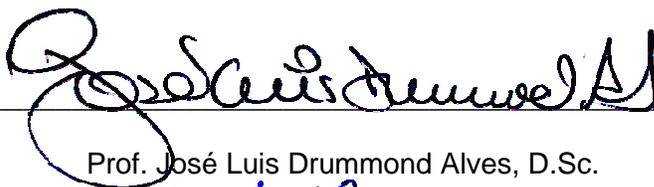


UM MODELO CONSTITUTIVO PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE POÇOS
DE PETRÓLEO

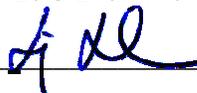
Arão Dias Tisser

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA CIVIL.

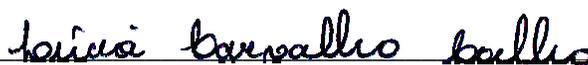
Aprovada por:



Prof. José Luis Drummond Alves, D.Sc.



Prof. Luiz Landau, D.Sc.



Eng. Lúcia Carvalho Coelho, D.Sc.



Eng. Adilson Carvalho Benjamin, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2004

TISSER, ARÃO DIAS

Um Modelo Constitutivo para Análise de
Estabilidade de Poços de Petróleo [Rio de Janeiro]
2004

IX, 119 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Civil, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE

1. Modelos de Ruptura de Poços de Petróleo
 2. Análise da Estabilidade de Poços
- I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A Arthur ^{"in memorium"} e Helena

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. José Luis Drummond Alves, pela oportunidade, orientação, apoio e incentivo durante toda a caminhada deste trabalho.

Ao Prof. Luiz Landau, também pela oportunidade e apoio, e por disponibilizar o suporte físico e material necessário à realização deste trabalho.

À Enga. Lúcia Carvalho Coelho, a orientação cuja participação foi fundamental no desenvolvimento desta tese.

Ao Eng. Adilson Carvalho Benjamin, por se prontificar em avaliar esse trabalho em um prazo tão curto.

A Mônica Stoque pelo apoio administrativo necessário durante todo o curso.

Ao corpo técnico e administrativo do Laboratório de Métodos Computacionais para Engenharia, pelo suporte técnico e humano.

À secretaria acadêmica do Programa de Engenharia Civil da COPPE, pela presteza em encaminhar os procedimentos necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

Às colegas Denis, Guilherme, Rosenil, Vanessa e outros pela amizade e apoio ao longo destes anos de convivência no curso.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc)

UM MODELO CONSTITUTIVO PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE POÇOS
DE PETRÓLEO

Arão Dias Tisser

Março/2004

Orientadores: José Luis Drummond Alves

Luiz Landau

Programa: Engenharia Civil

Neste trabalho apresenta-se uma implementação de um modelo constitutivo que visa modelar o fenômeno de poro colapso observado em rochas porosas e inconsolidadas, encontrados com grande frequência em reservatórios de águas profundas. O modelo é composto de uma superfície de ruptura clássica associada com um *cap* suave, eliminando a presença do vértice no encontro destas superfícies, objetivando um ganho computacional com a simplificação do algoritmo.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A CONSTITUTIVE MODEL FOR OIL WELLBORES STABILIT ANALISYS

Arão Dias Tisser

March/2004

Advisers: José Luis Drummond Alves

Luiz Landau

Department: Civil Engineering

This work presents an implementation of a constitutive model to simulate the pore-collapse phenomena observed in porous unconsolidated rocks, usually met in deep waters reservoirs. The model is set by a classic failure surface together with a smooth cap, eliminating the singularity point between these surfaces, resulting in a numerical gains and an algorithm simplification.

ÍNDICE

1. Introdução

1.1 – Motivação.....	1
1.2 – Objetivo.....	5
1.3 – Métodos de Modelagem	6
1.3.1 – Métodos Analíticos.....	6
1.3.2 – Métodos Numéricos.....	8
1.4 – Pressupostos e Limitações.....	10
1.5 – Ambiente de Desenvolvimento	11
1.6 – Descrição dos Capítulos.....	11

2. Estado de Tensões em Poços

2.1 – Introdução.....	13
2.2 - Análise de Tensões	14
2.2.1 – Estado de Tensões Inicial.....	15
2.2.2 – Efeito do Furo	16
2.2.3 – Efeito do Fluxo de Fluidos.....	17
2.3 – Equações Governantes	17
2.4 – Aplicação do Método dos Elementos Finitos	19

3. Modelos de Ruptura

3.1 – Introdução.....	23
3.2 – Rochas Fracas.....	23
3.3 – Modelos Constitutivos	26
3.4 – Modelo Proposto.....	33

4. Formulação dos Modelos de Ruptura

4.1 – Introdução.....	35
-----------------------	----

4.2	– Superfícies de Ruptura Isotrópicas.....	35
4.2.1	– Tensões e seus Invariantes.....	35
4.3	– Generalização da Superfície de Ruptura.....	43
4.4	–Teoria da Plasticidade Incremental.....	46
4.4.1	– Conceitos Básicos.....	46
4.5	– Formulação do Modelo de Poro-Colapso.....	51
4.5.1	– Formulação do Modelo.....	51
4.5.2	– Algoritmo de Plasticidade.....	55
5. Implementação dos Modelos de Ruptura		
5.1	– Introdução.....	57
5.2	– Análise Elasto-Plástica pelo Método dos Elementos Finitos.....	58
5.2.1	– Relações Constitutivas Incrementais.....	58
5.2.2	– Condição de Consistência Incremental.....	59
5.2.3	– Relação Constitutiva para o Estado Plano de Deformações.....	59
5.2.4	– Avaliação dos Termos do Tensor Constitutivo Elasto-Plástico.....	62
5.2.5	– Possíveis Trajetórias de Tensões durante um Incremento.....	68
5.2.6	– Atualização das Tensões e Avaliação da Nova Superfície.....	70
5.2.7	– Correção do Erro Induzido no Processo (Drift).....	71
5.3	– Validação dos Modelos.....	72
5.3.1	– Capacidade de Carga de uma Sapata Corrida.....	73
6. Simulações Numéricas		
6.1	– Introdução	80
6.2	– Ajuste do Modelo	80
6.2.1	– Determinação dos Parâmetros para Análise Numérica.....	81
6.3	– Características do Modelo.....	81
6.4	– Análise Elástica	84
6.5	– Análise da Ruptura por Cisalhamento e Poro-colapso.....	88

6.5.1 – Modelo 1	88
6.5.2 – Modelo 1 (Endurecimento).....	93
6.5.3 – Modelo 2	98
6.5.4 – Modelo 2 (Endurecimento).....	103
6.6 – Resumo dos Resultados	108
7. Conclusões e Recomendações	
7.1 – Resumo	110
7.2 – Conclusões e Contribuições.....	111
7.3 – Recomendações para Futuras Pesquisas.....	112
8. Referências Bibliográficas.....	114

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1. *Motivação:*

A indústria do petróleo possui mais de um século de atividade. Durante esse período ela vem se mostrando como um dos setores de maior lucratividade no mundo. No surgimento da indústria, no final do século XIX, o refino do petróleo para obtenção do querosene de iluminação era a etapa onde estava a maior rentabilidade. Após alguns anos na década de 1920 o desenvolvimento da indústria automobilística e o baixo custo do petróleo, associado ao desenvolvimento da energia elétrica levaram a uma redução na utilização do querosene e um aumento expressivo no consumo de gasolina e óleo diesel, empurrando a lucratividade do querosene para os derivados combustíveis. Apesar dessas mudanças a lucratividade da cadeia do petróleo permanecia no refino, pois o petróleo era encontrado em abundância e a preços muito baixos.

Durante o desenvolvimento da indústria do petróleo no século XX foram sendo descobertas novas reservas de petróleo que garantiam a manutenção do preço da matéria-prima de uma indústria milionária. Porém com o passar dos anos essas reservas foram sendo descobertas cada vez mais afastadas dos maiores mercados consumidores, apresentando uma concentração muito elevada na região do Oriente Médio, principalmente em países como Arábia Saudita e Iraque. Embora as reservas descobertas nessa região apresentem relativa facilidade de exploração, pois as reservas são todas de superfície, ela começou a apresentar com o tempo problemas políticos que ao longo do tempo começaram a gerar grande desconforto para as empresas petrolíferas do ocidente. O auge dessa situação ocorreu quando os países do Oriente Médio perceberam que, dentro do potencial estratégico do petróleo, eles tinham grande importância pois possuíam mais da metade da produção mundial. Somado aos países do Oriente Médio, alguns países da América Latina também notaram tamanha força das reservas que possuíam e então eles se organizaram em um cartel.

Durante a década de 1970 esse cartel supracitado foi responsável por duas crises mundiais, a de 1973 e a de 1978. Essas crises resultaram em um aumento no valor do petróleo, levando a rentabilidade da indústria do petróleo do refino para a produção, pois com o aumento da matéria-prima as empresas de refino foram obrigadas a reduzir sua margem para manutenção de suas vendas. Essa transferência da lucratividade gerou um importante fator para a indústria moderna. O desenvolvimento da produção de petróleo se tornou um fator estratégico no mundo, campos de produção “off-shore” se tornaram economicamente viáveis devido ao alto custo do petróleo e países onde não se produzia petróleo passaram a investir no desenvolvimento tecnológico dessa etapa da cadeia.

Com o passar dos anos a indústria precisou tornar cada vez mais rentável o processo de extração do petróleo, levando a necessidade de reduzir custos na perfuração de poços e aumentar a qualidade da análise das informações obtidas antes, durante e após a perfuração. Antes, devido à necessidade de projetar da maneira mais eficiente a perfuração do poço, buscando um índice cada vez menor de erros no encontro de reservas. Durante, para evitar a perda de milhões investidos na perfuração devido a prisões de coluna de perfuração, instabilidade do maciço perfurado ou até mesmo por utilização de materiais de perfuração incompatíveis com a região que estava sendo perfurada. Após, devido a problemas de instabilidade dos poços que podem interromper a produção, gerando prejuízos que nunca serão recuperados ou até mesmo produção de elementos sólidos que podem danificar os equipamentos de produção, resultando em uma interrupção da produção.

O desenvolvimento tecnológico chegou a um nível tal que através de um único poço pode ser feita uma perfuração multi-direcional (figura 1.1), permitindo um melhor aproveitamento do poço e também que com uma única base de perfuração seja recuperado o máximo de hidrocarbonetos possível de um reservatório. Esse desenvolvimento de poços direcionais apresenta uma maior incidência de problemas de instabilidade de poço, tanto na fase de perfuração quanto na fase de produção.

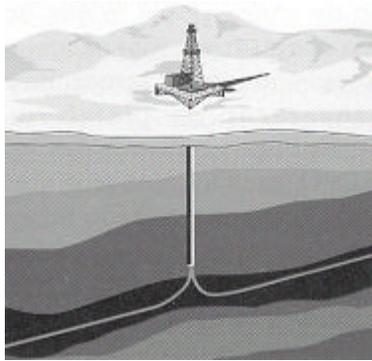


FIGURA 1.1 – Poço multi-direcional

A instabilidade de poço gera um aumento de custos adicionais na perfuração, podendo chegar ao seu abandono devido a prisão de coluna de perfuração. Entre os custos da instabilidade estão a necessidade de limpeza do poço, de injeção de mais fluido de perfuração devido à perda da mesma e a prisão que já foi citada, que em determinados níveis pode ser tratada permitindo que se continue a perfuração. Contudo, mesmo que continue a perfuração os problemas já causaram um atraso que pode representar perdas na rentabilidade do poço.

Outro aspecto interessante do desenvolvimento político do petróleo foi o crescimento das reservas “off-shore” que cada vez mais são desenvolvidas em lâminas de águas cada vez mais profundas. Além disso às tecnologias de perfuração para águas profundas estão hoje em dia limitadas pela profundidade da lâmina de água, o que gera a necessidade de fazer perfuração longe das reservas e alcançá-las por um poço direcional ou até mesmo por um poço horizontal (figura 1.2).

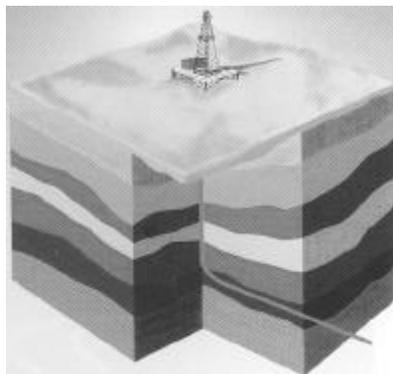


FIGURA 1.2 – Poço Horizontal

Com o intuito de aumentar a confiabilidade da perfuração de poços direcionais, reduzindo os problemas de instabilidade dos mesmos, se tornou necessário o desenvolvimento de modelos de análise com capacidade de considerar a complexidade dos fenômenos associados à perfuração e produção.

A instabilidade ocorre devido a fatores químicos e mecânicos, acontecendo quando a perfuração é feita em rochas fracas. Alguns estudos indicam que os fatores mecânicos predominam na instabilidade do poço, pois a perfuração altera a estrutura original onde o campo de tensões estava equilibrado, gerando assim uma alteração no estado de tensões "in-situ", inicialmente em equilíbrio. Esse estado de tensões tem que ser equilibrado por uma pressão aplicada na parede do poço, mantendo sua estabilidade, essa pressão é conseguida através de um peso de lama durante a perfuração.

Já na fase de produção surgem outras alterações que é um aumento nas tensões efetivas no meio poroso, podendo inclusive levar a ruptura do poço. Para evitar que ocorra a ruína é necessário um diferencial de pressão que garanta a estabilidade do poço.

A instabilidade é influenciada por muitos fatores do poço como a resistência da matriz rochosa, poro-pressões, efeitos térmicos, efeitos químicos e fatores externos como o tipo de lama, a densidade da lama, as técnicas de perfuração, entre outros. Os fatores externos surgem por influência da perfuração. Mas como já foi dito os fatores mecânicos são preponderantes em relação aos químicos, sendo que dentre esses fatores o estado de tensão inicial, a pressão no poço, a resistência da rocha e a permeabilidade da matriz são os que predominam (COELHO, 2001). Segundo estudos de CHEN et al. (1996) o estado de tensões *in-situ* e as propriedades de resistência da rocha preponderam sobre o efeito da poro-pressão induzida, das propriedades elásticas do material e dos ângulos dos planos de acomodação.

Para um bom desenvolvimento de um projeto de poços de alta inclinação é necessária a obtenção de dados representativos das propriedades mecânicas e de resistência do meio poroso, sendo isso aplicado em um simulador numérico capaz de representar o comportamento da formação durante a perfuração para evitar imprevistos.

O método dos elementos finitos vem se consolidando como uma técnica com capacidade de realizar as avaliações necessárias para o projeto do poço. No

método o reservatório é representado por um material ideal, sofrendo deformações segundo uma lei constitutiva. Porém dois pontos devem ser observados, uma avaliação adequada dos estados de tensão e uma relação constitutiva com capacidade de representar a deformabilidade do material.

A avaliação dos estados de tensão passa a ser tratada dentro do método dos elementos finitos pela teoria da plasticidade, onde a maioria dos modelos trabalham com a resposta tensão x deformação. Dentre estes modelos os de Mohr-Coulomb e o Drucker-Prager se destacam, inclusive para análise de poços. Esses métodos conseguem tratar bem o comportamento dos materiais quando a resistência ao cisalhamento é alcançada. O mesmo já não é verdade para a variação volumétrica observada em materiais fracos.

Já existem desenvolvimentos teóricos destes modelos que procuram tratar o problema da variação volumétrica, sendo um destes o implementado por COELHO (2001) em um programa desenvolvido na COPPE. Na rotina implementada foram utilizados os dois modelos de ruptura associados a uma superfície elíptica que limita o estado de tensões hidrostático admissível ("*cap model*"). Porém esse modelo apresenta um vértice no encontro do *cap* com os modelos de ruptura apresentando algumas dificuldades de tratamento, tornando assim sua estrutura computacional mais complexa.

1.2. Objetivo:

O objetivo desse trabalho é continuar com o desenvolvimento de COELHO (2001), substituindo o *cap* elíptico por um *cap* suave, contínuo ao modelo de ruptura de Mohr-Coulomb, tornando o algoritmo mais simples e de execução mais rápida.

A superfície que é associada ao modelo de ruptura visa o tratamento do poro-colapso, que é uma redução drástica e irreversível na porosidade. O poro-colapso quando não é tratado de forma adequada resulta em uma perda de permeabilidade no meio, resultando em uma recuperação de hidrocarbonetos menor, que no caso de um poço em águas profundas pode representar a perda da viabilidade do mesmo.

O problema do poro-colapso tem maior probabilidade de ocorrer na vizinhança do poço, devido às alterações decorrentes da perfuração terem sido inseridas nessa região, pelo fluido de perfuração e pelo fluxo dos hidrocarbonetos durante a produção.

Nesse trabalho foi implementado o modelo de ruptura de Mohr-Coulomb, fechado por uma superfície suave e contínua que limita o estado de tensões hidrostático admissível. Seus resultados foram comparados com os resultados numéricos obtidos por COELHO (2001) e com os resultados experimentais obtidos por SOARES (2000) que foram utilizados no ajuste dos modelos.

1.3. Métodos de Modelagem:

Os métodos de modelagem podem ser divididos em analíticos e numéricos, sendo que os métodos analíticos utilizam hipóteses mais simples e condições de contorno conhecidas para poderem ser calculados. Já os métodos numéricos apresentam grande flexibilidade, principalmente pela capacidade dos computadores modernos de realizarem inúmeros cálculos possibilitando a implementação de teorias cada vez mais complexas e o tratamento de contornos quaisquer.

1.3.1. Métodos Analíticos:

Em 1943, TERZAGHI desenvolveu a teoria do adensamento unidimensional para carregamentos constantes. Em 1940, BIOT produziu a teoria do adensamento tridimensional. Na teoria de Biot é considerado um material isotrópico, o fluxo é linear e governado pela lei de Darcy e as relações Tensão x Deformação são tratadas como lineares. Em 1955 houve uma ampliação da teoria para materiais anisotrópicos e relações constitutivas visco-elásticas lineares. Esse desenvolvimento teórico é a base para toda a análise de tensões em poços profundos.

Nos estudos de WESTERGAARD (1940) foi demonstrado que a região plastificada no entorno do poço segue o critério de Mohr-Coulomb. Nesse estudo foram considerados a pressão nula no interior do poço, estado de tensão inicial hidrostático e desprezado o fluxo de fluídos. PASLAY, CHEATHAN (1963), utilizando a teoria de Biot para avaliar as tensões sob fluxo permanente, num

modelo axissimétrico, onde a rocha é tratada como um meio poroso elástico saturado incompressível. Foram comparadas duas situações, uma onde a permeabilidade é constante na direção radial e outra com a permeabilidade reduzida nas proximidades do poço. Identificou-se que o adensamento pode alterar as propriedades elásticas e a permeabilidade no entorno do poço.

Já HAIMSON, FAIRHUST (1967) sugeriram um modelo para determinar a pressão de ruptura em poços verticais, considerando o estado de tensões que circunda o poço e o fluido no seu interior. Para o modelo o material é homogêneo e linear elástico isotrópico, o estado de tensão inicial não-hidrostático e o eixo paralelo a uma das direções principais. No estudo foi avaliada a redistribuição das tensões iniciais devido a três fatores, que são: efeito do furo, diferencial de pressão poço-formação e fluxo de fluidos no meio.

GNIRK (1972), desenvolveu expressões que determinam a pressão na parede do poço, visando evitar o escoamento plástico do mesmo. Em seu trabalho foi considerada uma zona plástica no entorno do poço, que trabalha de acordo com o critério de Mohr-Coulomb, e considerou que o fluxo foi desprezado. GEERTSMA (1978) avaliou o problema do influxo de partículas durante a produção e o fraturamento da formação durante a injeção, ambos baseados no cilindro de Lamé. Demonstrou que na produção os efeitos da plasticidade no entorno do poço apresentam relevância, já na injeção o domínio elástico representa bem o fenômeno.

RISNES, BRATLI, HORSRUD (1982) estudaram a distribuição de tensões e poro-pressões no entorno de uma cavidade cilíndrica de material elasto-plástico perfeito, sob escoamento permanente. Também foram considerados os efeitos da plasticidade ao redor do poço. Eles desenvolveram expressões para uma vazão crítica capaz de provocar a instabilidade. CHARLEZ (1994) gerou uma solução analítica para o problema do poço com uma relação constitutiva Cam-Clay linearizada, onde mostra que a plasticidade induz grande relaxação das tensões anelares, já a tensão radial é pouco afetada. Também avaliou o efeito do endurecimento nas tensões ao redor do poço, demonstrando que com um maior módulo de endurecimento tem-se uma menor relaxação das tensões anelares. Concluindo que o modelo elástico é o caso elasto-plástico limite quando o módulo de endurecimento tender para o infinito.

ATKINSON, EFTAXIOUPOULOS (1996) avaliou o campo de tensões em torno de um poço inclinado, revestido e cimentado através de um modelo plano, oriundo da solução de um furo circular pressurizado em um meio elástico infinito, foi utilizada a teoria dos potenciais complexos desenvolvida por Muskhelishvili (TIMOSHENKO, GOODIER, 1982) na análise do poço inclinado. PAPANASTASIOU, DURBAN (1997) propuseram um modelo elasto-plástico não-associativo, que admite grandes deformações em um meio infinito, visando o estudo da expansão e contração em uma cavidade cilíndrica, admitindo o endurecimento e utilizando os modelos de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. Nesse modelo as tensões são variáveis independentes e é fornecida a história das deformações.

Os modelos analíticos adotam hipóteses bem simplificadas, permitindo encontrar uma solução para o problema do poço. Neles a região plastificada deve ser conhecida *a priori* e as regiões elástica e plástica devem possuir equações diferentes para determinação do estado de tensão.

1.3.2. Métodos Numéricos:

Os métodos numéricos apresentam flexibilidade em relação aos analíticos pois pode-se usar equações constitutivas não-lineares e as condições de carregamento e de contorno podem ser quaisquer, também permitindo simular meios anisotrópicos.

A capacidade do método dos elementos finitos de considerar a deformabilidade da matriz rochosa e de reproduzir as heterogeneidades do meio o torna interessante para as análises de poços.

POLILLO (1987) apresentou um método visando avaliar a estabilidade e o fraturamento hidráulico em poços horizontais e verticais. Empregou o modelo de Mohr-Coulomb e na geração do potencial de fluxo utilizou a equação de Laplace. O método considera os efeitos de fluidos penetrante e não-penetrante. LEWIS, SCHREFLER (1998) desenvolveram um método para análise do adensamento em meios porosos, utilizando a teoria de Biot e considerando o meio poroso com um comportamento elasto-plástico, sujeito aos efeitos dos fluxos de fluido e calor. O modelo possui acoplamento entre os efeitos termo-hidro-mecânicos e utilizou as equações constitutivas de Mohr-Coulomb e Cam-Clay.

Utilizando a teoria de Biot, VAZIRI, BYRNE (1990) avaliaram a ruptura da formação e a produção de areia em arenitos inconsolidados, utilizando uma solução combinada de fluxo e deformação, onde o fluido era considerado compressível e o comportamento não-linear da rocha também foi contemplado. Foi concluída a dependência da instabilidade da rocha com um valor crítico do gradiente de pressão na parede do poço. CUI et al. (1996) utilizando o método dos elementos finitos apresentou um modelo para análise poro-elástica não-linear acoplado, em meio anisotrópico onde foram avaliadas duas situações; o problema de Mandel e o poço com inclinação, usando como ponto de partida a associação de constantes de engenharia mensuráveis aos coeficientes da lei de Hooke. Foi deduzido que a anisotropia da permeabilidade gera grande variação nas poro-pressões, principalmente para altas inclinações, introduzindo influência nas tensões efetivas.

CHARLEZ (1994), visando o comportamento das rochas moles, utiliza o modelo Cam-Clay modificado (BURLAND, ROSCOE, 1968) e o modelo de LADE (1977). Verificou-se que o Cam-Clay simula bem a compactação de materiais com baixa coesão, já o modelo de Lade representa bem a dilatância de materiais coesivos. SÁ, EBECKEN (1995) e SÁ (1996) desenvolveram um método de solução acoplado para o sistema de equações que governa o fluxo monofásico de um fluido, em meios porosos deformáveis de comportamento elasto-plástico perfeito, visando verificar a existência e a extensão de zonas instáveis no contorno de poços verticais durante a perfuração e a produção, onde a base para tratamento plástico foi o método de Mohr-Coulomb.

SCHWER, MURRAY (1994) desenvolveram uma modelagem de tratamento elasto-plástica baseada no modelo constitutivo de SANDLER e RUBIN (1979), que utiliza o modelo de ruptura elasto-plástico de Mohr-Coulomb limitado por uma superfície, conhecida como *cap*, e na variação sugerida por PELESSONE (1979), onde o *cap* é definido por uma função que permite uma interseção suave entre a superfície de ruptura e o *cap*.

Na COPPE (1995) foi desenvolvido um simulador trifásico para o tratamento do problema de poços horizontais. Nele são consideradas duas fases fluidas e um esqueleto sólido deformável, conforme proposto por LI et al. (1990) e LI (1991). No modelo a ruptura por cisalhamento é tratada pela lei elasto-plástica de Mohr-Coulomb. STAVROPOULOU et al. (1998) produziram um modelo onde a areia produzida é considerada um fenômeno de erosão, e associou os danos na

rocha à erosão, sendo a rocha considerada um material poroso e permeável. O modelo considera um contínuo trifásico composto pelo esqueleto sólido deformável, pelo fluido e pelas partículas sólidas móveis. A elasticidade e a coesão são dependentes da porosidade, resultando que o material se torna mais fraco se a porosidade aumenta. Na modelagem foram utilizados os métodos dos elementos finitos e das diferenças finitas para discretizar as equações do fluxo, as equações da erosão e as equações de equilíbrio de tensões. O modelo de Mohr-Coulomb modificado foi utilizado para avaliar também os efeitos da porosidade na coesão. Foi observado nesse modelo que uma grande erosão ocorre na região próxima do poço, com rápido decaimento na vizinhança do mesmo. A região próxima ao poço apresenta aumento de permeabilidade e redução da concentração de tensões devido a variação da porosidade. Verifica-se também a contração da superfície de escoamento, iniciando assim o rompimento da rocha e conseqüentemente a produção de areia.

COELHO (2001) implementou um simulador elasto-plástico, onde o maciço é considerado um meio contínuo e o material se deforma segundo a teoria clássica da plasticidade com fluxo associativo. No modelo o material é isotrópico e também foram utilizados os modelos de ruptura de Drucker-Prager e de Mohr-Coulomb, ambos fechados por uma superfície elíptica visando considerar o poro-colapso.

1.4. Pressupostos e Limitações:

As hipóteses para modelagem do problema do poço adotadas nesse trabalho são praticamente as mesmas do trabalho de COELHO (2001):

- Utiliza-se elementos finitos triangulares bidimensionais lineares na discretização do modelo do poço, considerado como um problema de estado plano de deformações.
- O maciço rochoso é tratado como um meio contínuo, desprezando-se os efeitos das descontinuidades que possam estar presentes.
- O comportamento do material obedece às leis da teoria clássica da plasticidade com fluxo associativo.
- O material é isotrópico e permanece isotrópico durante a deformação plástica.

- Admite-se que a taxa de deformação é lenta o suficiente para que os efeitos de inércia sejam desprezados.
- Um modelo de ruptura por cisalhamento, associado a uma curva suave de fechamento que representa o limite admissível para a tensão de poro-colapso (modelo de fechamento de envoltória ou *cap model*).
- A formulação utilizada é a de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.
- Assume-se válida a hipótese de aditividade das deformações plásticas e elásticas.
- Os efeitos térmicos não são considerados.
- O efeito de fluxo de fluidos e tensões é tratado de forma desacoplada, sendo a história de pressões de poro um dado de entrada do programa.
- O simulador implementado utiliza o processo de solução incremental-iterativo empregando o algoritmo de Newton-Raphson Modificado.

1.5. Ambiente de Desenvolvimento:

A implementação da técnica para tratamento do colapso de poros no problema de instabilidade de poços foi realizada em um código já existente em linguagem FORTRAN, desenvolvido pela COPPE (1995). O código foi escrito para tratar problemas de instabilidade de poços horizontais, através de um escoamento bifásico imiscível em meio poroso deformável. As análises foram realizadas num PC.

1.6. Descrição dos Capítulos:

Seguindo-se a esta Introdução, o Capítulo 2 apresenta o modelo utilizado para representar o problema do poço e sua formulação pelo Método dos Elementos Finitos.

O Capítulo 3 apresenta uma revisão dos modelos de ruptura mais utilizados para representar o comportamento elasto-plástico de materiais geológicos, com ênfase nos modelos de poro-colapso.

O Capítulo 4 apresenta sucintamente a formulação matemática das superfícies de ruptura isotrópicas. Finalmente, introduz o modelo, apresentando os parâmetros envolvidos.

No Capítulo 5 descreve-se a implementação numérica do modelo e relata o tratamento dos dados obtidos no trabalho realizado por SOARES, 2000.

O Capítulo 6 apresenta simulações numéricas do comportamento de poços de petróleo efetuadas a partir destes dados.

O Capítulo 7 apresenta as conclusões, a análise de desempenho do modelo e sugestões para futuras pesquisas.

Capítulo 2

ESTADO DE TENSÕES EM POÇOS

2.1. Introdução:

As tensões do maciço antes da perfuração do poço estão em equilíbrio, conforme a figura 2.1.a. Porém quando é realizada a perfuração o estado de tensões é perturbado desequilibrando o mesmo, a alteração do estado de tensões iniciais é simulado com a introdução de pressões na parede do poço (figura 2.1.b), o resultado final é apresentado na figura 2.1.c. Tentando manter ou restaurar o equilíbrio do estado de tensões é inserido um fluido de perfuração no poço, procurando garantir a estabilidade da estrutura no contorno do poço (figura 2.2). Nesse capítulo será apresentado o tratamento dessa alteração no estado de tensões iniciais e também serão apresentados o tratamento das alterações que o fluxo dos hidrocarbonetos gera durante a produção e o modelo utilizado na simulação numérica.

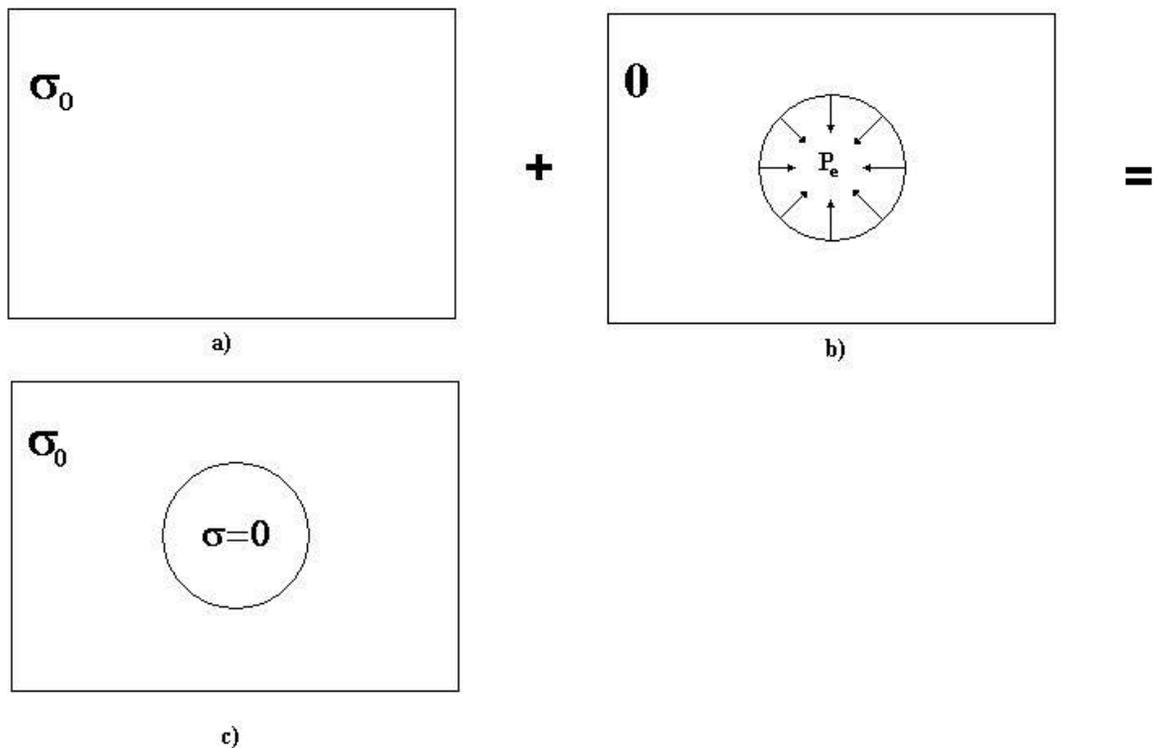


Figura 2.1 – Simulação do efeito da perfuração

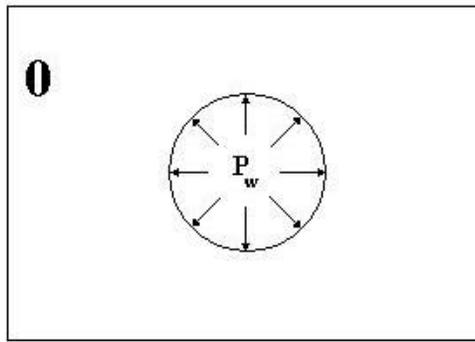


Figura 2.2 – Efeito do fluido de perfuração

A metodologia utilizada nesse trabalho consiste na aplicação do método dos elementos finitos para simulação do estado de tensão no poço. As premissas aplicadas nesse trabalho são de que o poço é considerado circular, envolvido por um maciço representado por uma malha circular de raio muito maior que o raio do poço, simulando o comportamento da formação no contorno do poço. A condição de consistência é tratada pelo estado plano de deformações.

Devido a complexidade dos fatores que influenciam o estado de tensões do reservatório e a indisponibilidade de informações representativas do meio, serão adotadas uma série de hipóteses simplificadoras. O meio poroso é homogêneo e isotrópico saturado, com permeabilidade constante, onde os princípios das tensões efetivas são válidos (TERZAGHI, 1943). O fluxo é monofásico e com escoamento laminar segundo a lei de Darcy em condições isotérmicas. É adotada também a teoria de pequenas deformações e as forças de inércia são desprezíveis.

2.2. Análise das Tensões:

Como já foi dito a perfuração do poço introduz modificações no estado de tensões iniciais da formação, apresentando grande risco de instabilidade nas paredes do poço. Visando a integridade do poço introduz-se a lama, um fluido não-penetrante que gera pressão na parede do poço, tentando manter sua estabilidade.

Já a etapa de produção insere um novo fator que é o fluxo dos hidrocarbonetos, que é um fluido percolante. Nessa etapa a pressão na lama é aliviada permitindo que ocorra o fluxo dos hidrocarbonetos para o interior do poço.

Três campos de tensões devem ser considerados para simular o estado de tensões no entorno do poço (POLILLO, 1986): modificações do estado de tensões iniciais introduzida pela perfuração do poço, efeito da pressão de lama na parede do poço e o efeito do fluxo dos hidrocarbonetos.

A seguir serão apresentados os tratamentos que consideram esses efeitos na simulação numérica.

2.2.1. Estado de Tensões Inicial:

As tensões atuantes no maciço são decompostas em duas componentes horizontais e uma vertical.

A tensão vertical é devida ao peso das camadas superiores, sendo dada pela equação:

$$s_v = g \int_0^z r_z(z) dz \quad (2.1)$$

onde:

s_v : tensão vertical

r_z : perfil de densidades das camadas acima do ponto considerado

g : aceleração da gravidade

Z : profundidade do ponto em consideração.

A relação:

$$s_v = gr_o Z \quad (2.2)$$

define o coeficiente de sobrecarga (*overburden*) gr_o .

A relação entre a tensão horizontal e a tensão vertical é dada pelo coeficiente:

$$K = \left(\frac{s_h}{s_v} \right) \quad (2.3)$$

Essa relação pode ser definida pela teoria da elasticidade para regiões de sedimentação recente:

$$K = \frac{n}{(1-n)} \quad (2.4)$$

A expressão é oriunda do carregamento unidimensional de um material, em comportamento elástico, sobre uma superfície plana contínua e sem sofrer deformação lateral. Segundo GOODMAN (1989) existem diversas técnicas na literatura para determinação das tensões iniciais no maciço.

Em um meio poroso saturado, o fluido que ocupa os poros exerce uma pressão hidrostática P_p sobre o esqueleto sólido. Os estados de tensão atuantes em um elemento podem ser definidos como tensão total e tensão efetiva.

A tensão total é definida como a relação entre a força e a área em que atua. A tensão efetiva é aquela que atua na matriz sólida, ou seja, é a tensão total menos a pressão de fluido.

A relação entre a tensão total e a tensão efetiva é dada por:

$$\mathbf{s}_{ij} = \sigma_{ij}^t - r \mathbf{d}_{ij} P_p \quad (2.5)$$

onde:

\mathbf{s}_{ij} : tensão efetiva

σ_{ij}^t : tensão total

$$r = 1 - \frac{C_r}{C_t} \quad (2.6)$$

r : constante de Biot

C_r : compressibilidade da rocha

C_t : compressibilidade do grão.

\mathbf{d}_{ij} : delta de Kronecker.

2.2.2. Efeito do Furo:

Com a perfuração o estado de tensões iniciais é modificado, criando um rearranjo nas tensões na parede do poço. Na tentativa de manter a integridade da parede do poço é introduzido um fluido não-penetrante (lama), que não flui pela parede do poço, exercendo uma pressão na parede do poço visando minimizar a perturbação no estado de tensões iniciais. O efeito do furo é simulado no modelo numérico com a introdução de pressões na parede do poço, na direção do maciço para o poço, equivalente as tensões iniciais da formação visando o equilíbrio com a

lama. Assim o efeito do furo e o efeito da lama são simulados pela soma das pressões de cada um na parede do poço.

A pressão líquida atuante na cavidade é dada por:

$$\Delta p_w = p_w - p_e \quad (2.7)$$

onde:

p_w : pressão do fluido na cavidade

p_e : pressão estática do reservatório.

2.2.3. Efeito do Fluxo de Fluidos:

Durante a produção os hidrocarbonetos devem ser tratados como um fluido penetrante, pois o mesmo percola da formação para o interior do poço.

Seja p_w a pressão de fluido na parede do poço. A diferença de pressão entre o poço e a formação induz um campo de poro-pressões $p_p(r)$ que é função da posição, que tende para p_e a uma distância grande do poço.

O efeito desta pressão é introduzido pelo acréscimo de deformação volumétrica $(d\epsilon_{kk})_p$, causada pela compressão uniforme das partículas devido à variação da pressão de poro:

$$(d\epsilon_{kk})_p = \delta_{ij} \frac{dp_p}{k_s} \quad (2.8)$$

onde:

dp_p : acréscimo de poro-pressões

$\frac{1}{k_s}$: compressibilidade da rocha, considerada constante e definida por:

$$k_s = \frac{(1 + \nu)(1 - r)}{E} \quad (2.9)$$

Como a etapa de produção se origina com a redução da pressão na lama, os efeitos da pressão do fluido não penetrante, das alterações introduzidas pelo poço e do fluxo dos hidrocarbonetos se superpõem.

2.3. Equações Governantes:

A deformação do esqueleto sólido, que é provocada pela compressão dos grãos devido a pressão do fluido, é governada pelo Princípio das Tensões Efetivas (TERZAGHI, 1943).

Com a equação constitutiva que relaciona as tensões e as deformações independente da pressão de poro e desprezando-se outros efeitos pode-se escrever a relação de tensão incremental x deformação incremental (LEWIS, SCHREFLER, 1998):

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(d\epsilon_{ij} - (d\epsilon_{kk})_p \right) \quad (2.10)$$

onde:

$d\epsilon_{ij}$: deformação total do esqueleto sólido

$(d\epsilon_{kk})_p$: deformação devido à variação da pressão de poro.

Substituindo (2.8) em (2.10):

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(d\epsilon_{kl} - \delta_{kl} \frac{dp_p}{k_s} \right) \quad (2.11)$$

Em um meio contínuo deformável, a condição de equilíbrio e a condição de compatibilidade dos deslocamentos são satisfeitas pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais em todo o domínio, cuja expressão em termos matriciais é dada por:

$$\int_{\Omega} d\mathbf{\hat{a}}^T d\mathbf{o}' d\Omega - \int_{\Omega} d\mathbf{u}^T d\mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} d\mathbf{u}^T d\mathbf{f} d\Gamma = 0 \quad (2.12)$$

onde:

$d\mathbf{e}$: deformações virtuais

$d\mathbf{u}$: deslocamentos virtuais

$d\mathbf{b}$: incremento de forças volumétricas

$d\mathbf{f}$: incremento de forças atuantes no contorno.

Aplicando-se o Princípio das Tensões Efetivas (2.5) à expressão acima, obtém-se:

$$\int_{\Omega} d\mathbf{\hat{a}}^T d\mathbf{o} d\Omega + \int_{\Omega} d\mathbf{\hat{a}}^T \mathbf{r} \mathbf{I} dp_p d\Omega - d\hat{\mathbf{t}} = 0 \quad (2.13)$$

onde:

$$d\hat{\mathbf{t}} = \int_{\Omega} d\mathbf{u}^T d\mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} d\mathbf{u}^T d\mathbf{f} d\Gamma \quad (2.14)$$

são as forças volumétricas e as forças externas atuantes no contorno e \mathbf{I} é o tensor identidade.

No caso do poço, as forças externas são representadas pela superposição de pressões na cavidade: a pressão de fluidos mais a pressão do efeito do furo (equação (2.7)). O estado inicial de tensões não gera esforços, pois se encontra em equilíbrio. Temos então que as forças volumétricas são nulas. Reescrevendo a equação (2.14):

$$\hat{d}\mathbf{t} = \int_{\Gamma} d\mathbf{u}^T \mathbf{I} d(\Delta p_w) d\Gamma + \int_{\Gamma} \ddot{\mathbf{a}} \mathbf{u}^T d\mathbf{o}^{\circ} d\Gamma \quad (2.15)$$

Finalmente, introduzindo a relação constitutiva (2.11) na expressão (2.13):

$$\int_{\Omega} d\mathbf{a}^T \mathbf{C} d\mathbf{a} d\Omega + \int_{\Omega} d\mathbf{a}^T \mathbf{r} \mathbf{I} dp_p d\Omega - \frac{1}{k_s} \int_{\Omega} d\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{I} dp_p d\Omega - \hat{d}\mathbf{t} = 0 \quad (2.16)$$

2.4. Aplicação do Método dos Elementos Finitos:

O método dos elementos finitos é uma discretização do contínuo através de elementos de formas diversas. O simulador trabalha com o estado plano de deformações, propicio ao uso de elementos triangulares lineares planos, que permitem descrever superfícies complexas e melhora o resultado através de um refinamento da malha.

O campo dos deslocamentos é dado por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} \quad (2.17)$$

onde:

$\bar{\mathbf{u}}$: deslocamentos nodais,

\mathbf{N} : função de interpolação.

O campo de deformações é obtido derivando-se a expressão (2.17) em relação às coordenadas:

$$\mathring{\mathbf{a}} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

$$\mathring{\mathbf{a}} = \mathbf{L}\mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}$$

$$\mathring{\mathbf{a}} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \quad (2.18)$$

onde:

\mathbf{L} : operador diferencial discreto,

\mathbf{B} : matriz deslocamento-deformação

O campo de pressões de poro é definido pela interpolação dos valores nodais:

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{p}}_{pi} \quad (2.19)$$

$\bar{\mathbf{p}}_{pi}$: pressão nos nós,

$\bar{\mathbf{N}}$: funções de forma.

Substituindo-se as expressões (2.17), (2.18) e (2.19) na equação (2.16), chega-se ao Princípio dos Trabalhos Virtuais discretizado:

$$\mathbf{du} \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\bar{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{N}} d\bar{\mathbf{p}}_{pi} d\Omega - \frac{1}{k_s} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{N}} d\bar{\mathbf{p}}_{pi} d\Omega \right\} - \mathbf{du} \left\{ \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{I} d(\Delta p_w) d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{N} \hat{\mathbf{o}} d\Gamma \right\} = 0$$

(2.20)

Sendo \mathbf{du} qualquer, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K}d\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{L}d\bar{\mathbf{p}}_{pi} - d\hat{\mathbf{t}} = 0$$

(2.21)

onde:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.22)$$

$$\mathbf{L} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{r} \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{N}} d\Omega - \frac{1}{k_s} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{N}} d\Omega \quad (2.23)$$

$$d\hat{\mathbf{t}} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{I} d(\Delta p_w) d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{o}} d\Gamma \quad (2.24)$$

Seja o vetor de forças externas dado por:

$$\mathbf{F} = d\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{L}d\bar{\mathbf{p}}_{pi} \quad (2.25)$$

A equação de equilíbrio do sistema é dada por:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = 0 \quad (2.26)$$

onde:

${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$: forças internas resistentes

${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}$: cargas externas aplicadas no esqueleto sólido.

Para a solução das equações não-lineares de equilíbrio, utiliza-se o Método de Newton-Raphson Modificado, segundo:

$${}^o K \Delta \mathbf{u}^i = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (2.27)$$

onde: i denota o número da iteração,

${}^o K$: matriz de rigidez inicial elástica

As condições iniciais são dadas por:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(0)} = {}^t \mathbf{F} \quad (2.28)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(0)} = {}^t \mathbf{u} \quad (2.29)$$

As forças internas resistentes nos nós são determinadas a partir da soma da contribuição do estado de tensões elasto-plástico no interior de cada elemento conforme:

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{nel} \int_{\tilde{\Omega}_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^e d\Omega_e \quad (2.30)$$

O critério de convergência é dado pela norma dos deslocamentos:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}^k\|}{\|\mathbf{u}_m^{k+1}\|} \leq tol_u \quad (2.31)$$

e pela norma dos resíduos:

$$\frac{\|\Psi^{k+1}\|}{\|\mathbf{F}_m\|} \leq tol_r \quad (2.32)$$

$$\mathbf{Y}^{k+1} = \mathbf{R}^{k+1} - \mathbf{F}^{k+1} \quad (2.33)$$

onde:

tol_u : tolerância da norma dos deslocamentos

tol_r : tolerância da norma dos resíduos

m : refere-se a incremento

u_m : deslocamento no incremento

O estado de tensões \mathbf{s}^i é obtido pelo comportamento elasto-plástico do material, de uma relação constitutiva que considera a ocorrência de deformações plásticas volumétricas em termos de tensões efetivas.

O estado de tensões iniciais é adicionado ao estado de tensões gerado pelas diversas interferências no poço (perfuração, pressão de fluido e extração de

hidrocarbonetos), visando verificar o estado de tensões limite descrito pelos modelos de ruptura.

O campo de poro-pressões é tratado como um dado de entrada.

Capítulo 3

MODELOS DE RUPTURA

3.1. *Introdução:*

A previsão do comportamento das rochas porosas é uma tarefa complexa e requer simuladores numéricos capazes de reproduzir condições como o comportamento não-linear dos materiais, a geometria das suas camadas, o estado de tensões, entre outros fatores. Para reproduzir este fenômeno é necessária uma relação constitutiva tridimensional e um modelo acoplado entre fluxo e carregamento que altere o escoamento no meio poroso com a deformação do material.

Uma revisão dos principais modelos de ruptura, para rochas, que representam o comportamento de materiais geomecânicos será apresentada nesse capítulo. Define-se como modelo de ruptura a superfície que limita os estados de tensões admissíveis dos estados de tensões não admissíveis (LADE, 1978). Os materiais fracos, sujeitos a instabilidade em poços são os mais enfocados.

Diversos modelos que procuram simular o comportamento dos diversos materiais serão apresentados. Inicialmente, será descrito o comportamento de rochas fracas, logo após serão vistos os modelos elasto-plásticos disponíveis para representar o comportamento dos materiais e por fim será definido um modelo para a determinação do comportamento de rochas dúcteis, sujeitas ao poro-colapso.

3.2. *Rochas Fracas :*

Rochas fracas apresentam ruptura frágil e ruptura dúctil, (CHARLEZ, 1994). As de ruptura frágil possuem forte coesão e a cimentação participa da resistência ao carregamento. Seu comportamento apresenta uma longa fase elástica, seguida de um comportamento não-linear e por fim a ruptura. O comportamento não-linear apresenta microfissuras no eixo paralelo ao eixo de maior tensão que induzem a maior fissuração e conseqüente redução do módulo de elasticidade. As falhas ocorrem devido a resistência da cimentação ser maior que a resistência dos grãos,

destruindo a estrutura do material. Estas falhas geram o colapso do material. Já a resposta hidrostática apresenta comportamento elástico a altas pressões confinantes, com contração devido a coesão garantir a integridade do meio poroso.

Os materiais dúcteis apresentam baixa coesão e alta porosidade tendo capacidade de suportar grandes deformações plásticas sem romper. Sua porosidade permite que ele sofra contração volumétrica irreversível, associada a redução da porosidade (poro-colapso). O poro-colapso é a redução permanente da porosidade sofrida pelo meio devido às tensões hidrostáticas, resultando na redução da porosidade e da permeabilidade da formação.

A figura 3.1 ilustra uma curva tensão efetiva x variação da porosidade típica para carbonatos altamente porosos. Onde se vê que o aumento da tensão efetiva reduz a porosidade. Também é notado que para valores baixos o comportamento é elástico, com uma redução reversível. Já para níveis mais altos a redução é elasto-plástica ou seja existe uma pequena parcela reversível e uma parcela preponderante que não é reversível.

A figura 3.2 apresenta uma curva tensão x deformação típica, onde são observadas três regiões, a linear elástica, a elasto-plástica onde ocorre o poro-colapso e uma região compactada que sofre endurecimento.

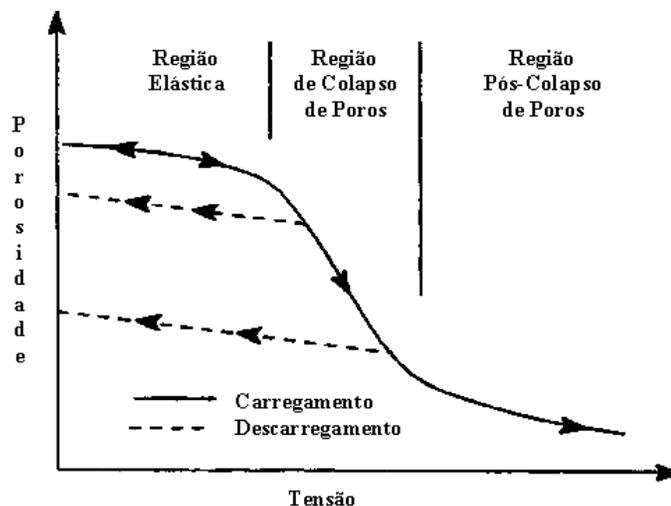


FIGURA 3.1 - Curva tensão efetiva x porosidade (ABDULRAHEEM, 1994)

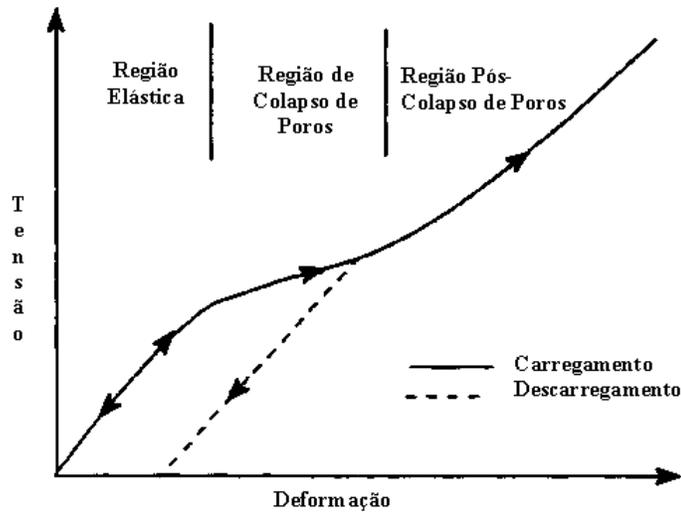


FIGURA 3.2 - Curva tensão efetiva x deformação (ABDULRAHEEM, 1994)

ADDIS (1989), definiu três regiões no espaço $I_1 \times \sqrt{J_2}$, todas baseadas em informações experimentais, onde I_1 é o primeiro invariante de tensões efetivas e J_2 é o segundo invariante de tensões desviatórias. De acordo com Addis é observado uma região de pré-colapso onde o comportamento é elástico, tem-se uma segunda região de poro-colapso onde o comportamento é basicamente plástico e por último uma região pós-colapso onde só ocorre o endurecimento. Essas regiões podem ser observadas na figura 3.3

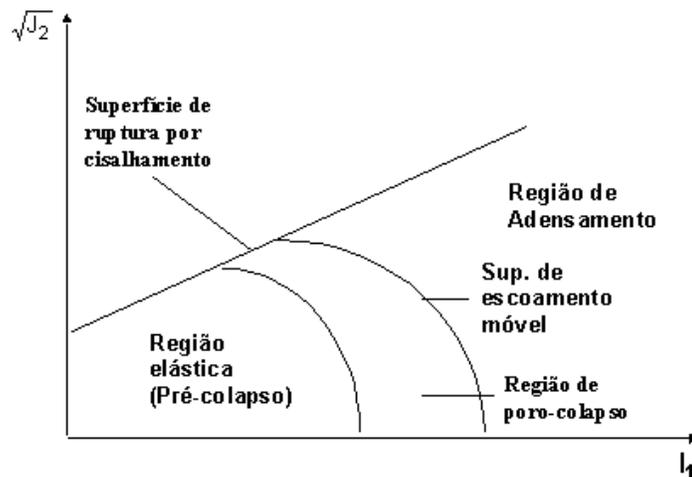


FIGURA 3.3
Regiões de possíveis deformações em rochas porosas

3.3. Modelos Constitutivos:

Os modelos constitutivos elasto-plásticos mais utilizados em estruturas geológicas são o de Drucker-Prager (DRUCKER, 1951) e o de Mohr-Coulomb (SHIELD, 1955) que são descritos em termos de tensões efetivas. Eles apresentam uma linha de ruptura no espaço $I_1, \sqrt{J_2}$ (figura 3.4), sendo que o critério de Mohr-Coulomb possui uma redução na resistência no quadrante de tração triaxial no espaço de tensões principais (figura 3.5). Estes modelos possuem um parâmetro de resistência associado à coesão e outro ao atrito intergranular. Eles apresentam problema na deficiência em avaliar a resposta volumétrica dos materiais.

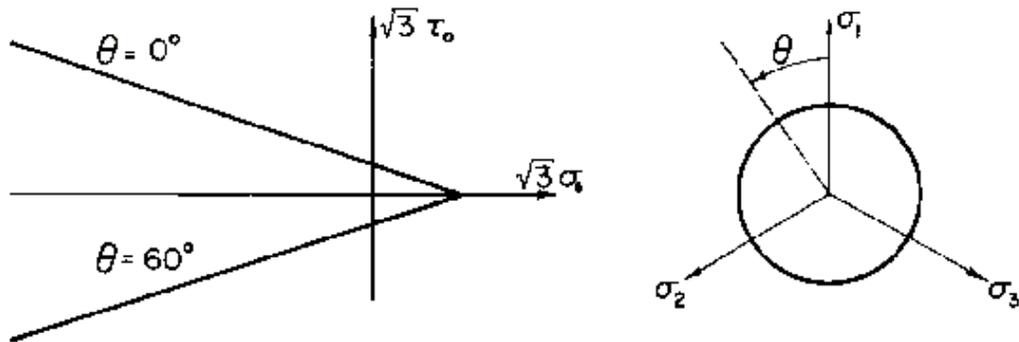


FIGURA 3.4 - Modelo de Ruptura de Drucker-Prager

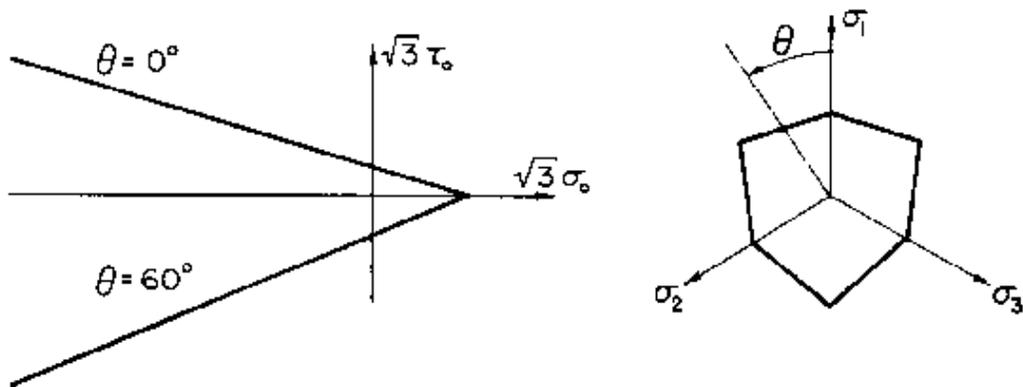
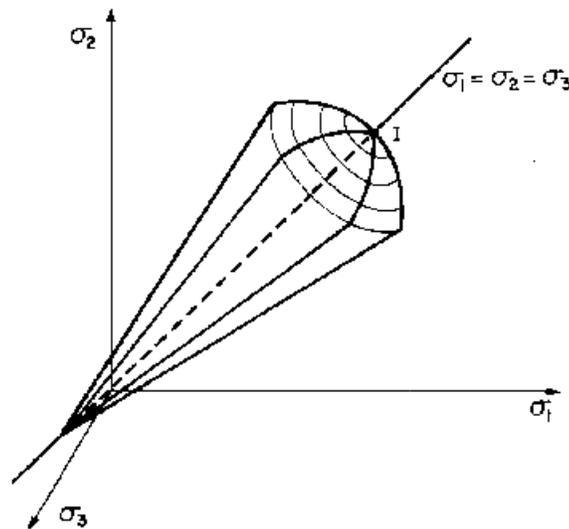


FIGURA 3.5 - Modelo de Ruptura de Mohr-Coulomb

Com o objetivo de representar o comportamento volumétrico é utilizada a associação de uma superfície de ruptura com uma superfície de fechamento, conhecida como *cap model*.

Os *cap models* estão na teoria incremental clássica da plasticidade com trabalho de endurecimento (HILL,1950) para materiais independentes da temperatura e sujeitos a pequenas deformações elásticas e/ou plásticas a cada incremento de carga. Neles a densidade atual do solo é um parâmetro de endurecimento.



**FIGURA 3.6 - Cap Model proposto por Drucker et al.(1957)
Fonte: CHEN, BALADI (1985)**

A primeira utilização de um *cap* esférico foi feita por DRUCKER, GIBSON, HENKEL (1957), nesse trabalho eles associaram o *cap* com endurecimento a uma superfície de Mohr-Coulomb ou de Drucker-Prager (figura 3.6).

Um *cap model* generalizado foi sugerido por DIMAGGIO, SANDLER (1971), que consiste em uma superfície de Drucker-Prager associada a um *cap* elíptico com *strain hardening* (figura 3.7). O *cap* se movimenta de acordo com as deformações plásticas volumétricas, sendo a dilatância controlada. SANDLER, BARON (1976) aplicaram o modelo em rochas, admitindo somente expansão do *cap*, ficando o movimento do *cap* dependente somente da deformação plástica anterior, representando a dilatância das rochas a baixas pressões. SANDLER et al

(1976) acrescentaram a degradação da resistência ao cisalhamento oriundo de cargas cíclicas utilizando uma superfície de ruptura exponencial (figura 3.8).

O modelo Cam-Clay modificado (ROSCOE, BURLAND, 1968) reproduz o adensamento dos materiais. Consiste em uma elipse no espaço p-q que endurece exponencialmente com a deformação volumétrica ε_{kk}^p (figura 3.9), o método possui quatro parâmetros. A elipse é função tanto da tensão efetiva média, quanto da desviatória, integrando a ruptura por cisalhamento e a poro-colapso. Sendo essa sua maior limitação, pois representa bem materiais com baixa coesão, porém insatisfatoriamente materiais moles estruturados (CHARLEZ, 1996).

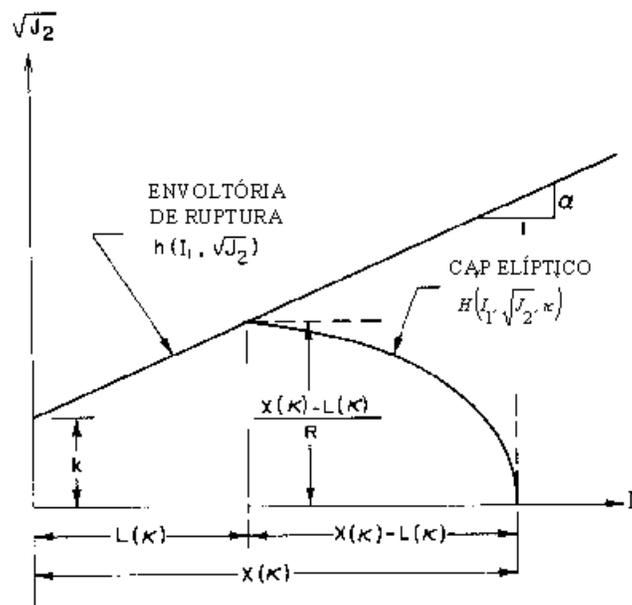


FIGURA 3.7 - Cap Model Generalizado de DiMAGGIO, SANDLER (1971)
Fonte: CHEN, BALADI (1985)

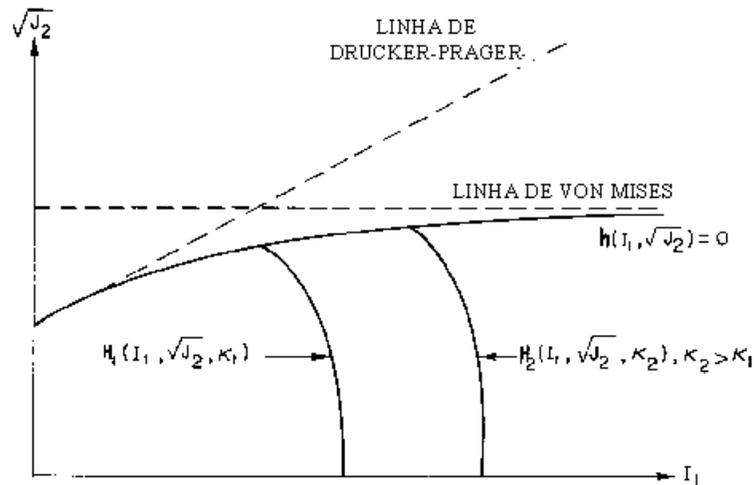


FIGURA 3.8 - Cap Model proposto por SANDLER et al (1976)
Fonte: CHEN, BALADI (1985)

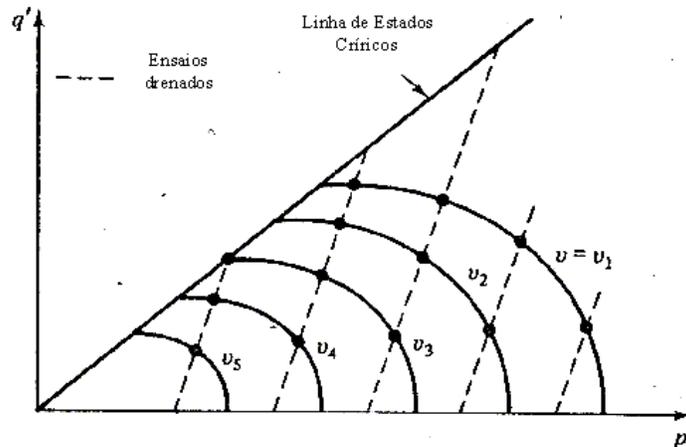


FIGURA 3.9 - Modelo Cam-Clay (ROSCOE, BURLAND, 1968)
ATKINSON, BRANSBY (1978)

Em 1977 LADE mostrou um modelo considerando os mecanismos de colapso hidrostático e de ruptura por cisalhamento independentes (figura 3.10). O poro-colapso é representado por uma superfície função da tensão média. Já a superfície de ruptura por cisalhamento é função do primeiro e do terceiro invariantes de tensões efetivas e é uma elipse que evolui através de uma lei de endurecimento com o carregamento. O endurecimento simula as fases de consolidação e de poro-colapso por ter origem no produto de uma lei potencial por uma lei exponencial. A forma do cone é alterável e o modelo possui oito parâmetros e representa bem materiais moles estruturados.

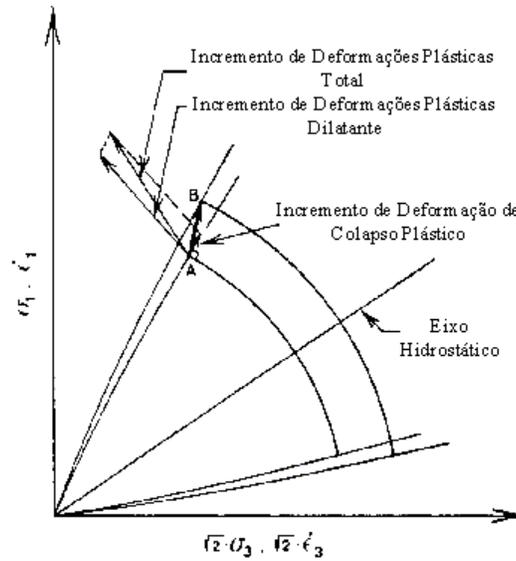


FIGURA 3.10 - Modelo de LADE (1977)

DESAI *et al.* (1986) desenvolveu o modelo *HISS* (*Hierarchical Single Surface*), a partir de um modelo básico, isotrópico e com lei de fluxo associativa, sendo que outras características do material (anisotropia) são consideradas como perturbações no modelo. A superfície é apresentada na figura 3.11. O estado de ruptura é a linha de ruptura última, já a linha de mudança de fase marca o início da dilatância, ela cruza o topo das superfícies de escoamento. Quando a tensão de confinamento aumenta a distância entre a linha de ruptura última e a linha de mudança de fase aumenta, que representa a introdução de uma dilatância para caminhos de cisalhamento e altas pressões confinantes, contrário ao que é constatado experimentalmente.

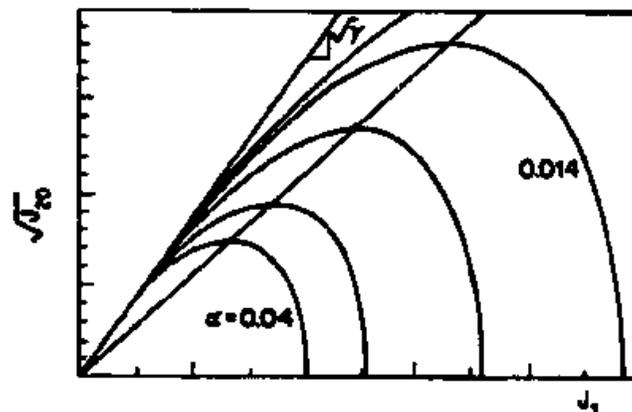


FIGURA 3.11 - Modelo HISS (DESAI et al, 1986)

FARUQUE, CHANG (1986) propuseram um modelo que representa a variação da superfície de ruptura no plano desviatório, função da pressão de confinamento. As constantes são as mesmas da superfície de ruptura por cisalhamento e para o *cap* são oito constantes, quatro para a superfície e quatro para o endurecimento. As superfícies são função dos três invariantes de tensão efetiva. O modelo é mostrado na figura 3.12.

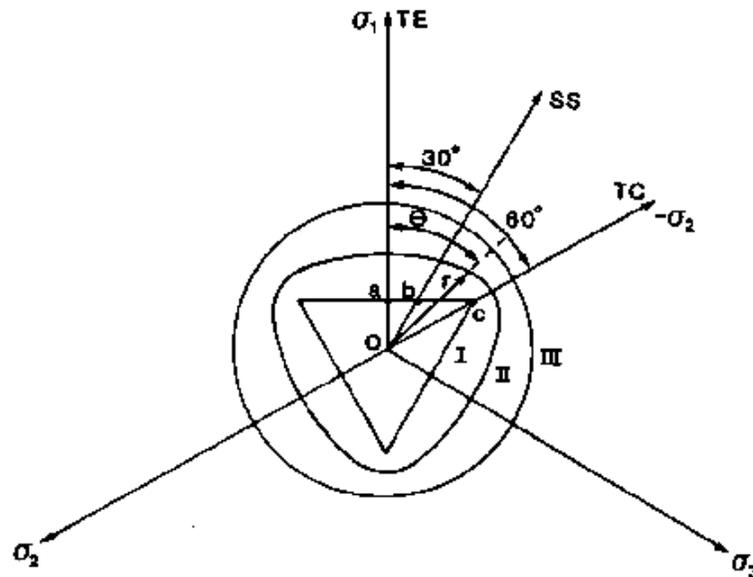


FIGURA 3.12 - Superfícies de Escoamento no Plano Desviatório Como Função da Tensão de Confinamento. FARUQUE, CHANG (1986)

ABDULHAHEEM (1994) sugeriu dois modelos a partir do estudo da resposta volumétrica dos materiais rochosos, ambos os modelos utilizaram conceitos de elasto-plasticidade e endurecimento isotrópico para o comportamento das rochas.

O primeiro define três superfícies, a de ruptura por cisalhamento, a que limita o estado de dilatância e a de poro-colapso (figura 3.13). A dilatância é reduzida até ser eliminada com o aumento da tensão de confinamento. O modelo utiliza 17 constantes, sendo 10 obtidas em ensaios comuns e as outras 7 por técnicas de otimização, que torna o modelo complexo para se utilizar devido à indisponibilidade de dados para alimentá-lo, inclusive Abdulhaheem utilizou uma simplificação do modelo em seu trabalho.

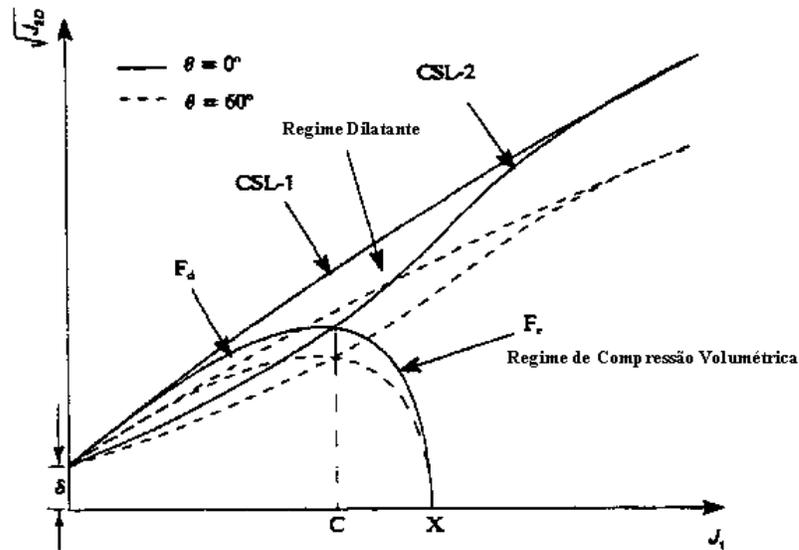


FIGURA 3.13 - Superfície de Ruptura de ABDULRAHEEM (1994)

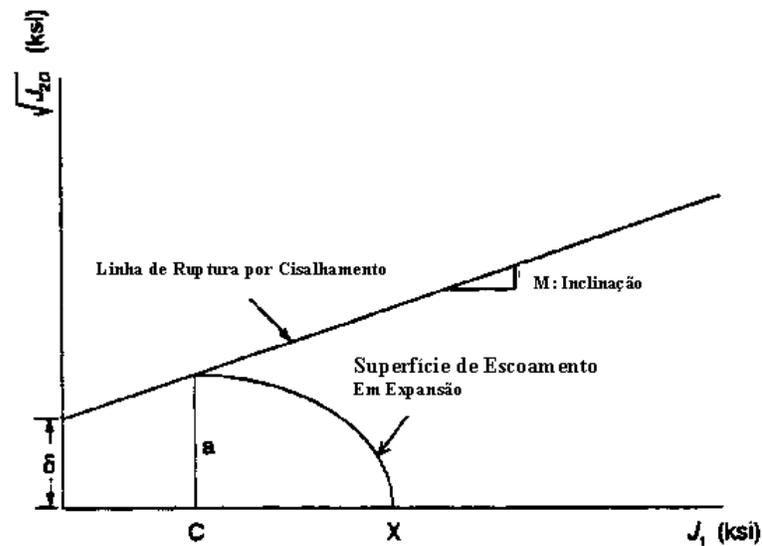


FIGURA 3.14 - Superfície de Poro-Colapso de ABDULRAHEEM (1994)

O segundo (figura 3.14) é para análise elasto-plástica de rochas porosas, nele existem duas superfícies de ruptura, sendo que a primeira é fixa no espaço e representa a ruptura por cisalhamento segundo o cone de Drucker-Prager e a segunda é uma elipse que indica o início do poro-colapso e expande segundo uma lei de endurecimento. Esse modelo possui oito parâmetros.

SCHWER, MURRAY (1994) desenvolveram um modelo para análise elasto-plástica que trabalha com duas superfícies de ruptura associadas por um produto,

gerando uma superfície contínua (figura 3.15) que apresenta a capacidade de avaliar problemas de ruptura por cisalhamento e também o poro-colapso. O modelo consiste na associação do modelo de ruptura de Mohr-Coulomb com um *cap* suave e apresenta grande vantagem computacional.

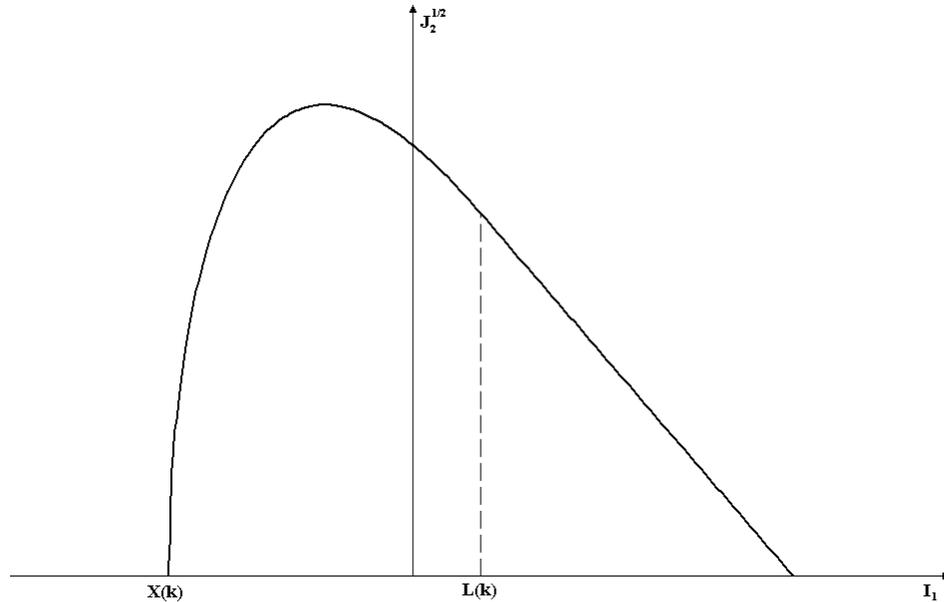


FIGURA 3.15 - Superfície de Ruptura de SCHWER, MURRAY (1994)

COELHO (2001) apresentou uma adaptação o modelo de Abdullaheem. A superfície de cisalhamento é representada pela superfície de Mohr-Coulomb modificada no plano octaédrico, devido ao melhor tratamento dos diversos estados de tensões que ocorrem nas vizinhanças do poço, a lei do fluxo é associativa. A ruptura por poro-colapso tratada por um *cap* elíptico que expande isotropicamente no eixo hidrostático segundo uma lei de endurecimento. Admite-se ainda que o fluxo é associativo.

3.4. Modelo Proposto:

Esse estudo tem o mesmo objetivo do estudo de COELHO (2001) que é a ocorrência de poro-colapso nas rochas de comportamento dúctil, sendo desprezada a dilatância nos modelos. Como é visto na figura 3.3, a região de poro-colapso não é representativa em relação as outras duas regiões, resultando em uma simplificação do modelo desprezando esta região.

O modelo adotado neste trabalho é uma aplicação do modelo de SCHWER, MURRAY (1994) no trabalho de COELHO (2001). A superfície de cisalhamento é uma superfície cônica elasto-plástica perfeita, com a forma superfície de Mohr-Coulomb modificada no plano octaédrico, devido ao melhor tratamento dos diversos estados de tensões que ocorrem no entorno do poço. Admite-se a lei de fluxo associativo. A ruptura por poro-colapso é representada por um cap suave que se expande isotropicamente no eixo hidrostático segundo uma lei de endurecimento. É admitido fluxo associativo. Busca-se ganhar desempenho computacional.

Capítulo 4

FORMULAÇÃO DOS MODELOS DE RUPTURA

4.1. *Introdução:*

Será descrito nesse capítulo a representação do estado de tensões adotada e dos seus invariantes, sendo em seguida apresentada a formulação clássica da teoria da plasticidade, de forma generalizada para tratar superfícies de ruptura isotrópicas, sendo particularizada para o modelo de Mohr-Coulomb e ao final será descrito o modelo de poro-colapso implementado.

4.2. *Superfícies de Ruptura Isotrópicas:*

4.2.1. *Tensões e seus invariantes:*

Seja o vetor de tensões de Cauchy T_i atuante no ponto P , contido em um elemento de área A cuja normal em relação aos eixos coordenados x_i é n_i (figura 4.1):

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (4.1)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões atuante no ponto P .

Seja também a fórmula de Cauchy, que expressa o vetor T_i como uma combinação linear de três vetores de tensões atuantes na direção perpendicular aos três eixos coordenados naquele ponto e que definem completamente o estado de tensões atuantes naquele ponto:

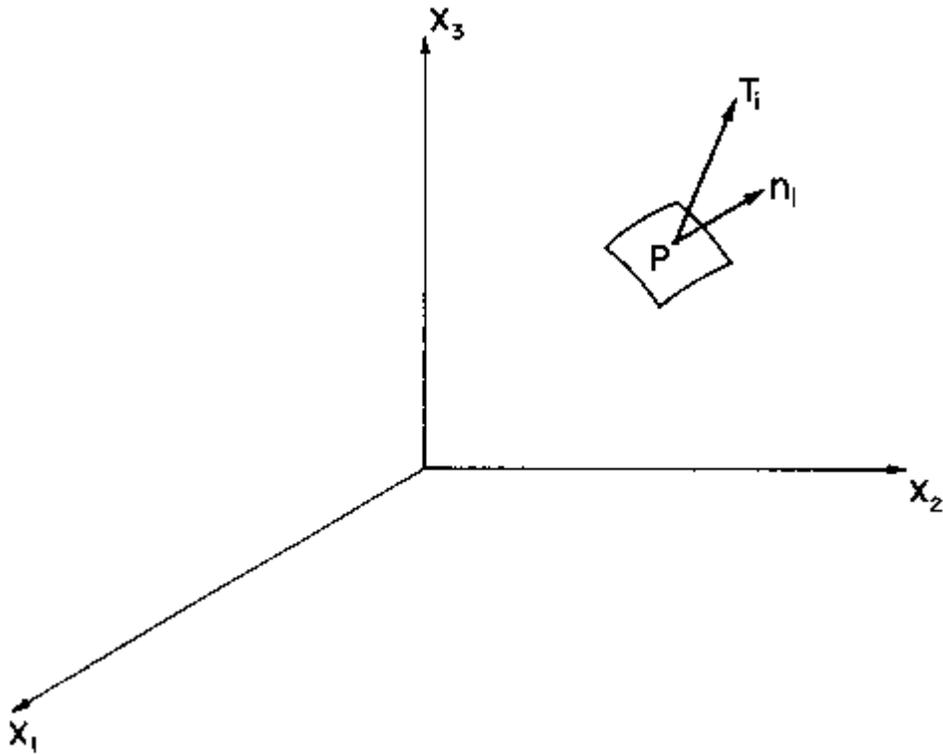


FIGURA 4.1

Vetor de Tensões no Ponto P atuante no elemento de área com normal unitária n_i

$$T_i^{(n)} = T_i^{(1)}n_1 + T_i^{(2)}n_2 + T_i^{(3)}n_3 \quad (4.2)$$

onde $n_i = (n_1, n_2, n_3) = (l, m, n)$ é definido pelos cossenos diretores em relação aos eixos x_i .

Sendo T_i uma grandeza vetorial, pode-se representá-lo por três componentes: uma normal e duas tangenciais. Estes três vetores de tensão irão definir o tensor de tensões atuantes no ponto P:

$$s_{ij} = \begin{Bmatrix} T_i^1 \\ T_i^2 \\ T_i^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Partindo de considerações de equilíbrio de forças atuantes em um volume pequeno do material, pode-se escrever:

$$T_i = s_{ij}n_j \quad (4.4)$$

Admitindo-se o equilíbrio de momentos atuantes no volume elementar, tem-se:

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (4.5)$$

Portanto, o tensor de tensões é simétrico.

O vetor de tensões T_i atuante em um elemento de área n_i pode ainda ser decomposto em uma componente normal s_n e uma componente cisalhante S_i (figura 4.2).

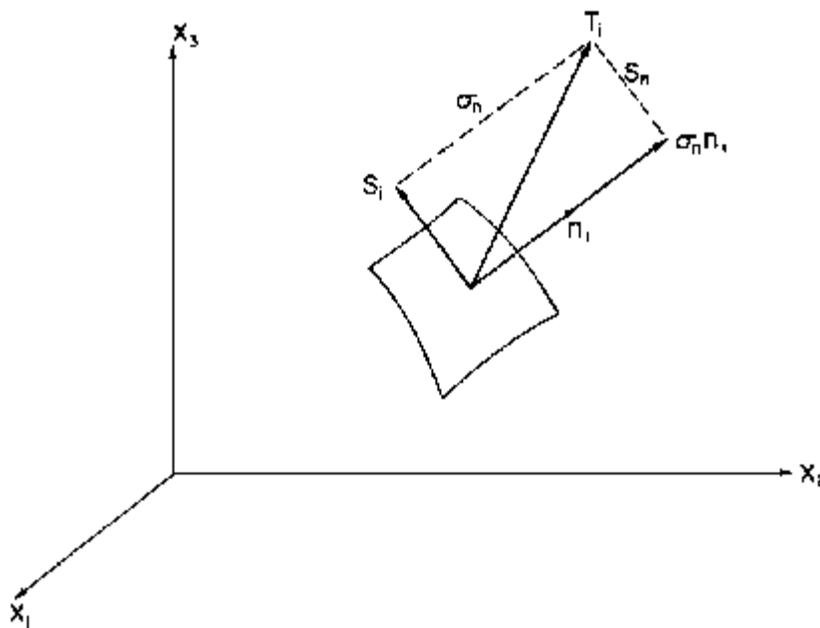


FIGURA 4.2

Vetor de Tensões no Ponto P atuante no elemento de área com normal unitária n_i

A magnitude da tensão normal é dada por:

$$s_n = T_i n_i = S_{ij} n_i n_j \quad (4.6)$$

A magnitude da componente de tensão cisalhante é:

$$S_n^2 = S_i S_i = T_i T_i - s_n^2 \quad (4.7)$$

ou:

$$S_n^2 = \mathbf{s}_{ij} \mathbf{s}_{ik} n_j n_k - (\mathbf{s}_{ij} n_i n_j)^2 \quad (4.8)$$

As equações (4.6) a (4.8), conhecidas como fórmulas de Cauchy, permitem a determinação das componentes normais e cisalhantes atuantes em um plano arbitrário n_i . O vetor $\mathbf{s}_n n_i$ atua na direção da normal n_i e o vetor S_i atua no plano formado pelos dois vetores T_i e n_i :

$$S_i = T_i - \mathbf{s}_n n_i \quad (4.9)$$

As fórmulas de Cauchy mostram que o estado de tensões em P varia com a direção dos co-senos diretores $n_i = (n_1, n_2, n_3)$. Diferenciando-se σ_n em relação a n_i , verifica-se os valores estacionários da tensão normal ocorrem quando $S_n = 0$, ou seja, de (4.9):

$$T_i = \sigma n_i \quad (4.10)$$

Substituindo (4.4) na expressão acima, obtém-se:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \quad (4.11)$$

Rearranjando, chega-se ao conjunto de três equações lineares homogêneas para (n_1, n_2, n_3) :

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (4.12)$$

cuja equação característica é dada por:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (4.13)$$

onde:

$$I_1 = \sigma_{ii} \quad (4.14)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) \quad (4.15)$$

$$I_3 = \frac{1}{6} (2\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - 3I_1\sigma_{ij}\sigma_{ji} + I_1^3) \quad (4.16)$$

Os coeficientes I_1, I_2, I_3 são os invariantes do tensor de tensões σ_{ij} , pois independem do plano em que as tensões atuam.

As raízes da equação (4.13), $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são as tensões principais, cujas direções definem as direções principais em um ponto P , ou seja, as direções para as quais as tensões cisalhantes são nulas. Estes valores podem ser obtidos substituindo-se as tensões principais na equação (4.12).

Por sua vez, um tensor de tensões pode ser decomposto em uma componente hidrostática e outra desviatória, que representam o estado de tensão hidrostático e de cisalhamento puro:

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + s_{ij} \quad (4.17)$$

Os tensores σ_{ij} e s_{ij} possuem os mesmos eixos principais.

A componente hidrostática $p\delta_{ij}$ relaciona-se com o primeiro invariante de tensões conforme:

$$p = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (4.18)$$

Os valores principais do tensor desviatório é obtido da mesma maneira utilizada para obter os valores das tensões principais do tensor de tensões. A equação característica é dada por:

$$s^3 - J_1s^2 + J_2s - J_3 = 0 \quad (4.19)$$

onde:

$$J_1 = s_{ii} = 0 \quad (4.20)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ji} \quad (4.21)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{kl} \quad (4.22)$$

conhecidos respectivamente como segundo e terceiro invariante de tensões desviatórias. O segundo invariante de tensões pode ser expresso também pela tensão equivalente:

$$\sigma_e^2 = 3J_2 \quad (4.23)$$

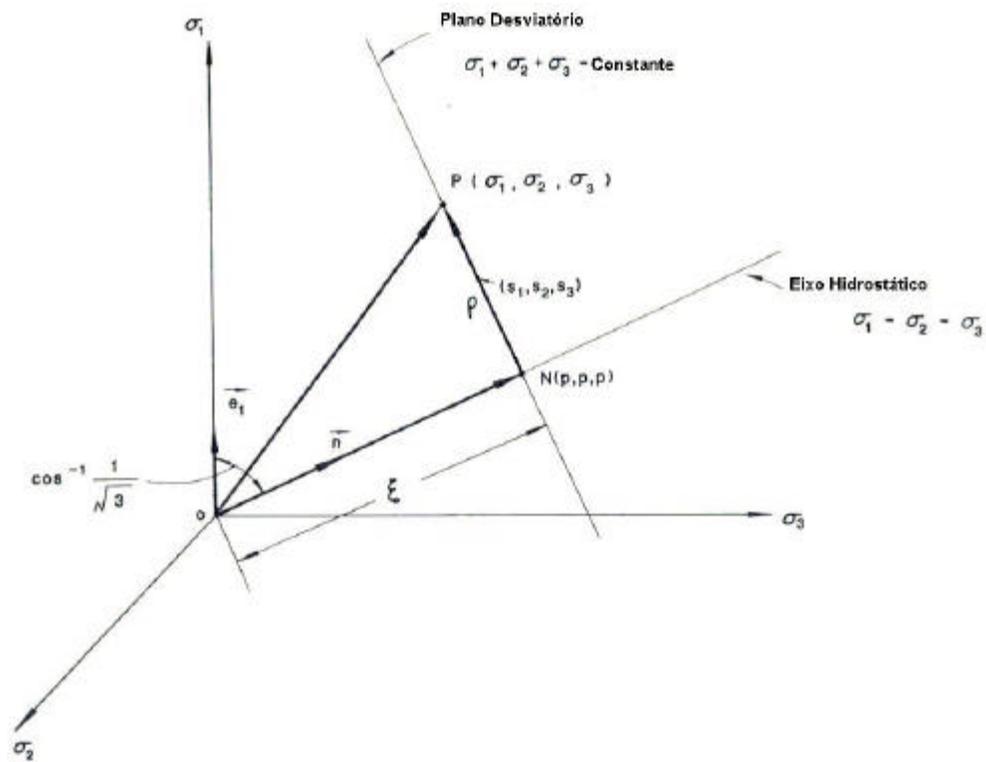


FIGURA 4.3
Espaço de Tensões de Haigh-Westergaard

Seja o espaço de tensões de Haigh-Westergaard (figura 4.3) o espaço definido pelos eixos coordenados de tensões principais. Define-se o eixo hidrostático como o eixo segundo o qual todos os estados de tensão $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ estão representados no espaço tridimensional. Para qualquer ponto desta linha, a tensão desviatória é nula. Os planos perpendiculares ao eixo hidrostático são os planos desviatórios. Tais planos têm a forma:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3}\xi \quad (4.24)$$

onde ξ é a distância da origem ao plano desviatório, medido ao longo do eixo hidrostático. O plano desviatório que passa pela origem:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (4.25)$$

é chamado plano Π .

Um estado de tensões arbitrário σ_{ij} pode ser representado neste espaço de tensões em termos do vetor OP, cujas componentes ON (de comprimento ξ), projeção do vetor no eixo hidrostático, e NP (de comprimento ρ), projeção do vetor no plano desviatório, representam as componentes hidrostáticas e desviatórias do estado de tensões.

A magnitude de ON é dada por (CHEN, 1988):

$$\xi = \sqrt{3}p \quad (4.26)$$

e a magnitude de NP é:

$$\rho = \sqrt{2J_2} \quad (4.27)$$

A fim de que o estado de tensões esteja completamente definido no espaço de Haigh-Westergaard, define-se o ângulo de Lode \mathbf{q} , ou seja, o ângulo que o vetor desviatório faz com a direção da tensão principal maior no plano desviatório, que se relaciona com o ângulo de similaridade \mathbf{b} (figura 4.4):

$$\cos 3\mathbf{q} = -\operatorname{sen} 3\mathbf{b} = \hat{J}_3 = \frac{27J_3}{2\mathbf{s}_e^3} \quad (4.28a)$$

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{p}}{6} + \mathbf{b} \quad (4.28b)$$

\hat{J}_3 = invariante normalizado e

$$-1 \leq \hat{J}_3 \leq 1$$

$$-\frac{\mathbf{p}}{6} \leq \mathbf{b} \leq \frac{\mathbf{p}}{6}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ p \\ p \end{Bmatrix} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\beta \\ -\cos\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{Bmatrix} + \frac{2}{3} \sigma_e \begin{Bmatrix} \cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\beta \\ -\cos\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right) \end{Bmatrix}$$

Estas coordenadas serão utilizadas para representar as superfícies de ruptura no espaço das tensões.

4.3. **Generalização das Superfícies de Ruptura:**

O critério de escoamento de materiais geomecânicos dependente da pressão hidrostática, variando de uma representação triangular, no plano desviatório, para baixas tensões para um formato circular para tensões mais altas (figura 3.12).

Generalizações das superfícies de ruptura clássicas (Von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager) foram apresentadas, com o objetivo de incorporar a dependência não linear da pressão. Em alguns casos superfície de ruptura é formulada em termos de polinômios de potências dos invariantes principais das tensões efetivas, como no modelo HISS de DESAI (1980) e no modelo de LADE (1977, 1982). Já o ângulo de similaridade q foi utilizado na representação das superfícies de ruptura no caso de WILLAM, WARNKE (1975), OTTOSEN (1977), FARUQUE, CHANG (1986), RUBIN (1991).

WILLAM, WARNKE (1975) apresentam a seguinte generalização para as superfícies isotrópicas clássicas, definidas em termos dos invariantes p, σ_e, β :

$$f(p, \sigma_e, \beta) = \sigma_e - \mathfrak{R}(p, \beta) Y_d(p) \quad (4.30)$$

onde:

Y_d = resistência à compressão triaxial

\mathfrak{R} = função que caracteriza a forma da interseção da superfície de ruptura com o plano octaédrico, à qual pode-se incorporar a \mathfrak{R} medidas escalares do endurecimento, embora não sejam explicitamente consideradas aqui.

Define-se:

- Para compressão triaxial: $\mathfrak{R}\left(p, \frac{\pi}{6}\right) = 1$ (4.31a)

- Para estado de torção: $\mathfrak{R}(p, 0) = Q_1(p)$ (4.31b)

- Para estado de tração triaxial: $\mathfrak{R}\left(p, -\frac{\pi}{6}\right) = Q_2(p)$ (4.31c)

Onde Y_d , Q_1 e Q_2 são funções a serem determinadas experimentalmente.

Então, de (4.30) e de (4.31), o valor de σ_e para os casos acima são definidos por:

- Para compressão triaxial: $\sigma_e = Y_d(p)$ (4.32a)

- Para estado de torção: $\sigma_e = Q_1(p)Y_d(p)$ (4.32b)

- Para estado de tração triaxial: $\sigma_e = Q_2(p)Y_d(p)$ (4.32c)

Estudos experimentais (OTTOSEN, 1977) indicam que a curva de ruptura no plano cisalhante tem a forma triangular para valores baixos da pressão (Mohr-Coulomb) e tende a se tornar circular na forma com o aumento da pressão.

RUBIN (1991) desenvolveu uma expressão analítica simples para a função $\mathfrak{R}(p, \beta)$. A função desenvolvida utiliza os valores experimentais da equação (4.32) e , assumindo-se valores apropriados para $Q_1(p)$ e $Q_2(p)$, esta função se reduz aos critérios clássicos de Von Mises e Mohr-Coulomb. Os limites $\pm p/6$ são interceptados pela curva com ângulos agudos ou obtusos tal que:

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(p, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \neq 0 \text{ para } \mathbf{b} = \pm \frac{p}{6} \quad (4.33)$$

A expressão proposta por RUBIN é:

$$\Re(I_1, \beta) = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2b_0}}{2b_2} \quad (4.34)$$

onde:

$$b_0 = -(3 + b - a^2)$$

$$b_1 = a(\cos \beta - a \operatorname{sen} \beta)$$

$$b_2 = (\cos \beta - a \operatorname{sen} \beta)^2 + b \operatorname{sen}^2 \beta$$

$$b = (2Q_1 + a)^2 - 3$$

$$a_0 = 2Q_1^2(Q_2 - 1)$$

$$a_1 = \sqrt{3}Q_2 + 2Q_1(Q_2 - 1)$$

$$a_2 = Q_2$$

$$a = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

Os valores de Q_1 e Q_2 obtidos experimentalmente, são funções da pressão. Portanto os valores a e b também serão.

Escolhas apropriadas dos parâmetros a e b , Q_1 e Q_2 reproduzem as superfícies de escoamento clássicas.

O critério da tensão cisalhante octaédrica máxima é obtido quando:

$$a = 0, b = 1, R_3 = Q_1 = Q_2 = 1 \quad (4.35)$$

O modelo de Mohr-Coulomb é ajustado a partir dos parâmetros:

$$a = \frac{\operatorname{sen} \mathbf{f}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1 - Q_2)}{1 + Q_2} \quad (4.36a)$$

$$b = 0 \quad (4.36b)$$

$$Q_1 = \frac{\sqrt{3}Q_2}{1+Q_2} \quad (4.36c)$$

$$Q_2 = \frac{3 - \text{sen}f}{3 + \text{sen}f} \quad (4.36d)$$

Portanto, para a superfície de Mohr-Coulomb:

$$\mathfrak{R}(\mathbf{b}) = \frac{\sqrt{3}Q_2}{(1+Q_2)\cos \mathbf{b} - \sqrt{3}(1-Q_2)\text{sen} \mathbf{b}} \quad (4.36e)$$

Essa função representa uma curva regular no plano octaédrico que é ajustada aos valores de resistência à compressão e à tração e passa pelo estado de cisalhamento puro.

4.4. **Teoria da Plasticidade Incremental:**

Nesse trabalho é utilizada a formulação apresentada por SIMO, HUGHES (1998) para o tratamento das superfícies simples. As deformações são consideradas infinitesimais.

4.4.1. **Conceitos Básicos:**

Seja $B \subset R^3$ a configuração de referência que possui contorno ∂B e fechamento $\bar{B} = B \cup \partial B$ no intervalo de tempo $[0, T] \subset R^+$. Sejam ainda:

$u_{ij}(x, t) = Bx[0, T] \rightarrow R^{n \dim}$ o campo dos deslocamentos em relação à configuração de referência $x \in B$ no tempo t .

$\varepsilon_{ij} = \nabla^s u_{ij}$ o tensor de deformações;

q = variáveis de estado do material;

$\sigma_{ij} \in S$ = tensor de tensões, simétrico e de segunda ordem.

Uma premissa básica das relações constitutivas elasto-plásticas é a de que, a cada incremento de carga, o material com comportamento elasto-plástico é capaz de sofrer pequenas deformações tanto elásticas como plásticas, de forma que o tensor de deformações pode ser decomposto conforme:

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{ij}^e + \mathbf{e}_{ij}^p \quad (4.37)$$

onde:

\mathbf{e}_{ij} = tensor de deformações totais

\mathbf{e}_{ij}^e = tensor de deformações elásticas

\mathbf{e}_{ij}^p = tensor de deformações plásticas

O tensor de tensões está relacionado com a deformação elástica \mathbf{e}_{ij}^e através da função de energia armazenada W através de:

$$\mathbf{s}(x,t) = \frac{\partial W(x, \mathbf{e}^e(x,t))}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (4.38)$$

No caso elástico:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{ij}^e C_{ijkl} \mathbf{e}_{kl}^e \quad (4.39)$$

onde C_{ijkl} é o tensor constitutivo elástico.

Portanto:

$$\mathbf{s}_{ij} = C_{ijkl} (\mathbf{e}_{kl} - \mathbf{e}_{kl}^p) \quad (4.40)$$

A função $f : SxR^m \rightarrow R$ define o critério de escoamento e restringe os estados de tensão admissíveis ao conjunto E_σ no espaço das tensões:

$$E_s = \{(\mathbf{s}, q) \in SxR \mid f(\mathbf{s}_{ij}, q) \leq 0\} \quad (4.41)$$

Os estados de tensão situados no interior da superfície estão no domínio elástico:

$$\text{int}(E_s) = \{(\mathbf{s}, q) \in SxR^m \mid f(\mathbf{s}, q) < 0\} \quad (4.42)$$

O contorno da região ∂E_s define a superfície de escoamento (ruptura) no espaço das tensões:

$$\partial E_s = \{(\mathbf{s}, q) \in SxR^m \mid f(\mathbf{s}, q) = 0\} \quad (4.43)$$

Estados de tensão (\mathbf{s}, q) fora do domínio E_s não são admissíveis na teoria clássica da plasticidade.

A lei do fluxo define a evolução das deformações plásticas conforme:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} r(\sigma_{kl}, q) \quad (4.44)$$

onde r é uma função prescrita que define a direção do fluxo plástico. Utilizando-se uma lei do fluxo associativa, adotada neste trabalho, define-se:

$$r(\mathbf{s}, q) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \quad (4.45)$$

ou seja, o fluxo plástico ocorre na direção normal à superfície de escoamento.

Assume-se que a variável de estado evolui conforme:

$$\dot{q} = \dot{I} h_q(\mathbf{s}, q) \quad (4.46)$$

onde h_q é uma função prescrita que define o tipo de endurecimento.

O parâmetro \dot{I} é uma função escalar não negativa, definida como o parâmetro de consistência que obedece as condições de complementariedade de Kuhn-Tucker:

$$\dot{I} \geq 0, f(\mathbf{s}, q) \leq 0, \dot{I} f(\mathbf{s}, q) = 0 \quad (4.47)$$

Uma análise pormenorizada destas condições permitem a definição das condições de carregamento/descarregamento:

$f < 0 \Leftrightarrow (\mathbf{s}, q) \in \text{int}(E_s) \Rightarrow \dot{\mathbf{I}} = 0$, as tensões estão no domínio elástico.

$$f = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{s}, q) \in \partial E_q \begin{cases} \dot{f} < 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{I}} = 0, & \text{ocorre descarregamento elástico} \\ \dot{f} = 0 \text{ e } \dot{\mathbf{I}} = 0, & \text{ocorre carregamento neutro} \\ \dot{f} = 0 \text{ e } \dot{\mathbf{I}} > 0, & \text{ocorre carregamento plástico} \end{cases} \quad (4.48)$$

Além disto, $\dot{\mathbf{I}}$ satisfaz ainda a condição de consistência:

$$\dot{\lambda} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (4.49)$$

As lei do fluxo, a lei do endurecimento e a condição de escoamento são tais que a seguinte desigualdade é válida no contorno ∂E_σ .

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} r + \frac{\partial f}{\partial q} h_q \right] > 0 \quad (4.50)$$

Partindo da condição de consistência (4.49):

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad (4.51)$$

Substituindo a equação (4.40) na relação acima:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad (4.52)$$

Utilizando a lei do fluxo associativa (4.44) e (4.45) e a lei do endurecimento (4.46) na equação acima:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \left(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q} h_q = 0 \quad (4.53)$$

Rearranjando para $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial f}{\partial q} h_q} \quad (4.54)$$

Substituindo a expressão da lei do fluxo associativa (4.44) e (4.45) na equação das tensões (4.40):

$$\dot{\mathbf{s}}_{ij} = C_{ijkl} \left(\dot{\mathbf{e}}_{kl} - \mathbf{I} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{kl}} \right) \quad (4.55)$$

Substituindo o parâmetro de consistência (4.54) na expressão acima e pondo em evidência o termo $\dot{\epsilon}_{kl}$:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (4.56)$$

onde C_{ijkl}^{ep} é o tensor módulo elasto-plástico tangente, simétrico para a lei do fluxo associativa:

$$C_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} C_{ijkl}, & \text{para } \dot{\lambda} = 0 \\ C_{ijkl} - \frac{C_{ijuv} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{uv}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rq}} + \frac{\partial f}{\partial q} h_q}, & \text{para } \dot{\lambda} > 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

Observe-se que, no caso de comportamento elasto-plástico perfeito do material:

$$h_q = 0$$

Neste caso, parâmetro de consistência é dado por:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (4.58)$$

e o módulo elasto-plástico tangente por:

$$C_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} C_{ijkl}, & \text{para } \dot{\lambda} = 0 \\ C_{ijkl} - \frac{C_{ijuv} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{uv}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rq}}}, & \text{para } \dot{\lambda} > 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

4.5. **Formulação do modelo plástico:**

Foi utilizado um modelo que é função do primeiro invariante de tensões efetivas e do segundo invariante de tensões desviatórias. O terceiro invariante de tensões desviatórias é utilizado para ajuste dos ensaios triaxiais em materiais geomecânicos, utilizando o modelo de RUBIN (1991), descrito na seção acima para ajustar a superfície de ruptura aos vértices da superfície clássica de Mohr-Coulomb no plano octaédrico.

Adotou-se um modelo segundo o qual a forma da superfície de escoamento no plano octaédrico é independente da pressão.

Admite-se a convenção da mecânica dos sólidos, segundo a qual o estado de tração é positivo.

4.5.1. **Formulação do modelo:**

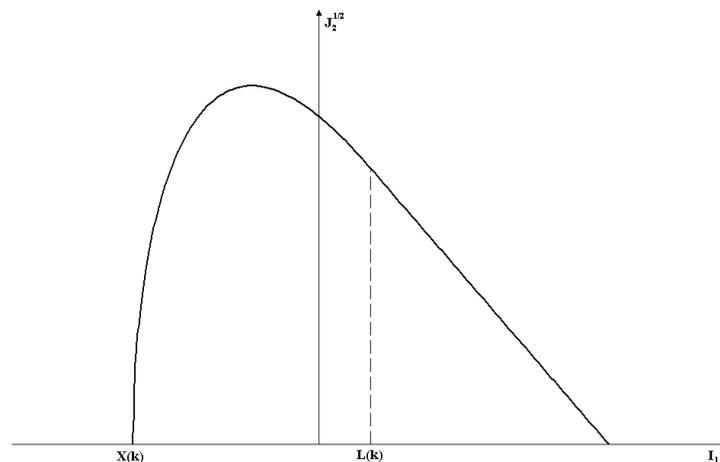


FIGURA 4.5
Superfícies de escoamento para o *cap model* selecionado

O modelo de poro-colapso com superfície ajustada para o modelo de Mohr-Coulomb é descrito pela seguinte função:

$$f(I_1, J_2, \mathbf{b}, \mathbf{k}) = J_2 - \mathfrak{R}^2(\mathbf{b})F_f^2(I_1)F_c(I_1, \mathbf{k}) \quad (4.60)$$

Onde a função:

$$F_f(I_1) = \mathbf{g} - \mathbf{a}I_1$$

Corresponde ao cone de Drucker-Prager onde:

\mathbf{g} : constante, relacionada à coesão, que fornece uma medida da cimentação entre os grãos;

\mathbf{a} : constante de proporcionalidade que é função do atrito entre os grãos.

No plano octaédrico, utilizou-se o círculo que circunscreve a envoltória de Mohr-Coulomb para ajustar os parâmetros aos ensaios triaxiais:

$$\mathbf{g} = \frac{6c \cos \mathbf{f}}{\sqrt{3}(3 - \text{sen} \mathbf{f})} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{a} = \frac{2 \text{sen} \mathbf{f}}{\sqrt{3}(3 - \text{sen} \mathbf{f})} \quad (4.62)$$

O cap suave e contínuo é definido pela função adimensional F_c :

$$F_c(I_1, \mathbf{k}) = \begin{cases} 1 & , I_1 \geq L(k) \\ 1 - \frac{[I_1 - L(k)]^2}{[X(k) - L(k)]^2} & , I_1 < L(k) \end{cases}$$

Onde:

$X(k)$ = interseção da função F_c com o eixo I_1

$L(k)$ = início do cap.

Aqui assume-se a formulação de *strain hardening*, ou seja, o endurecimento do material é função da história de deformações plásticas, mais especificamente, das deformações plásticas volumétricas:

$$\mathbf{k} = \mathbf{H}(\mathbf{e}_{kk}^p) \quad (4.63)$$

onde:

$$\mathbf{e}_{kk}^p = \int d\mathbf{e}_{kk}^p \quad (4.64)$$

A evolução das deformações plásticas volumétricas é dada pela lei de endurecimento:

$$\mathbf{e}_{kk}^p = A_w \{1 - e^{-D(X(\mathbf{k}) - X_o)}\} \quad (4.65)$$

onde:

$X_o = X(\mathbf{k}_o)$ é a abscissa onde F_c deixa de ter o valor constante unitário e \mathbf{k}_o é o valor de I_1 no ponto onde F_c deixa de ter o valor constante unitário.

A_w = deformação volumétrica plástica máxima (*lockup* do ensaio hidrostático).

D = fator de forma.

Os resultados apresentados por SOARES (2000) permitem uma aproximação linear, descrita por:

$$\mathbf{e}_{kk}^p = \min(A_w (X - X_o), (\mathbf{e}_{kk}^p)_{m\acute{a}x})$$

A relação entre $X(\mathbf{k})$ e $L(\mathbf{k})$ é definida por:

$$X(\mathbf{k}) = L(\mathbf{k}) + R \cdot F_f(L(\mathbf{k})) \quad (4.66)$$

Admite-se ainda que:

$$L(\mathbf{k}) = \begin{cases} \hat{e}, & \text{se } \mathbf{k} > \mathbf{k}_o \\ \mathbf{k}_o, & \text{se não} \end{cases} \quad (4.67)$$

E a função:

$$\mathfrak{R}(\mathbf{b}) = \frac{\sqrt{3}Q_2}{(1 + Q_2)\cos \mathbf{b} - \sqrt{3}(1 - Q_2)\text{sen} \mathbf{b}} \quad (4.68)$$

onde \mathbf{b} é função do invariante normalizado definido por (4.28a) e Q_2 é dado por:

$$Q_2 = \frac{3 - \text{sen} \mathbf{f}}{3 + \text{sen} \mathbf{f}} \quad (4.69)$$

$$Q_1 = \frac{\sqrt{3} Q_2}{1 + Q_2}$$

A função (4.68) representa uma escala no plano octaédrico que ajusta as funções $F_f(I_1)$ e $F_c(I_1, \mathbf{k})$ aos vértices da superfície clássica de Mohr-Coulomb segundo a formulação de RUBIN (1991).

O ângulo de atrito ϕ está associado à inclinação da superfície de cisalhamento obtida através do ensaio triaxial de compressão por:

$$\text{sen} \mathbf{f} = \frac{3\sqrt{3} \tan \mathbf{q}_c}{2 + \sqrt{3} \tan \mathbf{q}_c} \quad (4.70)$$

Observe-se que, nos meridianos de tração e compressão triaxiais e no meridiano de cisalhamento puro, tem-se:

- Compressão triaxial:

$$\begin{aligned} \hat{J}_3 &= -1 \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{p}}{6} \\ \mathfrak{R}\left(\frac{\mathbf{p}}{6}\right) &= 1 \\ J_2 &= F(I_1, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.71)$$

- Cisalhamento puro:

$$\begin{aligned} \hat{J}_3 &= 0 \\ \mathbf{b} &= 0 \\ \mathfrak{R}(0) &= Q_1 \\ J_2 &= Q_1 F(I_1, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.72)$$

- Tração triaxial:

$$\begin{aligned}
\widehat{J}_3 &= 1 \\
\mathbf{b} &= -\frac{\mathbf{p}}{6} \\
\Re\left(-\frac{\mathbf{p}}{6}\right) &= Q_2 \\
J_2 &= Q_2 F(I_1, \mathbf{k})
\end{aligned} \tag{4.73}$$

4.5.2. Algoritmo de Plasticidade:

Utilizou-se aqui a formulação explícita para integração do estado de tensões, cuja formulação é descrita sumariamente a seguir.

Reescrevendo a condição de consistência (4.51) na sua forma incremental:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} d\mathbf{s}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial q} dq = 0 \tag{4.74}$$

Expandindo-se Δf em série de Taylor no incremento de tempo n a $n+1$, obtém-se:

$$df = f_{n+1} - f_n \tag{4.75}$$

$$df = f(\mathbf{s}_{ij}^n + d\mathbf{s}_{ij}, q_n + dq) - f(\mathbf{s}_{ij}^n, q^n) \tag{4.76}$$

Mas $f_n = 0$, portanto:

$$df = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \right|_n d\mathbf{s}_{ij} + \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_n dq = 0 \tag{4.77}$$

O tensor incremento de tensões é dado por:

$$d\mathbf{s}_{ij} = C_{ijkl} (d\mathbf{e}_{ij} - d\mathbf{e}_{ij}^p) \tag{4.78}$$

A forma incremental da lei do fluxo (4.44) e (4.45):

$$d\mathbf{e}_{ij}^p \approx d\mathbf{l} \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \right|_n \tag{4.79}$$

O incremento das variáveis de estado (equação 4.46) é dado pela aproximação:

$$dq = d\mathbf{l} h_q(\mathbf{s}_{ij}, q) \Big|_n \tag{4.80}$$

A única variável de estado para o modelo é o parâmetro de endurecimento:

$$\mathbf{k} = L(\mathbf{k}) \quad (4.81)$$

Portanto:

$$d\kappa = d\lambda h_q(\boldsymbol{\sigma}_{ij}, \kappa)|_n \quad (4.82)$$

que segue a lei do fluxo (4.79).

Expandindo-se esta lei em série de Taylor:

$$d\mathbf{e}_{kk}^p = \left. \frac{\partial \mathbf{e}_{kk}^p}{\partial \mathbf{k}} \right|_n d\mathbf{k} \quad (4.83)$$

Mas:

$$d\mathbf{e}_{kk}^p = 3dI \left. \frac{\partial f}{\partial I_1} \right|_n \quad (4.84)$$

Igualando-se as duas equações acima, obtém-se:

$$d\mathbf{k} = 3dI \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial I_1} \right|_n}{\left. \frac{\partial \mathbf{e}_{kk}^p}{\partial \mathbf{k}} \right|_n} \quad (4.85)$$

Comparando-se a equação acima com (4.82), verifica-se que:

$$h_q = \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial I_1} \right|_n}{\left. \frac{\partial \mathbf{e}_{kk}^p}{\partial \mathbf{k}} \right|_n} \quad (4.86)$$

Substituindo (4.78), (4.79) e (4.80) na equação (4.77), obtém-se o parâmetro de consistência incremental:

$$dI = \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \right|_n C_{ijkl} d\mathbf{e}_{kl}}{\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \right|_n C_{ijkl} \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \right|_n - \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_n h_q|_n} \quad (4.87)$$

Obtido este valor, aplica-se na equação (4.79) para determinação do incremento de deformações plásticas. A partir daí, utiliza-se a equação (4.78) para avaliação do incremento de tensões. O novo estado de tensões é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{ij} + d\boldsymbol{\sigma}_{ij} \quad (4.88)$$

Capítulo 5

IMPLEMENTAÇÃO DE MODELOS DE RUPTURA:

5.1. *Introdução:*

SANDLER e RUBIN apresentaram em 1979 o primeiro trabalho relevante em implementação numérica de *cap models*. As superfícies de ruptura eram função do primeiro invariante de tensões e do segundo invariante de tensões desviatórias. A condição de consistência é reduzida a uma equação escalar, onde é adicionado um termo corretor ao segundo invariante de tensões desviatórias do preditor elástico resultando no segundo invariante de tensões desviatórias final, obtendo-se o estado de tensões. A equação não-linear é resolvida por um método implícito iterativo.

SIMO et al. (1988), a partir dos algoritmos de projeção ao ponto mais próximo ou de mapeamento de retorno, verificou que o algoritmo de SANDLER, RUBIN não é consistente com os conceitos de projeção ao ponto mais próximo. Aponta também que ao avaliar o gradiente do *cap* pelo preditor elástico no início do processo iterativo introduz uma degradação na resposta para incrementos de carga grandes e apresenta inconsistência no retorno à superfície para as arestas. Propõe ainda manter a equação escalar, porém avaliando de forma exata o gradiente da superfície para o estado de tensões atual.

Nesse trabalho é utilizada a metodologia apresentada por SCHWER, MURRAY (1994), incorporando à superfície a dependência do terceiro invariante de tensões desviatórias. Optou-se pelo desenvolvimento de uma técnica explícita para integração das tensões .

Será descrita a metodologia da implementação da superfície de ruptura utilizada neste trabalho. O modelo de poro-colapso foi implementado em um simulador numérico desenvolvido pela COPPE/UFRJ (1993 e 1995) para análise do poços de petróleo.

O escoamento no meio poroso é tratado de forma desacoplada. A história de poro pressões é fornecido por um arquivo. O problema é modelado como estado plano de deformações.

A solução das equações não-lineares, discretizadas pelo método dos elementos finitos, é feita pelo método de Newton-Raphson Modificado. A integração

numérica é efetuada pelo algoritmo preditor elástico-corretor plástico e é utilizado elemento triangular linear.

No trabalho foi aplicado um modelo com ruptura por cisalhamento de Mohr-Coulomb associada a um *cap* suave e contínuo à superfície de ruptura.

Foi adotada a filosofia do trabalho de SANDLER, RUBIN, onde as funções de escoamento e de endurecimento são fornecidas. O gradiente da função de ruptura por cisalhamento e os demais termos foram avaliados analiticamente e considerados funções no início.

5.2. Análise elasto-plástica:

5.2.1. Relações constitutivas incrementais:

Reescrevendo as relações constitutivas do capítulo 4 (equação 4.55) na sua forma incremental:

$$d\mathbf{s}_{ij} = C_{ijkl} \left(d\mathbf{e}_{kl} - dI \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{kl}} \right) \quad (5.1)$$

onde o tensor de deformações incorpora a deformação devido à variação da pressão de poros (2.6).

para o caso com comportamento elasto-plástico com endurecimento isotrópico temos:

$$dI = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} C_{ijkl} d\mathbf{e}_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{kl}} - 3 \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial f / \partial I_1}{\partial \mathbf{e}_{kk}^p / \partial k}} \quad (5.2)$$

Substituindo-se (5.2) em (5.1):

$$d\mathbf{s}_{ij} = \left(C_{ijkl} - \frac{C_{ijuv} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{uv}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{mn}} C_{mnkl}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{mn}} C_{mnrq} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{rq}} - 3 \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial f / \partial I_1}{\partial \mathbf{e}_{kk}^p / \partial k}} \right) d\mathbf{e}_{kl} \quad (5.3)$$

ou:

$$d\mathbf{s}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\mathbf{e}_{kl} \quad (5.4)$$

onde C_{ijkl}^{ep} é a matriz constitutiva elasto-plástica.

A atualização do parâmetro de endurecimento é feita conforme:

$$\mathbf{k}^{n+1} = \mathbf{k}^n + d\mathbf{k} , \quad (5.5)$$

onde:

$$d\mathbf{k} = 3dI \frac{\partial f / \partial I_1}{\partial \mathbf{e}_{kk}^p / \partial \mathbf{k}} \quad (5.6)$$

5.2.2. Condição de consistência incremental:

No caso do comportamento elasto-plástico com endurecimento, a condição de consistência incremental (5.1) é dada por:

$$df(\mathbf{s}_{ij}, \mathbf{k}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} d\mathbf{s}_{ij} + 3dI \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial f / \partial I_1}{\partial \mathbf{e}_{kk}^p / \partial \mathbf{k}} = 0 \quad (5.7)$$

5.2.3. Relação constitutiva para o estado plano de deformações:

Pré-multiplicando ambos os termos da relação constitutiva elasto-plástica (5.1) por $D_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$ e rearranjando para $d\mathbf{e}_{ij}$:

$$d\mathbf{e}_{ij} = D_{ijkl} d\mathbf{s}_{kl} + dI \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{kl}} \quad (5.8)$$

Seja também a condição de consistência, expressa por (5.7), reescrita como:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} d\mathbf{s}_{ij} - AdI , \quad (5.9)$$

ou, expandindo:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_x} d\mathbf{s}_x + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_y} d\mathbf{s}_y + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}_{xy}} d\mathbf{t}_{xy} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} d\mathbf{s}_z - AdI \quad (5.10)$$

onde A representa a parcela para as variáveis de estado, que neste modelo é o parâmetro de endurecimento.

Assim, para comportamento elasto-plástico perfeito:

$$A = 0 \quad (5.11)$$

e para deformações plásticas com endurecimento isotrópico:

$$A = -3 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial f / \partial I_1}{\partial \mathbf{e}_{kk}^p / \partial \mathbf{k}} \quad (5.12)$$

O problema de estado plano de deformações caracteriza-se por:

$$d\mathbf{e}_z = 0 \quad (5.13)$$

$$d\mathbf{s}_z = \mathbf{n}(d\mathbf{s}_x + d\mathbf{s}_y) \quad (5.14)$$

Portanto, os tensores de tensão e deformação são definidos por:

$$d\mathbf{s}_{ij} = \begin{Bmatrix} d\mathbf{s}_x \\ d\mathbf{s}_y \\ dt_{xy} \\ d\mathbf{s}_z \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

e

$$d\mathbf{e}_{ij} = \begin{Bmatrix} d\mathbf{e}_x \\ d\mathbf{e}_y \\ d\mathbf{g}_{xy} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Necessita-se expressar a relação constitutiva para estado plano de deformações em relação apenas aos três termos de deformação característicos deste modelo. Isto foi feito por condensação das relações constitutivas com o auxílio da equação da condição de consistência conforme exposto por COSTA (1978). Expandindo as relações (5.8) e (5.9) em forma matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} d\mathbf{e}_x \\ d\mathbf{e}_y \\ d\mathbf{g}_{xy} \\ d\mathbf{e}_z \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mathbf{n}}{E} & 0 & -\frac{\mathbf{n}}{E} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_x} \\ -\frac{\mathbf{n}}{E} & \frac{1}{E} & 0 & -\frac{\mathbf{n}}{E} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_y} \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\mathbf{n})}{E} & 0 & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}_{xy}} \\ -\frac{\mathbf{n}}{E} & -\frac{\mathbf{n}}{E} & 0 & \frac{1}{E} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_x} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_y} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}_{xy}} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_x} & -A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{s}_x \\ d\mathbf{s}_y \\ dt_{xy} \\ d\mathbf{s}_z \\ dl \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Mas:

$$d\mathbf{e}_z = 0$$

Substituindo na relação acima para $d\mathbf{e}_z$, obtém-se:

$$d\mathbf{s}_z = \mathbf{n}(d\mathbf{s}_x + d\mathbf{s}_y) - dl E \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} \quad (5.18)$$

Substituindo (5.18) nas expressões para $d\mathbf{e}_x$ e $d\mathbf{e}_y$, obtém-se:

$$d\mathbf{e}_x = \frac{1-\mathbf{n}^2}{E} d\mathbf{s}_x - \frac{\mathbf{n}(1+\mathbf{n})}{E} d\mathbf{s}_y + dl \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_x} + \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} \right) \quad (5.19)$$

$$d\mathbf{e}_y = -\frac{\mathbf{n}(1+\mathbf{n})}{E} d\mathbf{s}_x + \frac{1-\mathbf{n}^2}{E} d\mathbf{s}_y + dl \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_y} + \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} \right) \quad (5.20)$$

Finalmente, (5.18) na condição de consistência (5.9):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_x} + \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z}\right) d\mathbf{s}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_y} + \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z}\right) d\mathbf{s}_y + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}_{xy}} d\mathbf{t}_{xy} - d\mathbf{l} \left[E \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z}\right)^2 + A \right] = 0 \quad (5.21)$$

Reescrevendo as equações (5.17) a (5.21) em termos matriciais:

$$\begin{Bmatrix} d\mathbf{e}_x \\ d\mathbf{e}_y \\ d\mathbf{g}_{xy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\mathbf{n}^2}{E} & -\frac{\mathbf{n}(1+\mathbf{n})}{E} & 0 & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_x} + \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} \\ -\frac{\mathbf{n}(1+\mathbf{n})}{E} & \frac{1-\mathbf{n}^2}{E} & 0 & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_y} + \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} \\ 0 & 0 & G & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}_{xy}} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_x} + \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_y} + \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}_{xy}} & -\left[A + E \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z}\right)^2 \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{s}_x \\ d\mathbf{s}_y \\ d\mathbf{t}_{xy} \\ d\mathbf{l} \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

Então o gradiente da superfície de ruptura é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_x} + \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_y} + \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}_{xy}} \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

A condição de consistência para o problema de estado plano de deformações é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} d\mathbf{s}_{ij} - d\mathbf{l} \left[A + E \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z}\right)^2 \right] = 0 \quad (5.24)$$

De (5.1):

$$d\mathbf{s}_{ij} = C_{ijkl} \left(d\mathbf{e}_{kl} - d\mathbf{l} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{kl}} \right)$$

Então:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} C_{ijkl} \left(d\mathbf{e}_{kl} - d\mathbf{l} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{kl}} \right) - d\mathbf{l} \left[A + E \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z}\right)^2 \right] = 0 \quad (5.25)$$

Rearranjando para $d\mathbf{l}$:

$$d\mathbf{l} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} C_{ijkl} d\mathbf{e}_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{kl}} + \left(A + E \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} \right)^2 \right)} \quad (5.26)$$

Assim, para o modelo de estado plano de deformações, o parâmetro de consistência $d\mathbf{l}$ tem a parcela $E \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} \right)^2$ acrescida ao seu denominador.

5.2.4. Avaliação dos termos do tensor constitutivo elasto-plástico C_{ijkl}^{ep} :

Para definir o tensor constitutivo elasto-plástico (5.3), necessita-se avaliar o gradiente da superfície de escoamento e os termos referentes ao endurecimento isotrópico.

- **Gradiente da superfície de escoamento:**

Reescrevendo as funções de escoamento de Mohr-Coulomb:

$$f(I_1, J_2, \mathbf{b}, \mathbf{k}) = J_2 - \mathfrak{R}^2(\mathbf{b}) F_f^2(I_1) F_c(I_1, \mathbf{k}) \quad (5.27)$$

onde:

$$\mathfrak{R}(\mathbf{b}) = \frac{\sqrt{3} Q_2}{(1 + Q_2) \cos \mathbf{b} - \sqrt{3} (1 - Q_2) \operatorname{sen} \mathbf{b}}$$

$$Q_2 = \frac{3 - \operatorname{sen} \mathbf{f}}{3 + \operatorname{sen} \mathbf{f}}$$

$$\operatorname{sen} \mathbf{f} = \frac{3\sqrt{3} \operatorname{tg} \mathbf{q}_c}{2 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \mathbf{q}_c}$$

\mathbf{q}_c : inclinação da envoltória de ruptura obtida através do ensaio triaxial

\mathbf{f} : ângulo de atrito.

Aplicando-se a regra da cadeia o gradiente da superfície de ruptura é:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{s}_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \quad (5.28)$$

Onde:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \mathbf{d}_{ij} \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial s_{kl}} = s_{kl} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial s_{kl}}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \mathbf{d}_{ik} \mathbf{d}_{jl} - \frac{\mathbf{d}_{kl} \mathbf{d}_{ij}}{3} \quad (5.32)$$

Substituindo (5.31) e (5.32) em (5.30):

$$\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = s_{ij} - \frac{s_{kk} \mathbf{d}_{ij}}{3}$$

chega-se a:

$$\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = s_{ij} \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = -\mathfrak{R}^2 \left[2F_f F_c \frac{\partial F_f}{\partial I_1} + F_f^2 \frac{\partial F_c}{\partial I_1} \right] \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}} = -\mathfrak{R} F_f^2 F_c \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathbf{b}} \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = 1 \quad (5.36)$$

Avaliação de $\frac{\partial F_f}{\partial I_1}$:

$$\frac{\partial F_f}{\partial I_1} = -\mathbf{a} \quad (5.37)$$

Avaliação de $\frac{\partial F_c}{\partial I_1}$:

$$\frac{\partial F_c}{\partial I_1} = \begin{cases} 0 & I_1 \geq L(k) \\ -2 \frac{I_1 - L(k)}{(X(L) - L(k))^2} & I_1 < L(k) \end{cases} \quad (5.38)$$

Avaliando as derivadas da função em relação a \mathfrak{R} , ou seja, os termos $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathbf{b}}$ e $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{s}_{ij}}$.

- Avaliação de $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathbf{b}}$:

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\sqrt{3}Q_2[(1+Q_2)\text{sen}\mathbf{b} + \sqrt{3}(1-Q_2)\cos\mathbf{b}]}{[(1+Q_2)\cos\mathbf{b} - \sqrt{3}(1-Q_2)\text{sen}\mathbf{b}]^2} \quad (5.39)$$

- Avaliação de $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{s}_{ij}}$:

O termo $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{s}_{ij}}$ é dado por:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \hat{J}_3} \frac{\partial \hat{J}_3}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \quad (5.40)$$

O primeiro termo da equação acima é:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \hat{J}_3} = -\frac{1}{3\sqrt{1-\hat{J}_3^2}} \quad (5.41)$$

e o segundo termo é decomposto conforme:

$$\frac{\partial \hat{J}_3}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \frac{\partial \hat{J}_3}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{s}_{ij}} + \frac{\partial \hat{J}_3}{\partial \mathbf{s}_e} \frac{\partial \mathbf{s}_e}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \quad (5.42)$$

onde a primeira parcela da equação acima é definida por:

$$\frac{\partial \hat{J}_3}{\partial J_3} = \frac{27}{2\mathbf{s}_e^3} \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \frac{\partial J_3}{\partial s_{mn}} \frac{\partial s_{mn}}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial s_{mn}} = s_{mk} s_{kn} \quad (5.45)$$

Portanto, substituindo (5.45) e (5.32) em (5.44):

$$\frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \mathbf{d}_{ij} \quad (5.46)$$

Os termos da segunda parcela da equação (5.42) são definidos por:

$$\frac{\partial \hat{J}_3}{\partial \mathbf{s}_e} = -\frac{3\hat{J}_3}{\mathbf{s}_e} \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}_e}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \frac{\partial \mathbf{s}_e}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}_e}{\partial J_2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} \quad (5.49)$$

Portanto, (5.49) e (5.33) em (5.48):

$$\frac{\partial \mathbf{s}_e}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \frac{\sqrt{3}s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \quad (5.50)$$

Aplicando (5.43), (5.46), (5.47) e (5.50) em (5.42):

$$\frac{\partial \hat{J}_3}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \left[\frac{27}{2\mathbf{s}_e^3} \left(s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \mathbf{d}_{ij} \right) + \frac{\sqrt{3}s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right] \quad (5.51)$$

Finalmente, (5.41) e (5.51) em (5.40):

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = -\frac{1}{3\sqrt{1-\hat{J}_3^2}} \left[\frac{27}{2\mathbf{s}_e^3} \left(s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \mathbf{d}_{ij} \right) - \frac{\sqrt{3}s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right]$$

Substituindo os termos das derivadas acima na equação do gradiente (5.28) da superfície de ruptura, para o estado plano de deformações (5.23):

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \begin{bmatrix} -(1+n)\mathfrak{R}^2 \left(2F_f F_c \frac{\partial F_f}{\partial I_1} + F_f^2 \frac{\partial F_c}{\partial I_1} \right) + s_x + n s_z - 2\mathfrak{R} F_f^2 F_c \frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s_x} + n \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s_z} \right) \\ -(1+n)\mathfrak{R}^2 \left(2F_f F_c \frac{\partial F_f}{\partial I_1} + F_f^2 \frac{\partial F_c}{\partial I_1} \right) + s_y + n s_z - 2\mathfrak{R} F_f^2 F_c \frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s_y} + n \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s_z} \right) \\ t_{xy} - 2\mathfrak{R} F_f^2 F_c \frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t_{xy}} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s_z} = -\mathfrak{R}^2 \left(2F_f F_c \frac{\partial F_f}{\partial I_1} + F_f^2 \frac{\partial F_c}{\partial I_1} \right) + s_z - 2\mathfrak{R} F_f^2 F_c \frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s_z}$$

onde $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{s}_{ij}}$ tem a seguinte forma para o estado plano de deformações:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s_x} \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s_y} \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t_{xy}} \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s_z} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3\sqrt{1-\hat{J}_3^2}} \begin{bmatrix} \frac{27}{2\mathbf{s}_e^3} \left(S_x^2 + t_{xy}^2 - \frac{2J_2}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}S_x}{2\sqrt{J_2}} \\ \frac{27}{2\mathbf{s}_e^3} \left(S_y^2 + t_{xy}^2 - \frac{2J_2}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}S_y}{2\sqrt{J_2}} \\ \frac{27}{2\mathbf{s}_e^3} (S_x + S_y)t_{xy} - \frac{\sqrt{3}t_{xy}}{2\sqrt{J_2}} \\ \frac{27}{2\mathbf{s}_e^3} \left(S_z^2 - \frac{2J_2}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}S_z}{2\sqrt{J_2}} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

- **Termos referentes ao endurecimento isotrópico:**

Necessita-se avaliar os termos $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}}$ e $\frac{\partial \mathbf{e}_{kk}^p}{\partial \mathbf{k}}$ presentes no parâmetro de consistência (5.12).

Seja a função:

$$f(\sqrt{J_2}, I_1, \mathbf{b}, \mathbf{k}) = J_2 - \mathfrak{R}^2(\mathbf{b}) F_f^2(I_1) F_c(I_1, \mathbf{k})$$

Então para a superfície:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} = -\mathfrak{R}^2(\mathbf{b}) F_f^2(I_1) \frac{\partial F_c(I_1, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial F_c(I_1, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial F_c(I_1, \mathbf{k})}{\partial X(\mathbf{k})} \frac{\partial X(k)}{\partial L(\mathbf{k})} \frac{\partial L(k)}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial F_c(I_1, \mathbf{k})}{\partial L(\mathbf{k})} \frac{\partial L(k)}{\partial \mathbf{k}} \quad (5.55)$$

onde:

$$F_c(I_1, k) = \begin{cases} 1 & , \text{ para } I_1 \geq L(k) \\ 1 - \frac{[I_1 - L(k)]^2}{[X(k) - L(k)]^2} & , \text{ se não} \end{cases}$$

$$L(\mathbf{k}) = \begin{cases} \mathbf{k} & , \text{ para } \mathbf{k} \geq \mathbf{k}_o \\ \mathbf{k}_o & , \text{ se não} \end{cases}$$

$$X(\mathbf{k}) = L(\mathbf{k}) + R \cdot F_f(L(\mathbf{k}_n))$$

$$F_f(I_1) = \mathbf{g} - \mathbf{a}L(\mathbf{k})$$

Determinação dos termos de $\frac{\partial F_c(I_1, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}$:

$$\frac{\partial F_c}{\partial X} = \frac{2[I_1 - L(\mathbf{k})]^2}{[X(\mathbf{k}) - L(\mathbf{k})]^3} \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial L} = \frac{2[I_1 - L(\mathbf{k})]}{[X(\mathbf{k}) - L(\mathbf{k})]^2} - \left(1 - \frac{\partial X(L(k))}{\partial L(k)}\right) \frac{2[I_1 - L(\mathbf{k})]^2}{[X(\mathbf{k}) - L(\mathbf{k})]^3} \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial X(L(k))}{\partial L(k)} = 1 - R\mathbf{a} \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial L(k)}{\partial \mathbf{k}} = \begin{cases} 1, k < k_o \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases} \quad (5.59)$$

Substituindo (5.56), (5.57), (5.58) e (5.59) na (5.55) temos :

$$\frac{\partial F_c}{\partial \mathbf{k}} = \begin{cases} 0 & , I_1 > L(k) \\ \frac{2[I_1 - L(\mathbf{k})]^2}{[X(\mathbf{k}) - L(\mathbf{k})]^3} (1 - R\mathbf{a}) + \frac{2[I_1 - L(\mathbf{k})]}{[X(\mathbf{k}) - L(\mathbf{k})]^2} - \frac{2[I_1 - L(\mathbf{k})]^2}{[X(\mathbf{k}) - L(\mathbf{k})]^3} & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (5.60)$$

Finalmente, avaliando-se $\partial \mathbf{e}_{kk}^p / \partial \mathbf{k}$:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{kk}^p}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \mathbf{e}_{kk}^p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \mathbf{k}} \quad (5.61)$$

O termo $\frac{\partial X}{\partial \mathbf{k}}$ é definido por (5.61) e por (5.63) e o termo $\frac{\partial \mathbf{e}^p}{\partial X}$ é avaliado

numericamente.

5.2.5. Possíveis Trajetórias das Tensões durante um Incremento:

A trajetória percorrida pelas tensões ao longo do processo incremental é definida por:

$$\mathbf{s}_{ij}^{n+1} = \mathbf{s}_{ij}^n + d\mathbf{s}_{ij} \quad (5.62)$$

Seja f^n a função da superfície de ruptura utilizada no passo n .

Partindo-se de uma previsão elástica para \mathbf{s}_{ij}^{n+1} , temos as seguintes trajetórias possíveis:

- $f^n = 0$ e $f^{n+1} < 0$: neste caso, o material deforma-se no regime elástico (figura 5.1a).
- $f^n = 0$ e $f^{n+1} > 0$: ocorre um alívio de tensões
- $f^n > 0$ e $f^{n+1} < 0$: o material deforma-se no regime elasto-plástico (figura 5.1b, à esquerda).
- $f^n > 0$ e $f^{n+1} > 0$: a trajetória de tensões percorre um caminho elástico até atingir a superfície de ruptura, deformando-se elasticamente e a partir daí o material deforma-se no regime elasto-plástico (figura 5.1b, à direita).

Neste último caso, é necessária a divisão do incremento de deformações em duas parcelas: uma parcela puramente elástica e outra elasto-plástica.

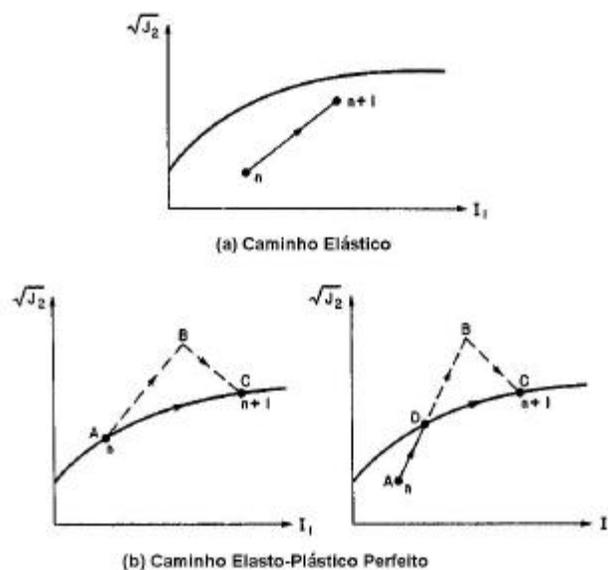


Figura 5.1 – Trajetórias de Tensão Possíveis (CHEN E BALADI, 1985)

- **Avaliação das parcelas elásticas e elasto-plásticas para superfície de ruptura:**

A figura 5.1b a direita ilustra as parcelas elástica e elasto-plástica das tensões previstas. A trajetória AD representa a parcela elástica percorrida pelo estado de tensões, enquanto a parcela DB representa o preditor elástico. A correção elasto-plástica corresponde à parcela BC. Necessita-se portanto determinar a parcela AD e corrigir o estado de tensões, levando-o até o ponto D.

A determinação do ponto D para qualquer trajetória de tensões representou um desafio, pois foi necessária a utilização de uma técnica numérica devido a não linearidade da superfície plástica. Optou-se aqui pelo método de Newton-Raphson, uma vez que é conhecido o intervalo onde está a raiz da equação e que a variação entre os dois estados de tensão é linear. Abaixo é descrita a utilização do método:

É determinada a derivada da função $f(I_1, J_2, \mathbf{b})$, através do método das diferenças finitas:

$$f'(\mathbf{s}) = \frac{f(\mathbf{s} + (x + \Delta x)\Delta \mathbf{s}) - f(\mathbf{s} + x\Delta \mathbf{s})}{\Delta x} \quad (5.63)$$

onde o x varia de 0 até 1, sendo 0 quando ocorre o caso b da figura 5.1 e 1 quando os pontos D e B são os mesmos no caso c da figura 5.1.

Após a determinação da derivada da função em relação a x obtemos o novo valor de x :

$$x|_{n+1} = x|_n - \frac{f(x)|_n}{f'(x)|_n} \quad (5.64)$$

Com o novo valor de x é atualizado o estado de tensões e verificado se o mesmo se encontra na superfície plástica, caso não esteja é feita uma nova iteração começando na equação 5.63 até ocorrer a convergência.

Esse mecanismo para determinação da tensão de contato com a superfície apresenta a grande vantagem de convergir rapidamente para a superfície, porém caso o ponto inicial da análise esteja próximo de um ponto de inflexão o algoritmo não apresenta convergência, pois f' fica variando de valores negativos para valores positivos.

O ponto de contato com a superfície plástica fica definido como:

$$d\mathbf{e}_{ij}^e = x d\mathbf{e}_{ij} \quad (5.65)$$

$$d\mathbf{s}_{ij}^e = C_{ijkl} d\mathbf{e}_{ij}^e = C_{ijkl} x d\mathbf{e}_{ij} \quad (5.66)$$

$$d\mathbf{e}_{ij} = (1-x) d\mathbf{e}_{ij}$$

5.2.6. Atualização das Tensões e Avaliação da Nova Superfície:

Após a determinação da tensão de contato com a superfície plástica a parcela restante do incremento de deformações é dividida em subincrementos e a cada subincremento é atualizado o estado de tensões para a superfície plástica pelo gradiente da mesma no último ponto de contato como é apresentado a seguir:

- Cálculo do parâmetro de consistência incremental:

$$dI|_n = \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \right|_n C_{ijkl} d\mathbf{e}_{kl}}{\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \right|_n C_{ijkl} \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{kl}} \right|_n + \left[A + E \left(\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_z} \right|_n \right)^2 \right]} \quad (5.67)$$

- Determinação da parcela plástica do incremento de deformação:

$$d\mathbf{e}_{ij}^p|_{n+1} = dI|_n \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \right|_n \quad (5.68)$$

- Determinação do incremento de tensões:

$$d\mathbf{s}_{ij}|_{n+1} = C_{ijkl} \left(d\mathbf{e}_{ij}|_n - d\mathbf{e}_{ij}^p|_{n+1} \right) \quad (5.69)$$

$$d\mathbf{s}_{ij}|_{n+1} = \mathbf{s}_n + d\mathbf{s}_k \quad (5.70)$$

A cada subincremento, deve-se ainda atualizar a posição do cap. O modelo implementado prevê somente o comportamento compressivo do material, ou seja:

$$\mathbf{k} = (\mathbf{k})|_{\max} \quad (5.71)$$

No caso da superfície de ruptura com endurecimento ser violada, a atualização do parâmetro de endurecimento é feita conforme a equação 4.111:

$$\mathbf{k}^{n+1} = \mathbf{k}^n + d\mathbf{k} \quad (5.72)$$

$$d\mathbf{k} = 3d\mathbf{l} \frac{\partial f / \partial I_1}{\partial \mathbf{e}_{kk}^p / \partial \mathbf{k}} \quad (5.73)$$

Essa seqüência é repetida para todos os subincrementos.

5.2.7. Correção do erro induzido no processo (drift):

Dada a não-linearidade da curvatura da superfície do problema, ao final da correção de tensões, tem-se um erro:

$$E = \sqrt{J_2} - f(\mathbf{s}_{ij}^i, \mathbf{k}^i) \neq 0 \quad (5.74)$$

Este erro pode ser minimizado utilizando-se incrementos ou subincrementos suficientemente pequenos para que não haja uma discrepância devido ao acúmulo destes erros no processo. Ao final de cada subincremento optou-se aqui por corrigir este erro trazendo o estado de tensões para a superfície de escoamento atualizada. Para efetuar esta correção, utilizou-se o método iterativo de Newton-Raphson, atualizando os pontos na direção normal a superfície. O método é o mesmo aplicado para determinação do ponto de contato do preditor elástico com a superfície de escoamento, sendo que o $D\mathbf{s}$ agora está na direção do gradiente.

5.3. Validação do modelo:

O modelo foi verificado através de uma simulação unidimensional, composta por quatro nós e dois elementos triangulares, figura 5.2, submetidos à tração e à compressão. Os resultados do algoritmo estão apresentados nas figuras 5.3 e 5.4, nelas pode-se verificar o retorno do algoritmo subincremental plástico à superfície de escoamento, demonstrando o correto funcionamento da rotina.

Nas figuras é observado o estado de tensões de contato com a superfície, sendo logo após determinado o estado de tensões teste, através da soma de uma parcela do incremento de tensões e por fim é realizada sua atualização para a superfície de estados de tensões admissível, o algoritmo recomeça o trabalho considerando que o novo ponto de contato é o ponto do estado de tensões admissíveis. Na figura 5.3 é observado que os pontos verdes que representam o estado de tensões admissíveis se apresenta em uma configuração próxima a curva desenhada, representando o resultado do algoritmo, embora os pontos estejam todos sobre a curva de tensões admissível na figura isso não é representado devido ao fato de estarem em ângulos diferentes ao da superfície desenhada, de acordo com o exposto na figura 4.4.

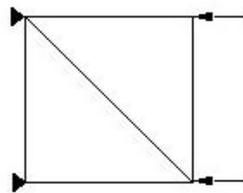


Figura 5.2 Modelo Unidimensional

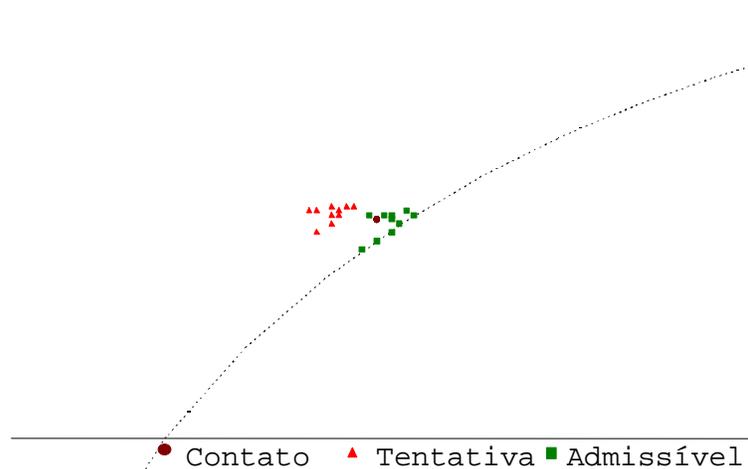


Figura 5.3 Modelo Unidimensional Submetido a Compressão

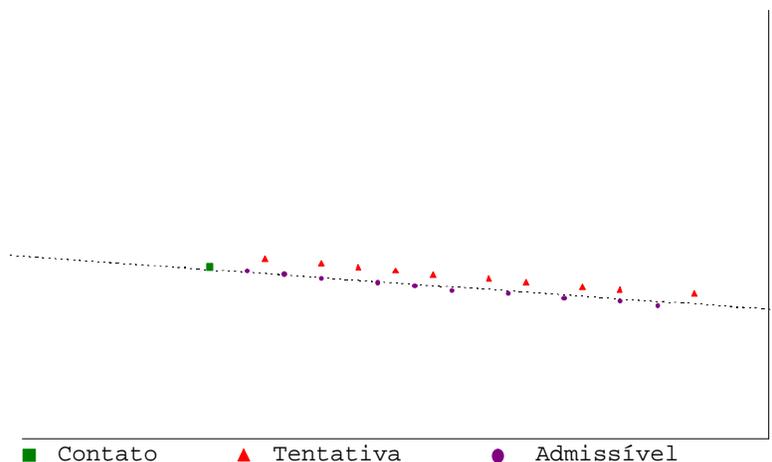


Figura 5.4 Modelo Unidimensional Submetido a Tração

A figura 5.4 também apresenta o comportamento do algoritmo, como pode ser visto na mesma os pontos roxos representam o estado de tensões admissível, no final do algoritmo, também apresenta em uma configuração próxima a curva desenhada, devido ao mesmo problema apresentado no exemplo da compressão.

Os pontos do estado de tensões admissível e do estado de tensões de contato podem apresentar pontos fora da superfície na curva, pois a projeção da superfície encontra-se apenas para um ângulo b , conforme a figura 4.4. O ângulo b apresenta uma variação de -30° até 30° , resultando nas várias faces da superfície de Mohr-Coulomb.

5.3.1. Capacidade de carga de uma sapata corrida:

Para validação do modelo, foi utilizado o problema clássico do cálculo da capacidade de carga de uma sapata corrida. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados do programa TRINL (COPPE, 1995), onde é utilizada a formulação proposta por OWEN, HINTON (1980) para implementação do modelo de Mohr-Coulomb. Foram também efetuadas análises com os modelos de ruptura por colapso hidrostático partindo dos dados de CHEN, BALADI (1985), apresentados na figura 5.5 e na figura 5.6. Os resultados obtidos pelo modelo implementado por COELHO (2001) também foram utilizados nessa avaliação.

O problema clássico da sapata apoiada em uma camada de solo foi analisado com a superfície de ruptura implementada neste trabalho. A figura 5.5

apresenta o modelo e as propriedades do material utilizado. Os resultados são comparados com as soluções propostas por Prandtl, Coulomb e Terzaghi (TERZAGHI, 1943) e também análises numéricas. Uma análise foi realizada na versão original do programa TRINL. Onde foi utilizada a malha de elementos finitos da análise do modelo implementado (figura 5.6).

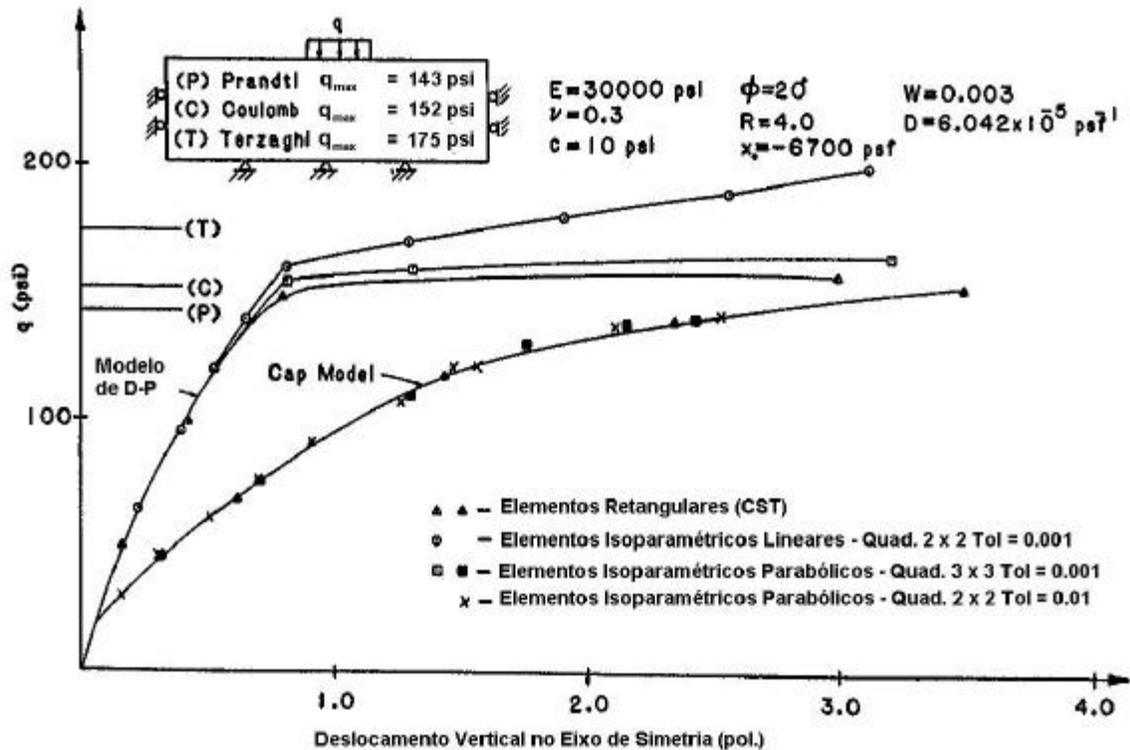


Figura 5.5 Análise da Capacidade de Carga de uma Sapata (CHEN, BALADI, 1984)

Outra análise foi a apresentada por CHEN, BALADI (1985), onde apresentam uma versão do modelo de *cap* associado a uma superfície de cisalhamento baseada no modelo de Drucker-Prager. A formulação utilizada é a de grandes deformações. Esta análise utilizou elementos isoparamétricos quadráticos com integração de Gauss 2 x 2 e 3 x 3. O *cap* adotado é elíptico com uma relação entre eixos de 4.

Foi adotado também para validação o modelo implementado por COELHO (2001), onde foram adotadas duas superfícies de ruptura, uma de Drucker-Prager e outra de Mohr-Coulomb, ambas associadas a um *cap* elíptico.

A sapata é simulada por uma carga distribuída sobre os elementos conforme apresentado na figura 5.6.

As análises foram efetuadas em cerca de 20 incrementos, admitindo-se 700 iterações para os valores mais próximos da carga limite e utilizando uma tolerância de 0,001 tanto para a norma dos deslocamentos como para a norma dos resíduos.

A tabela 5.1 mostra as cargas últimas previstas por Prandtl, Coulomb e Terzaghi (TERZAGHI,1943). A seguir, apresenta as cargas últimas obtidas por CHEN, BALADI (1985) em seu modelo de *cap*, os resultados de COELHO (2001) e por último, os valores de carregamento para os quais foi obtida a última convergência nos modelos implementados neste trabalho.

A figura 5.7 apresenta a curva carga-deslocamento para o nó do topo pertencente ao eixo de simetria do modelo obtida admitindo somente a ruptura por cisalhamento, onde os resultados são comparados com as soluções propostas por Prandtl, Coulomb e Terzaghi (TERZAGHI, 1943). A resposta da implementação se apresentou entre os valores teóricos de Terzaghi e Coulomb.

A figura apresenta os resultados obtidos com os modelos de Mohr-Coulomb sem *cap*. Observe-se a semelhança entre a curva apresentada e a da figura 3.2. A um determinado nível de pressão hidrostática, ocorre uma rápida degradação na resposta, havendo um ganho de resistência a seguir, que prossegue até a ruptura do material. Verifica-se que a influência do meridiano de tensões é muito significativa na resposta do modelo.

A figura 5.8 apresenta as deformações em alguns incrementos, nela pode ser observado que o solo abaixo da sapata sofre um deslocamento negativo, enquanto o na lateral da sapata apresenta um deslocamento positivo. Essa comportamento se apresenta em total concordância com a teoria clássica da plasticidade.

Já na figura 5.9 é apresentada a variação do primeiro invariante de tensões efetivas, ele representa o comportamento do estado de tensões sobre o eixo hidrostático, representando inclusive o bulbo de pressões sobre a sapata.

As zonas de plastificação de diversos incrementos são apresentadas na figura 5.10, onde é observado um comportamento coerente com outros modelos já comprovados.

Por fim a figura 5.11 apresenta a tensão normalizada de Von Mises, onde pode ser observado que os pontos mais críticos estão na região abaixo da sapata, próximos aos extremos da mesma.

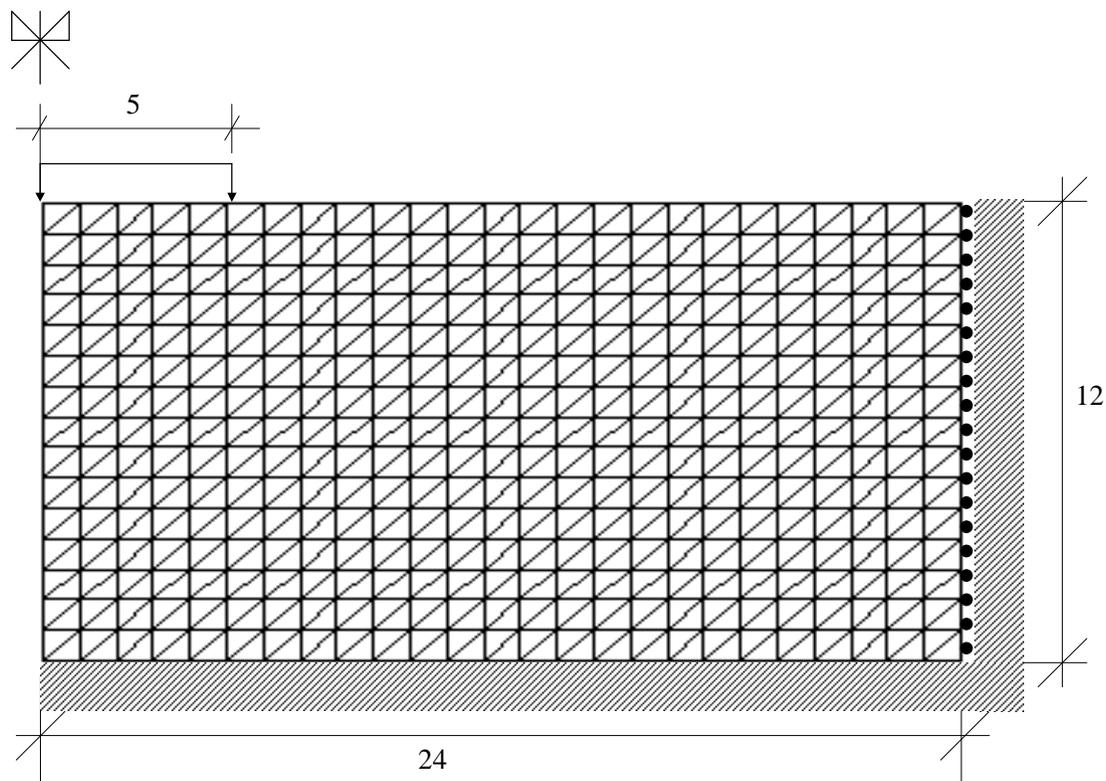


Figura 5.6 Discretização do Modelo

Tabela 5.1 Capacidade de Carga de uma Sapata Corrida segundo Diversos Modelos de Ruptura

MODELO	CAPACIDADE DE CARGA
Prandtl	143 psi
Coulomb	153 psi
Terzaghi	175 psi
Drucker-Prager (CHEN e BALADI, 1985)	142 psi
Mohr-Coulomb (programa TRINL)	155 psi
Cap Model (CHEN e BALADI, 1985)	142 psi
Drucker-Prager (COELHO, 2001)	144 psi
Drucker-Prager + Cap (COELHO, 2001)	144 psi
Mohr-Coulomb (COELHO, 2001)	155 psi
Mohr-Coulomb + Cap (COELHO, 2001)	152 psi
Mohr-Coulomb implementado	149 psi

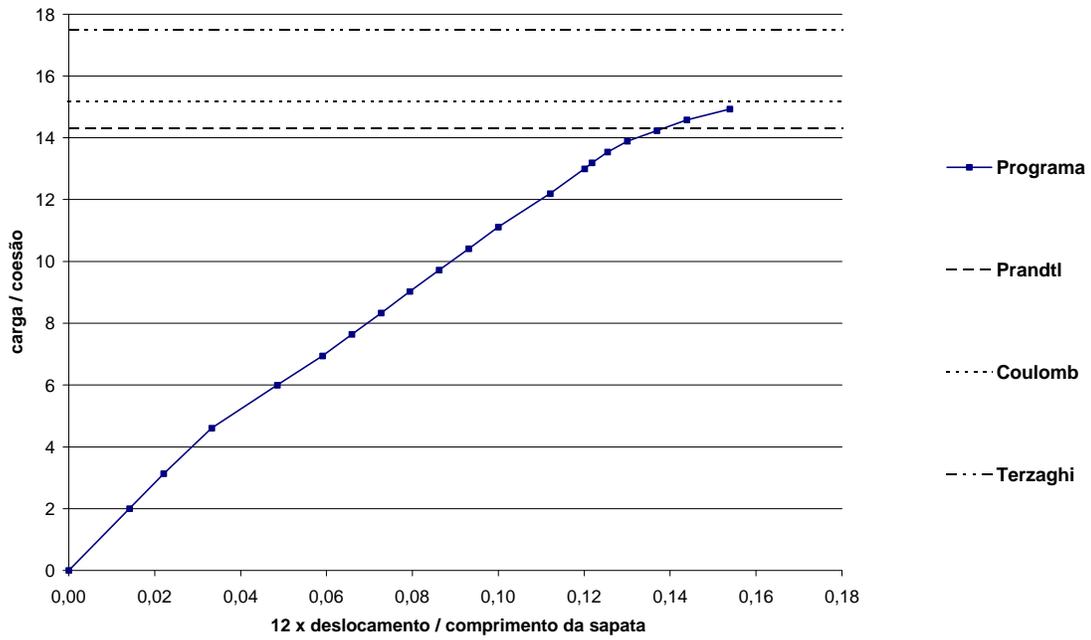


FIGURA 5.7 - Carga x Deslocamento no Topo

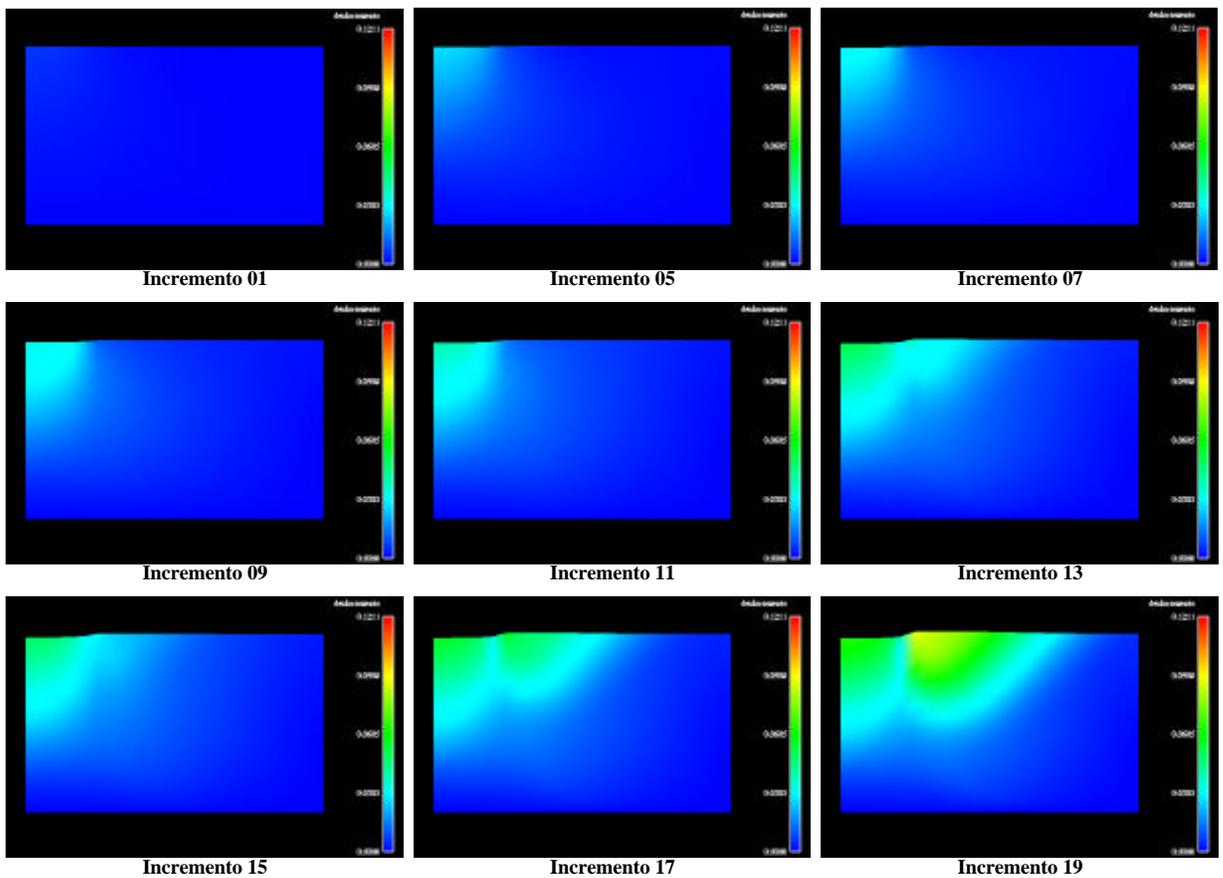


FIGURA 5.8 – Deformações

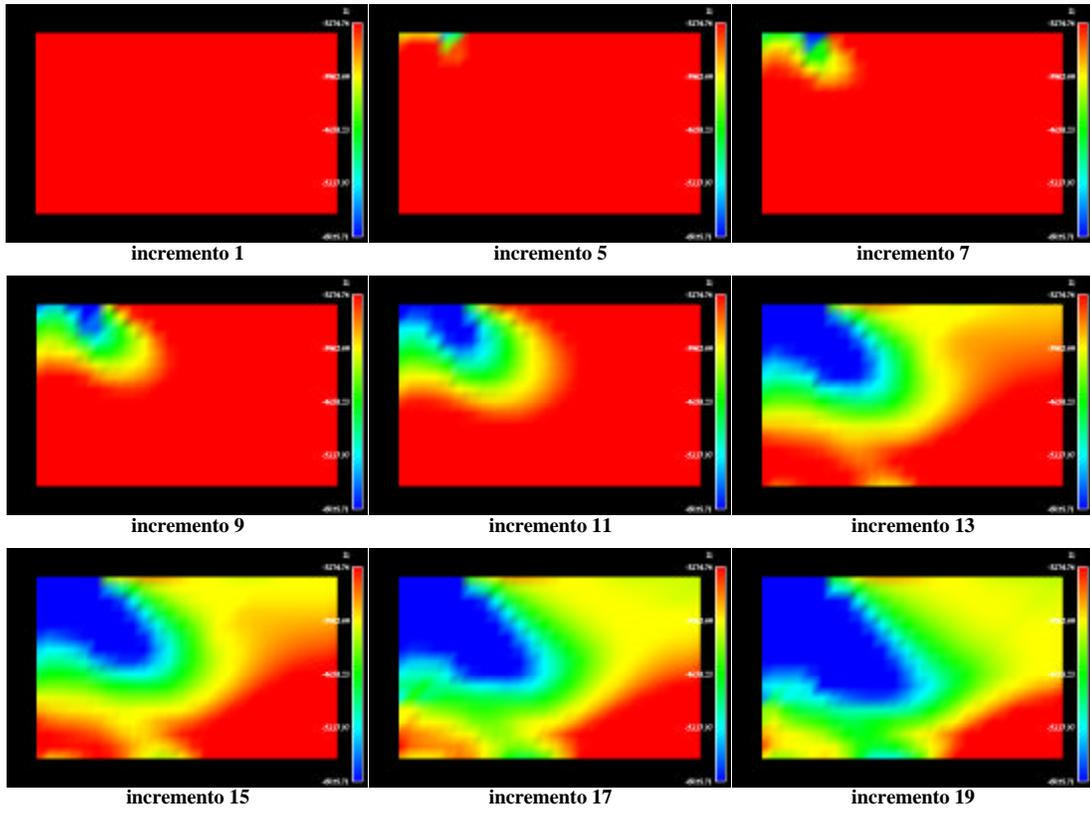


FIGURA 5.9 – Primeiro Invariante de Tensões

Efetivas

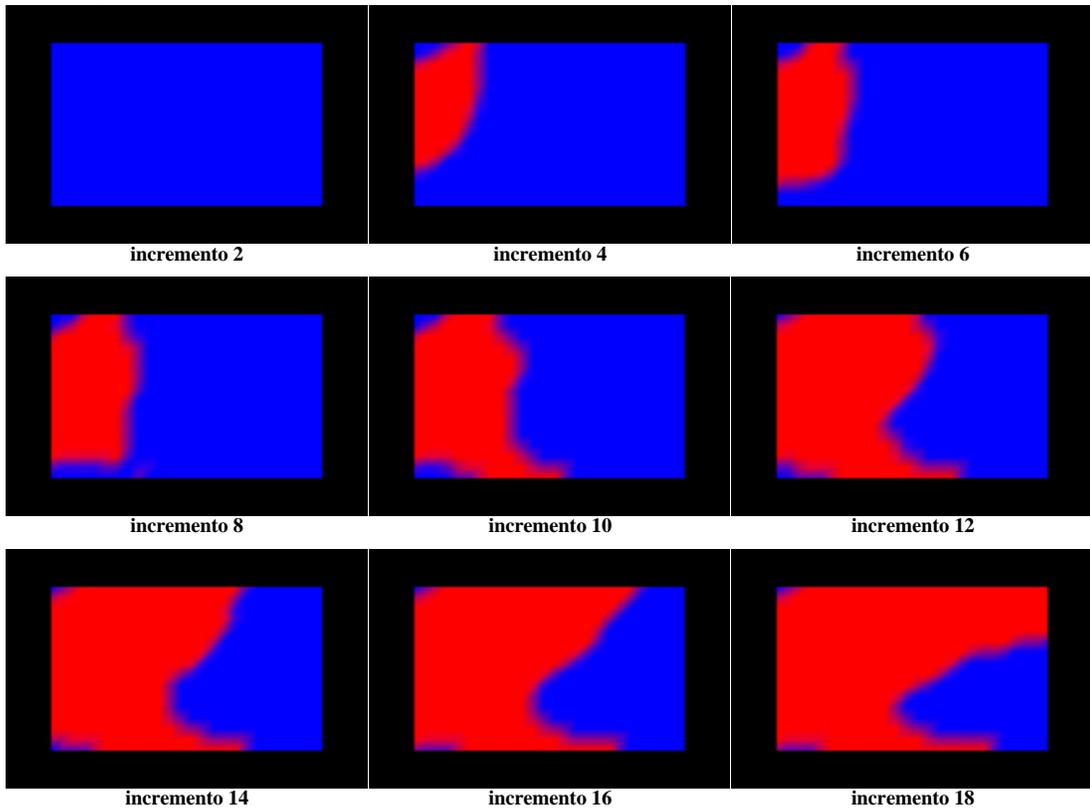


Figura 5.10 – Zona de Plastificação

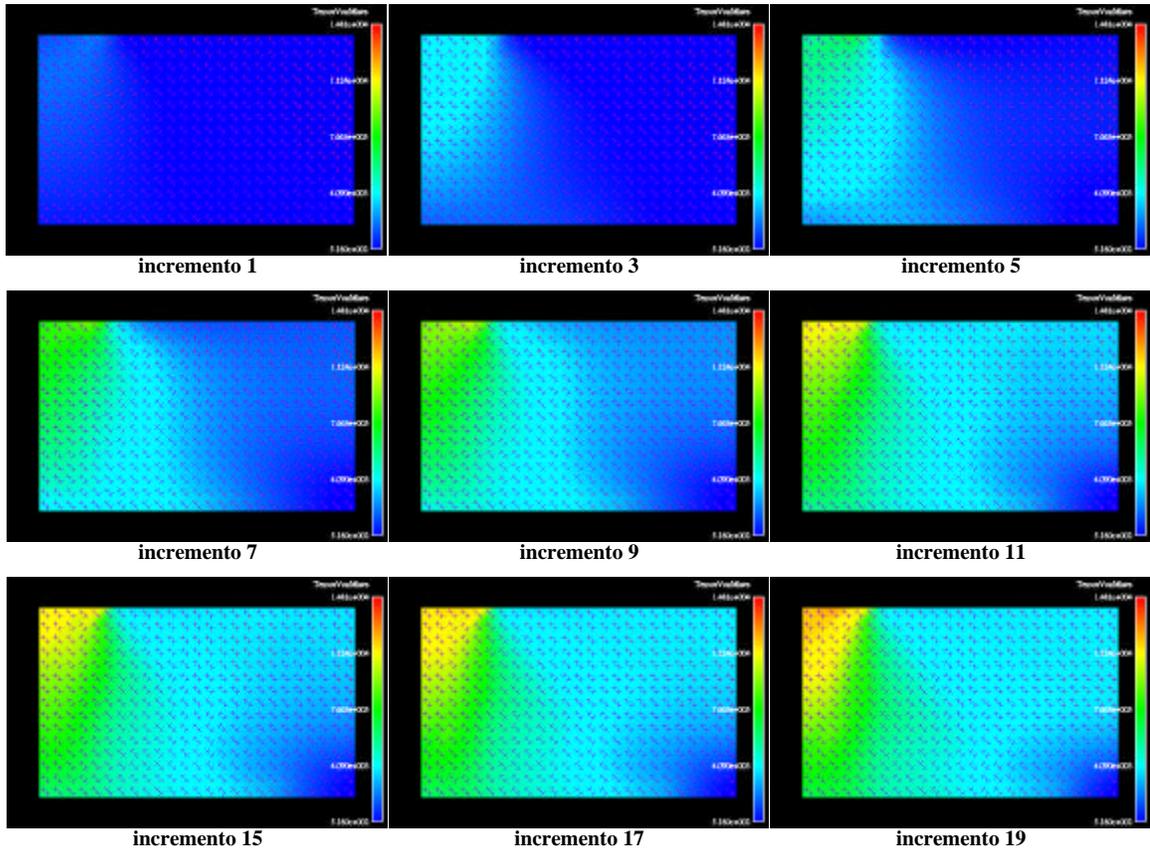


Figura 5.11 – Tensão de Von Mises

Capítulo 6

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

6.1 Introdução:

Este capítulo apresenta simulações numéricas para análise de tensões em poços de hidrocarbonetos. Os dados do poço foram extraídos do trabalho de SOARES (2000). Referem-se ao campo de Congro localizado na Bacia de Campos a 90 km da costa, com uma lâmina d'água que varia de 200 a 600 m, cujo reservatório situa-se a 3000 m de profundidade, formado pelo calcarenito de Quissamã, que possui 85% de volume de óleo.

O poço é horizontal, perfurado em um maciço com propriedades homogêneas. Os parâmetros elásticos e de resistência foram obtidos por simulações dos ensaios de laboratório (COELHO, 2001). Neles o fluxo de fluidos foi implementado por um campo de pressões de poro de uma expressão analítica (POLILLO, 1987).

Foram realizadas três análises: uma elástica, para verificar o comportamento linear do material, outro modelo completo com o *cap* suave (consideração do poro-colapso) e por fim com endurecimento.

6.2 Ajuste do Modelo:

O modelo foi calibrado pelo trabalho experimental de SOARES (2000), onde foram efetuados ensaios em formações calcárias visando a avaliação do fenômeno de poro-colapso para obtenção de curvas de fechamento de envoltória.

6.2.1 **Determinação dos Parâmetros para Análise Numérica:**

- São necessários oito parâmetros para o modelo constitutivo implementado:
- Duas constantes elásticas, sendo utilizado o módulo de elasticidade (E) e o coeficiente de Poisson (ν);
- Dois parâmetros de resistência: a coesão (c) e o ângulo de atrito (ϕ);
- Dois parâmetros para definição do *cap suave*: a posição onde inicia a interseção do *cap* com o eixo hidrostático X_o e o fator de forma R ;
- Duas constantes referentes à lei de endurecimento.

A determinação desses parâmetro foi apresentada no trabalho de COELHO (2001), onde foram obtidos através de simulações numéricas associadas aos resultados de laboratório da tese de SOARES(2000).

6.3 **Características do Modelo:**

O poço é considerado circular com diâmetro de 8,5" (0,2159 metros). A formação foi discretizada por uma malha de elementos finitos circular, devido a sua facilidade de geração e foi utilizada para análise $\frac{1}{2}$ da malha devido à simetria do carregamento aplicado, reduzindo o tamanho da malha e do problema a ser analisado. A malha foi gerada com 2121 nós e 4000 elementos e o raio do poço é equivalente a 4,25" (0,10795 metros) e o raio total da malha é de 20 metros, permitindo uma avaliação das interferências da formação no comportamento do poço. A malha pode ser observada na figura 6.1, onde também é apresentado um detalhe da região do poço.

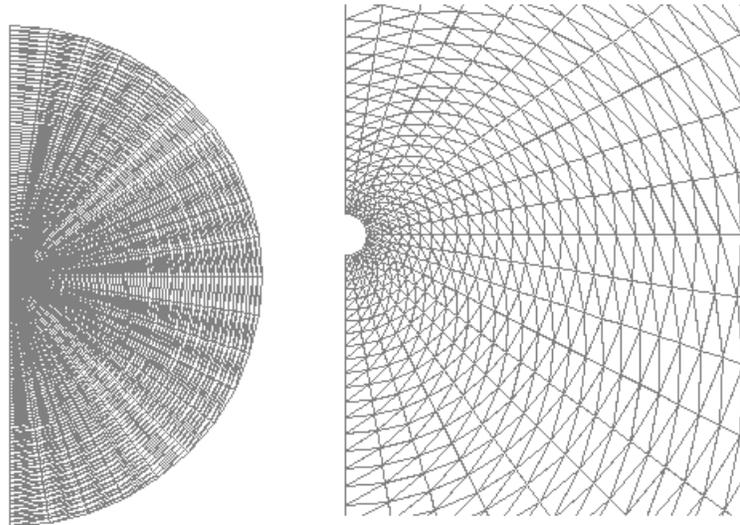


FIGURA 6.1 – Malha Gerada e Detalhe da Região do Poço

Os parâmetros de resistência ao cisalhamento são constantes para todas as análises. Foram utilizados dois conjuntos de parâmetros para definir o cap conforme os ajustes desenvolvidos por COELHO (2001) e apresentados na tabela 6.1.

TABELA 6.1
Parâmetros de Resistência para Análise Numérica

Material	E (MPa)	n	C (MPa)	f	R	X_0 (MPa)	A_w (MPa ⁻¹)
1	1200,00	0,2	8,5	42,5°	3,0	-47,0	4,00x10 ⁻⁶
2	1200,00	0,2	8,5	42,0°	2,0	-36,0	4,00x10 ⁻⁶
Elástica	1200,00	0,2	850000,0	42,5°	3,0	-1000,0	4,00x10 ⁻⁶

As simulações da fase de perfuração e de produção foram efetuadas de forma incremental, avaliando primeiro o efeito da perfuração na redistribuição das tensões iniciais em conjunto com a pressão do fluido de perfuração na parede do poço, após é avaliada a fase inicial de produção, onde é aplicado um diferencial de pressão fornecido por SOARES (2000), obtendo a nova pressão aplicada na cavidade e também o fluxo de fluidos para o interior do poço e por fim aplicou-se um diferencial de pressão no contorno do poço igual à pressão de abandono com o objetivo de avaliar o comportamento do modelo para diferenciais de pressão mais altos. As características do estado inicial de tensões efetivas, da pressão do fluido na cavidade e do diferencial de pressão estão apresentados na tabela 6.2.

TABELA 6.2
Características das Tensões In-Situ e Pressões de Fluido (MPa)

Tensão Efetiva Vertical (MPa)	Tensão Efetiva Horizontal (MPa)	Pressão Estática (MPa)	P_e (Perfuração) (MPa)	P_w (MPa)
32,1	9,0	32,4	34,088	14,9

O diferencial de pressões em cada nó é um dado lido pelo programa e foi gerado analiticamente segundo POLILLO (1986), considerando-se o fluxo radial, através da expressão:

$$\Delta P(r) = \frac{P_w - P_e}{\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)} \ln\left(\frac{r_e}{r}\right)$$

onde:

p_w : pressão na parede do poço;

p_e : pressão estática do reservatório;

r_e : raio de drenagem;

r_w : raio do poço;

r : distância do ponto em relação ao eixo do poço;

$DP(r)$: diferencial de pressões, função da posição.

O raio de drenagem considerado foi de 200 m e foram realizadas três análises: uma elástica, uma com o modelo completo com o *cap* e uma com a implementação do endurecimento. Cada análise consiste em três incrementos de carga: a fase de perfuração, o início da produção e a pressão de abandono.

6.4 *Análise Elástica:*

O objetivo desta análise é gerar subsídios para a avaliação dos efeitos do critério utilizado.

- ***Perfuração:***

A figura 6.2 mostra que durante a perfuração do poço surge uma concentração de tensões de compressão no eixo de simetria X, já as tensões de tração apresentam concentradas no eixo de simetria Y. As tensões de compressão atingem valores máximos no interior do maciço na vizinhança do poço, no entorno do eixo de simetria X. Os maiores valores de tensão hidrostática aparecem no contorno do poço no eixo de simetria Y. As tensões normalizadas de Von Mises apresentam valores maiores na direção do eixo de simetria X. Também pode ser observado na figura da deformação que o poço tem uma tendência de fechar na direção Y, a figura mostra na direita a malha deformada e na esquerda a configuração original da malha.

- ***Início da Produção:***

A figura 6.3 apresenta os resultados da análise do início da produção considerando o material elástico. Nela pode ser observado que nessa fase o poço continua com a tendência de fechar na direção Y. O efeito do fluxo de fluídos comprime toda a região do poço, todas as tensões principais são de compressão, existe uma grande concentração de tensões na região do eixo de simetria X. A tensão normalizada apresenta seus valores máximos na região do contorno do poço no entorno do eixo de simetria X, essa região também apresenta maior concentração das tensões hidrostáticas.

- ***Final da Produção:***

Nesta etapa é reduzida a tensão na parede do poço para o valor previsto de pressão de abandono do poço.

A figura 6.4 apresenta uma acentuação dos efeitos obtidos no início da produção. A figura da deformação também apresenta a tendência do poço de

fechar na direção Y, já a figura do primeiro invariante apresenta uma concentração das tensões hidrostáticas na direção do eixos de simetria X e na direção do eixo de simetria Y há um acréscimo na região vizinha ao poço. As tensões principais apresentam uma configuração similar ao início da produção, porém com zonas de compressão maiores. Esse efeito pode ser verificado na tensão de Von Mises, onde a região de tensões máximas se apresenta maior.

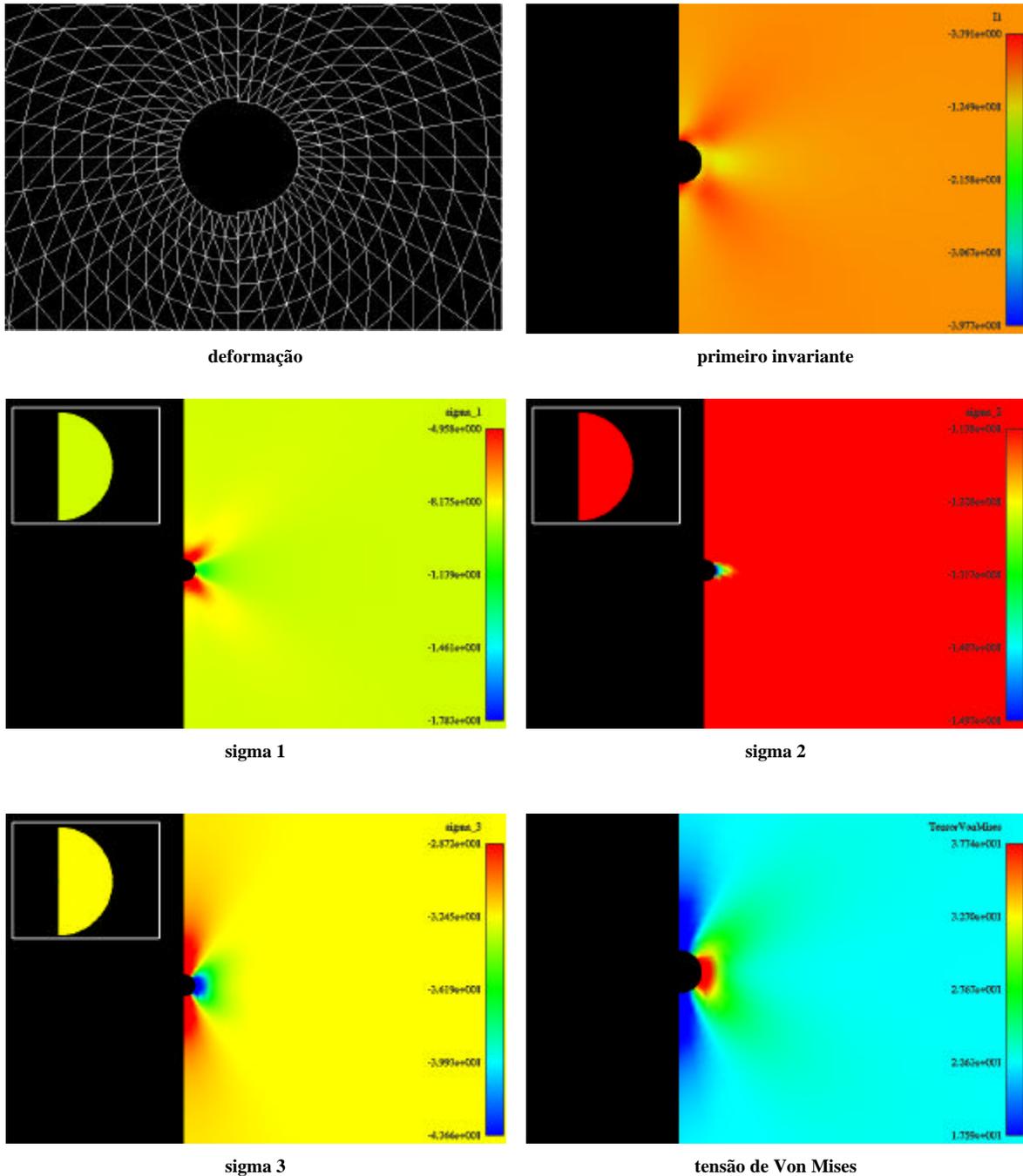


FIGURA 6.2 – Resultados da Perfuração – Elástico

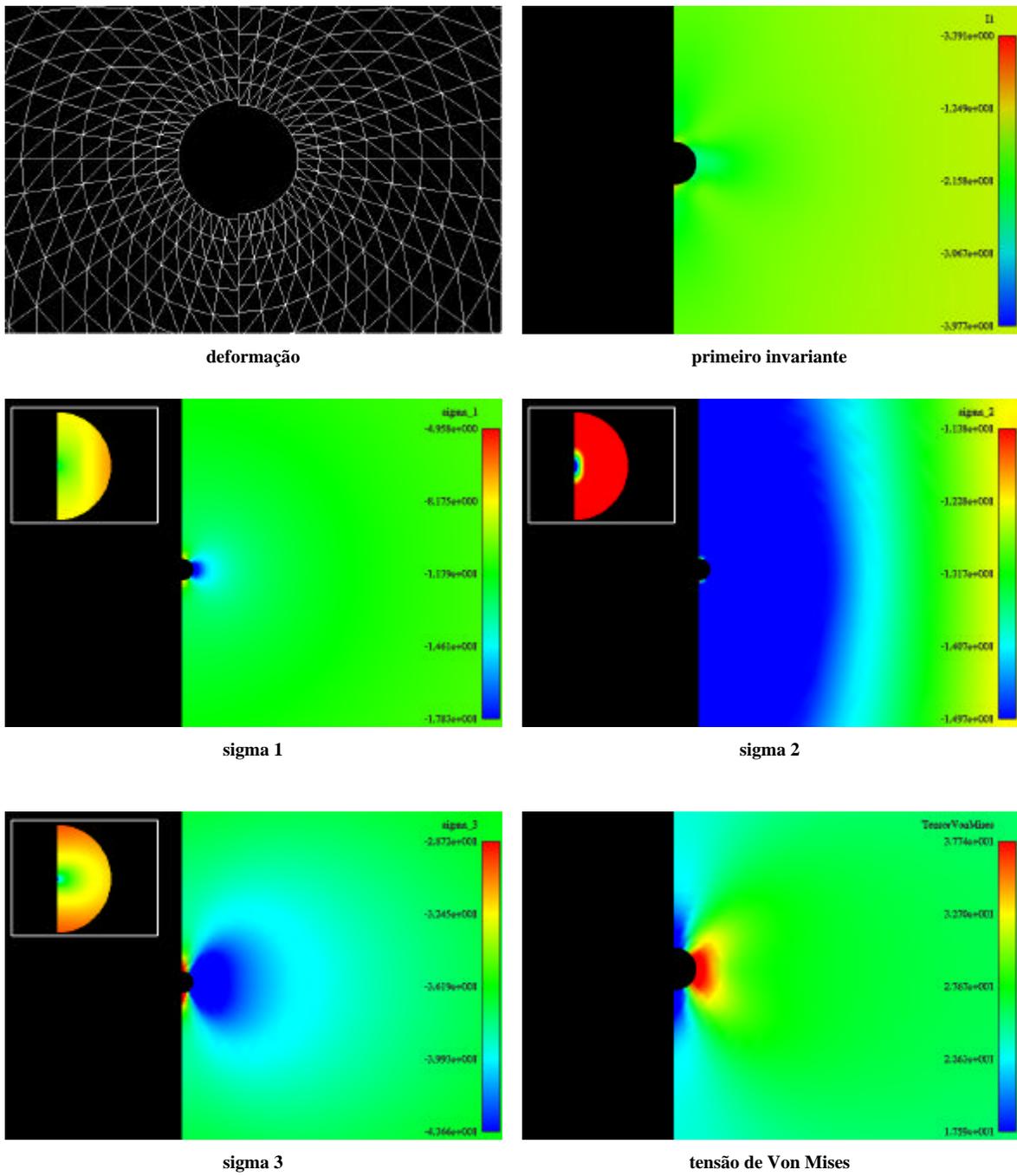
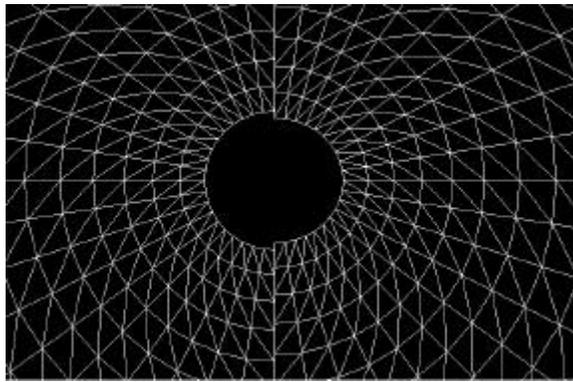
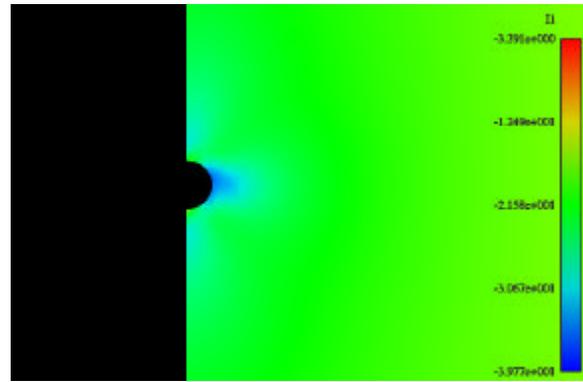


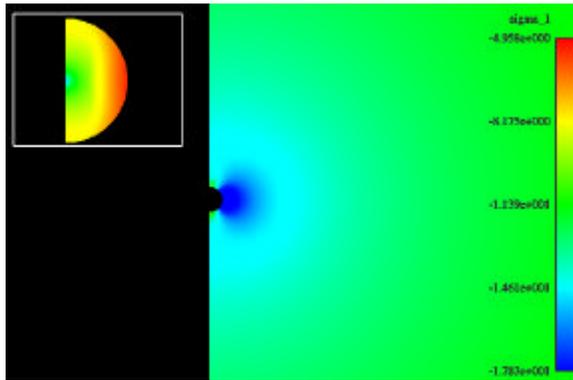
FIGURA 6.3 – Resultados do Início da Produção – Elástico



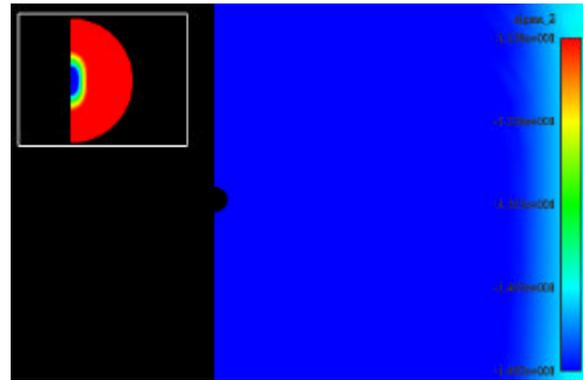
deformação



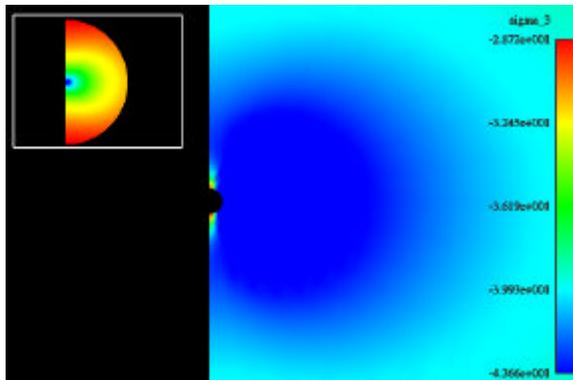
primeiro invariante



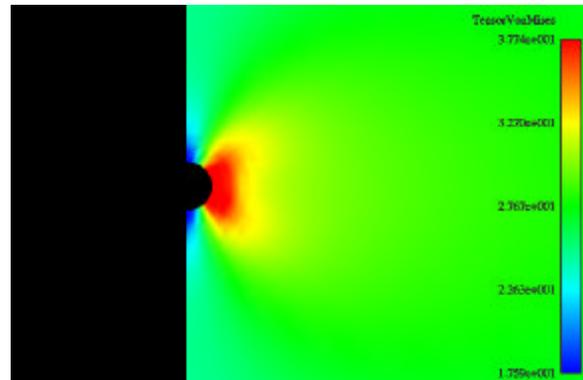
sigma 1



sigma 2



sigma 3



tensão de Von Mises

FIGURA 6.4 – Resultados do Final da Produção – Elástico

6.5 Análise da Ruptura por Cisalhamento e Poro-colapso:

As análises com o modelo de poro-colapso foram efetuadas através de dois modelos, conforme a tabela 6.3. Admite-se que o coeficiente de Biot é 1. Os modelos foram simulados com e sem o endurecimento.

TABELA 6.3
Características das Tensões In-Situ e Pressões de Fluido (MPa)

Modelo	Coesão (MPa)	f	R	p_0 (MPa)	A_w (MPa ⁻¹)	Raio de Drenagem (m)
1	8,5	42,5°	3,0	47,0	4,0 x 10 ⁻⁶	∞
2	8,5	42°	2,0	36,0	4,0 x 10 ⁻⁶	∞

6.5.1 Modelo 1:

O objetivo desta análise é verificar o comportamento do modelo de colapso de poros e compará-lo com o modelo elástico.

- **Perfuração:**

Na figura 6.5 verifica-se a plastificação de alguns elementos na parede do poço, na direção do eixo de simetria X.

A distribuição das tensões é idêntica a da análise elástica, porém com um aumento nas tensões, esse aumento é oriundo do confinamento das tensões pela superfície de escoamento. As tensões normalizadas apresentaram a mesma configuração do modelo elástico.

A deformação apresentou a tendência de fechar na direção Y e com a plastificação dos elementos do contorno do poço pode ser identificada ali uma zona de instabilidade.

A pressão hidrostática apresentou uma compressão maior que a do modelo elástico e a concentração da compressão foi na direção do eixo de simetria X, apresentando maior concentração no entrono do poço.

- ***Início da Produção:***

Na figura 6.6 verifica-se uma zona de plastificação maior na parede do poço, ainda na direção do eixo de simetria X.

A distribuição das tensões é idêntica a da análise elástica, porém apresentando uma redução nas tensões máximas e um aumento nas tensões mínimas, isso é oriundo também do confinamento das tensões pela superfície de escoamento, limitando os estados de tensão. As tensões normalizadas apresentaram a mesma configuração do modelo elástico.

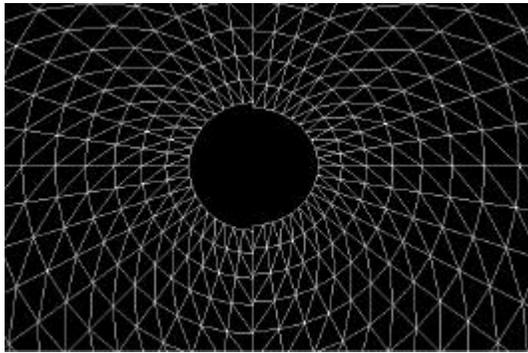
A deformação continua com a tendência de fechar na direção Y. A pressão hidrostática apresenta uma compressão maior que a do modelo elástico e a concentração da compressão foi na direção do eixo de simetria X, apresentando maior concentração no entrono do poço.

- ***Final da Produção:***

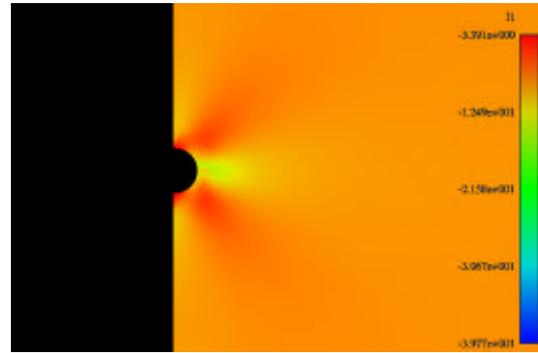
Na figura 6.7 verifica-se que a zona de plastificação cresce na direção do eixo de simetria X, caracterizando ali uma região que devem apresentar problemas de estabilidade.

As tensões se distribuem de forma idêntica a da análise elástica, onde as tensões máximas apresentam inclusive os mesmos valores, já as tensões mínimas apresentam uma certa relaxação devido a limitação do *cap*.

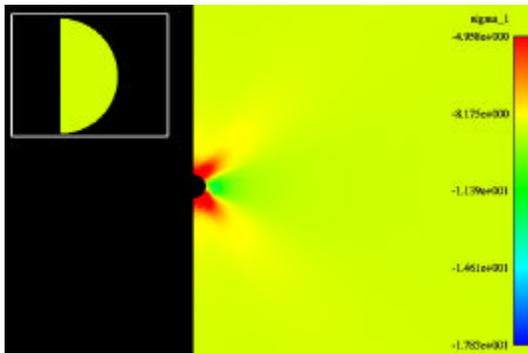
A deformação apresenta a tendência de fechar na direção Y. A pressão hidrostática apresenta um valor máximo igual ao da análise elástica, já o seu menor valor apresentou uma redução, a concentração da pressão hidrostática foi na direção do eixo de simetria X, apresentando uma concentração maior no entrono do poço.



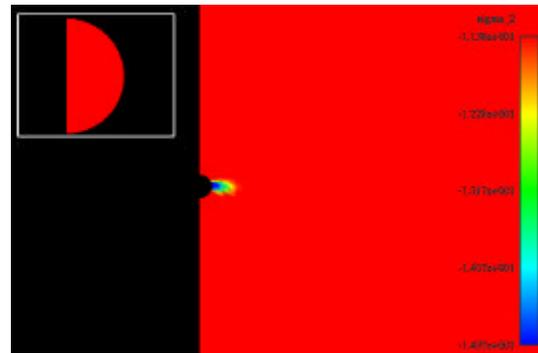
deformação



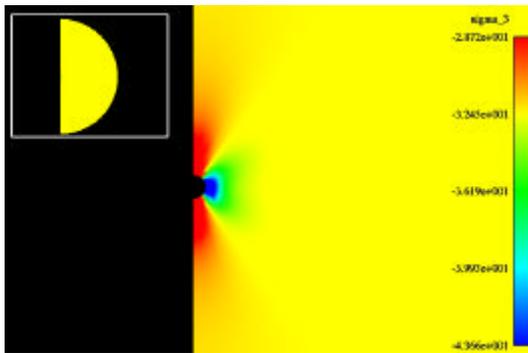
primeiro invariante



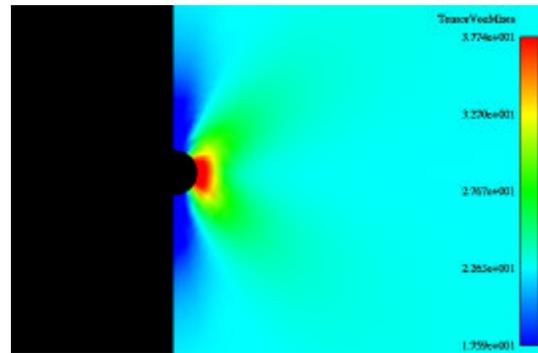
sigma 1



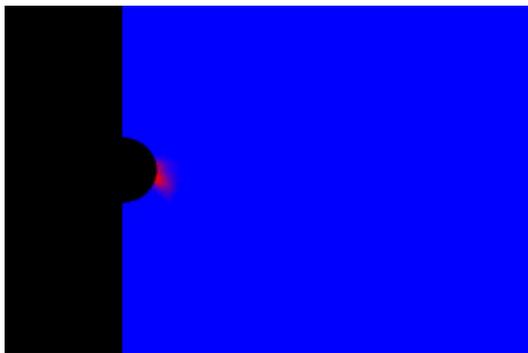
sigma 2



sigma 3

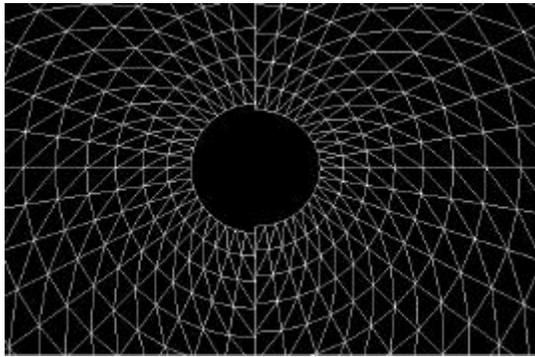


tensão de Von Mises

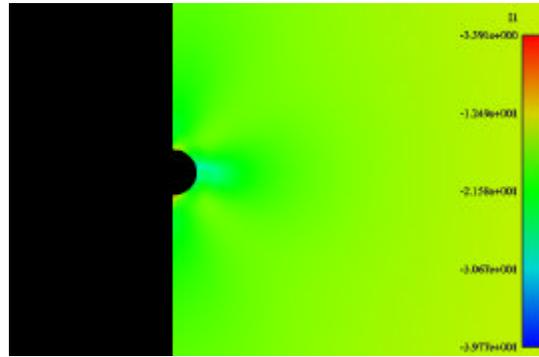


elementos plastificados

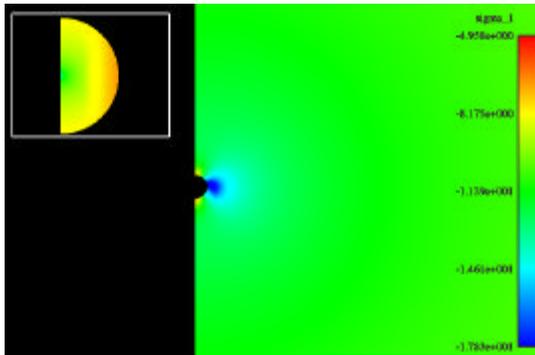
FIGURA 6.5 – Resultados da Perfuração – Modelo 1



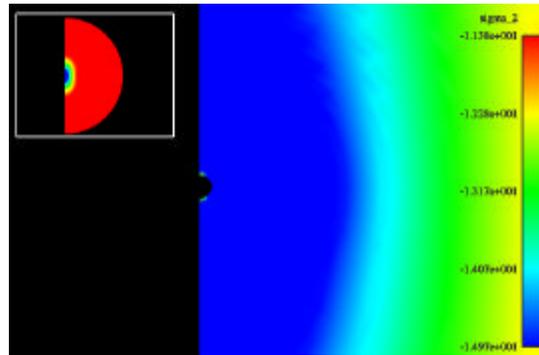
deformação



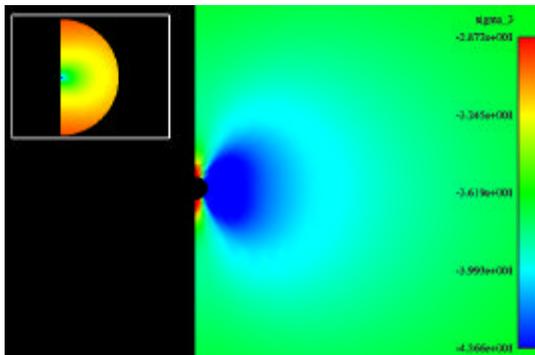
primeiro invariante



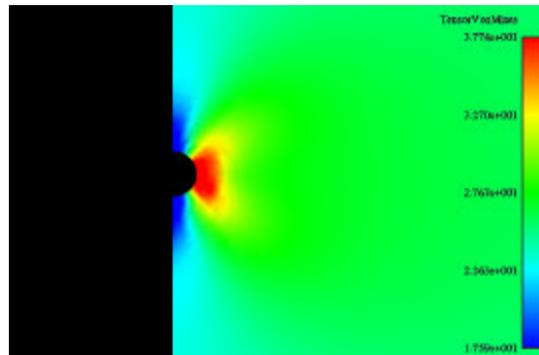
sigma 1



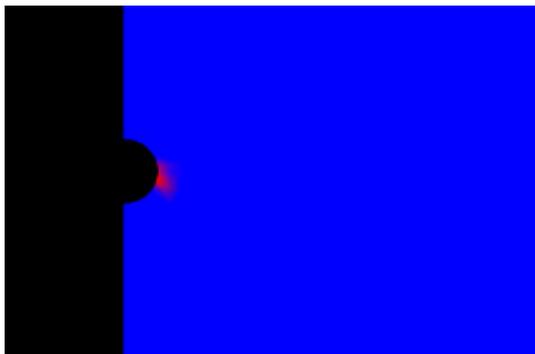
sigma 2



sigma 3

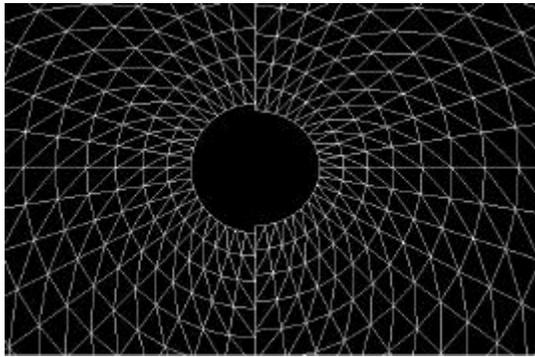


tensão de Von Mises

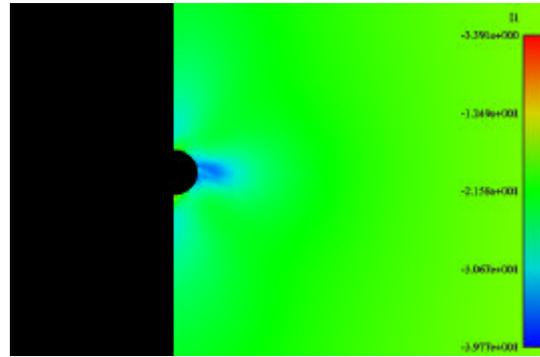


elementos plastificados

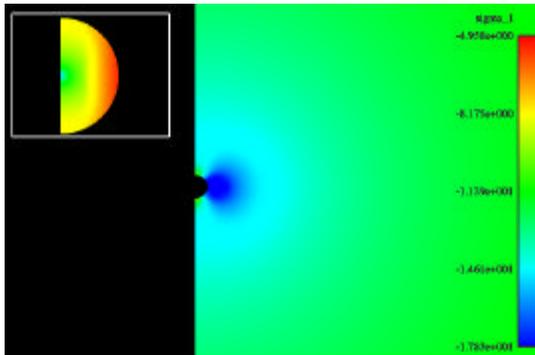
FIGURA 6.6 – Resultados do Início da Produção – Modelo 1



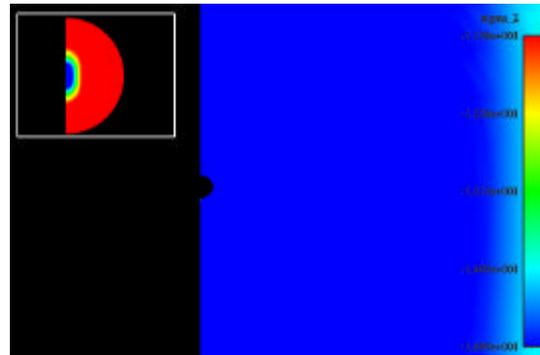
deformação



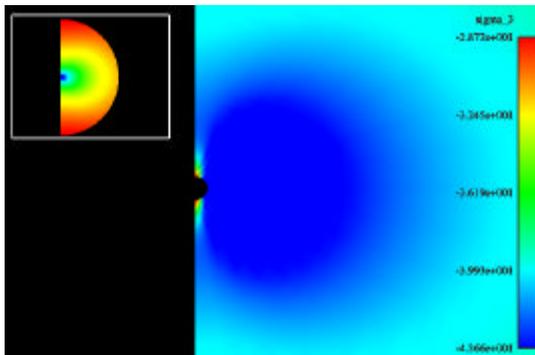
primeiro invariante



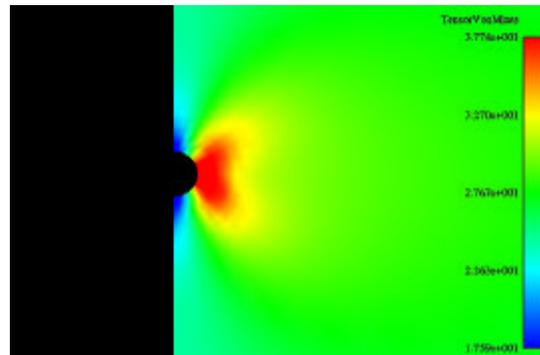
sigma 1



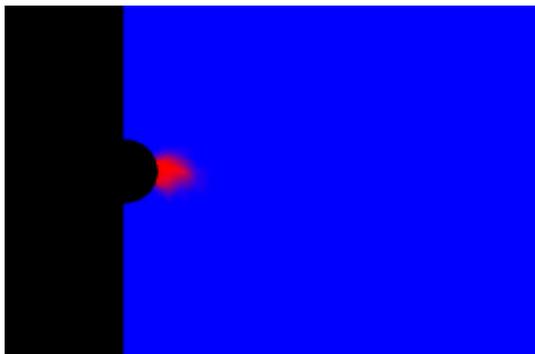
sigma 2



sigma 3



tensão de Von Mises



elementos plastificados

FIGURA 6.7 – Resultados do Final da Produção – Modelo 1

6.5.2 *Modelo 1 (endurecimento):*

O objetivo desta análise é avaliar o efeito do endurecimento isotrópico no estado de tensões final.

- ***Perfuração:***

Na figura 6.8 verifica-se que a distribuição das tensões é idêntica ao resultado do modelo sem endurecimento, apresentando um ligeiro aumento nas tensões maiores e uma pequena redução das tensões menores. As tensões normalizadas apresentaram a mesma configuração do modelo sem endurecimento.

A deformação apresenta uma tendência de fechar na direção Y. A pressão hidrostática apresentou uma configuração idêntica ao modelo sem endurecimento, porém com uma ligeira redução tanto no seu valor máximo quanto no seu valor mínimo.

- ***Início da Produção:***

Na figura 6.9 é verificado um comportamento idêntico ao modelo sem endurecimento.

A distribuição das tensões apresenta aumento nas tensões máximas e um ligeiro aumento nas tensões mínimas.

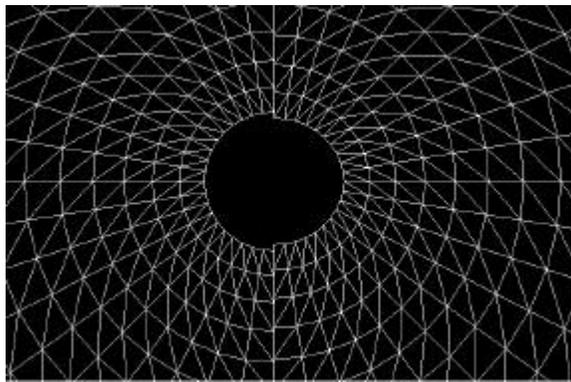
A deformação apresenta a mesma tendência de fechar na direção Y. A pressão hidrostática apresenta um valor máximo igual ao da análise sem endurecimento, já o valor mínimo da pressão hidrostática apresenta um aumento, apresentando uma concentração da compressão foi na direção do eixo de simetria X.

- ***Final da Produção:***

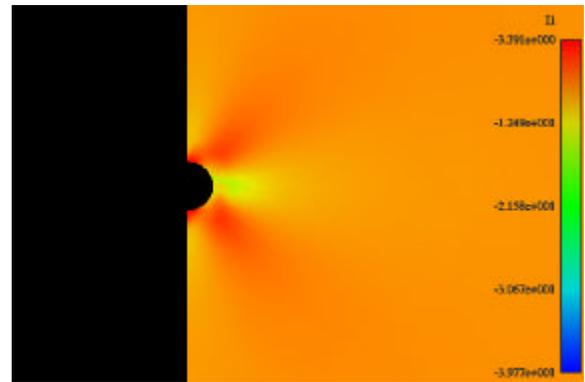
Na figura 6.10 pode-se observar que o efeito do endurecimento na distribuição de tensões foi praticamente imperceptível, apresentando inclusive os

mesmo valores para as tensões máximas. Já as tensões mínimas apresentaram uma maior compressão.

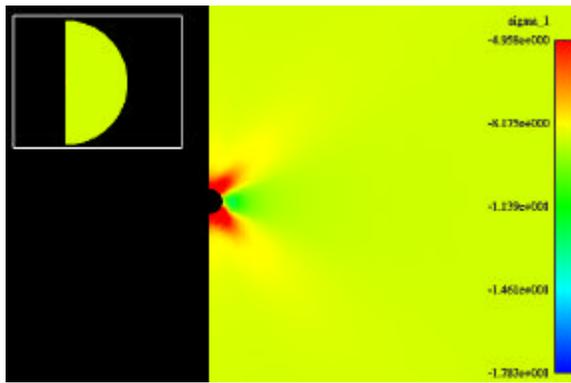
A tendência da deformação ainda é de fechar na direção Y. A pressão hidrostática apresenta um valor máximo igual ao da análise elástica, já o seu menor valor apresentou uma redução, a concentração da pressão hidrostática foi na direção do eixo de simetria X, apresentando uma concentração maior no entrono do poço.



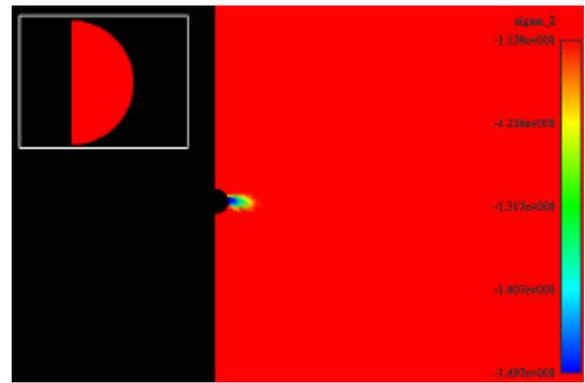
deformação



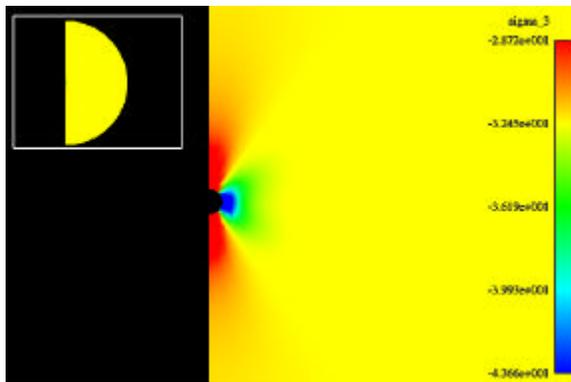
primeiro invariante



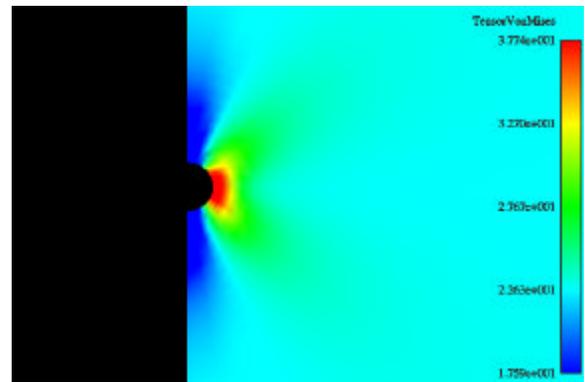
sigma 1



sigma 2



sigma 3



tensão de Von Mises

FIGURA 6.8 – Resultado da Perfuração – Modelo 1 com Endurecimento

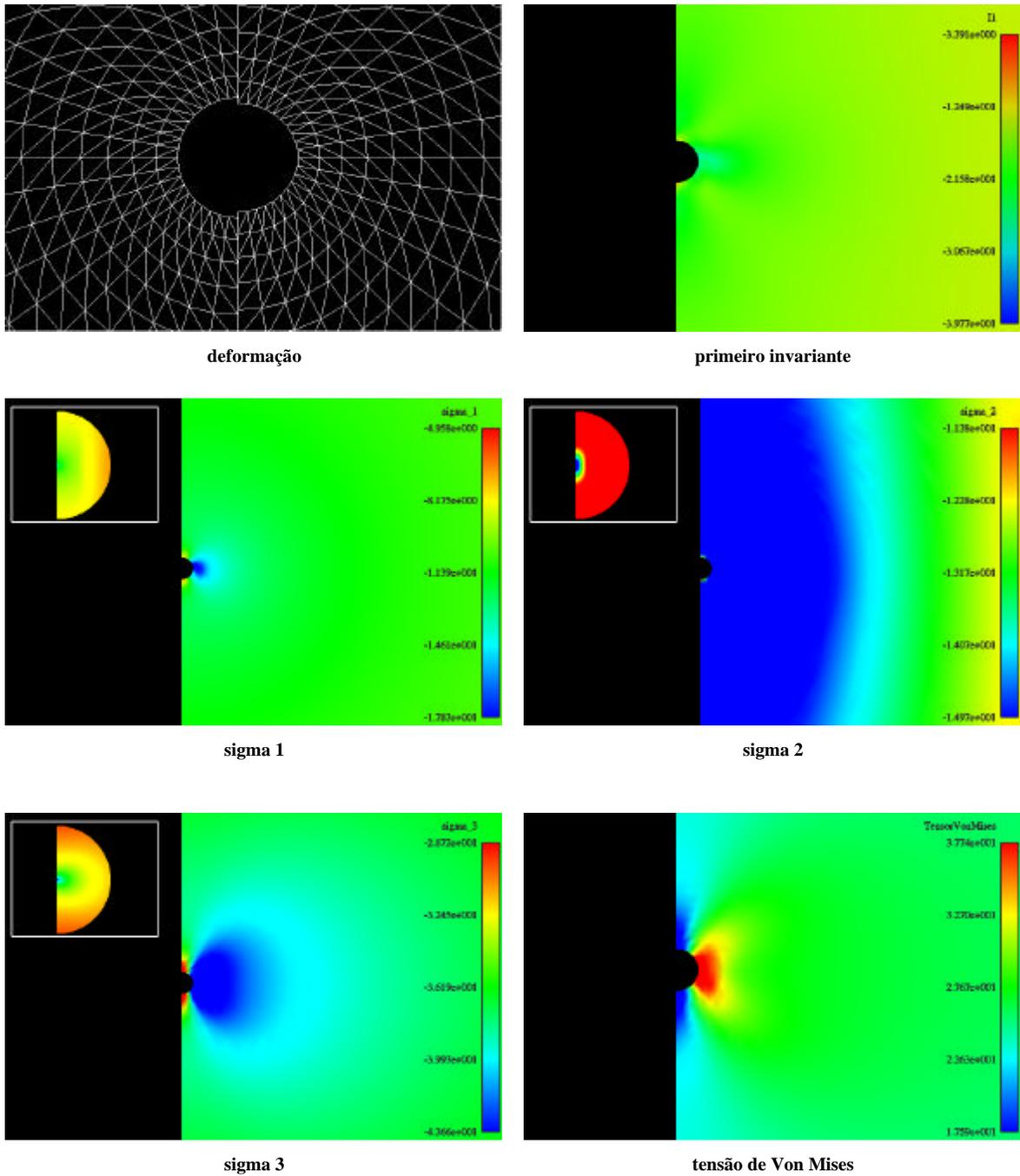
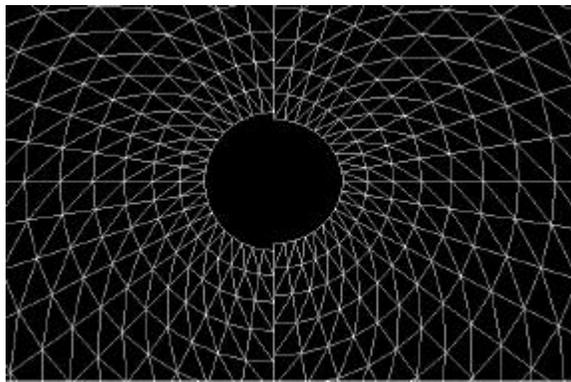
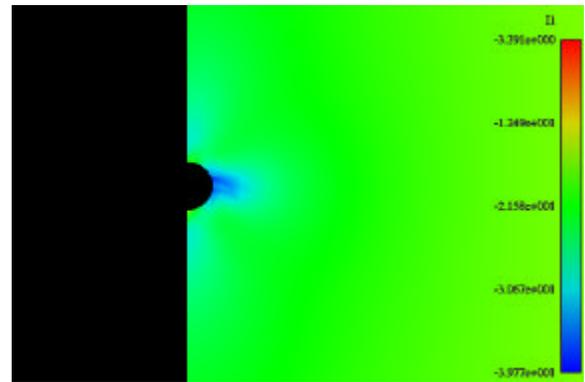


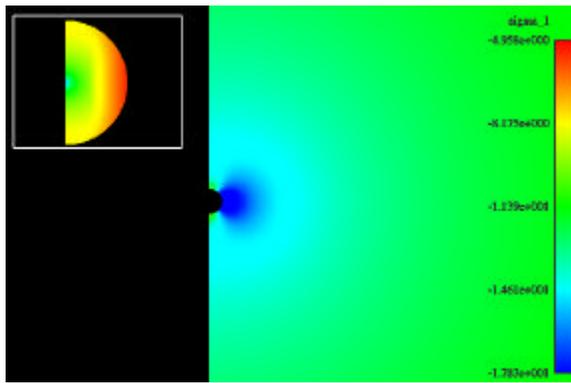
FIGURA 6.9 – Resultado do Início da Produção – Modelo 1 com Endurecimento



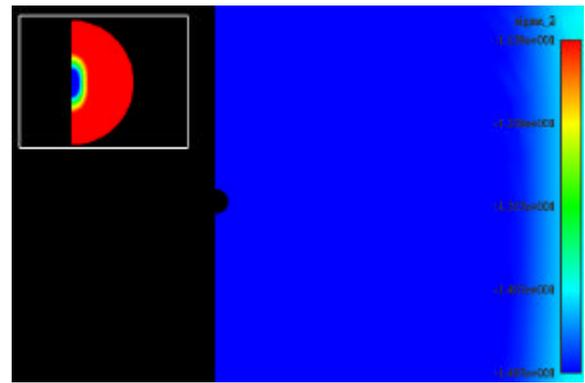
deformação



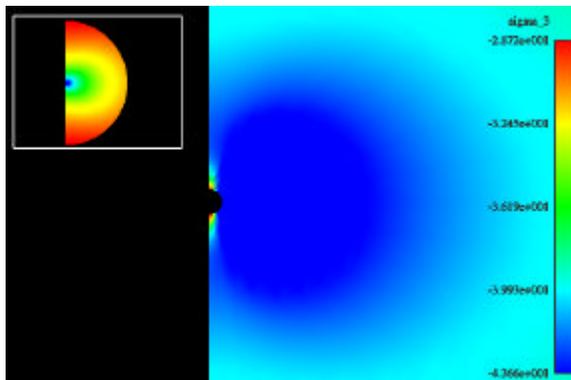
primeiro invariante



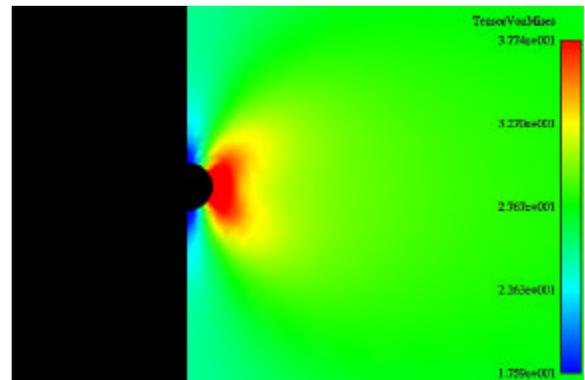
sigma 1



sigma 2



sigma 3



tensão de Von Mises

FIGURA 6.10 – Resultado do Final da Produção – Modelo 1 com Endurecimento

6.5.3 Modelo 2:

O objetivo desta análise é comparar o comportamento do modelo utilizando parâmetros de resistência menores que os do modelo 1 e verificando as alterações que ocorrem na distribuição de tensões.

- **Perfuração:**

Na figura 6.11 verifica-se uma maior plastificação na parede do poço, que continua na direção do eixo de simetria X.

A distribuição das tensões é idêntica a do modelo 1, apresentando um aumento nas tensões. As tensões normalizadas apresentaram a mesma configuração do modelo 1.

A deformação apresentou uma tendência igual a do outro modelo, ou seja de fechar na direção Y e a maior plastificação dos elementos no contorno do poço caracteriza que esse material é mais sensível quando submetido aos mesmo esforços que o modelo 1.

A pressão hidrostática apresentou uma aumento no seu valor máximo e uma redução da compressão em seu valor mínimo, apresentando uma concentração na direção do eixo de simetria X com maior concentração no entrono do poço.

- **Início da Produção:**

Na figura 6.12 observa-se que a zona de plastificação é maior que a apresentada no modelo 1 e também que a da perfuração, a zona se estende na direção do eixo de simetria X, representando problemas já constatados na prática, onde os poços apresenta instabilidade nessa mesma direção.

A distribuição das tensões é idêntica a do modelo 1, apresentando também aumento em todas as tensões, resultado de uma superfície plástica mais restrita que limita os estados de tensão. As tensões normalizadas apresentaram uma alteração em sua configuração em relação ao modelo 1.

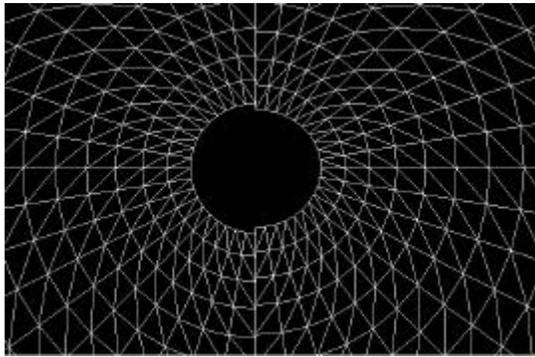
A apresenta um fechamento maior que o apresentado na perfuração e com a mesma tendência de fechar na direção Y. A pressão hidrostática apresentou um aumento tanto no seu valor máximo quanto em seu valor mínimo com uma concentração da compressão foi na direção do eixo de simetria X, tendo maior concentração no entrono do poço.

- ***Final da Produção:***

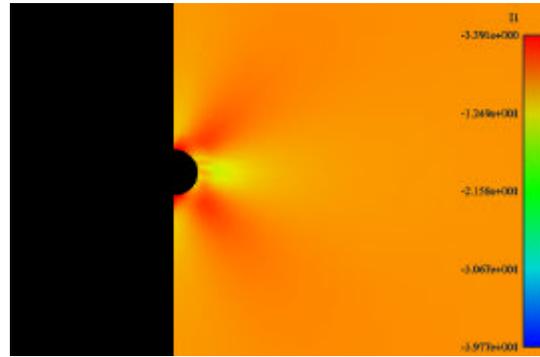
Na figura 6.13 verifica-se que a zona de plastificação aumentou de maneira considerável, representando um ponto mais delicado a ser estudado talvez com a utilização de modelagens discretas, que permitem identificar quanto do material desagrega nessa região, o crescimento foi na direção do eixo de simetria X.

A distribuição de tensões apresenta um alívio em relação ao modelo 1, onde as tensões máximas apresentam os mesmos valores do modelo 1, já as tensões mínimas apresentam relaxação em relação ao modelo 1.

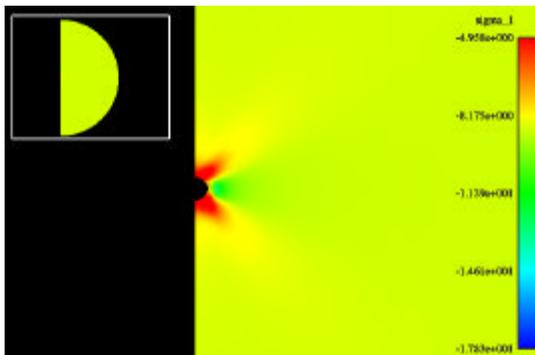
A deformação apresenta a formação de uma entrada na direção do eixo de simetria X e apresenta um fechamento mais forte na direção Y. A pressão hidrostática apresenta um valor máximo igual ao da análise do modelo 1, já o seu menor valor apresentou um aumento, a concentração da pressão hidrostática foi igual a do modelo 1.



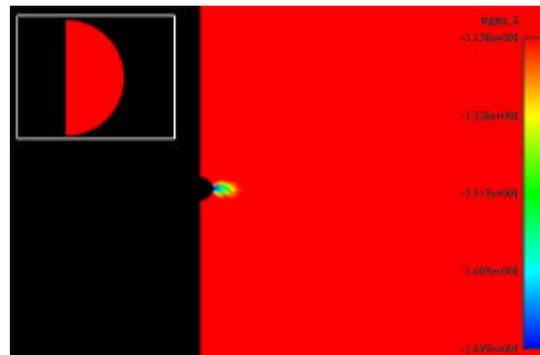
deformação



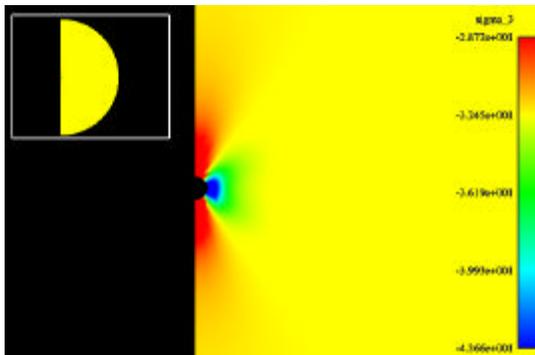
primeiro invariante



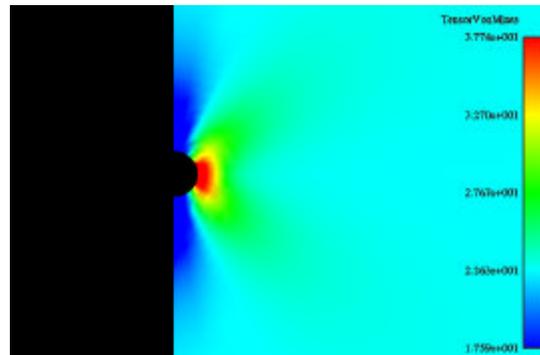
sigma 1



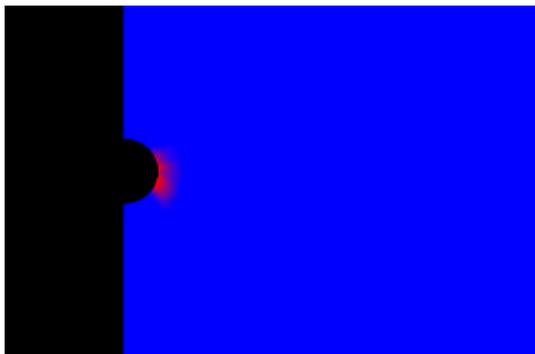
sigma 2



sigma 3

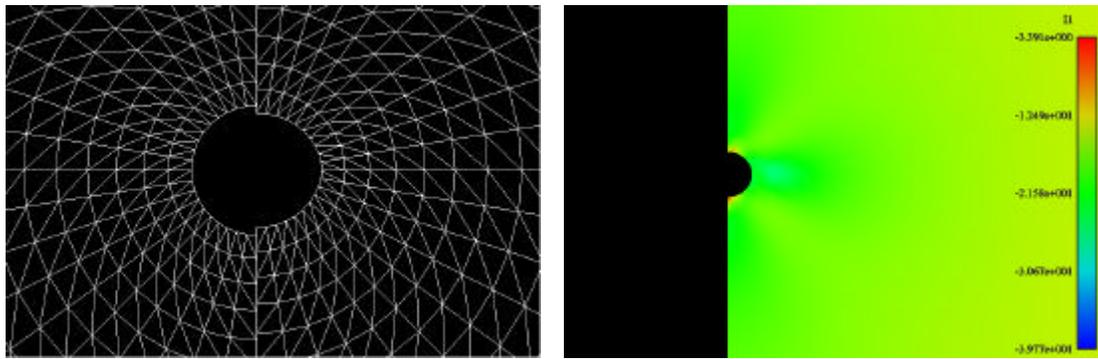


tensão de Von Mises



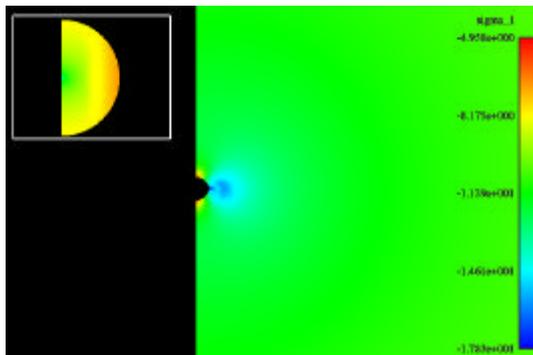
elementos plastificados

FIGURA 6.11 – Resultados da Perfuração – Modelo 2

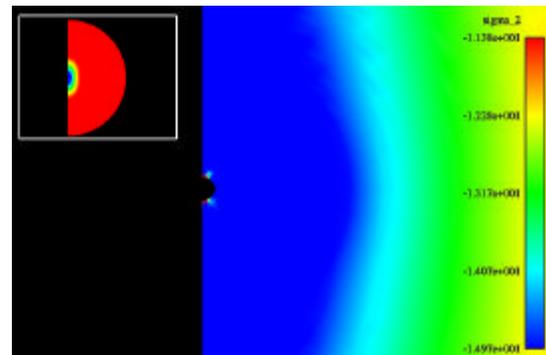


deformação

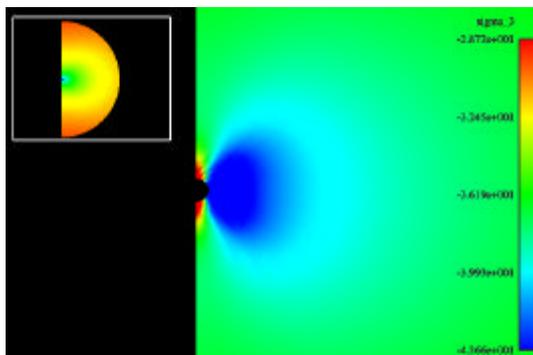
primeiro invariante



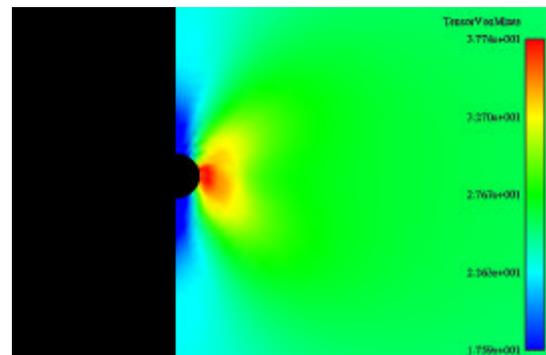
sigma 1



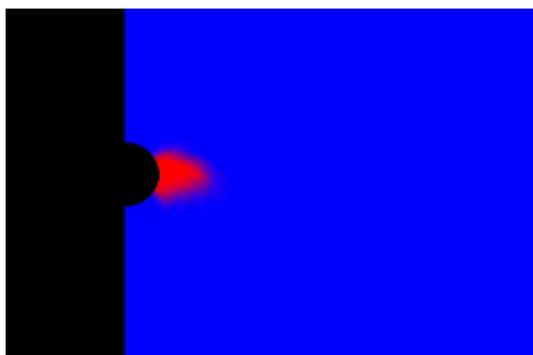
sigma 2



sigma 3

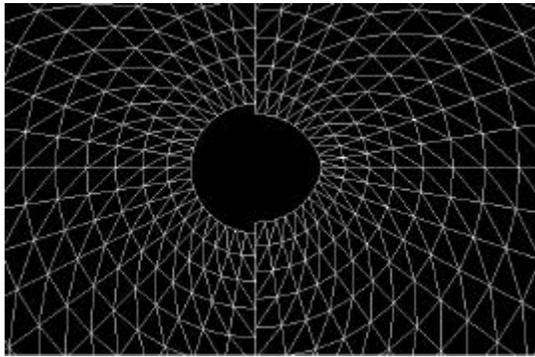


tensão de Von Mises

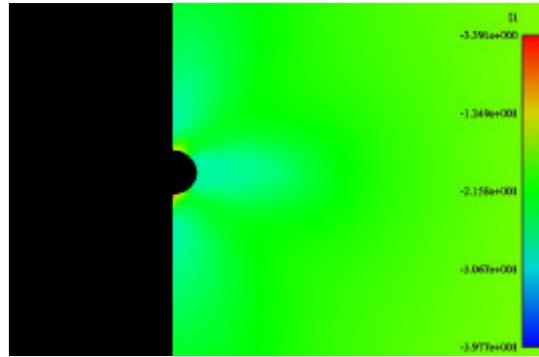


elementos plastificados

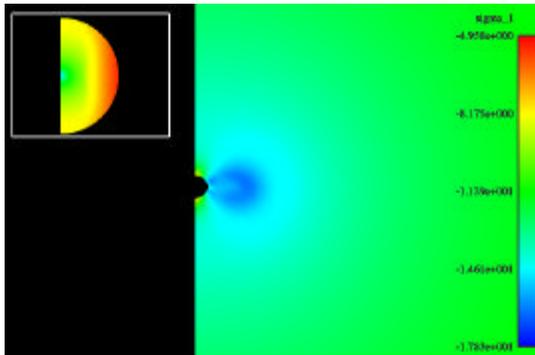
FIGURA 6.12 – Resultados do Início da Produção – Modelo 2



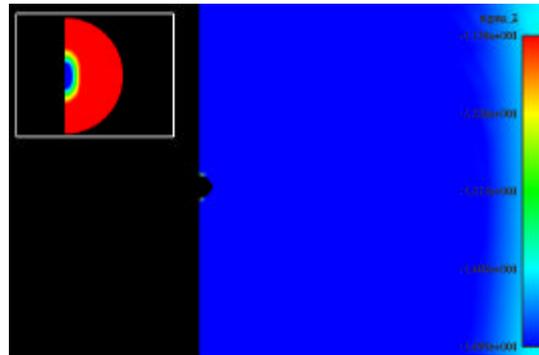
deformação



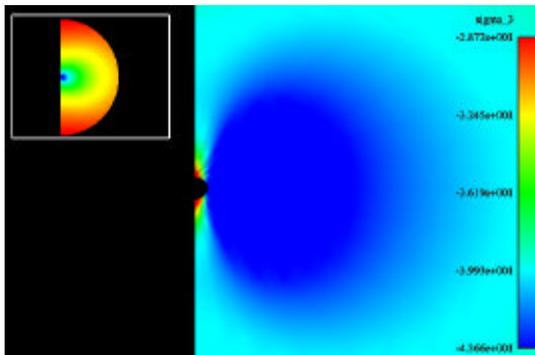
primeiro invariante



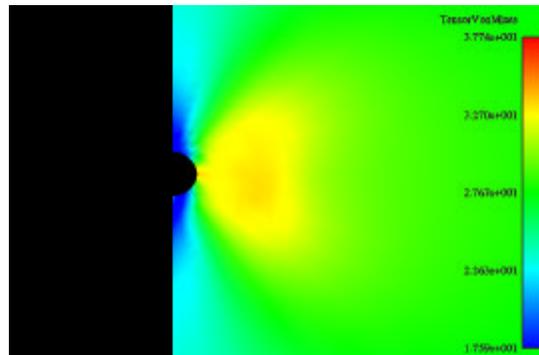
sigma 1



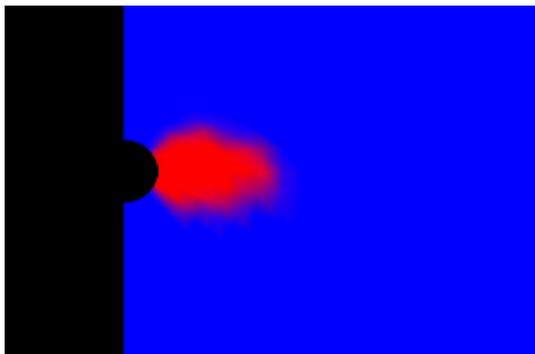
sigma 2



sigma 3



tensão de Von Mises



elementos plastificados

FIGURA 6.13 – Resultado do Final da Produção – Modelo 2

6.5.4 Modelo 2 (endurecimento):

O objetivo desta análise é avaliar o efeito do endurecimento isotrópico no estado de tensões final em relação ao próprio modelo 2.

- **Perfuração:**

Na figura 6.14 verifica-se que a distribuição das tensões é idêntica ao resultado do modelo sem endurecimento, apresentando uma redução nos valores extremos das tensões. As tensões normalizadas apresentaram uma configuração semelhante do modelo sem endurecimento.

A deformação apresenta um a tendência de fechar na direção Y. A pressão hidrostática apresentou uma configuração idêntica ao modelo sem endurecimento, porém com um aumento no seu valor máximo e uma redução no seu valor mínimo.

- **Início da Produção:**

Na figura 6.15 é verificado um comportamento parecido ao modelo sem endurecimento.

A distribuição das tensões apresenta aumento nas tensões máximas e redução nas tensões mínimas.

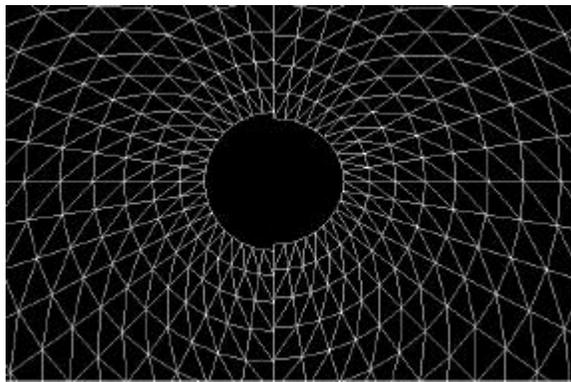
A deformação apresenta a mesma tendência de fechar na direção Y. A pressão hidrostática apresenta um valor máximo maior ao da análise sem endurecimento, já o valor mínimo da pressão hidrostática apresenta redução, apresentando uma concentração da compressão na direção do eixo de simetria X.

- **Final da Produção:**

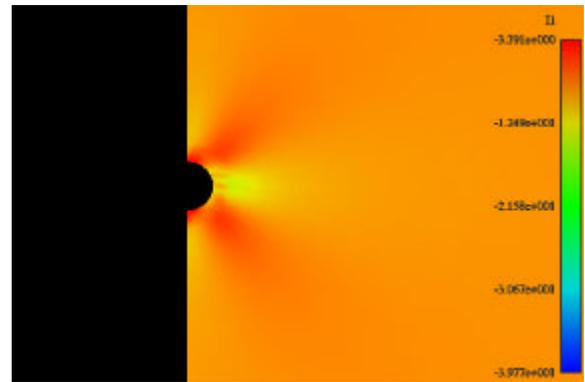
Na figura 6.16 pode-se observa que o efeito do endurecimento afetou muito mais este modelo com parâmetros de endurecimento mais restritivos que no primeiro modelo, a distribuição de tensões embora apresente uma certa semelhança com o modelo sem endurecimento apresentou valores bem diferentes,

por exemplo os valores máximos foram bem maiores que os encontrados no modelo sem o endurecimento, já os valores mínimos apresentaram um aumento muito forte na compressão.

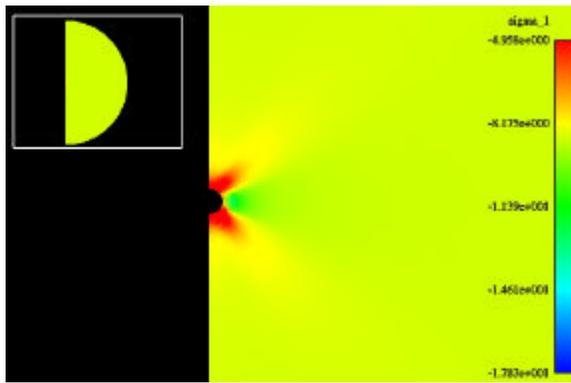
Ele também apresentou a tendência da deformação de fechar na direção Y. A pressão hidrostática apresenta um valor máximo superior ao da análise elástica e o seu valor menor apresentou uma redução, a concentração da pressão hidrostática foi na direção do eixo de simetria X, apresentando uma concentração maior no entrono do poço.



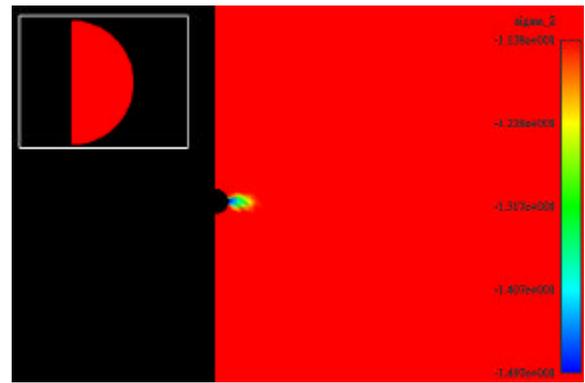
deformação



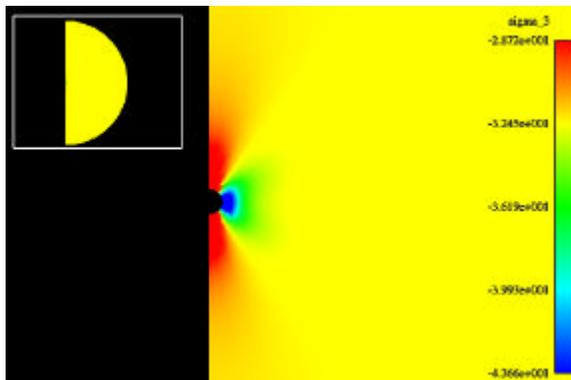
primeiro invariante



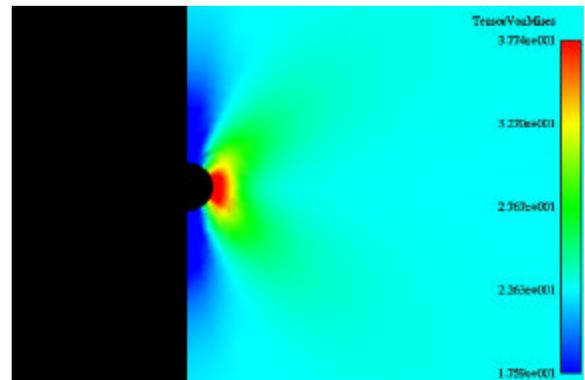
sigma 1



sigma 2



sigma 3



tensão de Von Mises

FIGURA 6.14 – Resultado da Perfuração – Modelo 2 com Endurecimento

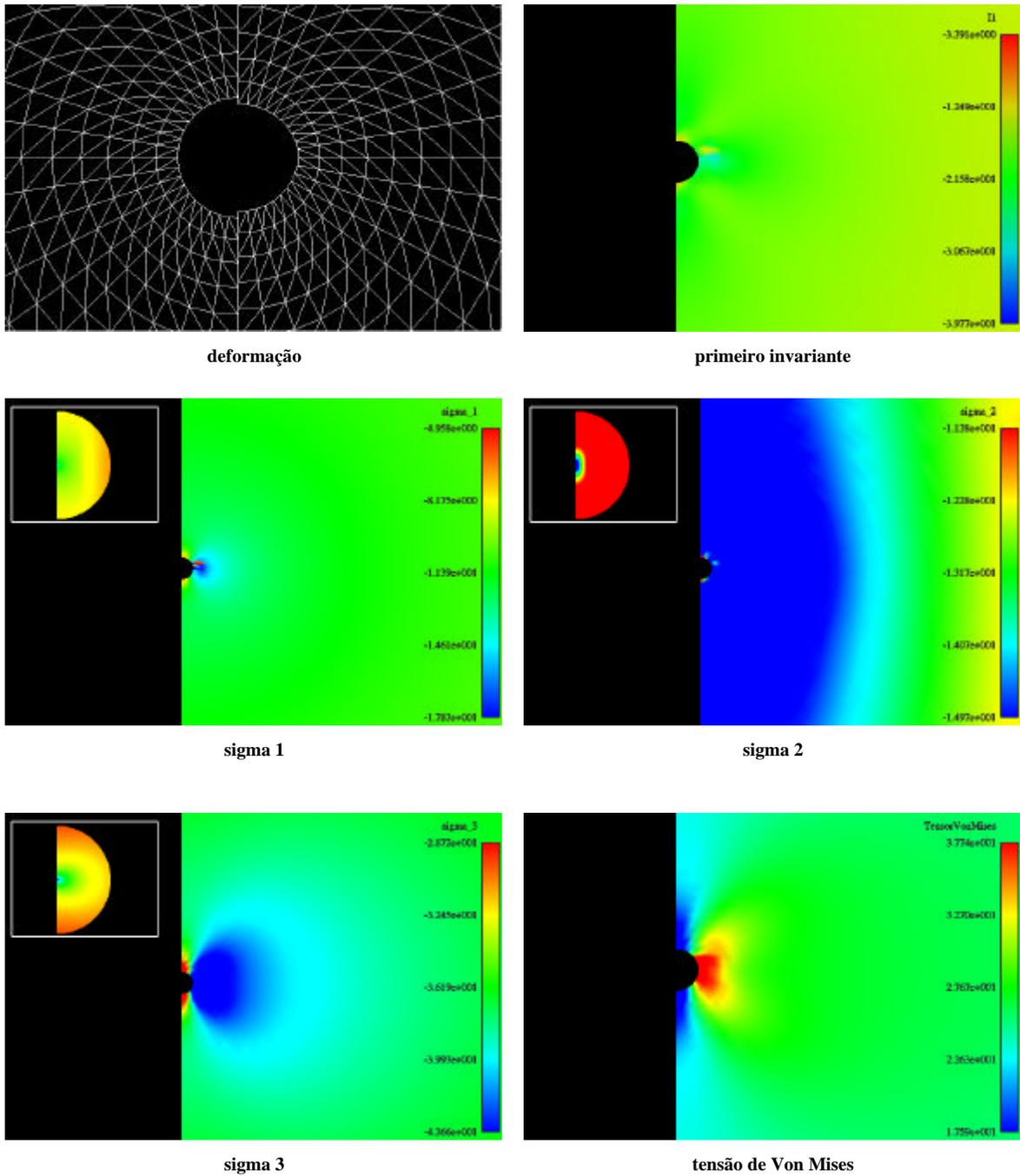
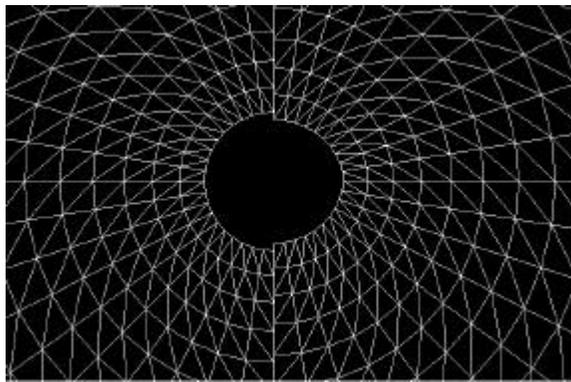
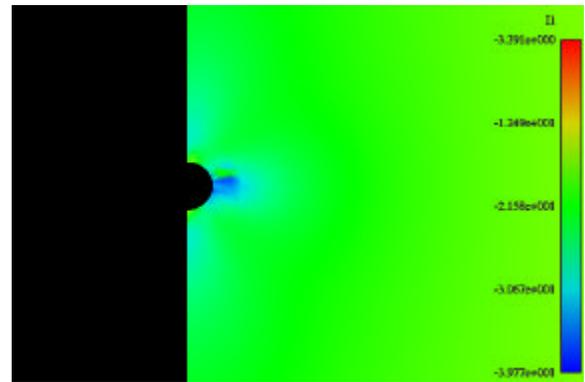


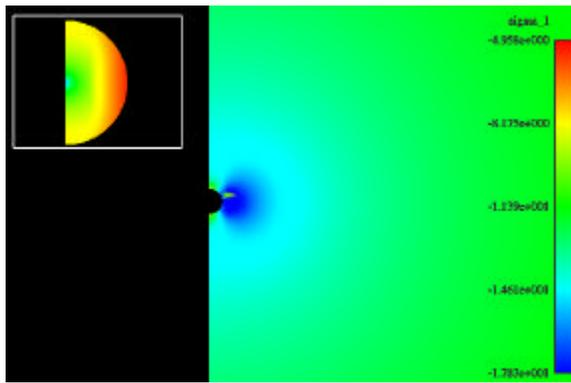
FIGURA 6.15 – Resultado do Início da Produção – Modelo 2 com Endurecimento



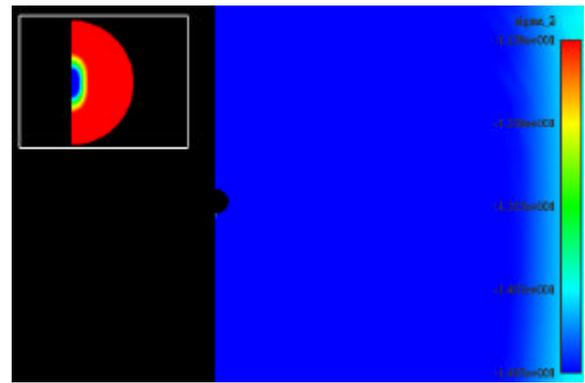
deformação



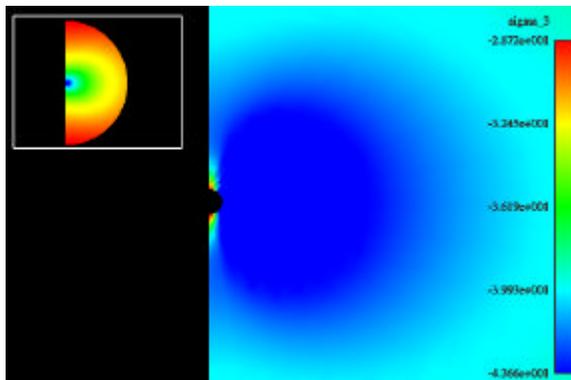
primeiro invariante



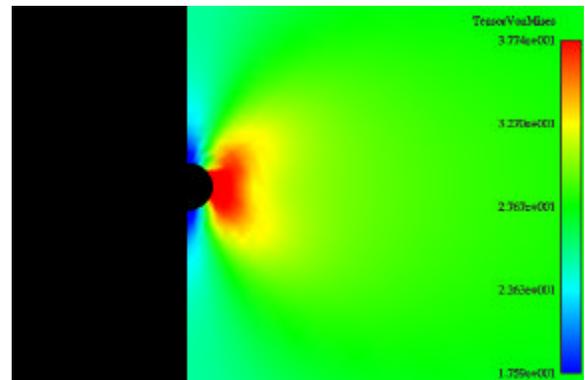
sigma 1



sigma 2



sigma 3



tensão de Von Mises

FIGURA 6.16 – Resultado do Final da Produção – Modelo 2 com Endurecimento

6.6 Resumo dos Resultados:

TABELA 6.4
Resultados na Perfuração

	Máximo				Mínimo			
	σ_1	σ_2	σ_3	I_1	σ_1	σ_2	σ_3	I_1
Elástico	2,00E0	-1,51E0	-4,57E0	6,04E-1	-1,44E1	-1,98E1	-8,07E1	-1,51E1
Modelo 1	2,63E0	-1,27E0	-3,94E0	1,71E0	-1,57E1	-2,14E1	-5,84E1	-2,29E1
Modelo 1*	2,65E0	-1,27E0	-3,95E0	1,73E0	-1,57E1	-2,03E1	-5,86E1	-2,17E1
Modelo 2	2,91E0	-8,29E-1	-3,04E0	2,64E0	-1,56E1	-1,89E1	-5,82E1	-1,96E1
Modelo 2*	2,88E0	-8,24E-1	-3,03E0	2,66E0	-1,57E1	-2,06E1	-5,85E1	-2,08E1

* endurecimento

TABELA 6.5
Resultados no Início da Produção

	Máximo				Mínimo			
	σ_1	σ_2	σ_3	I_1	σ_1	σ_2	σ_3	I_1
Elástico	-6,65E0	-8,42E0	-1,88E1	-6,69E0	-2,50E1	-2,88E1	-9,20E1	-2,91E1
Modelo 1	-6,33E0	-8,42E0	-1,80E1	-6,69E0	-2,20E1	-3,64E1	-7,06E1	-3,75E1
Modelo 1*	-6,41E0	-8,42E0	-1,82E1	-6,69E0	-2,32E1	-3,48E1	-6,99E1	-3,60E1
Modelo 2	-5,31E0	-6,33E0	-1,63E1	-6,35E0	-2,10E1	-2,83E1	-6,14E1	-2,88E1
Modelo 2*	5,49E1	4,05E1	1,51E1	5,48E1	-3,37E1	-4,01E1	-1,13E2	-4,43E1

* endurecimento

TABELA 6.6
Resultados no Final da Produção

	Máximo				Mínimo			
	σ_1	σ_2	σ_3	I_1	σ_1	σ_2	σ_3	I_1
Elástico	-5,38E0	-8,09E0	-2,74E1	-5,38E0	-2,78E1	-3,76E1	-9,75E1	-3,76E1
Modelo 1	-5,38E0	-8,09E0	-2,62E1	-5,38E0	-2,55E1	-3,78E1	-7,00E1	-3,97E1
Modelo 1*	-5,38E0	-8,09E0	-2,68E1	-5,38E0	-2,80E1	-4,34E1	-7,54E1	-4,45E1
Modelo 2	-5,38E0	-6,57E0	-2,31E1	-5,38E0	-2,02E1	-2,89E1	-5,48E1	-3,05E1
Modelo 2*	4,61E1	3,92E1	1,06E1	4,61E1	-3,73E1	-4,94E1	-1,21E2	-5,33E1

* endurecimento

Capítulo 7

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

7.1. *Resumo:*

O objetivo deste trabalho foi a implementação numérica de um modelo constitutivo para representação do colapso de poros em um simulador de análise de tensões em poços de petróleo. Utilizou-se um modelo tipo *cap*, que consiste em um cone que representa a superfície de ruptura por cisalhamento, cuja forma no plano desviatório é definida pelo modelo de Mohr-Coulomb, associado a uma curva suave e contínua à superfície de ruptura que define a ruptura por poro-colapso. Essa superfície se expande isotropicamente segundo uma lei de endurecimento.

O modelo foi formulado segundo os trabalhos de RUBIN (1991), SCHWER e MURRAY (1994) e COELHO (2001), representando as superfícies de ruptura isotrópicas em termos do produto de funções dos invariantes de tensão. As superfícies incorporam formas interessantes, permitindo tratar o poro-colapso com uma superfície contínua, eliminando a singularidade que existe entre o contato das superfícies de ruptura mais freqüentes e o *cap*.

Esta formulação é interessante do ponto de vista numérico, pois reduz o código utilizado para tratar o problema. Contudo a utilização de superfícies contínuas e suaves gera problemas dentro da formulação utilizada nesse trabalho.

A determinação do ponto de contato com a superfície de tensões admissíveis quando evolui de um ponto na região elástica para um ponto na região de estado de tensões inadmissíveis se apresentou como um grave problema a ser solucionado. Embora a evolução do estado de tensões seja linear, a superfície não apresenta um comportamento linear, criando a necessidade de utilizar métodos iterativos para identificação do ponto de contato. Nesse trabalho foi utilizado o método de Newton-Raphson que apresenta problemas quando o ponto de contato inicial está próximo a um ponto de inflexão.

Esse problema se repete na correção do erro induzido no processo, onde também foi aplicada uma rotina iterativa.

Também existe a necessidade de identificar com maior qualidade o número de subincrementos que serão utilizados no retorno radial, nesse trabalho o valor ficou fixo em 10 subincrementos.

O modelo foi ajustado seguindo o trabalho de SOARES (2000), através das avaliações feitas por COELHO (2001).

Finalmente, foram feitas análises de tensões em poços, a partir dos dados ajustados. Verificou-se que o modelo é capaz de representar a ocorrência do poro-colapso. A fase de perfuração apresenta uma extensão maior da região plastificada na parede do poço. Na fase de produção, o colapso ocorre no interior do maciço.

7.2. Conclusões e Contribuições:

Este trabalho contribui para o avanço do conhecimento na área da estabilidade mecânica de poços através da introdução da consideração da ocorrência do colapso de poros e seus efeitos, com dados obtidos do ajuste dos dados experimentais voltados exclusivamente para definição da superfície de colapso.

Teve como objetivo tratar o problema do colapso de poro com uma superfície contínua e suave, eliminando o problema da singularidade no encontro das superfícies de Mohr-Coulomb e do *Cap*. Esse algoritmo se mostrou eficiente na avaliação do estado de tensões em poços.

A estratégia desse modelo é a definição de situações onde pode ocorrer a instabilidade de poços e a produção de areia, sendo que o colapso de poros é um fator preponderante nesses problemas.

A melhoria no algoritmo com a suavização do canto possibilita a sua inclusão em ambiente de alto desempenho. Fica aberto o caminho para estudos de poços de geometria complexa (3D) e outros estudos de falhas de compactação em reservatórios.

7.3. **Recomendações para Futuras Pesquisas:**

Do ponto de vista computacional, verifica-se a necessidade de se desenvolver esse modelo para três dimensões, levando a avaliar qualquer problema da mecânica computacional.

Outra implementação que pode ser introduzida no algoritmo é o tratamento da região de tração, com a utilização de um *tension cut-off* suave, evitando novos pontos de singularidade. A redução da singularidade que existe no método de Mohr-Coulomb, tratando as arestas que existem na superfície de ruptura também é uma aplicação que merece atenção. Como no trabalho de WUNDERLICH , FINDEIß e CRAMER (2001), onde a superfície de tensões admissíveis é toda suavizada, figura 7.1.

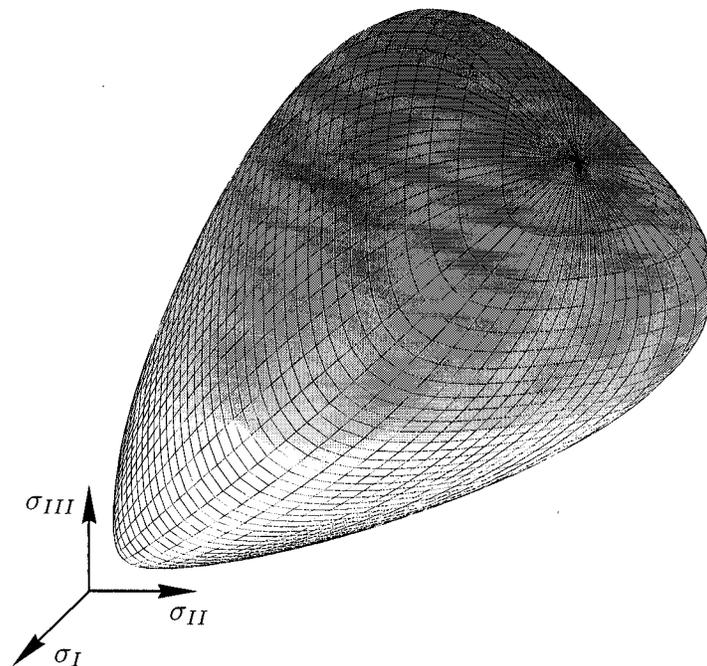


FIGURA 7.1 – Modelo de WUNDERLICH, FINDEIß e CRAMER

Existe também a necessidade de realizar mais ensaios de laboratório com amostras de outros materiais, permitindo uma melhor caracterização do comportamento plástico destes materiais, caracterizando melhor a superfície de tensões admissíveis e permitindo um melhor equacionamento dos problemas de estabilidade de poços e de produção de areia.

A determinação do número de subincrementos a ser utilizado no retorno radial também é necessário, tornando o algoritmo mais eficiente.

O teste de outros métodos iterativos para a identificação do ponto de contato e para correção do erro induzido no processo pode tornar o algoritmo mais robusto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ABDULRAHEEM, A., 1994, *Constitutive Modeling of Rocks and Numerical Simulation of Oil Reservoir Exhibiting Pore Collapse*, PhD. Thesis, The University of Oklahoma Graduate College, Norman, Oklahoma, USA.

ATKINSON, J. H., BRANSBY, P. L., 1978, *The Mechanics of Soils – Introduction to Critical State Soil Mechanics*, 1st Edition, McGraw-Hill Book Company, United Kingdom.

ATKINSON, C, EFTAXIOPOULOS, D. A., 1996, "A Plane Model for the Stress Field Around an Inclined, Cased and Cemented Wellbore", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 20, pp. 549-569.

BIOT, M. A., 1943, " General Theory of Three Dimensional Consolidation", *Journal of Applied Physics*, v. 12, pp. 155-164.

BIOT, M. A., 1955, " Theory of Elasticity and Consolidation for Porous Anisotropic Solid", *Journal of Applied Physics*, v. 26, pp. 182-185.

CHAPRA, S. C., CANALE, R. P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Edition, Singapore, McGraw-Hill Book Co.

CHARLEZ, P. A., 1994, "The Impact of Constitutive Laws on Wellbore Stability: A General Review, *SPE Journal* 28058, pp. 239-249.

CHEN, W. F, BALADI, G. Y., 1985, "*Soil Plasticity - Theory and Implementation*", Amsterdam, Elsevier Science Publishers.

CHEN, X., TAN, C. P., HABERFIELD, C. M., 1996, "Wellbore Stability Analysis Guidelines for Practical Well Design", In: *SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference*, SPE Journal 6972, pp. 117-126, Adelaide, Australia, October.

COELHO, L. C., 2001, "Modelos de Ruptura de Poços de Petróleo", Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

COPPE/UFRJ, 1993, "*Desenvolvimento de um Simulador Numérico Bidimensional para Estabilidade de Poços Horizontais/ Alta Inclinação pelo Método dos Elementos Finitos*", *Relatório Descritivo das Atividades do Primeiro Quadrimestre*, OS-650 702 893-1.

COPPE/UFRJ, 1995, "*Desenvolvimento de um Simulador Numérico Bidimensional para Estabilidade de Poços Horizontais/ Alta Inclinação pelo Método dos Elementos Finitos*", *Relatório Descritivo das Atividades do Quinto Quadrimestre*, OS-650 702 893-1.

COSTA, A. M., 1978, "*Análise Dinâmica Elasto-plástica Transiente de Curta Duração Incluindo os Efeitos da Interação Sólido-Fluido-Estrutura*", Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

CUI, L., CHENG, A. H. D., KALIAKIN, V. N., 1996, "Finite Element Analysis of Anisotropic Poroelasticity: a Generalized Mandel's Problem and an Inclined Borehole Problem", *International Journal for Numerical Methods in Geomechanics*, v. 20, pp. 381-401.

DESAI, C. S., 1980, "A General Basis for Yield Failure and Potencial Functions in Plasticity", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 4, pp. 361-375.

DESAI, C. S., SALAMI, M. R., 1987, "Constitutive Model for Rocks", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, v.113, n. 5, pp. 407-339.

DESAI, C. S., SOMASUNDARAM, S., FRANTZISKONIS, G., 1986, "A Hierarchical Approach for Constitutive Modeling of Geologic Materials", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 10, pp 225-257.

DiMAGGIO, F. L., SANDLER, I. S., 1971, "Material Model for Granular Soils", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v .97, n. 5, pp. 935-950.

DRUCKER D. C., GIBSON R. E., HENKEL, D. J., 1957, "Soil Mechanics and Work Hardening Theory of Plasticity", *Transactions ASCE*, v. 122, pp. 338-346.

DRUCKER, D. C., PRAGER, W., 1952, "Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design", *Quaterly of Applied Mathematics*, v. 10, n. 2, pp. 157-164.

FARUQUE, M. O., CHANG, C. J., 1986, "New Cap Model for Failure and Yielding of Pressure-Sensitive Materials", *Journal of Engineering Mechanics*, v. 112, n. 10, October.

GEERTSMA, J., 1966, "Problems of Rock Mechanics and Petroleum Production Engineering", In: *1st. Congress of International Society of Rock Mechanics*, vol 1, pp. 585-594, Lisboa, Portugal.

GNIRK, P. F. 1972, "The Mechanical Behaviour of Uncased Wellbore Situated in Elastic-Plastic Media under Hydrostatic Stress", *Journal of Petroleum Technology*, SPE paper 3224.

HAIMSON, B. C., FAIRHUST, C., 1967, "Initiation and Extension of Hydraulic Fractures in Rocks", *Transactions of AIME*, v. 240, pp. 310-317.

HILL, R., 1950, "*The Mathematical Theory of Plasticity*", 1st Edition, Oxford, Clarendon Press.

KOCBERBER, S., 1993, "A Finite Element Black Oil Simulation System for Heterogeneous Reservoirs with Horizontal Wells Having Vertical Hydraulic Fractures", *12th SPE Symposium on Reservoir Simulation*, SPE 21269.

LADE, P., 1977, "Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces", *Computer and Structures*, v. 13, pp. 1019-1035.

LAMBE, T. W., WHITMAN, R.V., 1979, "Soil Mechanics", SI Version, John Wiley & Sons, Inc.

LEWIS, R. W., SCHREFLER, B. A., 1998, "*The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*", 2nd edition, England, John Wiley and Sons Ltd.

NAYAK, G. C., ZIENKIEWICZ, O. C., 1972, "Elasto-plastic Stress Analysis - a Generalization for Constitutive Relations Including Strain Softening", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 5, pp. 113-135.

OTTOSEN, N. S., 1977, "A Failure Criterion for Concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, v. 103, pp. 527-535.

Owen, D. R. J., Hinton, E., 1980, "Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice", *Pineridge Press*, Swansea.

PAPANASTASIOU, P., DURBAN, D., 1997, "Elastoplastic Analysis of Cylindrical Cavity Problems in Geomaterials", *International Journal for Analytical and Numerical Methods in Geomechanics*, v. 21, pp. 133-149.

PASLAY, P. R., CHEATHAM, J. B., 1963, "Rock Stresses Induced by Flow of Fluids into Boreholes", *Journal of Petroleum Technology*, SPE paper 482.

POLILLO F^o, A., 1987, *Um Procedimento para Análise de Estabilidade e Fraturamento de Poços de Petróleo*, tese M.Sc., UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

RISNES, R., BRATLI, R., HOSRUD, P., 1982, "Sand Stress around a Wellbore", *Journal of Petroleum Technology*, SPE paper 9650.

RUBIN, M.B., 1991, "Simple, Convenient Isotropic Failure Surface", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.117, pp. 348-369.

SÁ, A. N., 1996, "Análise de Tensões e Estabilidade de Poços de Petróleo pelo Método dos Elementos Finitos", Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SÁ, A. N., EBECKEN, N. F. F., 1995, "A Numerical Simulation for the Study of Wellbore Stability using the Finite Element Method" in *International Offshore Engineering*, v. 1, pp 333-350, Rio de Janeiro, Brasil, John Wiley and Sons Ltd.

SANDLER I. S., BARON, M. L., 1976, "Material Models of Geological Materials in Ground Shock", *International Journal for Analytical and Numerical Methods in Geomechanics*, pp. 219-231.

SANDLER, I. S., DIMAGGIO, F. L., BALADI, G. Y., 1976, "Generalized Cap Model for Geological Materials", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, v.102, n. 7, pp. 683-699.

SANDLER, I. S., RUBIN, D., 1979, "An Algorithm and a Modular Subroutine for the Cap Model", *International Journal for Analytical and Numerical Methods in Geomechanics*, v. 3, pp. 173-186.

SANTARELLI, F. J. *et al.*, 1996, "Wellbore Stability Analysis Made Easy and Pratical", In: *IADC/SPE Conference*, Journal of Petroleum Engineering 35105, pp. 523-532, New Orleans, USA, March.

SANTOS *et al.*, 1997, "Laboratory Tests for Wellbore Stability in Deepwater, Brazil", *Fifth Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference and Exhibition*, SPE paper 38977, pp. 1-9, Rio de Janeiro, Brasil.

SCHOFIELD, A. N., WROTH, C. P., 1968, *Critical State Soil Mechanics*, 1st Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, N.Y.

SHIELD, R. T., 1955, "On Coulomb's Law of Failure in Soils", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, v. 4, pp. 10-16.

SCHWER, L., MURRAY, Y. D., 1994, "A Three-Invariant Smooth Cap Model with Mixed Hardening", *International Journal for Numerical Methods in Geomechanics*, v. 18, pp. 657-688.

SIMO, J.C.*et al.*, 1988, "Assessment of Cap Model: Consistent Return Algorithms and Rate-Dependent Extension", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, v. 114, número 2, February.

SIMO, J. C., HUGHES, T.J.R., 1998, "*Computational Inelasticity*", 1st Edition, New York, USA, Springer-Verlag Inc.

SOARES, A. C., 2000, *Um Estudo Experimental para Definição de Colapso de Poros em Rochas Carbonáticas*, Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

STAVROPOULOU, M., PAPANASTASIOU, P., VARDOULAKIS, I., 1998, "Coupled Wellbore Erosion and Stability Analysis", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 22, pp. 749-769

TERZAGHI, K., 1943, "*Theoretical Soil Mechanics*", 1st Edition, New York, John Wiley and Sons.

TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J. N., 1982, *Theory of Elasticity*, 3rd Edition, Singapore, McGraw-Hill International Editions.

VAZIRI, H. H., BYRNE, P. M., 1990, "Analysis of Stress Flow and Stability around Deep Wells", *Canadian Geotechnics*, v. 145, pp. 312-319.

WESTERGAARD, H. M., 1940, "Plastic State Stress Around a Deep Well", *Journal of Boston Society of Civil Engineering*, v. 27, pp. 1-5.

WILLAM, K. J., WARNKE, E. P., 1975, "Constitutive Model for the Triaxial Behaviour of Concrete", Proceedings, *Int. Assoc. Bridge Struct. Engeng. Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses*, v. 19, pp. 1-30, Bergamo, Italy.

Wunderlich, W., Findeib, R., Cramer, H., 2001, "Finite Element Analysis of Bearing Capacities in Geomechanics Considering Dilatant and Contractant Constitutive Laws. ", *Computational Mechanics, New Frontiers for the New Millennium*, Valliappan, S., Khalili, S. (eds.). Elsevier Science Ltd. (2001), vol 1, 509-520.