÍTICA INICIAL

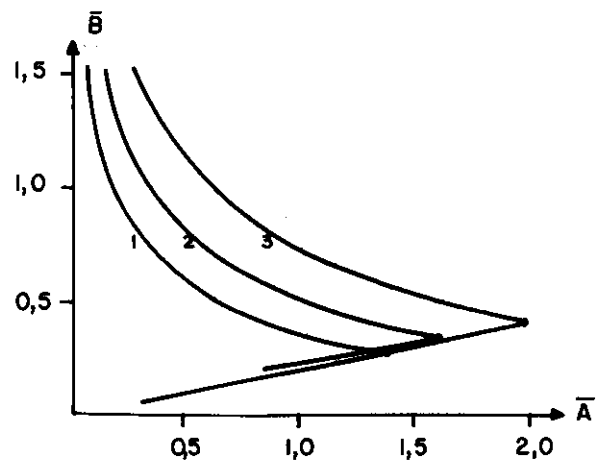
Para uma mesma curva do lugar geométrico das imperfeições críticas iniciais, quanto maiores as magnitudes dessas imperfeições críticas, maior será a sensibilidade à imperfeição da placa retangular; isto é mostrado nas Figuras IV.15, IV.16 e IV.17. Estas últimas figuras (IV.16 e IV.17) foram obtidas introduzindo-se imperfeições adicionais na mesma forma do modo crítico dominante. Neste caso, como comentado anteriormente, o ponto de bifurcação é destruído gerando pontos limites ao longo de caminhos imperfeitos de equilíbrio, conforme mostra a Figura IV.16.

A Figura IV.17 mostra, através de curvas de sensibilidade à imperfeições, reduções de carga em relação à carga crítica, correspondentes aos pontos limites obtidos com acréscimo de imperfeições adicionais, respectivamente em relação as curvas da Figura IV.15. Pode-se notar na Figura IV.17 que imperfeições adicionais da ordem de 1,5 $\overline{B}_0^*$ causam reduções de mais de 50% da carga de bifurcação, $\overline{\Lambda}_b$, principalmente para casos de grande magnitude de imperfeições críticas, $\overline{B}_0^*$.

Deve-se ressaltar que embora essas cargas de bifurcação, $\overline{\Lambda}_b$, sejam bastante superiores a carga crítica clássica, $\overline{\Lambda}_c$, a importância destas reduções de carga podem ser explicadas com o seguinte raciocínio: placas inicialmente imperfeitas são capazes de suportar cargas, em um regime elástico, muito superiores à carga crítica clássica, $\overline{\Lambda}_c$. Pode-se supor então que, principalmente no caso de placas constituídas de aço especial (alta resistência) que em certas condições essas cargas de bifurcação não-clássica, $\overline{\Lambda}_b$, sejam ainda inferiores a carga de colapso inelástico. Assim







1 - $\bar{A}_0^* = 0{,}304$ ($\bar{p}^* = 0{,}231$)
$\bar{B}_0^* = 0{,}05$

2 - $\bar{A}_0^* = 0{,}050$ ($\bar{p}^* = 0{,}409$)
$\bar{B}_0^* = 0{,}10$

3 - $\bar{A}_0^* = 0{,}818$ ($\bar{p}^* = 0{,}755$)
$\bar{B}_0^* = 0{,}20$

● PONTO DE BIFURCAÇÃO
$\gamma = 1{,}5$
$n = 1$
$m = 2$
$\mu = 200$

FIG. IV - 15. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO DE PARES DE IMPERFEIÇÕES CRÍTICAS, REFERIDAS AO MESMO LUGAR GEOMÉTRICO DAS IMPERFEIÇÕES CRÍTICAS INICIAIS.

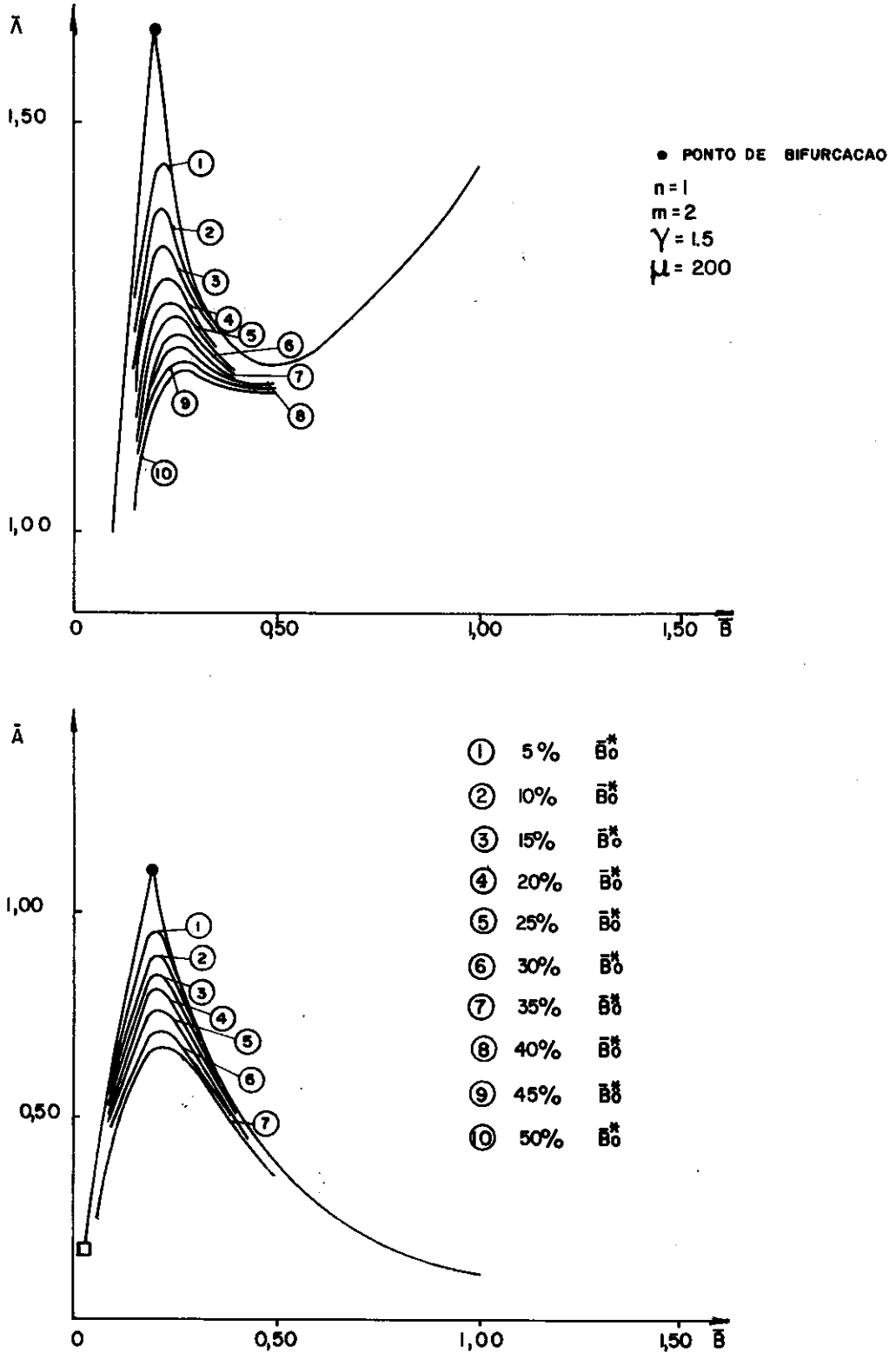


FIG. IV-16. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO COM IMPERFEIÇÕES ADICIONAIS NA MESMA FORMA DO MODO CRÍTICO DOMINANTE

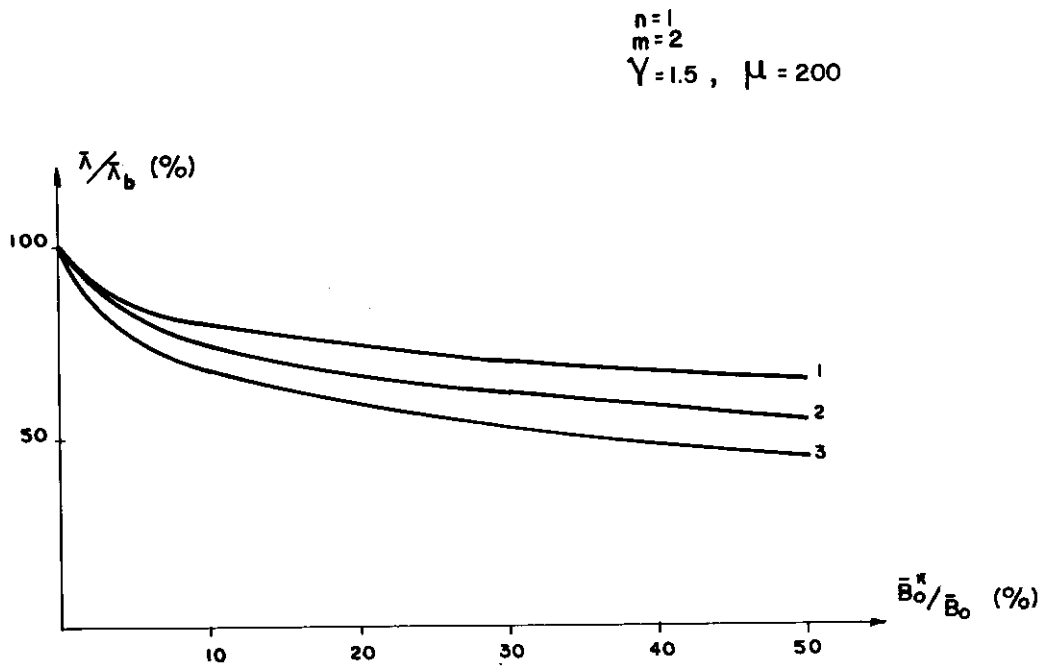


FIG. IV-17. CURVAS DE SENSIBILIDADE À IMPERFEIÇÃO

imperfeições generalizadas podem reduzir substancialmente a capacidade portante da placa sendo seu comportamento instável.

CAPÍTULO V

RELEVÂNCIA DOS RESULTADOS DA ANÁLISE NO PROJETO ESTRUTURAL

V.1 INTRODUÇÃO

A rigidez axial pós-crítica inicial de uma placa é aproximadamente a metade do valor pré-crítico, como mostra a Figura V.1; o valor exato dependendo das condições de contorno e do número de meias-ondas axiais da forma crítica.

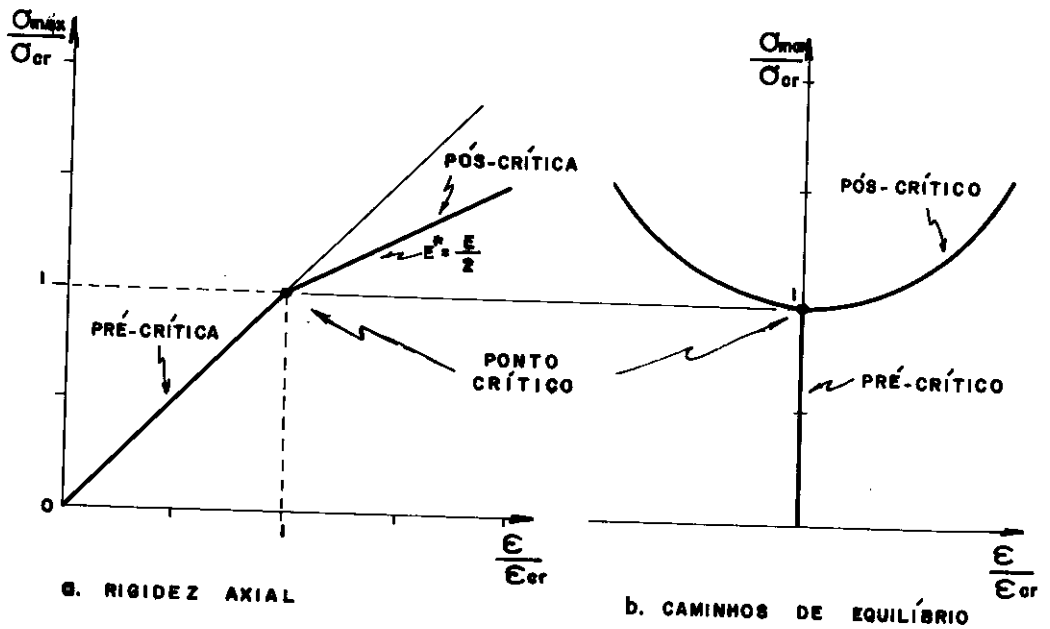


FIG. V-1. ESTADOS PRÉ E PÓS-CRÍTICOS (36)

Testes em placas sob compressão axial têm mostrado que as formas de ondas adotadas na iminência da flambagem podem sofrer mudanças bruscas quando da passagem para o regime pós-flambagem. A essas mudanças bruscas estão associadas mudanças de rigidez axial. Sob carregamento crescente acima do valor crítico existe, além dessas possíveis mudanças bruscas na forma da onda longitudinal, uma transformação gradual da forma de onda transversal caracterizada por um aumento de amplitude de deslocamento em torno da região central. Este fenômeno, ao qual está associado a uma redistribuição de tensões axiais na superfície média, tem originado o conceito de *Largura Efetiva* que dentro da teoria geral da estabilidade elástica foi estudado por KOITER (30).

Como visto nos Capítulos anteriores, é justamente do estudo dessas mudanças bruscas de forma é que se ocupa o presente trabalho.

É bem sabido que a *teoria clássica da estabilidade* – que não inclui na análise não-linear o acoplamento de modos – indica que uma placa sob compressão axial em seu próprio plano tem um *comportamento pós-crítico estável* e portanto é considerada como sendo insensível à imperfeições iniciais. Assim, como o comportamento da estrutura imperfeita se aproxima daquele da estrutura perfeita para valores de carga bem acima do valor crítico a placa apresenta o que se chama de resistência extra pós-crítica; disto tem-se tirado partido para se prescrever em diversas normas de projetos uma tensão limite (ou tensão média em função da largura efetiva) em função da tensão de escoamento do material.

Mas, o que o presente trabalho pode demonstrar é que mesmo para geometrias práticas *uma placa sob compressão axial pode perder sua estabilidade ainda em regime elástico* para níveis de tensões inferiores a tensão de escoamento e até mesmo inferiores a tensão limite de projeto prescritas em normas.

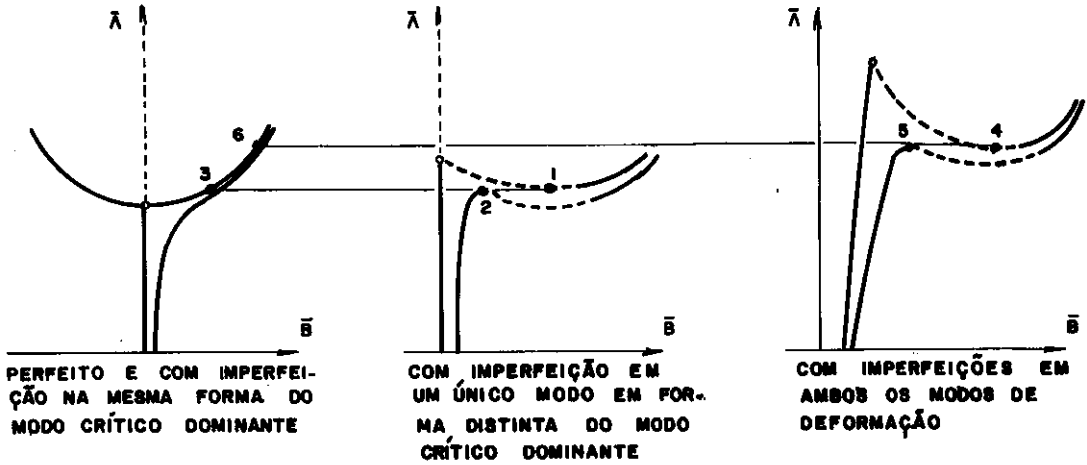
A seguir são feitas comparações entre os resultados clássicos, os resultados obtidos no presente trabalho e prescrições de normas.

V.2 COMPARAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA DISTRIBUIÇÕES DE TENSÕES

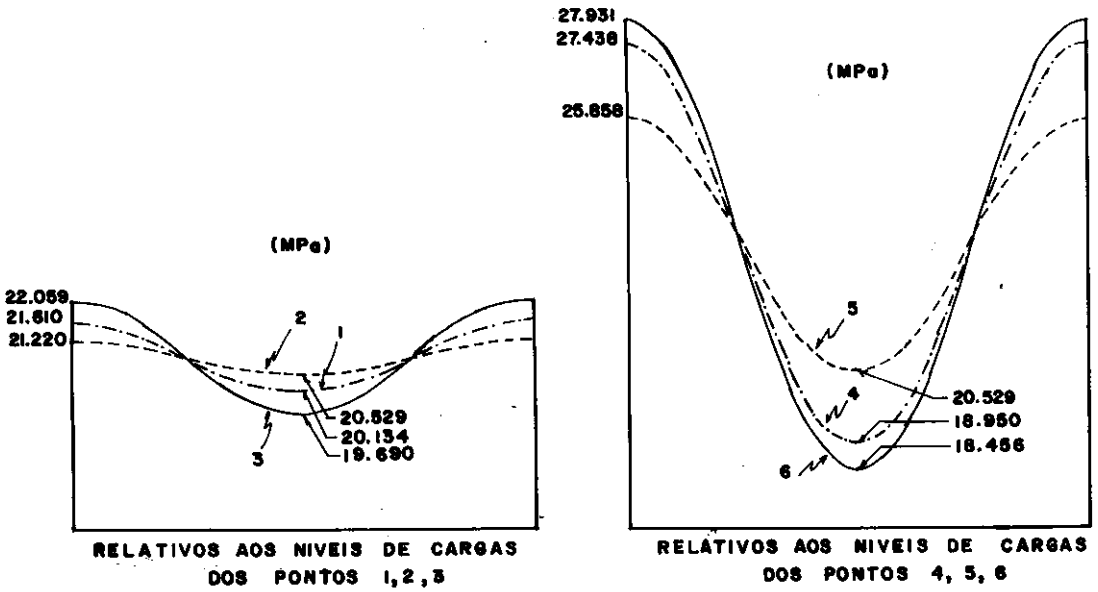
Uma avaliação da importância do comportamento não-linear com interação entre modos descrito neste trabalho pode ser feita do estudo comparativo da distribuição de tensões normais em configurações pós-críticas para os casos clássico e não clássicos. A Figura V.2 indica as situações de equilíbrio para os quais são investigadas as distribuições de tensões normais.

"A escolha destes estados de equilíbrio foi feita com o intuito de demonstrar que uma placa imperfeita pode, sob o efeito adicional da interação entre modos ocasionados por estas mesmas imperfeições, perder sua estabilidade em regime elástico antes que aconteça um colapso plástico."

As situações de equilíbrio escolhidas são (vide Figura V.2):



a. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO



b. DISTRIBUIÇÕES DE TENSÕES NORMAIS

FIG. V-2. SITUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA OS QUAIS SÃO INVESTIGADAS AS DISTRIBUIÇÕES DE TENSÕES NORMAIS

(i) ponto de equilíbrio '1', mínimo pós-crítico para imperfeição em forma distinta do modo crítico dominante (secção IV.2.2);

(ii) ponto de equilíbrio '2', ponto limite do caminho imperfeito de equilíbrio para imperfeição em forma distinta do modo crítico dominante, considerando imperfeições adicionais na mesma forma do modo crítico dominante (secção IV.2.2);

(iii) ponto de equilíbrio '3', pós-crítico perfeito relativo ao mínimo pós-crítico (ponto '1') para imperfeições em forma distinta do modo crítico dominante (secção III.2.2);

(iv) ponto de equilíbrio '4', mínimo pós-crítico para imperfeições em ambos os modos críticos, simétrico e antimétrico (secção IV.3);

(v) ponto de bifurcação '5', ponto limite do caminho imperfeito de equilíbrio para imperfeições em ambos os modos críticos, considerando imperfeições adicionais na mesma forma do modo crítico dominante (secção IV.3);

(vi) ponto de equilíbrio '6', pós-crítico perfeito relativo ao mínimo pós-crítico (ponto '4') para imperfeições em ambos os modos críticos (secção III.2.2).

A Figura V.2.b apresenta a distribuição de tensões para estados de equilíbrio descritos anteriormente. Verifica-se que os estados de equilíbrio dados pelos pontos '1' e '2', estão associadas distribuições de tensões que apresentam valores máximos inferiores ao valor máximo encontrado para o estado pós-crítico perfeito dado pelo ponto '3'. Deve-se notar ainda que as larguras efetivas e consequentemente as tensões máximas, associadas aos estados dos pontos '1' e '2' são respectivamente maiores e menores do que as correspondentes ao estado do ponto '3'.

O mesmo padrão de comportamento para distribuição de tensões ocorre para os estados '4' e '5' quando comparados ao estado '6', conforme mostra a Figura V.2.

Com o intuito de exemplificar quantitativamente o exposto acima e ainda com o intuito de chamar a atenção para as diferenças conceituais entre as presentes proposições e as prescrições de norma, apresentam-se a seguir uma comparação entre os valores teóricos obtidos com a presente análise e aqueles obtidos das normas AISI/80 (33) e AISC/78 (34), relativa a largura efetiva de peças enrigecidas.

Critérios para a obtenção de σ_{max}, utilizados nos exemplos que se seguem,

(i) Tensão normal máxima em uma placa isolada

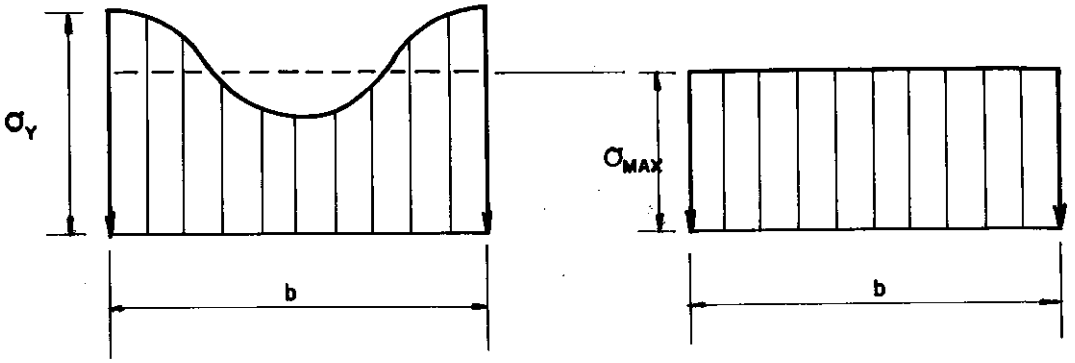


FIG. V-3. DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES

Após inúmeros testes em placas simplesmente apoiadas, GERARD (31), propôs a seguinte relação entre σ_{max} e σ_y, conforme mostra a Figura V.3,

$$\sigma_{max} = 1{,}42 \left[\frac{h}{b} \left(\frac{E}{\sigma_y} \right)^{1/2} \right]^{0{,}85} \sigma_y \qquad \text{(V-1)}$$

(ii) Largura Efetiva

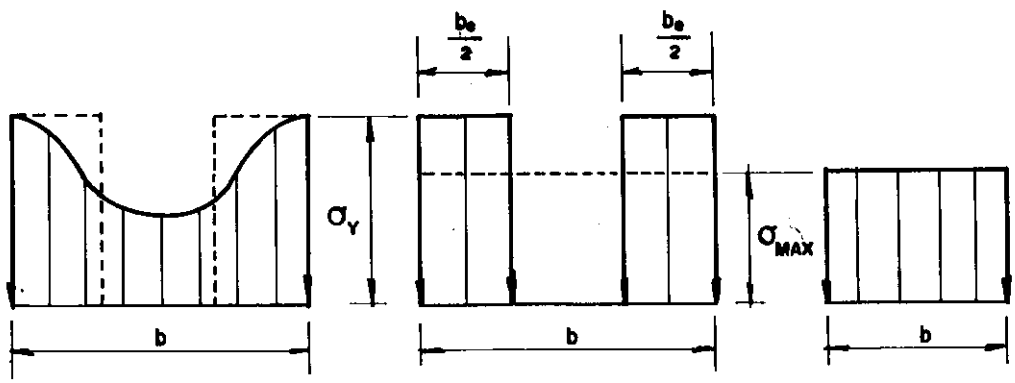


FIG. V-4. DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES

$$b\,\sigma_{max} = b_e\,\sigma_y \qquad (V\text{-}2)$$

VON KÁRMÁN (32), propôs que as faixas (1/2 b_e) fossem consideradas como uma placa retangular de largura b_e, conforme Figura V.4 e σ_y fosse a tensão crítica para a placa simplesmente apoiada quando

$$\sigma_{CR_e} = \sigma_y = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b_e}\right)^2 \qquad (V\text{-}3)$$

entretanto, a tensão crítica para a placa simplesmente apoiada de largura b, é dada por

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \qquad (V\text{-}4)$$

das equações (V-2), (V-3) e (V-4), obtém-se a expressão de σ_{max}

$$\sigma_{max} = c\,\frac{h}{b}\left(\frac{E}{\sigma_y}\right)^{1/2} \cdot \sigma_y \qquad (V\text{-}5)$$

onde

$$c = \frac{\pi}{\left[3(1-\nu^2)\right]^{1/2}}$$

(iii) Normas de Projeto AISI (33) e AISC (34)

$$\frac{b_e}{h} = 1.9\left(\frac{E}{\sigma_y}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{0.415}{b/h}\left(\frac{E}{\sigma_y}\right)^{1/2}\right] \qquad (V\text{-}6)$$

da equação (V-2)

$$\sigma_{max} = \frac{b_e}{b}\sigma_y = \frac{1,9}{b/h}\left(\frac{E}{\sigma_y}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{0.415}{b/h}\left(\frac{E}{\sigma_y}\right)^{1/2}\right]\sigma_y \qquad (V-7)$$

EXEMPLO 1: Considerando o nível de carga do mínimo pós-crítico relativo ao *ponto 1* (vide Figura V.2.a), para

a. caso perfeito: $\overline{\Lambda} = 1,128$, $\overline{A} = 0$ e $\overline{B} = 0,332$

(ponto 3)

$$\sigma_y = 22,059 \text{ MPa} \qquad \text{e } \mu = \frac{b}{h} = 200$$

$$\text{Eq.(V-1)}: \sigma_{max} = 1,42\left[\frac{1}{200}\left(\frac{2x10^5}{22,059}\right)^{1/2}\right]^{0,85} 22,059 = 16,67 \text{ MPa}$$

$$\text{Eq.(V-5)}: \sigma_{max} = 1,924\,\frac{1}{200}\left(\frac{2x10^5}{22,059}\right)^{1/2} 22,059 = 20,20 \text{ MPa}$$

$$\text{Eq.(V-7)}: \sigma_{max} = \frac{1,9}{200}\left(\frac{2x10^5}{22,059}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{0,415}{200}\left(\frac{2x10^5}{22,059}\right)^{1/2}\right] 22,059 =$$

$$= 16,01 \text{ MPa}$$

b. caso imperfeito: $\overline{\Lambda} = 1,128$, $\overline{A} = 0,349$ e $\overline{B} = 0,050$

(ponto 2) $\overline{A}_0 = 0,031$ e $\overline{B}_0 = 0,001$

$$\sigma_y = 21,22 \text{ MPa} \qquad e \qquad \mu = \frac{b}{h} = 200$$

$$\text{Eq.(V-1):} \quad \sigma_{max} = 1,42 \left[\frac{1}{200} \left(\frac{2x10^5}{21,22} \right)^{1/2} \right]^{0,85} 21,22 = 16,30 \text{ MPa}$$

$$\text{Eq.(V-5):} \quad \sigma_{max} = 1,924 \frac{1}{200} \left(\frac{2x10^5}{21,22} \right)^{1/2} 21,22 = 19,82 \text{ MPa}$$

$$\text{Eq.(V-7):} \quad \sigma_{max} = \frac{1,9}{200} \left(\frac{2x10^5}{21,22} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{0,415}{200} \left(\frac{2x10^5}{21,22} \right)^{1/2} \right] 21,22 =$$

$$= 15,63 \text{ MPa}$$

EXEMPLO 2: Considerando o nível de carga do mínimo pós-crítico relativo ao *ponto 4* (vide Figura V.2.a), para:

a. caso perfeito: $\overline{\Lambda} = 1,253$, $\overline{A} = 0$ e $\overline{B} = 0,656$

(ponto 6)

$$\sigma_y = 27,931 \qquad e \qquad \mu = \frac{b}{h} = 200$$

$$\text{Eq.(V-1):} \quad \sigma_{max} = 1,42 \left[\frac{1}{200} \left(\frac{2x10^5}{27,931} \right)^{1/2} \right]^{0,85} 27,931 = 19,09 \text{ MPa}$$

$$\text{Eq.(V-5):} \quad \sigma_{max} = 1,921 \frac{1}{200} \left(\frac{2x10^5}{27,931} \right)^{1/2} 27,931 = 22,735 \text{ MPa}$$

$$\text{Eq.(V-7):} \quad \sigma_{max} = \frac{1,9}{200} \left(\frac{2x10^5}{27,931} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{0,415}{200} \left(\frac{2x10^5}{27,931} \right)^{1/2} \right] 27,931 =$$

$$= 18,51 \text{ MPa}$$

b. caso imperfeito: $\overline{A} = 1{,}253$, $\overline{A} = 0{,}854$ e $\overline{B} = 0{,}298$

(ponto 5) $\overline{A}_0 = 0{,}304$ e $\overline{B}_0 = 0{,}068$

$$\sigma_y = 25{,}858 \text{ MPa} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{b}{h} = 200$$

Eq.(V-1): $$\sigma_{max} = 1{,}42 \left[\frac{1}{200} \left(\frac{2\times10^5}{25{,}858} \right)^{1/2} \right]^{0,85} 25{,}858 = 18{,}26 \text{ MPa}$$

Eq.(V-5): $$\sigma_{max} = 1{,}924 \frac{1}{200} \left(\frac{2\times10^5}{25{,}858} \right)^{1/2} 25{,}858 = 21{,}87 \text{ MPa}$$

Eq.(V-7): $$\sigma_{max} = \frac{1{,}9}{200} \left(\frac{2\times10^5}{25{,}858} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{0{,}415}{200} \left(\frac{2\times10^5}{25{,}858} \right)^{1/2} \right] 25{,}858 =$$

$$= 17{,}66 \text{ MPa}$$

Nos exemplos apresentados foram utilizados para cálculo (no caso de placas imperfeitas) os pontos limites '2' e '5' que embora associados à cargas idênticas àquelas dos mínimos pós-críticos (vide Figura V.2.a) ocorrem para deslocamentos bastante inferiores àqueles dos pontos '1' e '4', respectivamente. Isto fortalece a presente previsão teórica da instabilidade elástica antes do colapso plástico, já que os deslocamentos envolvidos ocasionam somente pequenas deformações.

Em resumo, a presente proposição seria a aplicação não do conceito de tensão admissível largamente utilizado nas normas, mas sim de instabilidade elástica e tensões associadas, facilmente estimadas em calculadoras eletrônicas portáteis (no caso utilizou-se HP-41C) conforme programa apresentado em anexo.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

O comportamento não-linear elástico de placas esbeltas sob os efeitos das imperfeições iniciais e acoplamento de modos é analisado no presente trabalho.

Através dessa análise são detectados pontos de bifurcação secundária ao longo do caminho fundamental imperfeito de equilíbrio que podem ser de caráter estável ou instável.

A análise qualitativa e quantitativa e todos esses resultados vem demonstrar que mesmo para geometrias práticas uma placa (isolada ou componente de estrutura laminar associada) sob compressão axial, pode perder sua estabilidade ainda em regime elástico e portanto antes da ocorrência de colapso plástico.

Em resumo, o presente trabalho propõe a aplicação da investigação da instabilidade elástica sendo, consequentemente, contrária a simples aplicação do conceito de tensão admissível (baseada na garantia de um comportamento pós-crítico estável da teoria clássica) largamente utilizada como prescrições nas normas de projeto.

BIBLIOGRAFIA

(1) LANGHAAR, H.L, *Energy Methods in Applied Mechanics*, New York, Wiley, 1962.

(2) TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKI-KRIEGER, S., *Theory of Plates and Shells*, New York, McGraw-Hill Kogakusha, 2ª. Edição, 1959.

(3) TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J.N., *Theory of Elasticity*, New York, McGraw-Hill Kogakusha, 2ª. Edição, 1951.

(4) VON KÁRMÁN, Th., "Festigkeitsprobleme in Maschinenbau", *Encyklopaedie der Mathematischen Wissenshalen*, vol. IV, pp. 311-385, 1910.

(5) SUPPLE, W.J., "On the Changes in Buckle Pattern in Elastic Structures", *Int. Journal Mechanics Science*, vol. 10., pp. 737-745, 1968.

(6) SUPPLE, W.J., "Couple Branching Configurations in the Elastic Buckling of Symmetric Structural Systems", *Int. Journal Mech. Sci.*, vol. 9, pp. 97-112, 1967.

(7) YAMAKI, N., "Post-Buckling Behaviour of Retangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 26, pp. 407-414, 1959.

(8) WALKER, A.C., *Thin-Walled Structural Forms Under Eccentric Compression Load Actions*, Thesis presented to the University of Glascow, Glascow, Scotland, 1964.

(9) WALKER, A.C., "Flat Rectangular Plates Subjected to a Linearly Varying Edge Compressive Loading, *Thin-Walled Structures* (Ed. A.H. Chilver), Chatto and Windus, London, 1967.

(10) NOVOZHILOV, V.V., *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*, New York, Greylock Press, Rochester, 1953.

(11) KOITER, W.T., *On the Stability of Elastic Equilibrium*, Dissertation, Delft, Holland, 1945.

(12) SUPPLE, W.J., "Changes of Wave-Form of Plates in the Post-Buckling Range", *Int. Journal Solids Structures*, vol. 6, pp. 1243-1258, 1970.

(13) SUPPLE, W.J., "Buckling of Plates Under Axial Load and Lateral Pressure", *International Conference on Thin-Walled Structures*, University of Stratchclyde, Glasgow, April 2-6, Crosby-Lockwood, 1979.

(14) SUPPLE, W.J., "Initial Post Buckling Behaviour of a Class of Elastic Structural Systems", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 4, pp. 23-36, 1969.

(15) ROORDA, J., "Stability of Structures with Small Imperfections", *Journal of the Eng. Mech. Division*, ASCE, vol. 2, pp. 87-106, 1965.

(16) SUPPLE, W.J.; CHILVER, A.H., "Elastic Post-Buckling of Compressed Rectangular Flat Plates", *Thin-Walled Structures*, (Ed. A.H. Chilver), Chatto and Windus, London, 1967.

(17) STEIN, M., "The Phenomenon of Change in Buckle Pattern in Elastic Structures", *NASA - Tech. Report R-39*, 1959.

(18) STEIN, M., "Loads and Deformations of Buckled Rectangular Plates", *NASA - Tech. Report R-40*, 1959.

(19) ROORDA, J., "The Buckling Behaviour of Imperfect Structural Systems", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 13, pp. 267-280, 1965.

(20) CHILVER, A.H., "Coupled Modes of Elastic Buckling", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 15, pp. 15-28, 1967.

(21) THOMPSON, J.M.T., "Discrete Branching Points in the General Theory of Elastic Stability", *J. Mechs. Phys. Solids*, vol. 13, pp. 295, 1965.

(22) ELSGOLTZ, L., *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Moscu, Editorial Mir, 1977.

(23) THOMPSON, J.M.T.; HUNT, G.W., *A General Theory of Elastic Stability*, London, Wiley and Sons, 1973.

(24) BRUSH, D.O.; ALMROTH, B.O., *Buckling of Bars Plates and Shells*, New York, McGraw-Hill, 1975.

(25) SUPPLE, W.J., *Structural Stability*, Surrey, IPC, 1973.

(26) TIMOSHENKO, S.R.; GERE, J.M., *Theory of Elastic Stability*, New York, McGraw-Hill, 1961.

(27) CROLL, J.G.A.; WALKER, A.C., *Elements of Structural Stability*, London, Macmillan, 1972.

(28) BLEICH, F., *Buckling Strenght of Metal Structures*, New York, McGraw-Hill, 1952.

(29) JONSTON, B.G., *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, New York, Wiley and Sons, 3ª. Edição, 1976.

(30) KOITER, W.T., "The Effective Width at Loads Far in Excess of the Critical Load for Various Boundary Conditions, *NLL Report S287*; Amsterdam, December, 1943.

(31) GERARD, G., *Handbook of Structural Stability, IV*, NACA Tech. Note nº 3784, 1957.

(32) VON KÁRMÁN, T.; SECHLER, E.E.; DONNELL, L.H., "The Strenght of Thin Plates in Compression", *Trans. ASME*, vol. 54, pp. 53-58, 1932.

(33) AISI, "Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members", *American Iron Steel Institute*, New York, 1980.

(34) AISC, "Specifications for the Design Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", *American Institute of Steel Constructions*, New York, 1978.

(35) CHAJES, A., *Principles of Structural Stability Theory*, N.J. Prentice-Hall, Inc., 1974.

(36) ALLEN, H.G.; BULSON, P.S., "*Background to buckling*", New York, McGraw-Hill, 1980.

NOMENCLATURA

a comprimento da placa

A amplitude de deslocamento na forma simétrica

A_0 amplitude de deslocamento inicial na forma simétrica

$\overline{A}$, $\overline{A}_0$ parâmetro das amplitudes e imperfeições iniciais na forma simétrica

$^c\overline{A}_b$ valor do parâmetro de deslocamento no ponto de bifurcação secundária

$\overline{A}_b$ parâmetro de deslocamento no ponto de bifurcação ao longo do caminho imperfeito de equilíbrio

$\overline{A}_0^*$ parâmetro de imperfeição crítica inicial

b largura da placa

B amplitude de deslocamento na forma antimétrica

B_0 amplitude de deslocamento inicial na forma antimétrica

$\overline{B}$, $\overline{B}_0$ parâmetro das amplitudes e imperfeições iniciais na forma antimétrica

$^c\overline{B}_b$ parâmetro de deslocamento no ponto de bifurcação secundária

$\overline{B}_b$ parâmetro de deslocamento no ponto de bifurcação ao longo do caminho imperfeito de equilíbrio

$\overline{B}_0^*$ parâmetro de imperfeição crítica inicial

dx,dy,dz diferencial em relação a x,y,z

D rigidez de flexão da placa

E módulo de elasticidade longitudinal

E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 constantes das equações algébricas não-lineares

G_1, G_2 constantes da parcela quártica da variação total da energia potencial total

h espessura da placa

H_1, H_2, H_3, H_4 constantes das equações algébricas não-lineares

J constante auxiliar

K rigidez de membrana da placa

m número de meias-ondas senoidais na forma antimétrica

n número de meias-ondas senoidais na forma simétrica

n' componente linear da carga externa aplicada

n'' componente quadrática da carga externa aplicada

N_x, N_y, N_{xy} cargas externas uniformemente distribuídas aplicadas no plano médio da placa

N_x^F, N_y^F, N_{xy}^F componente fundamental da carga externa aplicada

p pressão lateral aplicada sobre a superfície da placa

$\bar{p}$ parâmetro de pressão lateral aplicada

$\bar{p}^*$ parâmetro de pressão lateral crítica

$\underset{\sim}{u}^F, \underset{\sim}{u}^I$ campo de deslocamentos fundamental e incremental

u, v, w deslocamentos nas direções dos eixos x, y, z

U energia de deformação elástica

U_M energia de deformação elástica de membrana

U_F energia de deformação elástica de flexão

V energia potencial total

ΔV variação total da energia potencial total

V_1, V_2, V_3, V_4 parcelas da variação total de energia potencial, respectivamente, linear, quadrática, cúbica e quártica

x, y, z coordenadas do sistema cartesiano de eixos

w_T deslocamento total normal à superfície média da placa

$\bar{w}$ deslocamento inicial normal à superfície média da placa

w_0 deslocamento inicial equivalente normal à superfície média da placa

W_{EXT} trabalho realizado pelas cargas externas aplicadas

α, β constantes auxiliares

γ razão entre os lados da placa (a/b)

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ deformações específicas de cisalhamento em coordenadas cartesianas

$\bar{\gamma}_{xy}, \bar{\gamma}_{xz}, \bar{\gamma}_{yz}$ deformações de cisalhamento em um ponto qualquer da placa

$\gamma^F_{xy}, \gamma^F_{xz}, \gamma^F_{yz}$ deformações específicas de cisalhamento no estado fundamental

$\gamma^I_{xy}, \gamma^I_{xz}, \gamma^I_{yz}$ deformações específicas de cisalhamento no estado incremental

$\hat{\gamma}_{xy}$, $\hat{\gamma}_{xz}$, $\hat{\gamma}_{yz}$ deformações específicas de cisalhamento incluindo imperfeições iniciais

$\gamma'_{xy}, \gamma'_{xz}, \gamma'_{yz}$ componentes lineares das deformações específicas de cisalhamento

$\gamma''_{xy}, \gamma''_{xz}, \gamma''_{yz}$ componentes quadráticas das deformações específicas de cisalhamento

δ variação das parcelas da variação total da energia potencial

$\underset{\sim}{\bar{\varepsilon}}$ tensor de deformações em coordenadas cartesianas

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ deformações específicas normal em coordenadas cartesianas

$\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\varepsilon}_z$ deformações normal em um ponto qualquer da placa

$\varepsilon_x^F, \varepsilon_y^F, \varepsilon_z^F$ deformações específicas normal no estado fundamental

$\varepsilon_x^I, \varepsilon_y^I, \varepsilon_z^I$ deformações específicas normal incluindo imperfeições iniciais

$\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \varepsilon'_z$ componentes lineares das deformações específicas normal

$\varepsilon''_x, \varepsilon''_y, \varepsilon''_z$ componentes quadráticas das deformações específicas normal

Λ carga total aplicada na placa

$\bar{\Lambda}$ parâmetro de carga total aplicada

Λ_c carga crítica total

$\bar{\Lambda}_c$ parâmetro de carga crítica

$\bar{\Lambda}_{c_{min}}$ parâmetro de carga crítica mínima

$\overline{\Lambda}_c^{\overline{A}}$ parâmetro de carga crítica relativa ao modo simétrico

$\overline{\Lambda}_c^{\overline{B}}$ parâmetro de carga crítica relativa do modo antimétrico

$^c\overline{\Lambda}_b$ parâmetro de carga crítica no ponto de bifurcação ao longo do caminho perfeito de equilíbrio

$\overline{\Lambda}_b$ parâmetro de carga crítica no ponto de bifurcação ao longo do caminho imperfeito de equilíbrio

μ razão entre a largura e a espessura da placa

ν coeficiente de Poisson

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ tensão normal em coordenadas cartesianas

$\overline{\sigma}_x, \overline{\sigma}_y, \overline{\sigma}_z$ tensões normal em um ponto qualquer da placa

$\underset{\sim}{\overline{\tau}}$ tensor de tensões em coordenadas cartesianas

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ tensões de cisalhamento em coordenadas cartesianas

$\overline{\tau}_{xy}, \overline{\tau}_{xz}, \overline{\tau}_{yz}$ tensões de cisalhamento em um ponto qualquer da placa

ϕ função de tensão de Airy

ϕ_h, ϕ_p soluções homogêneas e particular da função de tensão de Airy, respectivamente

$\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ mudanças de curvatura da superfície média da placa em coordenadas cartesianas

$\chi_x^F, \chi_y^F, \chi_{xy}^F$ mudanças de curvatura da superfície média da placa no estado fundamental

$\chi_x^I, \chi_y^I, \chi_{xy}^I$ mudanças de curvatura da superfície média da placa no estado incremental

$\chi_x', \chi_y', \chi_{xy}'$ componentes lineares das mudanças de curvatura da superfície média da placa

$\hat{\chi}_x, \hat{\chi}_y, \hat{\chi}_{xy}$ mudanças de curvatura da superfície média da placa incluindo imperfeições iniciais

Ω energia potencial das cargas externas aplicadas

∇^4 operador bi-harmônico $\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$

OBS.: os símbolos seguidos de ',' e das coordenadas do sistema cartesianas, representam as respectivas derivadas parciais.

A N E X O

LISTAGEM DO PROGRAMA

```
01*LBL "TESE"
02 CLRG
03 "N"
04 PROMPT
05 STO 11
06 "M"
07 PROMPT
08 STO 12
09 "POISON"
10 PROMPT
11 STO 14
12 "b"
13 PROMPT
14 STO 15
15*LBL B
16 "a/e="
17 ACA
18 PROMPT
19 STO 13
20 ACX
21 ADV
22 RCL 15
23 4
24 Y↑X
25 RCL 13
26 X↑2
27 *
28 4
29 *
30 PI
31 X↑2
32 RCL 11
33 *
34 3
35 Y↑X
36 1 E08
37 *
38 /
39 RCL 14
40 X↑2
41 1
42 X<>Y
43 -
44 12
45 *
46 STO 00
47 *
48 STO 05
49 RCL 12
50 RCL 11
51 +
52 X↑2
53 RCL 13
54 X↑2
55 4
56 *
57 +
58 1/X
59 RCL 12
60 RCL 11
61 -
62 X↑2
63 *
64 X↑2
65 RCL 12
66 RCL 11
67 -
68 X↑2
69 RCL 13
70 X↑2
71 4
72 *
73 +
74 1/X
75 RCL 12
76 RCL 11
77 +
78 X↑2
79 *
80 X↑2
81 +
82 RCL 12
83 RCL 11
84 *
85 RCL 13
86 X↑2
87 /
88 X↑2
89 +
90 64
91 /
92 16
93 1/X
94 +
95 STO 03
96 STO 08
97 RCL 13
98 RCL 11
99 /
100 X↑2
101 STO 24
102 ENTER↑
103 1/X
104 X↑2
105 1
106 +
107 *
108 54
109 /
110 RCL 00
111 *
112 STO 01
113 RCL 13
114 RCL 12
115 /
116 X↑2
117 STO 23
118 ENTER↑
119 1/X
120 X↑2
121 1
122 +
123 *
124 64
125 /
126 RCL 00
127 *
128 STO 06
129 RCL 03
130 RCL 24
131 *
132 RCL 23
133 64
134 *
135 1/X
136 -
137 RCL 00
138 *
139 STO 03
140 RCL 08
141 RCL 23
142 *
143 RCL 24
144 64
145 *
146 1/X
147 -
148 RCL 00
149 *
150 STO 08
151 RCL 00
152 RCL 23
153 64
154 *
155 /
156 STO 02
157 RCL 00
158 RCL 24
159 64
160 *
161 /
162 STO 07
163 RCL 24
164 1/X
165 1
166 +
167 X↑2
168 RCL 24
169 *
170 4
171 /
172 STO 04
173 RCL 23
174 1/X
175 1
176 +
177 X↑2
178 RCL 23
179 *
180 4
181 /
182 STO 09
183 FS? 01
184 RTN
185 STOP
186*LBL 00
187 "60"
188 PROMPT
189 STO 19
190 "B"
191 PROMPT
192 STO 18
193 "A0"
194 PROMPT
195 STO 17
196 "A"
197 PROMPT
198 STO 16
199 "FC"
200 PROMPT
201 STO 00
202 "I"
203 PROMPT
204 STO 23
205 RTN
206*LBL 01
207 RCL 16
208 X↑2
209 RCL 17
210 X↑2
211 -
212 RCL 16
213 *
214 RCL 01
215 *
216 RCL 18
217 X↑2
218 RCL 19
219 X↑2
220 -
```

```
221 RCL 16
222 *
223 RCL 02
224 *
225 +
226 RCL 16
227 RCL 18
228 *
229 RCL 17
230 RCL 19
231 *
232 -
233 RCL 18
234 *
235 RCL 03
236 *
237 +
238 RCL 16
239 RCL 17
240 -
24  RCL 04
242 *
243 +
244 RCL 00
245 RCL 16
246 *
247 -
248 RCL 05
249 RCL 10
250 *
251 -
252 RTN
253*LBL 02
254 RCL 18
255 X↑2
256 RCL 19
257 X↑2
258 -
259 RCL 18
260 *
261 RCL 06
26? *
263 RCL 16
264 X↑2
265 RCL 17
26? X↑2
267 -
26  RCL 16
269 *
270 RCL 07
271 *
272 +
273 RCL 16
274 RCL 18
275 *
276 RCL 17
277 RCL 19
278 *
279 -
280 RCL 16
281 *
29? RCL 08
283 *
284 +
285 RCL 18
286 RCL 19
287 -
288 RCL 09
289 *
290 +
291 RCL 00
292 RCL 18
293 *
29- -
295 RTN
29?*LBL 03
297 RCL 16
298 X↑2
299 3
300 *
301 RCL 17
302 X↑2
303 -
304 RCL 01
305 *
306 RCL 18
307 X↑2
308 RCL 19
309 X↑2
3?0 -
311 RCL 02
312 *
313 +
314 RCL 18
315 X↑2
316 RCL 03
317 *
318 +
319 RCL 04
320 +
321 RCL 00
322 -
323 RTN
324*LBL 04
325 RCL 02
326 RCL 03
327 +
328 2
329 *
330 RCL 16
331 *
332 RCL 18
333 *
334 RCL 17
335 RCL 1?
336 *
337 RCL 03
338 *
339 -
340 RTN
341*LBL 05
342 RCL 07
343 RCL 08
344 +
345 2
346 *
347 RCL 16
348 *
349 RCL 18
350 *
351 RCL 17
352 RCL 19
353 *
354 RCL 03
355 *
356 -
357 RTN
358*LBL 06
359 RCL 18
360 X↑2
361 3
362 *
363 RCL 19
364 X↑2
365 -
366 RCL 06
367 *
368 RCL 16
369 X↑2
370 RCL 17
371 X↑2
372 -
373 RCL 07
374 *
375 +
376 RCL 16
377 X↑2
378 RCL 08
379 *
380 +
381 RCL 09
382 +
383 RCL 00
384 -
385 RTN
386*LBL 07
387 "A0="
388 ACA
389 PROMPT
390 STO 17
391 ACX
392 " B0="
393 ACA
394 PROMPT
395 STO 19
396 ACX
397 ADV
398*LBL 08
399 11
400 ACCHR
401 "="
402 ARCL 00
403 ACA
404 ADV
405 "A="
406 ARCL 16
407 ACA
408 " B="
409 ARCL 18
410 ACA
411 ADV
412 RTN
413*LBL 09
414 ARCL X
415 AVIEW
416 RTN
417*LBL 13
418 X<=Y?
-19 X<>Y
420 1 E-5
-21 RTN
-22*LBL "IN"
-23 0
-24 STO 00
-25 STO 10
-26 "A0="
-27 ACA
-28 PROMPT
429 STO 17
430 ACX
431 ADV
-32 "B0="
433 ACA
434 PROMPT
435 STO 19
436 ACX
437 ADV
438 RCL 13
439 2
-40 SQRT
441 X>Y?
-42 GTO 19
-43 RCL 01
 44 RCL 07
-45 -
-46 RCL 08
447 -
448 CHS
449 STO 23
450 RCL 09
451 RCL 19
452 *
```

```
453 2
454 /
455 RCL 02
456 RCL 03
457 +
458 RCL 06
459 -
460 STO 24
461 /
462 2
463 ENTER↑
464 3
465 /
466 Y↑X
467 RCL 24
468 *
469 3
470 *
471 RCL 06
472 RCL 02
473 -
474 RCL 19
475 X↑2
476 *
477 +
478 RCL 04
479 +
480 RCL 09
481 -
482 RCL 23
483 2
484 *
485 LASTX
486 3
487 /
488 Y↑X
489 RCL 23
490 3
491 *
492 /
493 *
494 1,5
495 Y↑X
496 RCL 05
497 /
498 STO 10
499 "P="
500 ARCL 10
501 AVIEW
502 RCL 10
503 RCL 05
504 *
505 RCL 23
506 2
507 *
508 /
509 3
510 1/X
511 Y↑X
512 STO 16
513 RCL 09
514 RCL 19
515 *
516 RCL 24
517 2
518 *
519 /
520 3
521 1/X
522 Y↑X
523 STO 18
524 XEQ 01
525 RCL 16
526 /
527 STO 00
528*LBL 20
529 11
530 ACCHR
531 "b="
532 ARCL 00
533 ACA
534 ADV
535 "Ab="
536 ARCL 16
537 ACA
538 " ,Bb="
539 ARCL 18
540 ACA
541 ADV
542 STOP
543*LBL 19
544 RCL 17
545 STO 10
546 0
547 STO 17
548 RCL 01
549 RCL 07
550 -
551 RCL 08
552 -
553 STO 22
554 -2
555 *
556 1/X
557 RCL 05
558 *
559 RCL 10
560 *
561 1,5
562 1/X
563 Y↑X
564 RCL 22
565 *
566 3
567 *
568 RCL 09
569 -
570 RCL 04
571 +
572 STO 20
573 X↑2
574 RCL 06
575 RCL 02
576 -
577 *
578 3
579 *
580 RCL 02
581 RCL 03
582 +
583 RCL 06
584 -
585 STO 23
586 27
587 *
588 RCL 09
589 X↑2
590 *
591 4
592 /
593 +
594 1/X
595 RCL 20
596 3
597 Y↑X
598 *
599 CHS
600 SQRT
601 STO 19
602 "B0*="
603 ARCL 19
604 AVIEW
605 RCL 19
606 RCL 09
607 *
608 2
609 /
610 RCL 23
611 /
612 3
613 1/X
614 Y↑X
615 STO 18
616 RCL 05
617 RCL 10
618 *
619 RCL 22
620 -2
621 *
622 /
623 3
624 1/X
625 Y↑X
626 STO 16
627 XEQ 02
628 RCL 18
629 /
630 STO 00
631 GTO 20
632 XEQ 02
633 RCL 18
634 /
635 STO 00
636 11
637 ACCHR
638 "b="
639 ARCL 00
640 ACA
641 ", Bb="
642 ARCL 18
643 ACA
644 ADV
645 STOP
646*LBL C
647 XEQ 00
648*LBL 12
649 XEQ 06
650 STO 22
651 RCL 16
652 *
653 STO 24
654 XEQ 01
655 ST* 22
656 RCL 18
657 *
658 STO 21
659 XEQ 04
660 STO 20
661 RCL 18
662 *
663 ST- 24
664 XEQ 02
665 RCL 20
666 X<>Y
667 *
668 ST- 22
669 LASTX
670 RCL 16
671 *
672 ST- 21
673 RCL 24
674 ST/ 22
675 ST/ 21
676 RCL 22
677 ABS
678 RCL 21
679 ABS
680 XEQ 13
681 X>Y?
682 GTO 14
683 RCL 21
684 ST+ 18
```

```
685 RCL 22
686 ST+ 00
687 GTO 12
688*LBL 14
689 XEQ 00
690 RCL 23
691 ST+ 16
692 GTO 12
693*LBL D
694 XEQ 00
695*LBL 15
696 XEQ 05
697 STO 22
698 RCL 16
699 *
700 STO 24
701 XEQ 01
702 ST* 22
703 RCL 18
704 *
705 STO 20
706 XEQ 03
707 STO 21
708 RCL 18
709 *
710 ST- 24
711 XEQ 02
712 RCL 21
713 X<>Y
714 *
715 ST- 22
716 LASTX
717 RCL 16
718 *
719 ST- 20
720 RCL 24
721 ST/ 20
722 ST/ 22
723 RCL 22
724 ABS
725 RCL 20
726 ABS
727 XEQ 13
728 X>Y?
729 GTO 16
730 RCL 20
731 ST+ 16
732 RCL 22
733 ST+ 00
734 GTO 15
735*LBL 16
736 XEQ 00
737 RCL 23
738 ST+ 16
739 .
740 .END.
```