

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO 1D PARA REDE DE CANAIS
VIA MÉTODO DO ELEMENTO MÓVEL COM SUBSTITUIÇÕES
SUCESSIVAS

Dirceu Silveira Reis Junior

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



Prof. Paulo Cesar Colonna Rosman – Ph.D.
(Presidente)



Prof. Diney Tosta de Oliveira – Liv. Doc.



Prof. Flávio Cesar Borba Mascarenhas – D.Sc.



Prof. Thereza Christina de Almeida Rosso – D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ – Brasil

Março de 1998

REIS JUNIOR, DIRCEU SILVEIRA

Desenvolvimento de um Modelo 1D para Rede de Canais via Método do Elemento Móvel com Substituições Sucessivas[Rio de Janeiro] 1998.

IX, 87p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1998)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Modelo Hidrodinâmico

I. COPPE/UFRJ II. Título(série)

Agradecimentos

Quando sentei-me para escrever estes agradecimentos percebi que não seria tão simples como pensava, talvez pelo desejo de agradecer realmente, um a um, àqueles que me ajudaram. Por mais que me esforce, as palavras parecem não representar com exatidão meus sentimentos.

A primeira imagem que me vem à mente são de meus pais, e não poderia ser diferente, já que ambos vieram de famílias humildes e lutaram bastante para concluir o curso universitário, almejando uma melhor condição de vida para eles mesmos e para seus filhos. Mesmo em momentos de alguma dificuldade financeira, nunca faltou dinheiro para uma boa escola, bons livros, cursos e coisas do gênero. Portanto, se hoje estou aqui em frente ao computador, finalizando uma tese de mestrado, eu devo isto a eles. Deixo aqui o meu muito obrigado a minha mãe, Marilza, e a meu pai, Dirceu, que infelizmente não está mais entre nós e que não teve nem a oportunidade de ver pelo menos um de seus filhos cursando uma universidade.

Ao meu irmão Gustavo, parceiro para toda a vida.

Ao Rosman pela dedicação e brilhantismo na orientação, fazendo tudo parecer simples, e pela paciência que teve comigo e com minhas deficiências.

A CAPES pelo apoio financeiro nos dois primeiros anos do mestrado.

Aos amigos do Programa de Engenharia Civil e do Programa de Engenharia Oceânica pelo convívio, pela amizade cultivada nestes anos, e pelas discussões que ajudaram a enriquecer este trabalho, e em especial à Cynara pela paciência que teve e pelos dados fornecidos das simulações do estuário do Canal do Cunha.

A Jerson Kelman, então diretor da SERLA e a Claudio Gosling, chefe da divisão onde eu trabalhava na época, pelo incentivo e pela possibilidade de me dedicar integralmente aos estudos no momento que cursava as cadeiras do mestrado.

A João Salgado, um grande amigo que tive a sorte de ter ao meu lado nos primeiros anos de atuação na engenharia, e que foi um grande incentivador durante o desenvolvimento desta tese.

A Mônica da Hora pelo incentivo, amizade e pelas inúmeras vezes que fez a maldita pergunta: E a Tese?

E em especial a Dani pelo incentivo, paciência, compreensão e amor.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO 1D PARA REDE DE CANAIS VIA MÉTODO DO ELEMENTO MÓVEL COM SUBSTITUIÇÕES SUCESSIVAS

Dirceu Silveira Reis Junior

Março/1998

Orientador: Paulo Cesar Colonna Rosman

Programa: Engenharia Civil

A modelação numérica de escoamentos em rios e canais é um assunto de grande interesse em todo o mundo e vem se desenvolvendo rapidamente ao longo dos anos. Os métodos numéricos tradicionalmente usados são o método das diferenças finitas(MDF) e o método dos elementos finitos(MEF).

Nesta tese é proposto um modelo para rede de canais utilizando para a discretização espacial um método recente chamado método do elemento móvel(MEM). Para a discretização temporal é utilizado o método do fatoramento implícito em conjunto com o método das substituições sucessivas, onde é feito um desacoplamento do cálculo das variáveis mediante explicitação da velocidade na equação da quantidade de movimento e posterior substituição na equação da continuidade que passa a ter somente a elevação como incógnita. A velocidade é calculada através de substituições sucessivas dos valores de elevação na equação da quantidade de movimento.

A robustez do modelo é testada em um caso que possui solução analítica. Em seguida é feita uma simulação de propagação de maré em um canal e os resultados são comparados com os de um modelo de diferenças finitas. Por último o modelo é aplicado no estuário do Canal do Cunha e os resultados são comparados com os de um modelo bidimensional de elementos finitos.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (M.Sc.)

DEVELOPMENT OF A 1D MODEL FOR CHANNEL NETWORK VIA MOVING
ELEMENT MODEL AND SUCCESSIVES SUBSTITUIONS

Dirceu Silveira Reis Junior

March/1998

Advisor: Paulo Cesar Colonna Rosman

Department: Civil Engineering

The numerical modeling of rivers and channels is an important subject in hydraulics and has been developing quite fast in the past decade. The two most common numerical methods used are the Finite Difference Method (MDF) and the Finite Element Method (MEF).

This thesis presents the development of a 1D model for a channel networks using for spatial discretization a new numerical method called Moving Element Method (MEM). For time discretization the model uses the implicit factorization with the successive substitution method, which uncouples the calculation of the variables.

The robustness of the proposed method is verified by comparing its results with the exact analytical solution available for the case of propagation of a tidal wave with small amplitude in a frictionless channel. Then, the model is applied to simulate the propagation of tidal wave in a channel and the results are compared with the results of a 1D tested model, using Finite Difference Method. Finally, the model is applied to Canal do Cunha estuary and the results are compared with the results of a 2D tested model, using Finite Element Method.

Índice

1. INTRODUÇÃO	1
2. EQUAÇÕES GOVERNANTES	4
2.1 CONDIÇÃO DE INCOMPRESSIBILIDADE.....	5
2.2 PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO	6
<i>Campo Gravitacional</i>	9
<i>Aceleração de Coriolis</i>	9
2.3 ALGUMAS SIMPLIFICAÇÕES.....	10
2.3.1 <i>Aproximação de Boussinesq</i>	10
2.3.2 <i>Promediação das Equações</i>	11
2.3.3 <i>Aproximação hidrostática</i>	14
2.4 CASO UNIDIMENSIONAL.....	16
2.4.1 <i>Integração na Vertical da Equação da Quantidade de Movimento</i>	17
2.4.2 <i>Integração na Lateral da Equação da Quantidade de Movimento integrada na Vertical</i>	22
2.4.3 <i>Integração na Vertical da Equação da Continuidade</i>	25
2.4.4 <i>Integração Lateral da Equação da Continuidade Integrada na Vertical</i>	26
3. MODELO NUMÉRICO	29
3.1 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL	29
3.1.1 <i>Equação da Continuidade Discretizada no Tempo</i>	32
3.1.2 <i>Equação da Quantidade de Movimento Discretizada no Tempo</i>	33
3.1.3 <i>Esquema Desacoplado</i>	35
3.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL	39
3.2.1 <i>Discretização Espacial da Equação da Continuidade</i>	43
3.2.2 <i>Discretização Espacial da expressão de u^+</i>	45
3.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO	46
3.3.1 <i>Elevação Prescrita</i>	46
3.3.2 <i>Fluxo Prescrito</i>	47
3.3.3 <i>Condições de Contorno nos Entroncamentos</i>	50
4. APLICAÇÕES	55
4.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA	55
4.2 CANAL RETO.....	61
4.3 ESTUÁRIO DO CANAL DO CUNHA	70
4.4 CASO ILUSTRATIVO	77
5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	83

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Forças de contato na direção x	7
Figura 2.2: Esquema de corpos d'água rasos, onde NR representa um plano de referência, ζ a cota do nível d'água, d a lâmina d'água, e h a profundidade em relação ao nível de referência.	15
Figura 2.3: Seção transversal do rio aproximada por um trapézio	27
Figura3.1: Domínio discretizado	39
Figura3.2: Funções de interpolação	40
Figura3.3: Esquema em perfil do trecho a montante da última seção	47
Figura3.4: Seção transversal da última seção modelada	49
Figura3.5: Exemplo de entrocamentos	50
Figura 4.1: Esquema do canal em planta e em perfil.....	56
Figura 4.2: Comparação dos valores de elevação com a solução – Seção 3	58
Figura 4.3: Comparação dos valores de elevação com a solução analítica – Seção 5.....	58
Figura 4.4: Comparação dos valores de elevação com a solução analítica – Seção 8.....	59
Figura 4.5: Comparação dos valores de elevação com a solução analítica – Seção 11.....	59
Figura 4.6: Comparação com a solução analítica – Erros Relativos	60
Figura 4.7: Comparação com a Solução Analítica – Resultados ao longo do espaço.....	60
Figura 4.8: Esquema do canal em planta e perfil	61
Figura 4.9: Resultados de elevação ao longo do tempo -Seção 5.....	64
Figura 4.10: Resultados de elevação ao longo do tempo-Seção 9.....	64
Figura 4.11: Resultados de elevação ao longo do tempo-Seção 13.....	65
Figura 4.12: Resultados de elevação ao longo do tempo-Seção 17.....	65
Figura 4.13: Resultados de elevação ao longo do tempo-Seção 21.....	66
Figura 4.14: Resultados de velocidade ao longo do tempo-Seção 5	66
Figura 4.15: Resultados de velocidade ao longo do tempo-Seção 9	67
Figura 4.16: Resultados de velocidade ao longo do tempo-Seção 13	67
Figura 4.17: Resultados de velocidade ao longo do tempo-Seção 17	68
Figura 4.18: Resultados de elevação ao longo do canal.....	68
Figura 4.19: Resultados de velocidade ao longo do canal.....	69

Figura 4.20: Malha de elementos finitos para o estuário do Canal do Cunha.....	71
Figura 4.21: Discretização do estuário do Canal do Cunha em seções utilizada pelo modelo	72
Figura 4.22: Resultados de elevação ao longo do tempo – Seção 45.....	75
Figura 4.23: Resultados de elevação ao longo do tempo – Seção 49.....	75
Figura 4.24: Resultados de elevação ao longo do tempo – Seção 64.....	76
Figura 4.25: Resultados de elevação ao longo do tempo – Seção 75.....	76
Figura 4.26: Geometria do problema.....	77
Figura 4.27: Hidrograma afluyente nas seções 32 e 33.....	80
Figura 4.28: Resultados de vazão ao longo do tempo para as seções 1, 10 e 32.....	80
Figura 4.29: Resultados de vazão ao longo do tempo para as seções 16, 17 e 32.....	81
Figura 4.30: Resultados de vazão ao longo do tempo para as seções 23, 28, 29 e 32.....	81
Figura 4.31: Resultados de elevação ao longo do tempo para as seções 1, 10, 16, 17 e 32.....	82
Figura 4.32: Resultados de velocidade ao longo do tempo para as seções 1, 10, 16, 17 e 32..	82

1. Introdução

Pode-se dizer que o estudo sobre os fluidos, em especial a água, vem de longa data. Dois séculos antes do nascimento de Cristo, o matemático grego Archimedes já tinha desenvolvido o princípio dos corpos imersos e estabelecido o conceito da força de empuxo. Os romanos, nesta mesma época, demonstravam conhecimento acerca do escoamento dos fluidos em condutos através de seu complexo sistema de abastecimento d'água.

Porém, desde o nascimento de Cristo até o fim da Idade Média quase nada foi desenvolvido nesta área. Em pleno Renascimento, entretanto, Leonardo da Vinci deduz o princípio de conservação de massa para o escoamento unidimensional de fluidos incompressíveis.

Mais tarde, em meados do século XVII, Evangelista Torricelli publica seu teorema acerca do escoamento em orifício, que na época foi tratado como tendo pouco uso prático. Sabe-se que a história desmentiu este pensamento, e hoje em dia um grande número de problemas em engenharia é solucionado através deste teorema.

Em 1687, Newton publica "Principia" onde é mostrado o comportamento dos fluidos viscosos. Foi demonstrado que a tensão originada pelo escoamento do fluido é proporcional ao gradiente do campo de velocidades. Em sua homenagem, os fluidos que possuem esta característica, e a água é um deles, são chamados de fluidos newtonianos.

Nesta mesma época, Newton desenvolveu o cálculo diferencial, uma ferramenta matemática que ajudou muito outros pesquisadores no desenvolvimento desta área.

Já no século XVIII, Bernoulli demonstrou que a aceleração em fluidos ideais era proporcional ao gradiente de pressão. Em seguida, Euler desenvolveu uma equação matemática para escoamento permanente de um fluido ideal, que hoje em dia é chamada de Equação de Bernoulli.

Mais tarde vieram outros como Lagrange, Laplace e Gerstner que deram suas contribuições para o campo da hidrodinâmica. D'Alembert publicou em 1752 seu famoso paradoxo mostrando que um corpo quando imerso em um escoamento de um fluido ideal não apresentava nenhuma força de arrasto.

Este paradoxo demonstrado por D'Alémbert causou uma divisão no estudo do escoamento dos fluidos. Uma primeira parte, chamada de hidrodinâmica, que se baseou na teoria do fluido ideal, e uma outra parte, denominada de hidráulica que abandonou toda a teoria e partiu para estudos experimentais.

Na primeira metade do século XIX vários autores adicionaram à equação de Euler um termo que representa a resistência ao escoamento, dentre eles pode-se citar Navier em 1827, Cauchy em 1828, Poisson em 1829, St. Venant em 1843 e Stokes em 1845. Stokes foi o primeiro a usar o coeficiente de viscosidade, e hoje em dia estas equações são chamadas de Equações de Navier-Stokes.

Estas equações somadas à equação que traduz a condição de incompressibilidade do fluido formam o modelo matemático que representa o escoamento dos fluidos. Porém as equações de Navier-Stokes, também chamadas de equações da quantidade de movimento, já que traduzem a 2ª lei de Newton, são equações diferenciais parciais de segunda ordem, e com a exceção de alguns casos simples, não possuem solução analítica conhecida. Durante vários anos, um grande número de pesquisadores se dedicaram aos estudos destas equações, porém, segundo White(1974), apenas 70 soluções, desenvolvidas para casos particulares, tinham sido encontradas.

Com o desenvolvimento extraordinário da informática nos últimos trinta anos, um vasto campo de pesquisas se abriu nos estudos de escoamento dos fluidos, o da modelação numérica.

Os métodos numéricos procuram transformar estas equações complexas que traduzem o fenômeno do escoamento num meio contínuo, em equações algébricas simples através da discretização do meio. A maneira com são feitas estas discretizações varia de método para método.

Os métodos numéricos mais usados na hidráulica são o método das diferenças finitas, onde o domínio do problema é dividido em uma série de pontos e a relação dos valores das variáveis nestes pontos é dada por uma expansão em série de Taylor truncada, e o método dos elementos finitos, onde o domínio é dividido em elementos e são usadas funções de interpolação para a aproximação geométrica e das funções.

Esta tese procura dar uma contribuição ao constante e rápido desenvolvimento dos métodos numéricos aplicados à hidráulica de canais. É proposto um modelo unidimensional para rede de canais com um esquema numérico desacoplado, onde o cálculo das variáveis é feito separadamente, primeiro calculando-se as elevações através da equação da continuidade mediante resolução de um sistema de equações, para em seguida calcular as velocidades diretamente através de substituições sucessivas da variável elevação na equação da quantidade de movimento. Para a discretização espacial é empregado um recente método proposto por Rosman em 1994 denominado método do elemento móvel, e para a discretização temporal é utilizado o método do fatoramento implícito.

O trabalho desenvolvido é apresentado em etapas, no capítulo 2 é feito o desenvolvimento do modelo matemático para escoamento unidimensional partindo da formulação tridimensional, no capítulo 3 é apresentado o modelo numérico proposto, no capítulo 4 são feitos os testes com o modelo e são apresentados os resultados, e finalmente, no capítulo 5, são apresentadas as conclusões do trabalho e são feitas algumas recomendações para pesquisas futuras.

2. Equações Governantes

A modelação matemática é uma primeira tradução do fenómeno real para a linguagem matemática. Ela representa um fenómeno físico complexo, com inúmeras variáveis interdependentes, através de um modelo formado por um conjunto de equações governantes com um número restrito de variáveis.

No desenvolvimento da modelagem matemática é preciso conhecer o fenómeno a ser modelado, identificar quais são os agentes intervenientes, perceber a maneira pela qual estes agentes influenciam o fenómeno, para que se possa adotar um modelo compatível com os tipos de problemas que se deseja resolver, sem incorrer no erro de desprezar algum fator importante, ou de considerá-lo quando pode ser desprezado.

Neste capítulo é mostrado o desenvolvimento do modelo matemático para escoamentos unidimensionais. Primeiramente é desenvolvido o modelo tridimensional para águas rasas, depois as equações deste modelo são integradas ao longo da seção transversal do escoamento para dar origem ao modelo unidimensional.

Para começar a estudar o movimento do fluido é preciso, primeiramente, definir uma maneira de descrevê-lo. A descrição das grandezas relativas ao movimento dos fluidos pode ser abordada mediante duas óticas distintas, a euleriana e a lagrangeana. A descrição lagrangeana procura determinar a trajetória de uma partícula infinitesimal ao longo do escoamento, enquanto a descrição euleriana determina as características do escoamento, ao longo do tempo, para uma dada posição de observação.

Nesta tese, como na maioria dos trabalhos acerca da mecânica dos fluidos, será utilizada a descrição euleriana porque requer um tratamento matemático mais simples, além de se adequar melhor aos problemas de engenharia hidráulica, já que fornece as características do escoamento nos pontos de interesse.

Desta forma, uma grandeza qualquer do escoamento representada pela variável P , será descrita em cada ponto como uma função do tempo, podendo ser representada da seguinte maneira:

$$P = f(x, y, z, t)$$

Além disso, todo o equacionamento do escoamento do fluido assume o meio como sendo contínuo, ou seja, não são descritos os fenômenos que acontecem nas escalas moleculares, e mais ainda, considera-se que as propriedades do fluido possuem uma variação contínua, permitindo que uma determinada grandeza no ponto x possa ser relacionada com ela mesma no ponto $x + \Delta x$ através de expansão em série de Taylor, desprezando-se os termos de ordem superior,

$$P(x + \Delta x, t) = P(x, t) + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x$$

ou seja, assume-se que as escalas espaciais sejam suficientemente pequenas para que se possa adotar uma aproximação linear das grandezas.

Após apresentado como é feita a descrição do escoamento, serão apresentadas, a seguir, as equações governantes do escoamento de corpos d'água de uma forma mais geral, abrangendo as três dimensões, e em seguida serão apresentadas as equações que regem o escoamento unidimensional.

O equacionamento do escoamento se dá através da condição de incompressibilidade do fluido e da aplicação do princípio da conservação da quantidade de movimento.

2.1 Condição de Incompressibilidade

De uma maneira geral, a massa de uma partícula de um determinado fluido pode mudar tanto por variações em sua massa específica quanto em seu volume. Porém, verifica-se que em escoamentos naturais onde as velocidades são baixas, o volume praticamente não sofre variações devido à pressão. Portanto diz-se que estes escoamentos são incompressíveis.

A condição de incompressibilidade é expressa matematicamente pela equação da continuidade, e significa dizer que o divergente de velocidades é nulo, ou seja, independente do campo de velocidades, o volume de um conjunto de partículas continua constante.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

Rosman(1997) chama atenção para o fato de que é comum colocar a incompressibilidade como uma consequência da conservação de massa, o que é incorreto. Na verdade, a massa específica da água pode variar com a temperatura e com as concentrações das substâncias nela encontradas mesmo que o fluido seja incompressível, como no caso dos estuários. Para que a massa específica seja constante é necessário que o fluido seja homogêneo e que o escoamento seja incompressível.

2.2 Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

O princípio da conservação da quantidade de movimento é regido pela 2ª Lei de Newton, ou seja, o somatório das forças externas aplicadas a um corpo é igual à taxa de variação de sua quantidade de movimento no tempo.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{Dm\vec{v}}{Dt} \quad (2.2)$$

As forças externas aplicadas ao fluido podem ser de dois tipos, as de contato ou de superfície que atuam diretamente sobre um corpo, tais como: pressão e atrito, e as de campo que são induzidas por um campo qualquer, como campo gravitacional, coriolis e etc.

Considerando um volume de controle, cujas dimensões sejam suficientemente pequenas de modo que seja válido adotar uma variação linear, pode-se visualizar as forças de contato, na direção x , atuando em cada uma das faces(Figura 2.1).

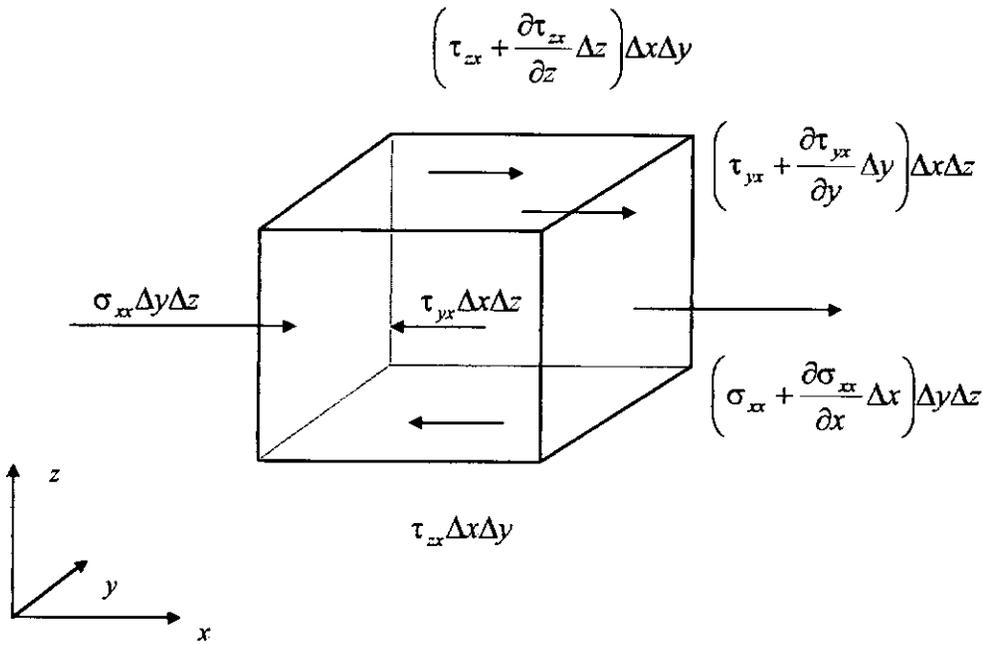


Figura 2.1: Forças de contato na direção x

Fazendo o somatório das forças externas na direção x, teremos:

$$\sum F_x = \underbrace{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z}_{\text{resultante das forças de contato}} + \underbrace{a_{cx} \rho \Delta x \Delta y \Delta z}_{\text{resultante das forças de campo}} \quad (2.3)$$

onde σ_{xx} é a tensão normal, τ_{ij} é a tensão tangencial na direção j , aplicada a uma superfície perpendicular à direção i , e a_{cx} é a aceleração de campo na direção x .

Porém a tensão normal é igual a $\sigma_{xx} = p - \tau_{xx}$, onde p é a pressão. Substituindo esta expressão na equação(2.3):

$$\frac{\sum F_x}{\Delta x \Delta y \Delta z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + a_{cx} \rho \quad (2.4)$$

expandindo esta expressão para as direções y e z , teremos:

$$\frac{\sum F_y}{\Delta x \Delta y \Delta z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + a_{cy} \rho \quad (2.5)$$

$$\frac{\sum F_z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + a_{cz} \rho \quad (2.6)$$

reescrevendo em notação indicial, onde índices repetidos num mesmo termo indica um somatório, tem-se:

$$\frac{\sum F_i}{\Delta x \Delta y \Delta z} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + a_{ci} \rho \quad (2.7)$$

Repare que até aqui, já são 16 o número de incógnitas para apenas quatro equações. Portanto o modelo não está fechado, ou seja, o número de incógnitas não é igual ao número de equações.

Pode-se demonstrar, através do balanço da quantidade de movimento angular, que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, diminuindo assim de nove para seis as componentes independentes das tensões de superfície, conhecidas como componentes de Lamé.

Além disso, estas tensões de superfície podem ser modeladas em função de gradientes do campo de velocidades, através da experiência de Newton, onde tem-se a seguinte relação:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

sendo μ é a viscosidade dinâmica.

Deste modo, conseguiu-se reduzir para sete o número de incógnitas, quais sejam:

- as velocidades u , v , w ;

- a pressão p ; e,
- as acelerações de campo a_{cx} , a_{cy} , a_{cz}

porém tem-se apenas 4 equações, a equação da continuidade e três equações da quantidade de movimento, uma para cada direção. Falta ainda definir as acelerações de campo.

Campo Gravitacional

Neste caso, considerando o eixo OZ , a aceleração na direção z será, em módulo, igual a aceleração da gravidade.

$$a_z = -g \quad (2.9)$$

Aceleração de Coriolis

A formulação das equações do movimento dos fluidos considera um referencial inercial. Dependendo das dimensões do problema, os efeitos da rotação da Terra podem ter influência sobre o escoamento, sendo assim devem ser levados em consideração na modelação matemática.

Embora a aceleração de Coriolis seja decorrente de esforços inerciais, é tratada na modelação como aceleração de campo, respeitando-se as seguintes relações:

$$a_{cx} = 2\Omega \sin\theta v \quad (2.10)$$

$$a_{cy} = -2\Omega \sin\theta u \quad (2.11)$$

onde Ω é a velocidade angular da Terra e θ o ângulo de latitude.

Uma vez definidas as forças atuantes no meio fluido, resta descrever a derivada total no tempo do termo da quantidade de movimento, para que se possa complementar o equacionamento da segunda lei de Newton.

Fazendo a derivada no tempo na direção x , teremos:

$$\frac{D\rho u}{Dt} = \rho \frac{Du}{Dt} + u \frac{D\rho}{Dt}$$

Pode-se finalmente escrever, em notação indicial, a equação da quantidade de movimento:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + u_i \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + a_{ci}\rho(1 - \delta_{i3}) - g\rho\delta_{i3} \quad (2.12)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, que vale 1 para $i=j$ e 0 para $i \neq j$, a_{ci} é a aceleração de Coriolis e p é a pressão.

2.3 Algumas Simplificações

2.3.1 Aproximação de Boussinesq

Boussinesq percebeu que o termo que representa a variação da massa específica do fluido no tempo era muito menor que o termo que representa a variação da velocidade no tempo. Sendo assim, este termo passa a ser desprezado na modelagem.

$$\rho \frac{Du}{Dt} \gg u \frac{D\rho}{Dt}$$

Além disso, em corpos d'água rasos, os gradientes de densidade são tipicamente da ordem de um para mil, portanto a substituição de um valor real $\rho(x,t)$ por um valor de referência ρ_0 não causa nenhum problema, com exceção do termo de gravidade. Segundo

Csanady(1982), embora os gradientes de densidade sejam pequenos muitas vezes não são desprezíveis.

Sendo assim, pode-se reescrever a equação da quantidade de movimento da seguinte forma:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + a_{ci} (1 - \delta_{i3}) - g \frac{\rho}{\rho_0} \delta_{i3} \quad (2.13)$$

2.3.2 Promediação das Equações

Na natureza, e mais precisamente no âmbito de interesse da engenharia hidráulica, os escoamentos quase sempre são turbulentos, vide Eiger(1989), White(1974). É neste ponto que depara-se com o problema da escala de interesse. Para utilizarmos a equação da quantidade de movimento de maneira consistente, teríamos que trabalhar em uma escala onde as tensões viscosas tenham significado físico. Para que se consiga isto na prática, teríamos que utilizar discretizações temporais e espaciais muito pequenas, fazendo com que o número de equações a serem resolvidas seja muito grande, tornando o problema transcomputacional.

Imaginando que não houvesse nenhuma limitação no campo computacional, ainda assim seria difícil o emprego das equações como apresentadas, pois o modelo teria que ser alimentado com informações de campo, e para isto, seria necessária a realização de medições em escalas espaciais e temporais muito pequenas, inviável na prática.

Sendo assim, há a necessidade de se fazer alguma mudança nas equações de modo que se possa utilizá-las na resolução dos problemas de engenharia.

O interesse da modelação é conseguir descrever as características gerais dos escoamentos turbulentos, não se preocupando com as oscilações de pequena escala. A solução então é separar uma variável em uma parte "média" ou de grande escala, e uma parte que "flutua" ou de pequena escala onde apenas seus efeitos gerais serão modelados, vide Rosman(1989). Considerando P uma variável qualquer do escoamento, podemos separá-la da seguinte maneira:

$$P = \bar{P} + p'$$

Substituindo cada variável nas equações do escoamento por uma expressão do tipo da anterior, tem-se um conjunto de equações de valores médios acrescidos de termos de pequena escala.

Esta separação, proposta por Reynolds em 1895, define a parte média como sendo o resultado da seguinte promediação:

$$\bar{P}(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} P(x_i, t') dt' \quad (2.14)$$

onde T é o período de tempo do escoamento médio. A partir da promediação acima, são válidos os chamados postulados de Reynolds:

$$\overline{\bar{P}} = \bar{P} \quad \overline{p'} = 0 \quad \overline{\bar{P}p'} = 0$$

É importante observar que esta promediação gera variáveis que são independentes do tempo. Para a engenharia hidráulica, na maioria dos problemas encontrados, não se pode desprezar os termos dependentes do tempo, portanto esta promediação não deve ser utilizada.

A solução encontrada é modificar a promediação apresentada anteriormente, utilizando uma média temporal relaxada, onde o período T é suficientemente grande para filtrar as flutuações de pequena escala, e suficientemente pequeno de modo que o modelo possa "enxergar" os fenômenos de grande escala que se desejam modelar (Rosman, 1989).

A promediação, neste caso, é feita da seguinte maneira:

$$\bar{P}(x_i, t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} P(x_i, t') dt' \quad (2.15)$$

Faremos uma simplificação admitindo que ainda são válidos os postulados de Reynolds. Não convém neste trabalho discutir as limitações teóricas desta simplificação. Discussões mais detalhadas podem ser encontradas em Rosman (1987), Rosman (1989) e Eiger (1989).

Sendo assim, separando as variáveis e aplicando a promediação na equação da continuidade, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.16)$$

Para a equação da quantidade de movimento, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{a}_{ci} (1 - \delta_{i3}) - g \frac{\rho}{\rho_0} \delta_{i3} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (2.17)$$

onde o último termo, que representa correlações entre velocidades de pequena escala, é denominado de tensões turbulentas ou tensões de Reynolds. Estas tensões não possuem relações matemáticas, e por isso precisam ser modeladas através das variáveis de grande escala.

$$\bar{\tau}_{ij} = -\rho_0 \overline{u'_i u'_j} \quad (2.18)$$

Para a modelação das tensões turbulentas é feito um paralelismo com o modelo newtoniano para as tensões viscosas, onde é apresentado o conceito da viscosidade turbulenta. Deste modo, é como se as tensões totais de superfície aplicadas ao sistema fossem compostas por uma parte laminar, regida pela eq(2.8), mais uma parte turbulenta.

$$\bar{\tau}_{ij} = \rho_0 \left[K_{ij} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.19)$$

onde K_{ij} é o coeficiente de viscosidade turbulenta

A modelação da turbulência é um campo vastíssimo para a pesquisa, e discussões mais detalhadas podem ser encontradas em Rosman(1987), Rosman(1989), Eiger(1989) e Araújo(1993).

Portanto, a equação promediada da quantidade de movimento é apresentada da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}^{-T}}{\partial x_j} \right) + \bar{a}_{ci} (1 - \delta_{i3}) - g \frac{\rho}{\rho_0} \delta_{i3} \quad (2.20)$$

sendo que os termos de tensões viscosas geralmente são desprezados por serem bem menores que as tensões turbulentas.

2.3.3 Aproximação hidrostática

Normalmente, em escoamento de corpos d'água rasos, as velocidades e as tensões turbulentas verticais são baixíssimas se comparadas com as horizontais. Como exemplo, podemos analisar o caso do escoamento em um estuário, onde o nível d'água varia um metro num ciclo de maré, enquanto o deslocamento de uma partícula ao longo do estuário pode atingir até 10 km no mesmo período, ou seja, as velocidades horizontais, neste caso, são quatro ordens de grandeza maiores que as verticais.

$$w \cong \frac{1}{\left(\frac{T}{2}\right)} \quad u \cong \frac{10000}{\left(\frac{T}{2}\right)}$$

sendo w a velocidade vertical, u a velocidade horizontal, e T o período da onda de maré.

A partir desta constatação, desprezando-se as velocidades e as tensões turbulentas verticais na equação dinâmica na direção z , o que significa dizer que as pressões dinâmicas são desprezadas, obtém-se a seguinte condição:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\rho}{\rho_0} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.22)$$

Integrando a expressão(2.22) ao longo da profundidade desde o ponto z qualquer até a superfície livre $\zeta(x,y,t)$,(Figura 2.2), e considerando o fluido homogêneo, tem-se:

$$p = p_{atm} + \rho g(\zeta - z) \quad (2.23)$$

onde P_{atm} é a pressão atmosférica.

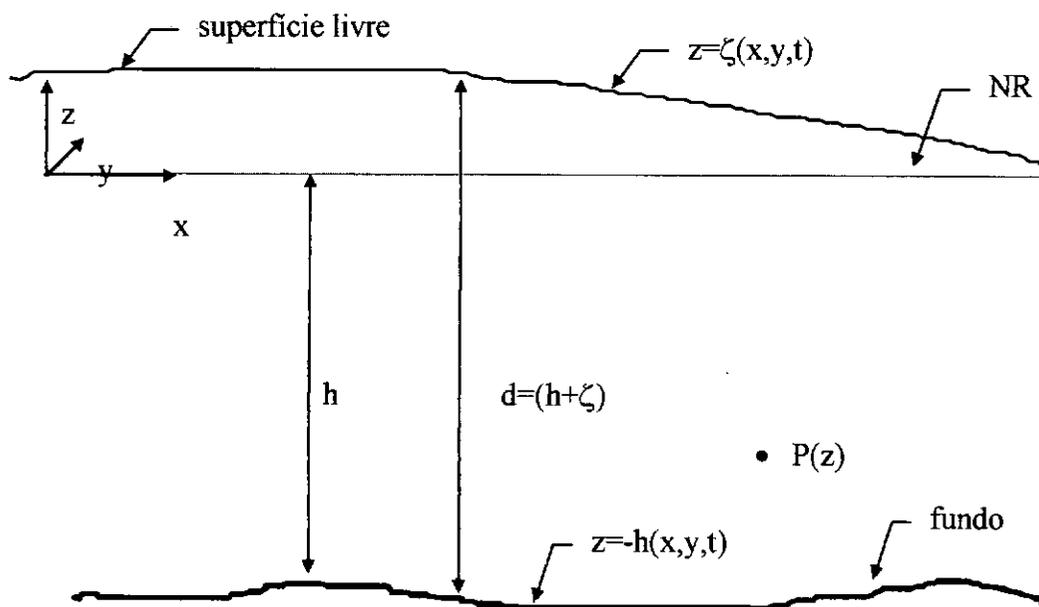


Figura 2.2: Esquema de corpos d'água rasos, onde NR representa um plano de referência, ζ a cota do nível d'água, d a lâmina d'água, e h a profundidade em relação ao nível de referência.

Derivando a expressão(2.23) no espaço, e considerando que não há variação da pressão atmosférica, obtém-se os gradientes de pressão devido ao desnível da linha d'água:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (2.25)$$

Substituindo os termos das derivadas de pressão nas equações da quantidade de movimento nas direções x e y , tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z} = -g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}^T}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\tau}_{i3}^T}{\partial z} + \bar{a}_{ci} \quad (2.26)$$

sendo que, neste caso, como a equação da quantidade de movimento na direção z foi embutida nas equações das direções x e y através do termo de pressão, então i e j assumem apenas valores de 1 a 2.

O modelo matemático para o escoamento tridimensional em águas rasas é formado pelas equações (2.16) e (2.26).

De agora em diante não será mais utilizada a barra sobre a variável, fica subentendido que se trata de equações médias ou de larga escala.

2.4 Caso Unidimensional

Os modelos completos, ou seja, aqueles que representam os processos envolvidos no escoamento nas três dimensões, são muito complexos pois envolvem um grande número de equações a serem resolvidas, além da necessidade de um grande número de informações que

possam definir de maneira consistente as condições de contorno do problema, dificultando assim, aplicações na engenharia.

Diante disto, foram desenvolvidos modelos mais simples, com número de dimensões reduzido, de modo que o número de equações a serem resolvidas fossem menores. Estes modelos são derivados a partir da formulação tridimensional, fazendo-se a promediação em uma determinada direção, x , y , ou z , ou até mesmo em duas direções, de modo que o problema seja tratado de maneira bi ou unidimensional.

No caso de escoamentos em rios e canais, as escalas longitudinais do problema são muito maiores que as escalas transversais, logo estes corpos d'água podem ser bem representados por um modelo unidimensional, onde determina-se apenas as características médias do escoamento nas seções transversais previamente escolhidas ao longo do eixo longitudinal.

O escoamento unidimensional é regido pelas equações de Saint-Venant, que foram deduzidas a partir da integração, ao longo da seção transversal, das equações da continuidade e da quantidade de movimento. A seguir, apresenta-se a dedução das equações de Saint-Venant. Primeiramente será feita a integração na vertical, para depois integrá-las lateralmente, ou seja, ao longo da largura do canal.

2.4.1 Integração na Vertical da Equação da Quantidade de Movimento

Como o objetivo é obter as equações do escoamento unidimensional, o termo da aceleração de Coriolis pode ser desprezado, já que sua influência é insignificante no escoamento de canais. Portanto, reescrevendo a equação da quantidade de movimento, tem-se:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + w \frac{\partial u_i}{\partial z} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial z}$$

Antes de se fazer a integração, é necessário introduzir algumas definições relativas às variáveis integradas na vertical. A velocidade média na vertical será representada pela variável \bar{u}_i , que é determinada a partir da integração de u_i ao longo da profundidade:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\zeta + h} \int_{-h}^{\zeta} u_i(x, y, z, t) dz \quad (2.27)$$

A profundidade total d é obtida pela seguinte expressão:

$$d(x, y, t) = h(x, y) + \zeta(x, y, t) \quad (2.28)$$

Desta forma, a velocidade pode ser escrita como sendo o somatório de uma parte média, representada pela expressão(2.27) e uma parte que pode ser considerada como um desvio:

$$u_i(x, y, z, t) = \underbrace{\bar{u}_i(x, y, t)}_{\text{média}} + \underbrace{\tilde{u}_i(x, y, z, t)}_{\text{desvio}} \quad (2.29)$$

sendo que, por definição:

$$\int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_i(x, y, z, t) dz = 0 \quad (2.30)$$

Com tais considerações, a equação da quantidade de movimento pode ser integrada ao longo da profundidade, aplicando a regra de Leibnitz. Para facilitar o entendimento, primeiramente será feita a integração, termo a termo, do lado esquerdo da equação. Posteriormente, o mesmo procedimento é apresentado para o lado direito da equação.

- 1º termo:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} u_i dz - u_i \frac{\partial \zeta}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} - \underbrace{u_i \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{z=-h}}_{=0(h=h(x,y))}$$

- 2º termo:

$$\int_{-h}^{\zeta} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + w \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) dz \xrightarrow{\text{utilizando continuidade}} \int_{-h}^{\zeta} \left(\underbrace{\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}}_A + \underbrace{\frac{\partial w u_i}{\partial z}}_B \right) dz$$

Separando o 2º termo em A e B, pode-se escrever para A:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} dz = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} u_i u_j dz - u_i u_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \Big|_{z=\zeta} - u_i u_j \frac{\partial h}{\partial x_j} \Big|_{z=-h}$$

e para B, obtém-se:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial w u_i}{\partial z} dz = u_i w \Big|_{z=\zeta} - u_i w \Big|_{z=-h}$$

Repare que existem termos específicos no contorno, tanto na superfície quanto no fundo. É necessária então, a aplicação de condições de contorno adequadas, que são chamadas de condições de contorno cinemáticas na superfície livre e no fundo. Aqui não se entrará em detalhes teóricos sobre estas condições, maiores detalhes podem ser encontrados em Rosman(1997).

Na superfície livre pode-se escrever:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} = w \quad \text{em } z = \zeta(x,y,t) \quad (2.31)$$

e no fundo:

$$u_i = w = 0 \quad \text{em } z = -h(x,y) \quad (2.32)$$

Somados os termos do lado esquerdo e aplicadas as condições de contorno cinemáticas, pode-se escrever:

$$\int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + w \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} u_i dz + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} u_i u_j dz = \frac{\partial \bar{u}_i d}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j d}{\partial x_j}$$

Feita a integração do lado esquerdo, passa-se então para a integração do lado direito da equação da quantidade de movimento, que também será feita termo a termo:

- 1º termo:

$$\int_{-h}^{\zeta} -g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} dz = -g \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\zeta} \zeta dz - \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \Big|_{z=\zeta} - \zeta \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{z=-h} \right] = -g(\zeta + h) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$$

- 2º termo:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dz = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \tau_{ij} dz - \tau_{ij} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \Big|_{z=\zeta} - \tau_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \Big|_{z=-h} \right]$$

- 3º termo:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial z} dz = \frac{1}{\rho_0} \left[\tau_{i3} \Big|_{z=\zeta} - \tau_{i3} \Big|_{z=-h} \right]$$

Mais uma vez, existem termos específicos no contorno, tanto na superfície quanto no fundo. Neste caso, são aplicadas as chamadas condições de contorno dinâmicas, cujos procedimentos podem ser encontrados em Rosman(1997).

Na superfície podemos escrever que:

$$\tau_{ij} n_j + \tau_{i3} n_3 = \tau_i^S \quad \text{em } z = \zeta(x, y, t) \quad (2.33)$$

onde τ_i^S é a componente na direção i da tensão tangencial do vento aplicada externamente à superfície, e $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ é um vetor unitário normal à superfície considerada. Na superfície livre tem-se a seguinte definição:

$$S_L(x, y, z, t) \equiv z - \zeta(x, y, t) = 0 \quad (2.34)$$

onde:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} S_L}{|\vec{\nabla} S_L|}, \quad \vec{\nabla} S_L = \left[-\frac{\partial \zeta}{\partial x}, -\frac{\partial \zeta}{\partial y}, 1 \right]$$

sendo assim, na superfície tem-se a seguinte condição de contorno dinâmica:

$$-\tau_{ij} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + \tau_{i3} = \tau_i^S |\vec{\nabla} S_L| \quad \text{em } z = \zeta(x, y, t) \quad (2.35)$$

O fundo pode ser definido da seguinte maneira:

$$\mathfrak{Z}(x, y, z) \equiv z + h(x, y) = 0 \quad (2.36)$$

As tensões no fundo são dadas pela seguinte expressão:

$$\tau_{ij} n_j + \tau_{i3} n_3 = \tau_i^F \quad \text{em } z = -h(x, y) \quad (2.37)$$

onde τ_i^F é a componente na direção i da tensão de atrito no fundo. Pode-se escrever que o vetor unitário normal ao fundo é definido como:

$$\bar{n} = \frac{\bar{\nabla}\mathfrak{S}}{|\bar{\nabla}\mathfrak{S}|}, \quad \bar{\nabla}\mathfrak{S} = \left[-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right]$$

Deste modo, a condição de contorno dinâmica no fundo pode ser escrita:

$$\tau_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} + \tau_{i3} = \tau_i^F |\bar{\nabla}\mathfrak{S}| \quad \text{em } z = -h(x,y) \quad (2.38)$$

Somando-se os termos do lado direito da equação com os do lado esquerdo, e aplicando-se as condições de contorno dinâmicas, obtém-se a equação da quantidade de movimento integrada na vertical:

$$\frac{\partial \bar{u}_i d}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j d}{\partial x_j} = -gd \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} (\tau_{ij} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) dz + \tau_i^s |\bar{\nabla}S_L| - \tau_i^F |\bar{\nabla}\mathfrak{S}| \right) \quad (2.39)$$

2.4.2 Integração na Lateral da Equação da Quantidade de Movimento integrada na Vertical

O próximo passo para que se obtenha a equação da quantidade de movimento unidimensional, é integrar lateralmente a equação (2.39). Antes disso, é preciso, mais uma vez, definir as velocidades médias e a profundidade, integradas lateralmente.

$$\bar{u}(x,t) = \int_{B_e}^{B_d} \bar{u}(x,y,t) dy \quad (2.40)$$

$$\bar{v}(x,t) = \int_{B_e}^{B_d} \bar{v}(x,y,t) dy = 0 \quad (2.41)$$

onde B_e e B_d representam o batente da margem esquerda e direita, respectivamente

Considerando que não há variação do nível d'água em uma dada seção transversal, pode-se definir a profundidade média como:

$$\bar{d}(x,t) = \int_{B_e}^{B_d} h(x,y) dy + \zeta(x,t) = \bar{h}(x) + \zeta(x,t) \quad (2.42)$$

Primeiramente será feita a integração, termo a termo, do lado esquerdo da equação (2.39).

- 1º termo:

$$\int_{B_e}^{B_d} \frac{\partial \bar{u}_i d}{\partial t} dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_e}^{B_d} \bar{u}_i d dy - \bar{u}_i d \frac{\partial B_d}{\partial t} \Big|_{y=B_d} - \bar{u}_i d \frac{\partial B_e}{\partial t} \Big|_{y=B_e}$$

- 2º termo:

$$\int_{B_e}^{B_d} \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j d}{\partial x_j} dy = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_e}^{B_d} \bar{u}_i \bar{u}_j d dy - \bar{u}_i \bar{u}_j d \frac{\partial B_d}{\partial t} \Big|_{y=B_d} - \bar{u}_i \bar{u}_j d \frac{\partial B_e}{\partial t} \Big|_{y=B_e}$$

As condições de contorno cinemáticas, neste caso, são impostas nas margens, onde as velocidades são nulas. Portanto o lado esquerdo da equação torna-se:

$$\int_{B_e}^{B_d} \left(\frac{\partial \bar{u}_i d}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j d}{\partial x_j} \right) dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_e}^{B_d} \bar{u}_i d dy + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_e}^{B_d} \bar{u}_i \bar{u}_j d dy = \frac{\partial \overline{u d B}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u u d B}}{\partial x}$$

A seguir será feita a integração do lado direito da equação (2.39):

- 1º termo:

$$\int_{B_e}^{B_d} -gd \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} dy = -g \overline{d B} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

- 2º termo:

$$\int_{B_s}^{B_d} \left\{ \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} (\tau_{ij} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) dz + \tau_i^S |\bar{\nabla} S_L| - \tau_i^F |\bar{\nabla} \mathfrak{I}| \right) \right\} dy = \frac{\bar{B}}{\rho_0} (\tau^S - \tau^F)$$

O termo das tensões turbulentas médias ao longo da seção transversal não são consideradas, seus efeitos são modelados pela tensão de atrito no fundo. Agora pode-se escrever a equação da quantidade de movimento integrada ao longo da seção transversal:

$$\frac{\overline{\partial u d B}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial u u d B}}{\partial x} = -g \overline{d B} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\bar{B}}{\rho_0} (\tau^S - \tau^F) \quad (2.43)$$

onde τ^S é a tensão média do vento na seção transversal atuando sobre a superfície livre, e τ^F é a tensão de atrito no fundo média na seção.

Não é usual considerar a influência do vento em escoamento unidimensional, portanto, se dividirmos a equação (2.43) pela área e eliminarmos o termo da tensão na superfície, tem-se:

$$\frac{\overline{\partial u}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial u u}}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 d} (\tau^F) \quad (2.44)$$

A tensão de atrito no fundo pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$\tau^F = \rho C_f |u| u \quad (2.45)$$

onde C_f é o coeficiente de atrito. Existe um grande número de expressões empíricas que tentam expressar o termo de atrito. As mais comumente usadas são as fórmulas de Chezy e de Manning. Neste trabalho utiliza-se o coeficiente de Chezy que tem a seguinte relação com o coeficiente de atrito:

$$C_f = \frac{g}{c^2} \quad (2.46)$$

sendo que c é o coeficiente de Chezy, calculado por:

$$c = 18 \log \frac{6R}{\varepsilon} \quad (2.47)$$

onde R é o raio hidráulico e ε é a amplitude da rugosidade equivalente do leito.

Portanto, a equação da quantidade de movimento pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{g|u|}{c^2 d} u \quad (2.48)$$

2.4.3 Integração na Vertical da Equação da Continuidade

Reescrevendo a equação da continuidade:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Integrando-se, termo a termo, ao longo da profundidade, tem-se:

- 1º termo:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dz = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\zeta} u_i dz - u_i \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{z=\zeta} - u_i \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{z=-h}$$

- 2º termo:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w|_{z=\zeta} - w|_{z=-h}$$

Somando os dois termos e aplicando as condições de contorno cinemáticas, obtém-se a equação da continuidade integrada na vertical:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i d}{\partial x_i} = 0 \quad (2.49)$$

2.4.4 Integração Lateral da Equação da Continuidade Integrada na Vertical

Integrando-se ao longo da lateral:

- 1º termo:

$$\int_{B_c}^{B_d} \frac{\partial (h + \zeta)}{\partial t} dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_c}^{B_d} (h + \zeta) dy - \zeta \frac{\partial B_d}{\partial t} \Big|_{y=B_d} - \zeta \frac{\partial B_c}{\partial t} \Big|_{y=B_c} = \frac{\partial A}{\partial t}$$

- 2º termo:

$$\int_{B_c}^{B_d} \frac{\partial \bar{u}_i d}{\partial x_i} dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{B_c}^{B_d} \bar{u}_i d dy - \bar{u}_i d \frac{\partial B_d}{\partial t} \Big|_{y=B_d} - \bar{u}_i d \frac{\partial B_c}{\partial t} \Big|_{y=B_c}$$

Somando-se os termos e aplicando as condições de contorno, obtém-se a equação da continuidade unidimensional:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u} A}{\partial x} = 0 \quad (2.50)$$

Aproximando-se a seção transversal natural do corpo d'água por um trapézio(Figura 2.3), substitui-se a variável A na equação da continuidade pela seguinte expressão:

$$A = (B + md)d \quad (2.51)$$

sendo,

$$m = \frac{m_d + m_e}{2} \quad (2.52)$$

onde B é a base menor do trapézio, m_e e m_d representam a inclinação do talude da margem esquerda e direita respectivamente, e m é a inclinação média de taludes da seção transversal.

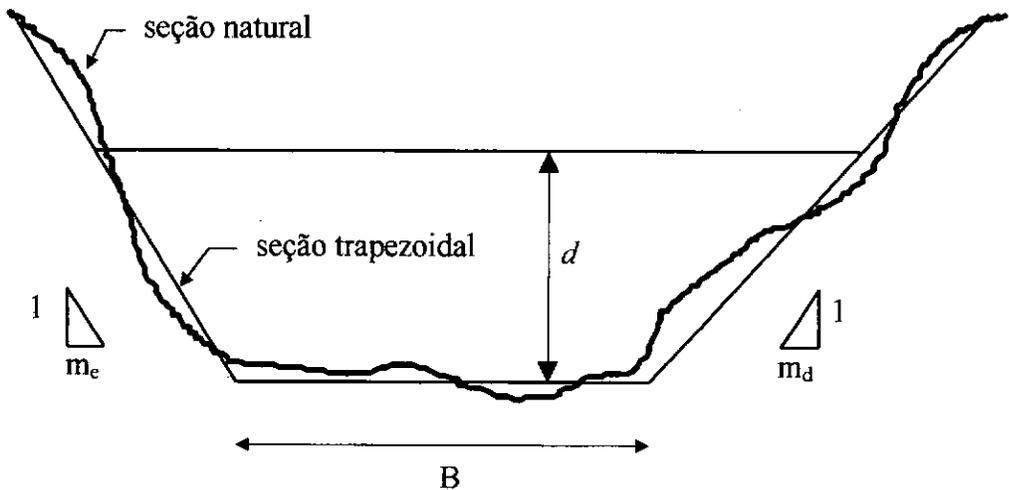


Figura 2.3: Seção transversal do rio aproximada por um trapézio

Substituindo a expressão (2.51) em (2.50), tem-se:

$$\frac{\partial(B + md)d}{\partial t} + \frac{\partial[u(B + md)d]}{\partial x} = 0 \quad (2.53)$$

Portanto as equações (2.48) e (2.53) formam o modelo matemático que rege o escoamento unidimensional.

3. Modelo Numérico

O modelo matemático que descreve o escoamento unidimensional é formado por duas equações diferenciais parciais não lineares, do tipo hiperbólicas, que não possuem solução analítica, a não ser que seja feita uma série de simplificações que acabam limitando sua utilização na solução de problemas práticos da engenharia.

Com o enorme desenvolvimento da informática nas últimas décadas, tornou-se possível a utilização de métodos numéricos na solução de sistemas de equações diferenciais parciais que não possuem solução analítica.

A modelagem numérica pode ser encarada como uma tradução da modelagem matemática, sendo adaptada para diferentes métodos de cálculo, vide Rosman(1997). A filosofia destes métodos consiste em transformar estas equações diferenciais, que traduzem um problema contínuo, em equações algébricas simples através da discretização do meio, todavia sem gerar erros que possam comprometer os resultados da modelação, vide Scudelari(1997). Os métodos mais utilizados na mecânica dos fluidos computacional são o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Volumes Finitos (MVF).

O modelo numérico aqui apresentado se propõe a modelar o escoamento unidimensional em uma rede de canais, utilizando o método do fatoramento implícito para a discretização temporal em conjunto com o método das substituições sucessivas, e o método do elemento móvel para a discretização espacial.

Neste capítulo são apresentados os métodos de discretização utilizados, o desenvolvimento das equações governantes discretizadas, bem como as condições de contorno impostas ao problema.

3.1 Discretização temporal

A discretização temporal do modelo matemático do escoamento unidimensional é feita através do método do fatoramento implícito, onde os erros associados são da ordem de $O(\Delta t^2)$,

em conjunto com o método das substituições sucessivas, onde é feito um desacoplamento do cálculo das variáveis.

A aplicação de esquemas desacoplados já foi estudada anteriormente para modelos de circulação 2DH e 1D em Vasconcellos(1991), e para modelos de circulação em estuários estratificados em Paiva(1992), com resultados animadores por requererem um menor espaço de memória e um menor tempo de processamento.

Este esquema consiste em explicitar a velocidade no tempo $t+\Delta t$ (u^+) na equação da quantidade de movimento, podendo escrevê-la em função da elevação do nível d'água (ζ^+). Para isto, é necessário fazer algumas extrapolações na equação, como será mostrado mais adiante. Em seguida, substitui-se u^+ na equação da continuidade que passa a ter apenas ζ^+ como variável.

A determinação de ζ^+ é feita utilizando a equação da continuidade, mediante resolução de um sistema de equações, que no caso de um canal simples, sem ramificações, gera uma matriz tridiagonal (banda=3). Esta é uma qualidade muito importante deste esquema, pois tende a diminuir bastante o tempo de processamento tendo em vista os algoritmos existentes, extremamente eficientes na resolução deste tipo de sistema.

Depois de calculadas as elevações de maneira global, processa-se o cálculo das velocidades, trecho a trecho, de maneira direta, substituindo os valores de elevação na expressão de u^+ explicitada na equação da quantidade de movimento. Mais adiante será mostrada a importância de se calcular a velocidade obedecendo um sentido de cálculo específico dentro do trecho a ser calculado.

A seguir, será feita uma breve descrição do método de fatoramento implícito. Detalhes do método, assim como sua generalização podem ser vistos em Rosman(1987).

O método do fatoramento implícito foi primeiramente proposto por Beam e Warming(1978), tendo sido modificado por Aldama(1985) e generalizado por Rosman(1987).

Considerando que a derivada da variável $u=u(x,t)$ possa ser expressa por um produto de operadores lineares:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_1 L_2$$

onde L é um operador linear da variável $u(x,t)$ contendo diferenciais espaciais.

Pode-se mostrar que:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (L_1^{n+1} L_2^n + L_1^n L_2^{n+1})$$

Caso L_1 ou L_2 seja uma constante, recai-se no esquema de Crank-Nicholson que é um caso especial do método do fatoramento implícito,

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (L^{n+1} + L^n) \rightarrow \text{CrankNicholson}$$

Caso a derivada da variável $u(x,t)$ seja expressa por termos não lineares, então tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = N(u)L(u)$$

onde $N(u)$ é um operador não linear da variável $u(x,t)$.

Neste caso, a discretização pode ser feita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} (N^n L^n - N^{n-1} L^{n+1}) + N^n L^{n+1}$$

Observa-se que se $N(u)$ for uma constante, recai-se novamente no esquema de Crank-Nicholson, e se $L(u)$ for constante, obtém-se o esquema de Adam-Baschfort de segunda ordem para $N(u)$.

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(3L^n - L^{n-1}) \rightarrow \text{Adams - Bashfort}$$

Uma outra maneira de se fazer a discretização temporal na presença de operador não linear é mostrada a seguir. Esta maneira apresenta praticamente os mesmos resultados da discretização apresentada anteriormente.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = N^{+1/2} \frac{(L^+ + L)}{2}$$

Para se fazer a discretização temporal das equações governantes há necessidade de inserir algumas extrapolações e interpolações para determinados termos no tempo $t + \Delta t$ e $t + 1/2\Delta t$. Para não haver dúvidas no desenvolvimento das equações apresentado a seguir, será utilizada a seguinte notação:

Notação: (...) ⁺ indica variável no instante $t + \Delta t$

(...) [#] indica variável extrapolada no tempo $t + \Delta t$

(...) sem superescrito indica variável no tempo t

(...) ⁻ indica variável no tempo $t - \Delta t$

(...) [⊗] indica variável extrapolada ou interpolada no tempo $t + 1/2\Delta t$

3.1.1 Equação da Continuidade Discretizada no Tempo

A equação da continuidade pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial(B + md)d}{\partial t} + \frac{\partial[u(B + md)d]}{\partial x} = 0 \tag{3.1}$$

Antes de aplicar o fatoramento implícito, algumas modificações na equação serão apresentadas de modo a facilitar o entendimento. Desenvolvendo o primeiro termo da equação, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(B+md)d}{\partial t} &= \frac{\partial Bd}{\partial t} + \frac{\partial(md)d}{\partial t} = \\ &= B \frac{\partial d}{\partial t} + d \frac{\partial(md)}{\partial t} + md \frac{\partial d}{\partial t}\end{aligned}$$

como $d=(h+\zeta)$, e considerando que o fundo é fixo, a expressão fica:

$$\frac{\partial(B+md)d}{\partial t} = B \frac{\partial \zeta}{\partial t} + 2md \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

substituindo na equação da continuidade e utilizando a variável A para expressar a área da seção transversal, obtém-se:

$$(B+2md) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial uA}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

Aplicando o método do fatoramento implícito na equação da continuidade, tem-se:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \rightarrow \frac{\zeta^+ - \zeta}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial uA}{\partial x} \xrightarrow{\frac{L_1 L_2}{2(L_1 L_2 + L_1 L_2^+)}} \frac{1}{2} \frac{\partial (u^+ A + uA^+)}{\partial x}$$

A equação da continuidade discretizada no tempo fica:

$$2(B+2md) \frac{\zeta^+ - \zeta}{\Delta t} + \frac{\partial (u^+ A + uA^+)}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

3.1.2 Equação da Quantidade de Movimento Discretizada no Tempo

A equação da quantidade de movimento é descrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \beta u \quad (3.4)$$

onde:

$$\beta = \frac{g|u|}{c^2 d}$$

Aplicando o método do fatoramento implícito, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \frac{u^+ - u}{\Delta t}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \xrightarrow{\frac{L_2}{L_1}} \frac{1}{2}(L_1^+ L_2 + L_1 L_2^+) \rightarrow \frac{1}{2} \left(u^+ \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u^+}{\partial x} \right)$$

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \xrightarrow{\frac{L_2}{L_1 = \text{const.}}} \frac{1}{2}(L_1^+ L_2 + L_1 L_2^+) \rightarrow \frac{1}{2} g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} \right)$$

$$\beta u \xrightarrow{\frac{NL}{N+1}} \frac{1}{2} \beta^{N+1/2} (L^+ + L) \rightarrow \frac{1}{2} \beta^{\otimes} (u^+ + u)$$

Assim pode-se escrever a equação da quantidade de movimento discretizada no tempo:

$$2 \frac{u^+ - u}{\Delta t} + u^+ \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u^+}{\partial x} = -g \frac{\partial (\zeta^+ + \zeta)}{\partial x} - \beta^{\otimes} (u^+ + u) \quad (3.5)$$

3.1.3 Esquema Desacoplado

Como já foi dito anteriormente, o esquema numérico é desacoplado, e para isto, é necessário explicitar u^+ na equação da quantidade de movimento em função de ζ^+ . Desenvolvendo a equação (3.5) e utilizando um valor extrapolado no tempo para a velocidade, no termo do gradiente de velocidade, tem-se:

$$u^+ \left[\frac{2}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \beta^{\circledast} \right] = -g \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} + \frac{2u}{\Delta t} - u \frac{\partial u^{\#}}{\partial x} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \beta^{\circledast} u \quad (3.6)$$

Explicitando u^+ :

$$u^+ = \left[\frac{2}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \beta^{\circledast} \right]^{-1} \left[-g \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} + \frac{2u}{\Delta t} - u \frac{\partial u^{\#}}{\partial x} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \beta^{\circledast} u \right] \quad (3.7)$$

Observe que u^+ é função apenas de ζ^+ , todos os outros termos são conhecidos do tempo de cálculo anterior, com exceção do termo do gradiente de velocidade e de β que são extrapolados em $t + \Delta t$ e $t + 1/2\Delta t$ respectivamente.

A equação (3.7) pode ser escrita como:

$$u^+ = \frac{1}{U} \left(-g \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} + M \right) \quad (3.8)$$

onde :

$$U = \frac{2}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \beta^{\circledast} \quad (3.9)$$

$$M = \frac{2u}{\Delta t} - u \frac{\partial u^{\#}}{\partial x} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \beta^{\circledast} u \quad (3.10)$$

Antes de inserir a expressão de u^+ na equação da continuidade, será mostrado como é feita a extrapolação da velocidade. A maneira como é feita a extrapolação foi objeto de pesquisa. Verificou-se que a estabilidade do modelo numérico é sensível à maneira pela qual esta extrapolação é feita.

Primeiramente foi tentada uma extrapolação linear da velocidade, porém o modelo ficou instável. Os resultados apresentaram oscilação numérica não controlada, denominada “wiggles”. Em seguida tentou-se uma extrapolação quadrática com resultados muito melhores em relação à estabilidade que a tentativa anterior. Por fim, adotou-se dois tipos distintos de extrapolação, um para cada momento do cálculo. Utilizou-se uma extrapolação quadrática da velocidade no momento da montagem da matriz de coeficientes para o cálculo das elevações, e depois de calculadas as elevações, no momento do cálculo das velocidades, a extrapolação foi feita mediante extrapolação linear da vazão. Verificou-se que com este esquema, o modelo é capaz de simular escoamentos com até o dobro do número de Courant em relação à primeira tentativa. Isto já era esperado por ser a vazão uma função muito mais suave que a velocidade. Portanto $u^\#$ é calculado da seguinte forma:

$$u^\# = 3u - 3u^- + u^- \longrightarrow \text{extrapolação quadrática} \quad (3.11)$$

$$u^\# = \frac{2Q - Q^-}{A^+} \longrightarrow \text{extrapolação linear da vazão} \quad (3.12)$$

onde A^+ é a área de escoamento que já foi calculada.

O próximo passo é substituir u^+ na equação da continuidade discretizada no tempo, obtendo-se:

$$2(B + 2md) \frac{\zeta^+ - \zeta}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{U} \left(-g \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} + M \right) A + uA^+ \right] = 0 \quad (3.13)$$

A fim de evitar termos não lineares, é feita uma extrapolação temporal linear da elevação no cálculo da área da seção transversal no tempo $t + \Delta t$, como mostrado a seguir:

$$A^+ = (B + md^{\#})d^+ \quad (3.14)$$

onde:

$$d^{\#} = (h + \zeta^{\#})$$

$$d^+ = (h + \zeta^+)$$

Portanto, reescrevendo a equação(3.13), obtém-se:

$$2(B + 2md) \frac{\zeta^+ - \zeta}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{U} \left(-g \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} + M \right) A + u(B + m(h + \zeta^{\#})) (h + \zeta^+) \right] = 0 \quad (3.15)$$

O próximo passo é explicitar, nesta equação, os termos de elevação e de suas derivadas relativos ao tempo $t + \Delta t$. Para tanto, será feito o desenvolvimento do segundo termo da equação(3.15):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-g \frac{A}{U} \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{MA}{U} \right] + \frac{\partial}{\partial x} [uBh + um(h + \zeta^{\#})h] + \frac{\partial}{\partial x} [uB\zeta^+] + \frac{\partial}{\partial x} [um(h + \zeta^{\#})\zeta^+]$$

Desenvolvendo separadamente o primeiro, quarto e quinto termos, que são aqueles que possuem a variável ζ^+ , tem-se:

- 1º termo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-g \frac{A}{U} \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \left(-g \frac{A}{U} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \frac{A}{U} \right) \frac{\partial \zeta^+}{\partial x}$$

- 4º termo:

$$\frac{\partial}{\partial x} [uB\zeta^+] = uB \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} + \zeta^+ \frac{\partial uB}{\partial x}$$

- 5º termo:

$$\frac{\partial}{\partial x} [um(h + \zeta^#)\zeta^+] = um(h + \zeta^#) \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} + \zeta^+ \frac{\partial [um(h + \zeta^#)]}{\partial x}$$

Rearrmando, obtém-se:

$$\zeta^+ \left[\frac{\partial uB}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (um(h + \zeta^#)) \right] + \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} \left[uB - \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{A}{U} \right) + um(h + \zeta^#) \right] + \frac{\partial^2 \zeta^+}{\partial x^2} \left[-g \frac{A}{U} \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [MA + uBh + um(h + \zeta^#)h]$$

Voltando a equação (3.15) e rearrumando:

$$\begin{aligned} & \zeta^+ \left[\frac{\partial}{\partial x} (u(B + m(h + \zeta^#))) + \frac{2}{\Delta t} (B + 2m(h + \zeta)) \right] + \\ & \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} \left[u(B + m(h + \zeta^#)) - \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{A}{U} \right) \right] + \frac{\partial^2 \zeta^+}{\partial x^2} \left[-g \frac{A}{U} \right] = \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\frac{2\zeta}{\Delta t} (B + 2m(h + \zeta)) - \frac{\partial}{\partial x} \left[uh(B + m(h + \zeta^#)) + \frac{MA}{U} \right]$$

Sendo assim, tem-se uma equação do tipo:

$$A\zeta^+ + B \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} + C \frac{\partial^2 \zeta^+}{\partial x^2} = D$$

Esta é a expressão da continuidade discretizada no tempo tendo somente a variável ζ^+ como incógnita. Falta ainda demonstrar como é feita a discretização espacial.

3.2 Discretização espacial

A discretização espacial foi feita utilizando o método elemento móvel (MEM). Este método foi proposto por Rosman(1994) e desenvolvido por Scudelari(1997) para um modelo de circulação, promediado na vertical(2DH), para corpos d'água rasos.

O método do elemento móvel, que será descrito a seguir, possui a qualidade de poder utilizar malhas com espaçamento irregular como o método dos elementos finitos, e a eficiência computacional do método das diferenças finitas. Na verdade, o método do elemento móvel pode ser considerado uma generalização do método das diferenças finitas.

O domínio do problema é discretizado em uma série de nós que não precisam estar igualmente espaçados. Cada nó possui seu próprio elemento, sempre definido por três nós. Para os nós localizados no interior do domínio, o elemento é composto pelo próprio nó e pelos dois nós que estão a sua volta, quando os nós estão localizados no contorno, além do próprio nó, o elemento é composto pelos dois nós adjacentes.

Observe que, como cada um dos nós possui um elemento, o processo do cálculo de nó em nó ocorre como se um elemento fosse caminhando ao longo do domínio, daí o nome de método do elemento móvel.

A Figura3.1 mostra um domínio discretizado por seis nós e a Tabela 3.1 apresenta como estariam definidos os elementos, onde *nó1*, *nó2* e *nó3* são os nós componentes destes elementos.

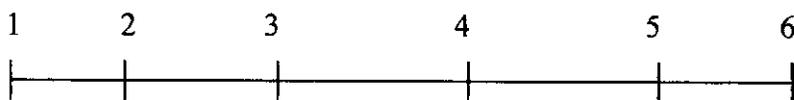


Figura3.1: Domínio discretizado

Tabela 3.1: Nós componentes de cada elemento

Elemento do Nó	Nós dos Elementos		
	Nó1	Nó2	Nó3
1	1	2	3
2	1	2	3
3	2	3	4
4	3	4	5
5	4	5	6
6	4	5	6

É importante observar que os nós localizados no interior do domínio serão sempre iguais ao *nó2* do seu respectivo elemento.

Para cada nó são definidas três funções de interpolação locais, uma para cada nó constituinte do elemento, que serão utilizadas posteriormente na substituição dos termos de derivadas espaciais encontradas nas equações diferenciais discretizadas no tempo.

Estas funções de interpolação devem atender a duas condições, serem contínuas e possuírem derivadas contínuas ao longo do domínio do elemento, e possuírem valor unitário no nó correspondente e zero nos demais nós do elemento. A Figura3.2 ilustra o elemento com as três funções de interpolação, uma para cada nó do elemento.

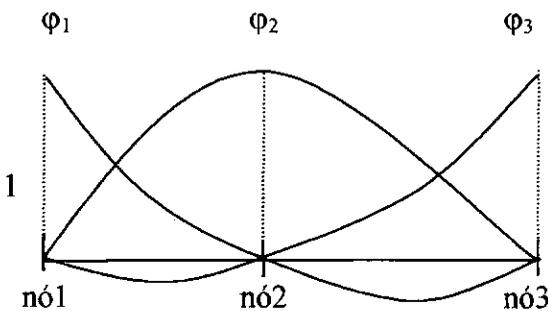


Figura3.2: Funções de interpolação

As funções de interpolação utilizadas no modelo são equações quadráticas, portanto possuem três coeficientes a serem definidos para cada nó, e são expressas da seguinte maneira:

$$\varphi_i = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad (3.17)$$

A fim de diminuir os erros relativos na determinação dos coeficientes, utilizou-se coordenadas locais, e por convenção, a origem do eixo x no domínio do elemento é considerada a coordenada do nó2. Portanto a coordenada do nó1, chamada de $x1$, será sempre negativa, enquanto a do nó3, chamada de $x3$, será sempre positiva.

Dentro de um mesmo elemento é necessário determinar nove coeficientes, três para cada função de interpolação. Chamaremos de φ_1 , φ_2 e φ_3 as função de interpolação referentes aos nós *nó1*, *nó2* e *nó3* respectivamente.

Para determinar os coeficientes é preciso resolver três sistema de equações, um para cada função de interpolação.

- φ_1

$$\begin{cases} a_1(-x1)^2 + b_1(-x1) + c_1 = 1 \\ a_1(0)^2 + b_1(0) + c_1 = 0 \\ a_1(x3)^2 + b_1(x3) + c_1 = 0 \end{cases}$$

- φ_2

$$\begin{cases} a_2(-x_1)^2 + b_2(-x_1) + c_2 = 0 \\ a_2(0)^2 + b_2(0) + c_2 = 1 \\ a_2(x_3)^2 + b_2(x_3) + c_2 = 0 \end{cases}$$

- φ_3

$$\begin{cases} a_3(-x_1)^2 + b_3(-x_1) + c_3 = 0 \\ a_3(0)^2 + b_3(0) + c_3 = 0 \\ a_3(x_3)^2 + b_3(x_3) + c_3 = 0 \end{cases}$$

A Tabela 3.2 mostra as expressões usadas no cálculo dos coeficientes das três funções:

Tabela 3.2: Coeficientes das funções de interpolação

Coeficientes	φ_1	φ_2	φ_3
A	$\frac{-1}{(x_1 * (x_3 - x_1))}$	$\frac{1}{x_1 * x_3}$	$\frac{-1}{(x_3 * (x_1 - x_3))}$
B	$\frac{x_3}{(x_1 * (x_3 - x_1))}$	$\frac{x_1^2 - x_3^2}{x_1 * x_3(x_3 - x_1)}$	$\frac{x_1}{(x_3 * (x_1 - x_3))}$
C	0	1	0

Depois de mostradas as características das funções de interpolação utilizadas, será mostrado como se faz a aproximação de uma função qualquer, e de suas derivadas dentro do domínio.

O valor de uma função qualquer $f(x)$ situada em uma posição x_p dentro do elemento, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$f(x_p) = \sum_{j=1}^3 f_j \phi_j(x_p) \quad (3.18)$$

onde ϕ_j é a função de interpolação do nó j .

As derivadas da função $f(x)$ podem ser expressas da seguinte forma:

$$\frac{\partial f(x_p)}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 f_j \frac{\partial \phi_j(x_p)}{\partial x} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_p)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^3 f_j \frac{\partial^2 \phi_j(x_p)}{\partial x^2} \quad (3.20)$$

sendo:

$$\frac{\partial \phi_j(x_p)}{\partial x} = 2a_j * (x_p) + b_j \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_j(x_p)}{\partial x^2} = 2a_j \quad (3.22)$$

3.2.1 Discretização Espacial da Equação da Continuidade

A seguir, faz-se a discretização espacial da equação da continuidade discretizada no tempo(3.3) utilizando as expressões(3.18), (3.19) e (3.20). O índice i indica o nó que está sendo calculado, e j os nós que compõe o elemento correspondente a i .

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{j=1}^3 u_j (B_j + m_j (h_j + \zeta_j^{\#})) \frac{\partial \varphi_j(i)}{\partial x} + \frac{2}{\Delta t} (B_i + 2m_i (h_i + \zeta_i)) \right] \zeta_i^+ + \\
& \left[u_i (B_i + m_i (h_i + \zeta_i^{\#})) - \sum_{j=1}^3 g \frac{A_j}{U_j} \frac{\partial \varphi_j(i)}{\partial x} \right] \sum_{j=1}^3 \zeta_j^+ \frac{\partial \varphi_j(i)}{\partial x} + \left(-g \frac{A_i}{U_i} \right) \sum_{j=1}^3 \zeta_j^+ \frac{\partial \varphi_j^2(i)}{\partial x^2} = \quad (3.23) \\
& \frac{2\zeta}{\Delta t} (B_i + 2m_i (h_i + \zeta_i)) - \sum_{j=1}^3 \left[u_j h_j (B_j + m_j (h_j + \zeta_j^{\#})) + \frac{M_j A_j}{U_j} \right] \frac{\partial \varphi_j(i)}{\partial x}
\end{aligned}$$

Observe que esta expressão só será utilizada para os nós que estão no interior do domínio, aqueles localizados nos limites do domínio do problema, deverão respeitar as condições de contorno. Sendo assim, o nó i de cálculo será sempre igual ao $nó2$ do elemento, deste modo, o sistema de equações que será gerado a partir da expressão (3.23) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \zeta_{no1}^+ \left[B \frac{\partial \varphi_{no1}(i)}{\partial x} + C \frac{\partial^2 \varphi_{no1}(i)}{\partial^2 x} \right] + \\
& \zeta_{no2}^+ \left[A + B \frac{\partial \varphi_{no2}(i)}{\partial x} + C \frac{\partial^2 \varphi_{no2}(i)}{\partial^2 x} \right] + \quad (3.24) \\
& \zeta_{no3}^+ \left[B \frac{\partial \varphi_{no3}(i)}{\partial x} + C \frac{\partial^2 \varphi_{no3}(i)}{\partial^2 x} \right] = D
\end{aligned}$$

onde $nó1$, $nó2$ e $nó3$ são os nós que constituem o elemento referente ao nó i , e A, B, C e D são os coeficientes da expressão anterior.

Este sistema de equações, mais as equações referentes às condições de contorno que serão descritas mais adiante, geram o sistema final de equações, onde a elevação é a única incógnita, que é resolvido utilizando o conjunto de rotinas de solução do Limpack(Dongarra *et alli*(1979)) para matrizes de banda.

3.2.2 Discretização Espacial da expressão de u^+

Mostra-se, a seguir, a discretização espacial da expressão de u^+ , equação(3.8), explicitada da equação da quantidade de movimento, que será utilizada para o cálculo da velocidade depois de calculadas as elevações.

$$u_i^+ = \frac{1}{U_i} \left(-g \sum_{j=1}^3 \zeta_j^+ \frac{\partial \varphi_j(i)}{\partial x} + M_i \right) \quad (3.25)$$

onde:

$$U_i = \frac{2}{\Delta t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \varphi_j(i)}{\partial x} + \beta_i^\otimes \quad (3.26)$$

$$M_i = \frac{2u_i}{\Delta t} - u_i \sum_{j=1}^3 u_j^\# \frac{\partial \varphi_j(i)}{\partial x} - g \sum_{j=1}^3 \zeta_j \frac{\partial \varphi_j(i)}{\partial x} - \beta_i^\otimes u_i \quad (3.27)$$

Observa-se que no cálculo da velocidade, é necessário estimar a velocidade no tempo $t + \Delta t$ através de um extrapolação, como explicado anteriormente. Uma implicação importante do esquema de substituições sucessivas é que, a fim de reduzir os erros provenientes da extrapolação do termo de velocidade, é conveniente que se utilize um sentido obrigatório no cálculo de velocidade. Deste modo, o primeiro nó a ser calculado dentro de um trecho deve ser aquele onde a vazão é prescrita, ou onde a vazão possa ser determinada pela soma das vazões dos trechos vizinhos, calculando-se em seguida os nós de jusante. Isto permite que o termo da derivada espacial da velocidade no tempo $t + \Delta t$ possa ser calculado com pelo menos um valor conhecido de velocidade, que é aquele referente ao nó de montante. No caso de estar calculando o último nó do trecho, já serão conhecidos os valores de velocidade dos dois nós de montante, sendo necessário extrapolar a velocidade de apenas um nó do elemento.

Para ilustrar o que foi dito, é feita a determinação da derivada espacial da velocidade no tempo $t + \Delta t$ no exemplo da Figura 3.1, imaginando que a vazão fosse prescrita no nó 6, teríamos as seguintes expressões:

$$\frac{\partial u^{\#}_5}{\partial x} = u_6^+ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + u_5^{\#} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + u_4^{\#} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u^{\#}_1}{\partial x} = u_3^+ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + u_2^+ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + u_1^{\#} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$$

Como pode-se observar, para o cálculo do nó 1, é necessária a extrapolação da velocidade de apenas um nó, enquanto que para o nó 5 a mesma extrapolação é feita para dois nós. Se o cálculo da velocidade fosse feito de maneira aleatória, sem um sentido pre-determinado, seria sempre necessária a extrapolação da velocidade nos três nós.

3.3 Condições de Contorno

Este item procura descrever o tratamento numérico dado às condições de contorno impostas ao problema.

O modelo trata a rede de canais como um conjunto de trechos simples que estão conctados entre si, sendo impostas condições específicas nestas conexões, chamadas aqui de entrocamentos.

Além das condições impostas aos entrocamentos, o modelo possui ainda condições de contorno nas fronteiras marítimas, onde as elevações são prescritas, e nas fronteiras do continente, onde as vazões são prescritas.

3.3.1 Elevação Prescrita

Nas fronteiras marítimas do modelo, as elevações são prescritas. São as chamadas condições de contorno especiais.

$$\zeta_i^+ = \zeta_i^{**} \quad (3.28)$$

O modelo permite duas maneiras distintas de fornecer estas informações. A primeira, onde calcula-se a elevação via constantes harmônicas. Neste caso a elevação é calculada da seguinte maneira:

$$\zeta^+ = \sum_{i=1}^{nch} \zeta_{o_i} \text{sen}(w_i t + \phi_i)$$

onde ζ_o é a amplitude da maré, w é a frequência, ϕ é a fase e nch é o número de constantes harmônicas.

Na segunda, os valores discretos de elevação são fornecidos através de um arquivo de dados.

3.3.2 Fluxo Prescrito

As condições de fluxo prescrito são impostas aos nós que estão localizados no contorno do continente. Nestes nós são fornecidos os hidrogramas afluentes ao sistema, porém, neste modelo, não se considera apenas a vazão afluente para se determinar a elevação e a velocidade destes nós, procura-se, também, levar em consideração a variação de volume que ocorre a montante deste último nó, causada principalmente pela influência da maré.

A Figura3.3 mostra, em perfil, o limite do rio a ser modelado, podendo ser observado o volume acumulado a montante.

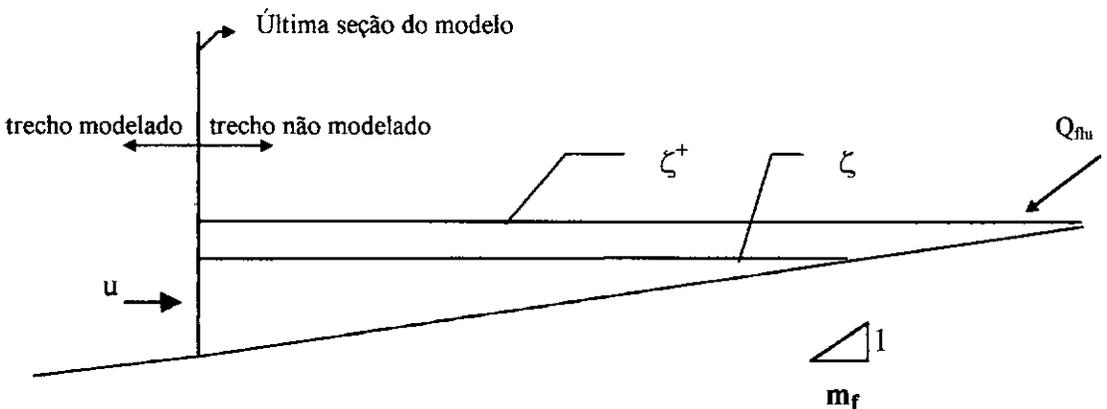


Figura3.3: Esquema em perfil do trecho a montante da última seção

Fazendo o balanço de massa no trecho do rio a montante da última seção, e considerando a massa específica constante, ou seja, a variação de volume a montante é igual à vazão que passa pela seção menos a vazão fluvial. Portanto, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\frac{\partial Vol}{\partial t} = uA - Q_{flu} \quad (3.29)$$

Se aplicarmos o método do fatoramento implícito, obtém-se:

$$2 \frac{\Delta Vol}{\Delta t} = u^+ A + uA^+ - (Q_{flu}^+ + Q_{flu}) \quad (3.30)$$

A variação de volume pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\Delta Vol = T(\zeta^+ - \zeta) m_f \bar{d} \quad (3.31)$$

sendo:

$$T = B + 2m\bar{d} \quad (3.32)$$

onde T é a largura da superfície livre média no tempo, m_f é a declividade de fundo no trecho a montante da última seção e \bar{d} é a lâmina d'água média no tempo, calculada de acordo com a seguinte expressão:

$$\bar{d} = h + \frac{(\zeta^+ + \zeta)}{2} \quad (3.33)$$

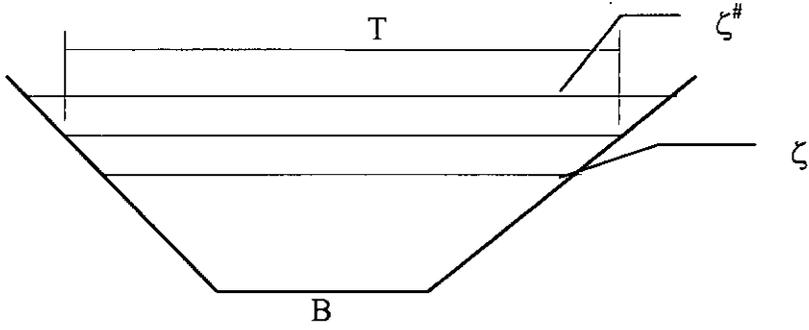


Figura3.4: Seção transversal da última seção modelada

A fim de ter apenas ζ^+ como incógnita, substitui-se a expressão de u^+ (3.8) em (3.30):

$$\frac{Tm_f \bar{d} \zeta^+}{\Delta t} - \frac{Tm_f \bar{d} \zeta}{\Delta t} = \frac{1}{U} \left(-g \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} + M \right) A + uA^+ - (Q_{fu}^+ + Q_{fu}) \quad (3.34)$$

Desenvolvendo e separando os termos de elevação no tempo $t + \Delta t$, obtém-se:

$$\zeta^+ \left[u(B + m(h + \zeta^{\#})) - \frac{(B + 2m\bar{d})m_f \bar{d}}{\Delta t} \right] - g \frac{A}{U} \frac{\partial \zeta^+}{\partial x} = \quad (3.35)$$

$$Q_{fu}^+ + Q_{fu} - \frac{MA}{U} - uh(B + m(h + \zeta^{\#})) - \frac{(B + 2m\bar{d})m_f \bar{d} \zeta}{\Delta t}$$

Fazendo a discretização espacial, sendo i o nó de cálculo e j o nó componente do elemento referente a i , obtém-se:

$$\zeta_i^+ \left[u_i(B_i + m_i(h_i + \zeta_i^{\#})) - \frac{(B_i + 2m_i \bar{d}_i)m_{f_i} \bar{d}_i}{\Delta t} \right] - g \frac{A_i}{U_i} \sum_{j=1}^3 \zeta_j^+ \frac{\partial \phi_j(i)}{\partial x} = Q_{fu}^+ + Q_{fu} - \frac{M_i A_i}{U_i} -$$

$$u_i h_i (B_i + m_i(h_i + \zeta_i^{\#})) - \frac{(B_i + 2m_i \bar{d}_i)m_{f_i} \bar{d}_i \zeta_i}{\Delta t}$$

(3.36)

Esta é a expressão numérica utilizada para o cálculo da elevação nos nós onde a vazão é prescrita. Para o cálculo da velocidade basta substituir o valor de ζ^+ nesta mesma expressão.

3.3.3 Condições de Contorno nos Entroncamentos

O modelo considera a rede de canais como um conjunto de trechos simples que estão conectados entre si por entroncamentos. Nos nós localizados nestes entroncamentos são impostas condições de contorno específicas para a montagem da matriz de coeficientes no momento do cálculo das elevações. Além disso, quando do cálculo das velocidades, ao invés de utilizar a expressão de u^+ (3.25), são impostas algumas condições para determinados nós, conforme o tipo de entroncamento, de forma a diminuir os erros numéricos.

São considerados dois tipos de entroncamentos, e para cada um deles, são definidos dois tipos de nós, onde são aplicadas diferentes condições de contorno. A Figura 3.5 representa um exemplo em que os quatro tipos de nós são aplicados.

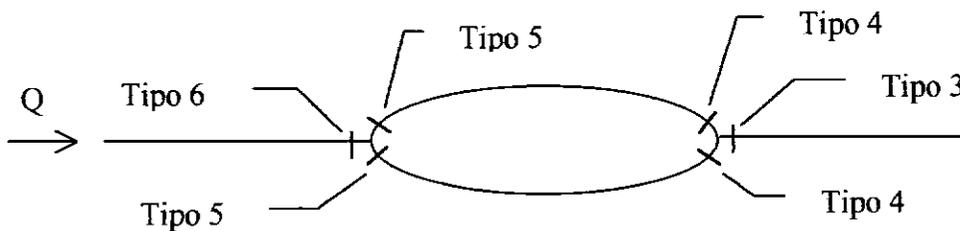


Figura 3.5: Exemplo de entroncamentos

Na verdade, não há qualquer diferença, do ponto de vista do comportamento hidráulico, entre os dois entroncamentos, tendo em vista a possibilidade de haver escoamento nos dois sentidos, ocasionando divisão ou junção do escoamento em cada um dos entroncamentos, dependendo do sentido do escoamento.

O motivo pelo qual se classificou os entroncamentos em dois tipos distintos está ligado à maneira pela qual se calcula a velocidade, e à tentativa de tornar o modelo mais estável. Como já foi dito anteriormente, o cálculo das velocidades é feito por trechos, e dentro

de cada trecho o primeiro nó a ser calculado é aquele que possui vazão prescrita ou que sua vazão possa ser determinada através de valores de vazão de nós localizados nos trechos vizinhos, a partir daí, calcula-se a velocidade dos demais nós no sentido de jusante. Isto implica em um tratamento numérico diferente para cada nó do entroncamento.

A seguir são mostradas as condições de contorno impostas aos nós localizados nos entroncamentos no momento que se processa a montagem da matriz de coeficientes para o cálculo das elevações, em seguida mostra-se como são calculadas as velocidades nestes nós.

No momento da montagem do sistema de equações para o cálculo das elevações, as condições impostas são as mesmas para os dois tipos de entrocamento. O que se faz nestes nós é, preservar o balanço do fluxo de massa, impondo que o somatório das vazões de dois nós do entroncamento seja igual à vazão do terceiro nó, e igualar as elevações dos três nós. A Tabela 3.3 mostra para cada tipo de nó, quais as condições de contorno impostas.

Tabela 3.3: Condições de Contorno no Entroncamento para Cálculo da Elevação

Tipo	Condição de Contorno para Elevação
3	$Q_3 = Q_{4,1} + Q_{4,2}$
4	$\zeta_4 = \zeta_3$
5	$\zeta_5 = \zeta_6$
6	$Q_6 = Q_{5,1} + Q_{5,2}$

onde $Q_{4,1}$ é a vazão de um dos nós tipo4 do entroncamento.

A seguir, será mostrado o desenvolvimento da expressão numérica da condição de contorno dos nós tipo 3 e 6.

Será utilizada a notação do nó tipo3, porém o desenvolvimento também é válido para o nó tipo6.

$$Q_3 = Q_{4,1} + Q_{4,2} \tag{3.37}$$

Esta expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_3^+ A_3 + u_3 A_3^+ = u_{4,1}^+ A_{4,1} + u_{4,1} A_{4,1}^+ + u_{4,2}^+ A_{4,2} + u_{4,2} A_{4,2}^+ \quad (3.38)$$

Substituindo a expressão de u^+ (3.8) em (3.38), fica:

$$u_3 A_3^+ + \frac{1}{U_3} \left(-g \frac{\partial \zeta_3^+}{\partial x} + M_3 \right) A_3 = u_{4,1} A_{4,1}^+ + \frac{1}{U_{4,1}} \left(-g \frac{\partial \zeta_{4,1}^+}{\partial x} + M_{4,1} \right) A_{4,1} + \quad (3.39)$$

$$u_{4,2} A_{4,2}^+ + \frac{1}{U_{4,2}} \left(-g \frac{\partial \zeta_{4,2}^+}{\partial x} + M_{4,2} \right) A_{4,2}$$

Substituindo A^+ pela expressão(3.14) e desenvolvendo, obtém-se:

$$u_3 (B_3 + m_3 (h_3 + \zeta_3^#)) (h_3 + \zeta_3^+) + \left[-g \frac{A_3}{U_3} \right] \frac{\partial \zeta_3^+}{\partial x} + \frac{M_3 A_3}{U_3} =$$

$$u_{4,1} (B_{4,1} + m_{4,1} (h_{4,1} + \zeta_{4,1}^#)) (h_{4,1} + \zeta_{4,1}^+) + \left[-g \frac{A_{4,1}}{U_{4,1}} \right] \frac{\partial \zeta_{4,1}^+}{\partial x} + \frac{M_{4,1} A_{4,1}}{U_{4,1}} + \quad (3.40)$$

$$u_{4,2} (B_{4,2} + m_{4,2} (h_{4,2} + \zeta_{4,2}^#)) (h_{4,2} + \zeta_{4,2}^+) + \left[-g \frac{A_{4,2}}{U_{4,2}} \right] \frac{\partial \zeta_{4,2}^+}{\partial x} + \frac{M_{4,2} A_{4,2}}{U_{4,2}}$$

Explicitando os termos no tempo $t + \Delta t$ e fazendo a discretização espacial, teremos:

$$\begin{aligned}
& \zeta_3^+ \left[u_3 (B_3 + m_3 (h_3 + \zeta_3^\#)) \right] + \left[-g \frac{A_3}{U_3} \right] \sum_{j=1}^3 \zeta_3^+ \frac{\partial \phi_j(3)}{\partial x} + \\
& \zeta_{4,1}^+ \left[u_{4,1} (B_{4,1} + m_{4,1} (h_{4,1} + \zeta_{4,1}^\#)) \right] + \left[+g \frac{A_{4,1}}{U_{4,1}} \right] \sum_{j=1}^3 \zeta_{4,1}^+ \frac{\partial \phi_j(4,1)}{\partial x} + \\
& \zeta_{4,2}^+ \left[u_{4,2} (B_{4,2} + m_{4,2} (h_{4,2} + \zeta_{4,2}^\#)) \right] + \left[-g \frac{A_{4,2}}{U_{4,2}} \right] \sum_{j=1}^3 \zeta_{4,2}^+ \frac{\partial \phi_j(4,2)}{\partial x} = \tag{3.41} \\
& u_{4,1} (B_{4,1} + m_{4,1} (h_{4,1} + \zeta_{4,1}^\#)) h_{4,1} + u_{4,2} (B_{4,2} + m_{4,2} (h_{4,2} + \zeta_{4,2}^\#)) h_{4,2} - \\
& u_3 (B_3 + m_3 (h_{4,1} + \zeta_3^\#)) h_3 + \frac{M_{4,1} A_{4,1}}{U_{4,1}} + \frac{M_{4,2} A_{4,2}}{U_{4,2}} - \frac{M_3 A_3}{U_3}
\end{aligned}$$

Esta é a expressão da condição de contorno imposta aos nós tipo 3 e 6 na montagem do sistema de equações para o cálculo das elevações. Repare que neste caso, a linha correspondente ao nó tipo 3 ou 6 terá nove coeficientes não nulos, já que os nós do entroncamento pertencem a trechos diferentes, portanto os nós constituintes de cada elemento também serão diferentes.

Para o cálculo da velocidade, os nós tipo 4 e 6 são calculados pela expressão de $u^+(3.25)$, enquanto que para os nós tipo 3 e 5 algumas condições são impostas a fim de reduzir os erros numéricos.

No nó tipo 3 a velocidade é calculada utilizando os valores de vazão dos nós de montante (tipo 4) que já foram calculados nos trechos anteriores, e a própria área que já foi determinada através do cálculo da elevação. A velocidade no nó tipo 5 também é calculada através da expressão de $u^+(3.25)$, porém determina-se as velocidades dos dois nós tipo 5 do entroncamento, para que depois seja feita uma correção na vazão de modo que $Q_{5,1} + Q_{5,2} = Q_6$, sendo que a vazão do nó tipo 6 foi calculada no trecho anterior. A Tabela 3.4 mostra um resumo de como é feito o cálculo da velocidade para os nós do entroncamento.

Tabela 3.4: Cálculo da Velocidade nos Nós do Entroncamento

Tipo	Cálculo de u^+
3	$u_3^+ = (Q_{4,1}^+ + Q_{4,2}^+) / A_3^+$
4	Expressão de u^+
5	Expressão de u^+ com ajuste da vazão
6	Expressão de u^+

4. Aplicações

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos nos testes feitos com o modelo numérico aqui proposto. Estes testes visam verificar a robustez e a estabilidade do modelo. Os resultados são comparados com respostas analíticas, se for o caso, ou com os resultados de outros modelos.

O primeiro teste feito consistiu em aplicar o modelo a um caso que possui solução analítica. Foi escolhido um estudo de propagação de uma onda de pequena amplitude em um canal sem atrito com geometria simples, de modo que as equações governantes possam ser linearizadas e o problema tenha solução analítica.

O segundo teste foi o de simular a propagação da maré em um canal reto com atrito, com fundo variável, com uma extremidade aberta e outra fechada. Neste caso, os resultados do modelo são comparados com os de um modelo unidimensional de diferenças finitas que não utiliza o método das substituições sucessivas, já validado.

O terceiro teste foi a aplicação do modelo para simular o escoamento no estuário do canal do Cunha próximo à Ilha do Fundão. Este é um caso típico de estuário onde encontram-se, junção e separação do escoamento, servindo como um bom teste para o modelo de rede de canais. Os resultados são comparados com os de um modelo bidimensional de elementos finitos.

Por último foi feita uma simulação de um caso ilustrativo apenas para mostrar a versatilidade do modelo unidimensional para rede de canais quando da aplicação em casos de estuários, onde não é raro ter a presença de ilhas, afluentes, ou mesmo uma ramificação do rio na sua foz.

4.1 Solução Analítica

Este primeiro teste procura aplicar o modelo a um caso que possui solução analítica. Este caso foi extraído de Dean(1978), e consiste na propagação de uma onda em um canal(Figura 4.1) com 10 km de extensão, sem atrito, com fundo horizontal e seção retangular

variando linearmente de 1000 m a 0 m. A onda utilizada possui amplitude de 0,10 m e período de 12 horas.

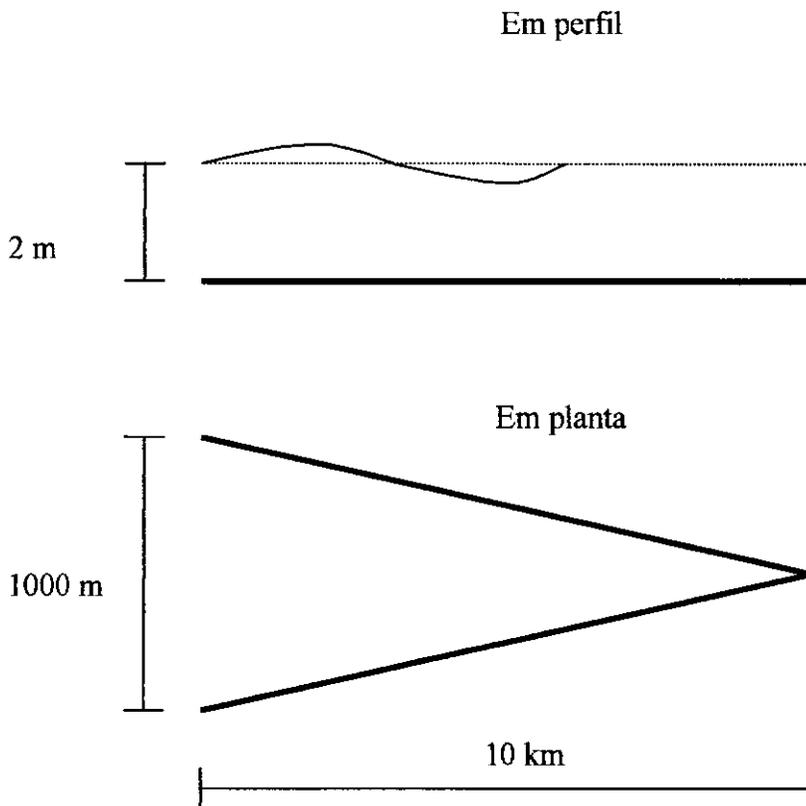


Figura 4.1: Esquema do canal em planta e em perfil

A solução analítica dos níveis d'água é dada pela seguinte equação:

$$\zeta(x,t) = \frac{A J_0(Kx)}{2 J_0(Kl)} \cos(\sigma t)$$

Onde J_0 é a função Bessel e l é o comprimento do canal.

O canal foi discretizado em onze seções igualmente espaçadas, sendo que a seção 1 está localizada no contorno aberto e a seção 11 no contorno fechado.

As figuras a seguir mostram os resultados de elevação ao longo do tempo para as seções 3, 5, 8 e 11 respectivamente, para passo de tempo de 450 s, o que representa número

de Courant igual a 2. As linhas sólidas representam a solução analítica e as marcas representam os resultados do modelo. Observa-se que os resultados estão muito próximos. A Figura 4.7 mostra os resultados de elevação ao longo do espaço. Pode-se verificar que os resultados são praticamente idênticos aos da solução analítica com erros relativos menores que 1,0%, como pode ser visto na **Figura 4.6**.

Para avaliar a estabilidade do modelo neste exemplo, fez-se a simulação com passo de tempo de 2700 s, o que representa um número de Courant igual a 12. Não foi verificada nenhuma instabilidade numérica aparente, porém os resultados, principalmente nos nós localizados próximos ao contorno fechado, apresentaram erros relativos variando de 4 a 8% em determinados momentos.

Estes erros encontrados nos nós localizados próximos ao contorno fechado podem ser justificados pela diferença que há entre o caso ideal, que possui solução analítica, e o modelado. Esta diferença se dá exatamente no contorno fechado, pois no caso ideal existe uma singularidade causada por uma seção com largura nula. Obviamente que esta singularidade não poderia ser modelada, sendo adotada uma seção com largura muito pequena.

Os resultados encontrados neste primeiro teste foram considerados muito bons, indicando que o esquema numérico é robusto.

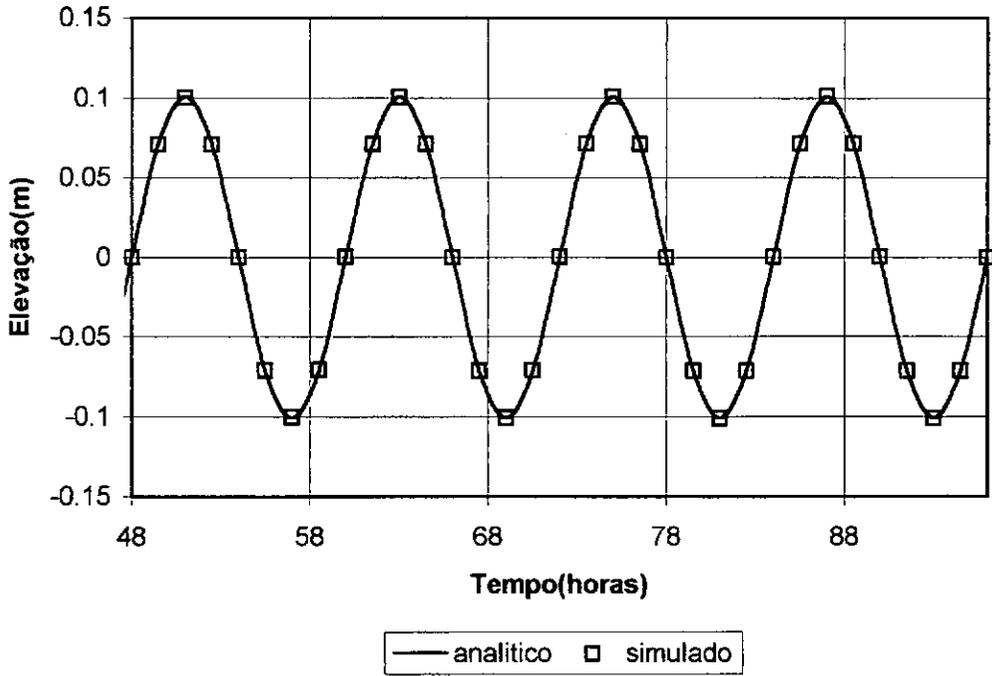


Figura 4.2: Comparação dos valores de elevação com a solução – Seção 3

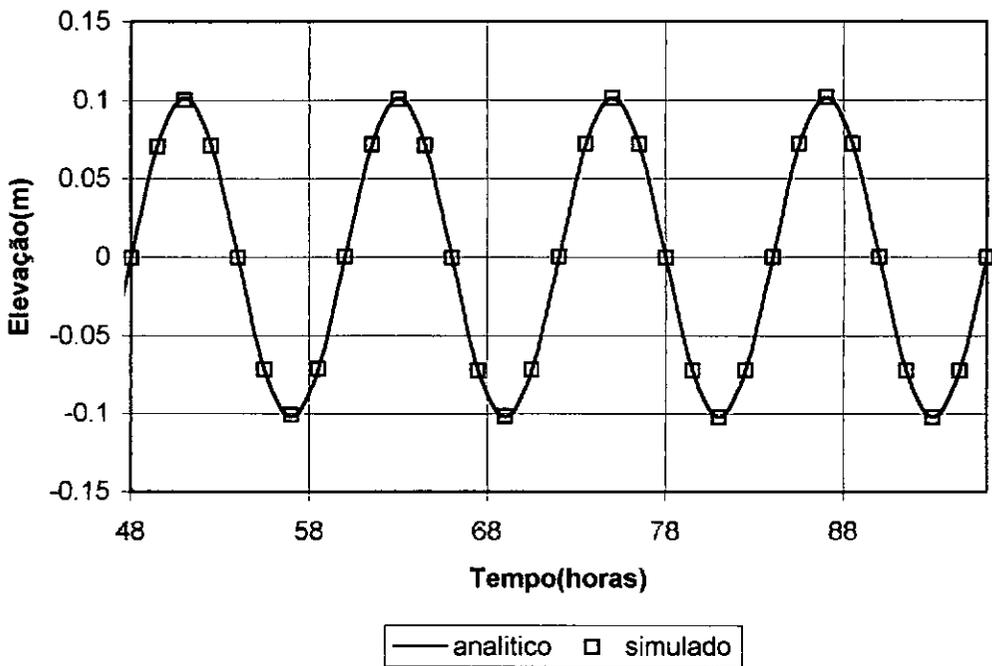


Figura 4.3: Comparação dos valores de elevação com a solução analítica – Seção 5

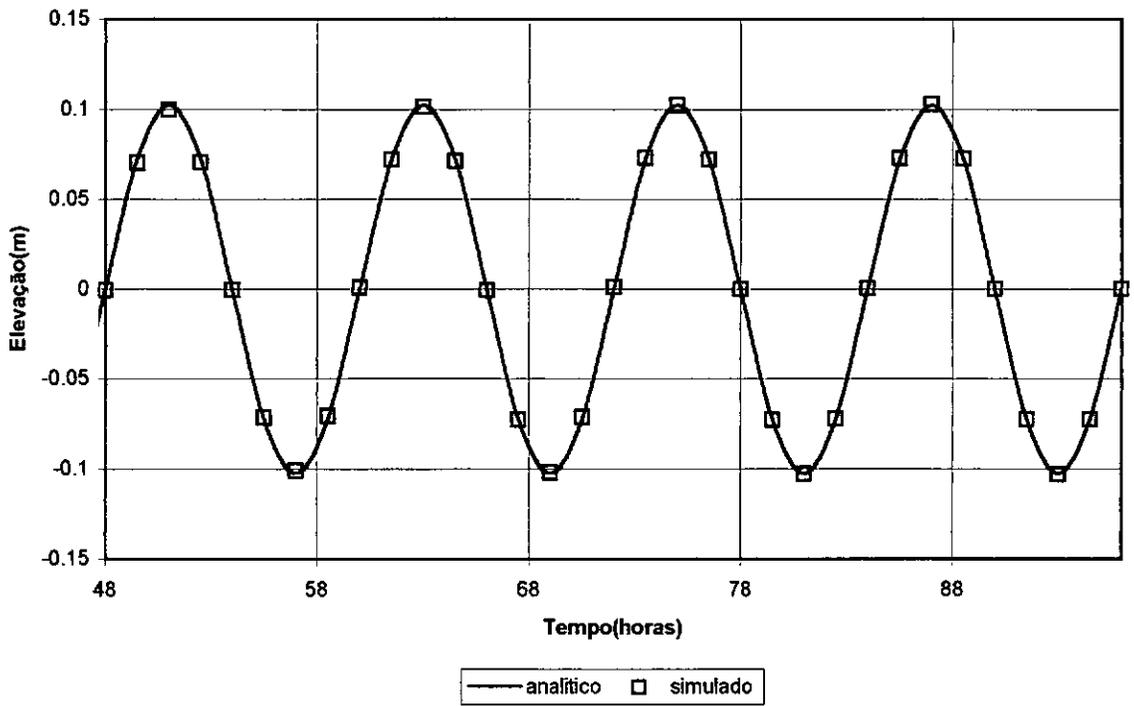


Figura 4.4: Comparação dos valores de elevação com a solução analítica – Seção 8

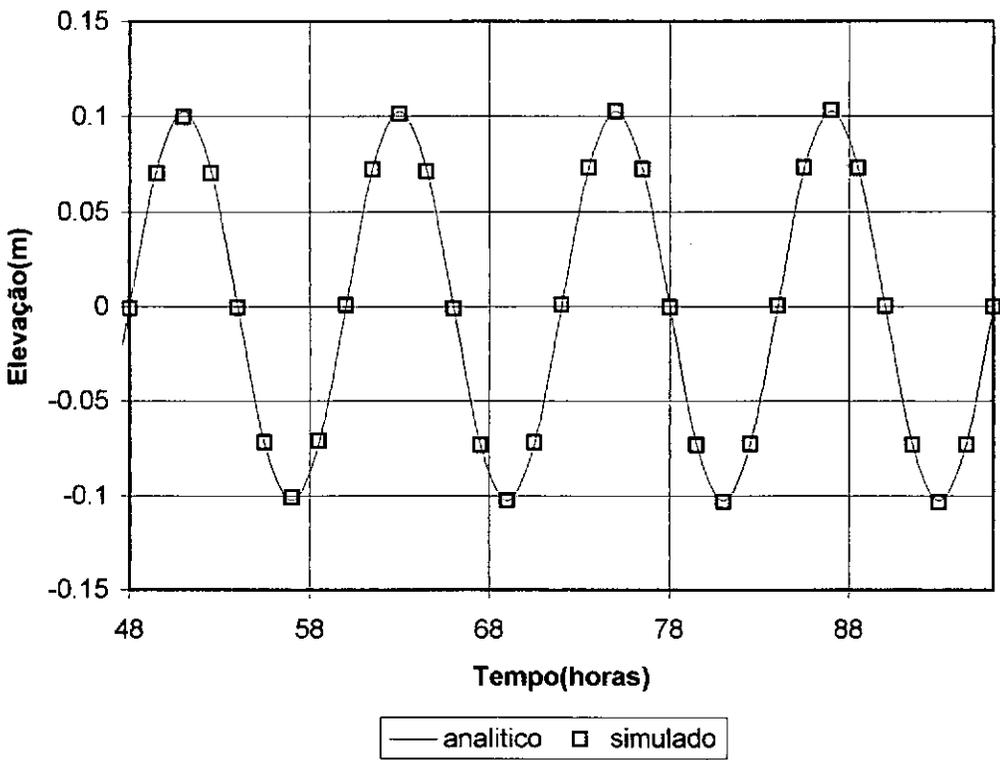


Figura 4.5: Comparação dos valores de elevação com a solução analítica – Seção 11

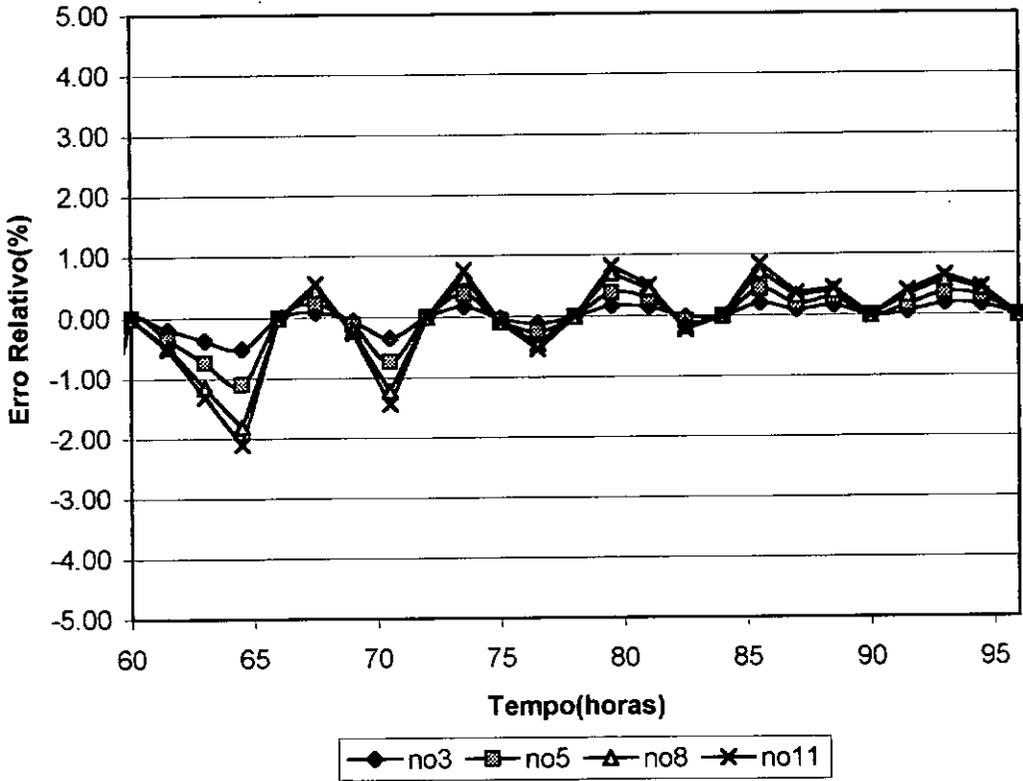


Figura 4.6: Comparação com a solução analítica – Erros Relativos

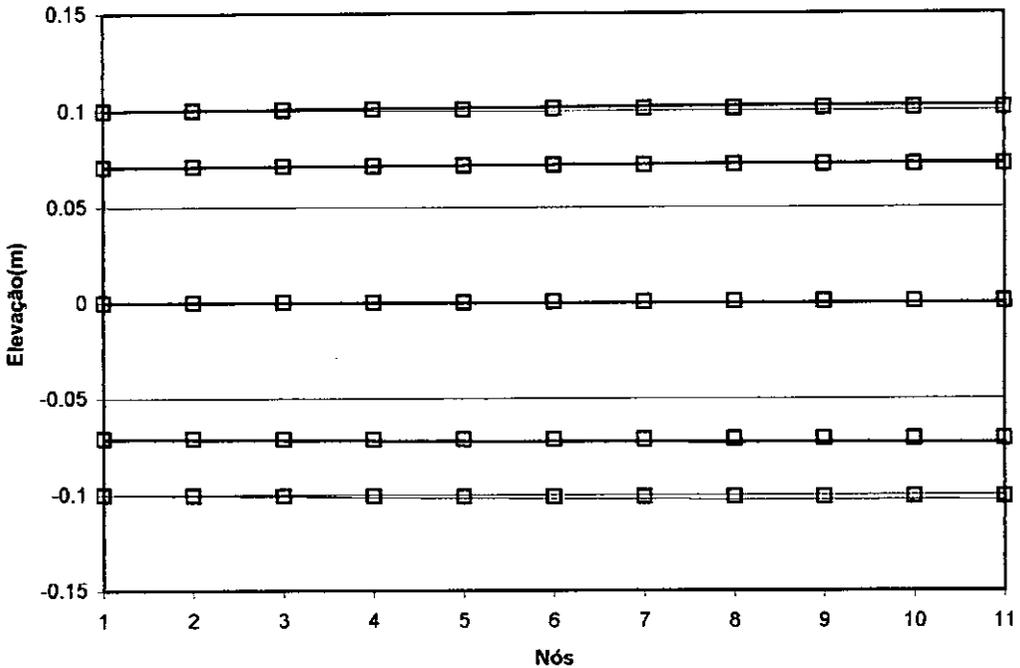


Figura 4.7: Comparação com a Solução Analítica – Resultados ao longo do espaço

4.2 Canal Reto

O segundo teste realizado consistiu em estudar a propagação de uma onda de maré em um canal reto com atrito no fundo, seção transversal com paredes verticais e fundo com formato parabólico ao longo da lateral e variando linearmente no eixo longitudinal, com um contorno aberto e outro fechado(Figura 4.8).

Os resultados são comparados com os de um modelo unidimensional de diferenças finitas, já validado, que foi desenvolvido na área de engenharia costeira do Programa de Oceanica da COPPE.

O canal modelado possui uma extensão total de 87500 m, seção com largura uniforme de 8400 m, e fundo variando linearmente de 5,95 m, no contorno aberto, a 3,95 m no contorno fechado.

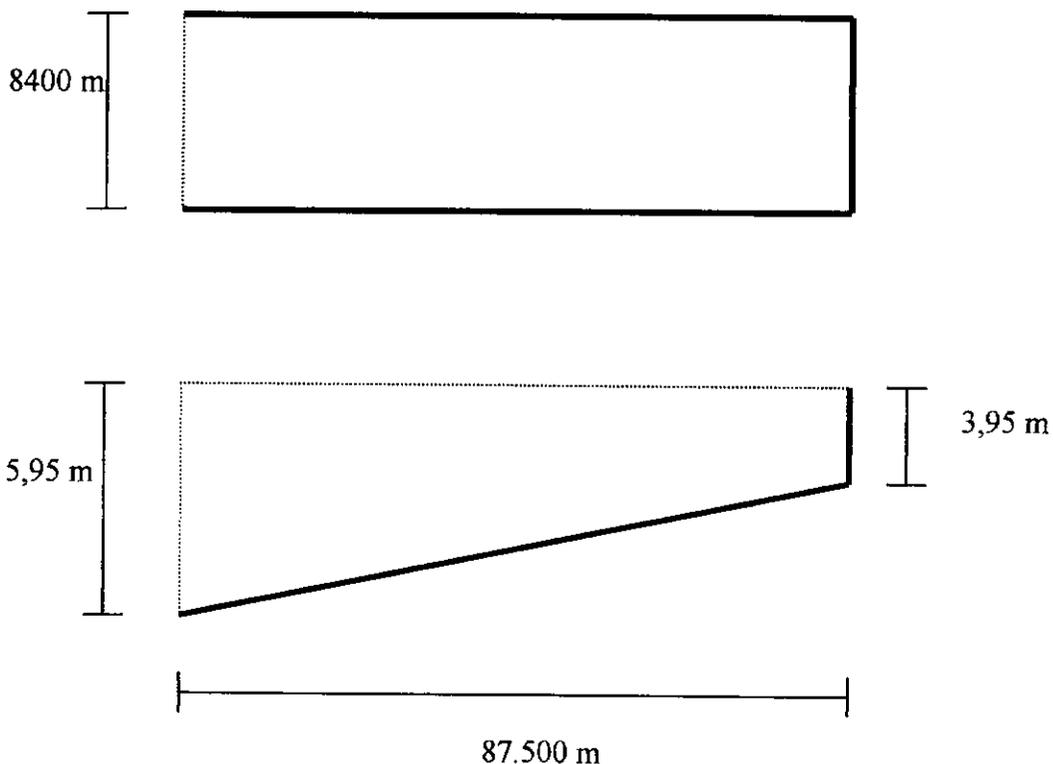


Figura 4.8: Esquema do canal em planta e perfil

Na fronteira fechada foi imposta como condição de contorno a vazão nula e a variável m_f , que está ligada à declividade do fundo no trecho de montante, também nula. Na fronteira aberta foi imposta uma onda de maré com um harmônico simples, dada pela expressão:

$$\zeta^* = \zeta_o \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

onde $\zeta_o = 0,60$ m é a amplitude da maré, $T = 12$ horas é o período e t é o tempo.

O domínio, para ambos os modelos, foi discretizado em 21 seções espaçadas igualmente em 4375 m. Como ambos os modelos consideram as seções como tendo forma trapezoidal, e as seções do exemplo estudado possuem paredes laterais com fundo parabólico, as características das seções como base de fundo e inclinação dos taludes foram determinadas de modo que possuíssem a mesma área e o mesmo perímetro molhado para o nível d'água médio.

Para a simulação dos dois modelos foi utilizado um passo de tempo de 300 s, o que representa um número de Courant de 0,50.

A fim de evitar um grande número de informações num mesmo gráfico, o que poderia dificultar o entendimento, são apresentados separadamente para cada nó, os resultados comparativos dos modelos. O modelo proposto recebeu o nome de MEM1DRC, que é a abreviação de método do elemento móvel unidimensional para rede de canais.

Da Figura 4.9: a Figura 4.13 são mostrados os resultados de elevação ao longo do tempo dos nós 5, 9, 13, 17 e 21, e da Figura 4.14 a Figura 4.17 são apresentados os resultados de velocidade ao longo do tempo para os nós 5, 9, 13 e 17. Pode-se verificar que os valores de ambos os modelos, tanto de elevação quanto de velocidade, são praticamente idênticos, com erros relativos sempre menores de 1%.

As Figura 4.18 e Figura 4.19 apresentam os resultados de elevação e velocidade, respectivamente, ao longo do canal. Mais uma vez pode-se observar o bom ajuste dos resultados de ambos os modelos.

Como feito no primeiro teste, procurou-se avaliar a estabilidade do modelo para o caso estudado. Foi feita uma simulação com passo de tempo de 3000 s, o que representa número de Courant igual a 5,2 e não se verificou nenhuma oscilação aparente e os resultados estão muito próximos àqueles simulados com passo de tempo de 300 s. Para passos de tempo acima de 3600 s, ou seja, para número de Courant acima de 6,3 há presença de oscilações numéricas, e faz-se necessário o uso de interfaces dissipativas, vide Bueno(1995).

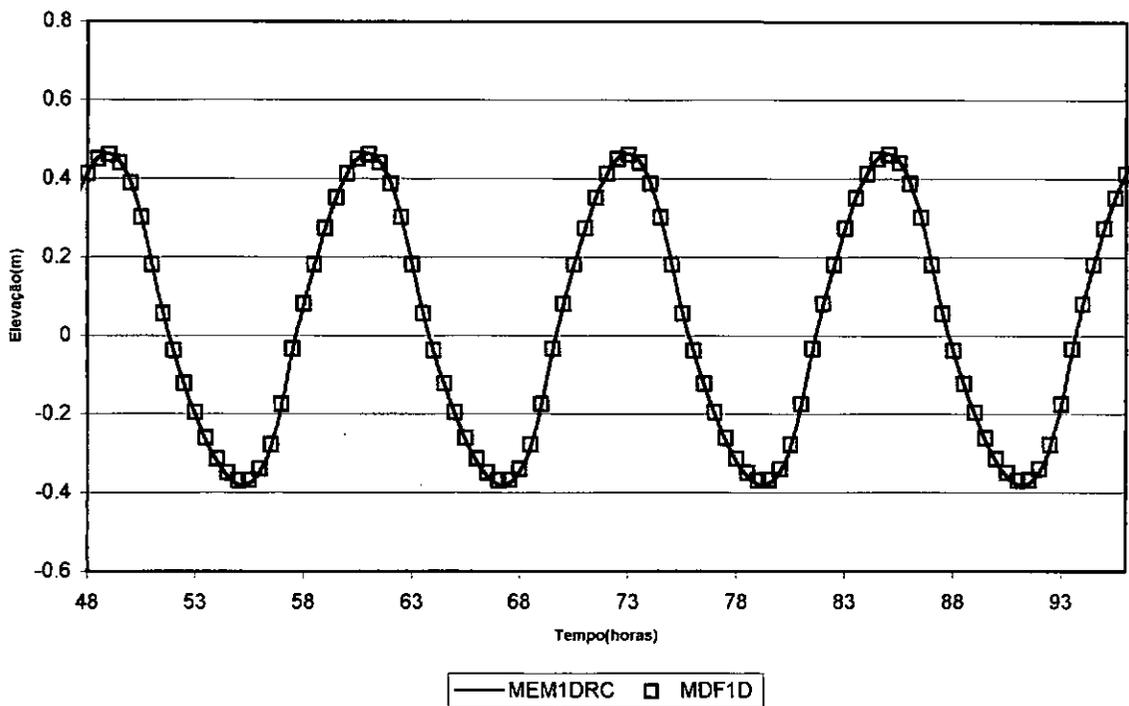


Figura 4.9: Resultados de elevação ao longo do tempo -Seção 5

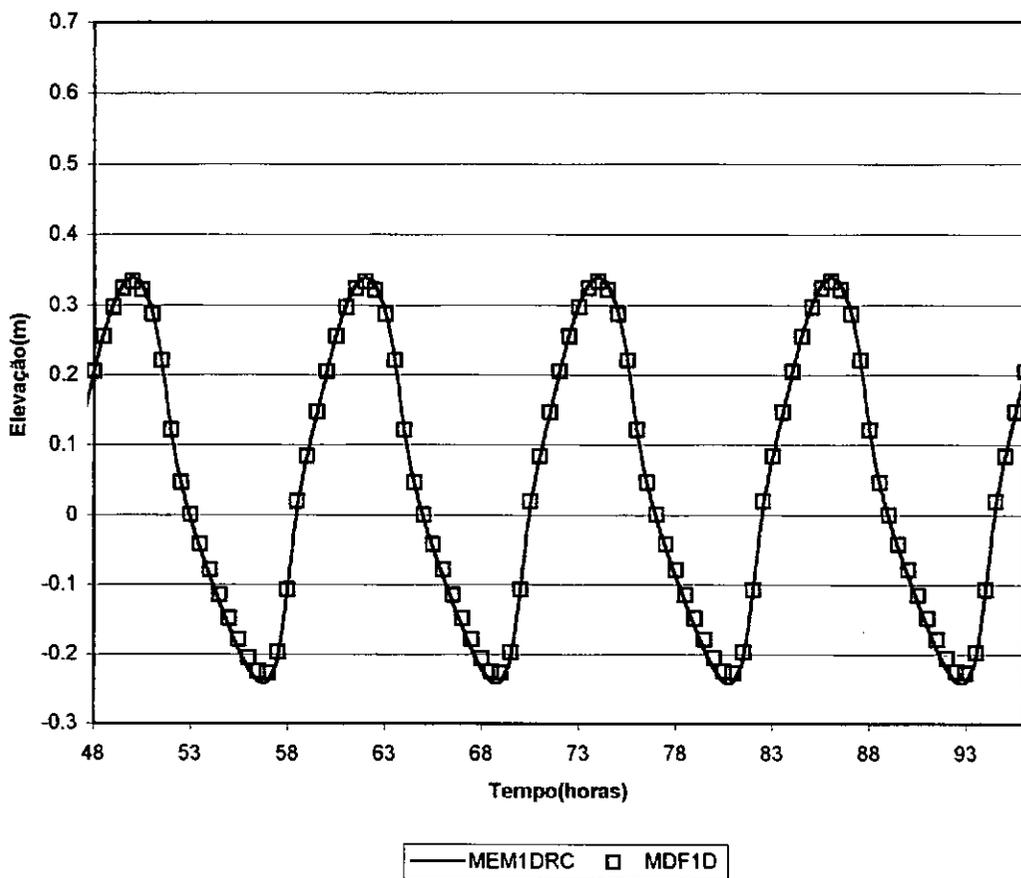


Figura 4.10: Resultados de elevação ao longo do tempo- Seção 9

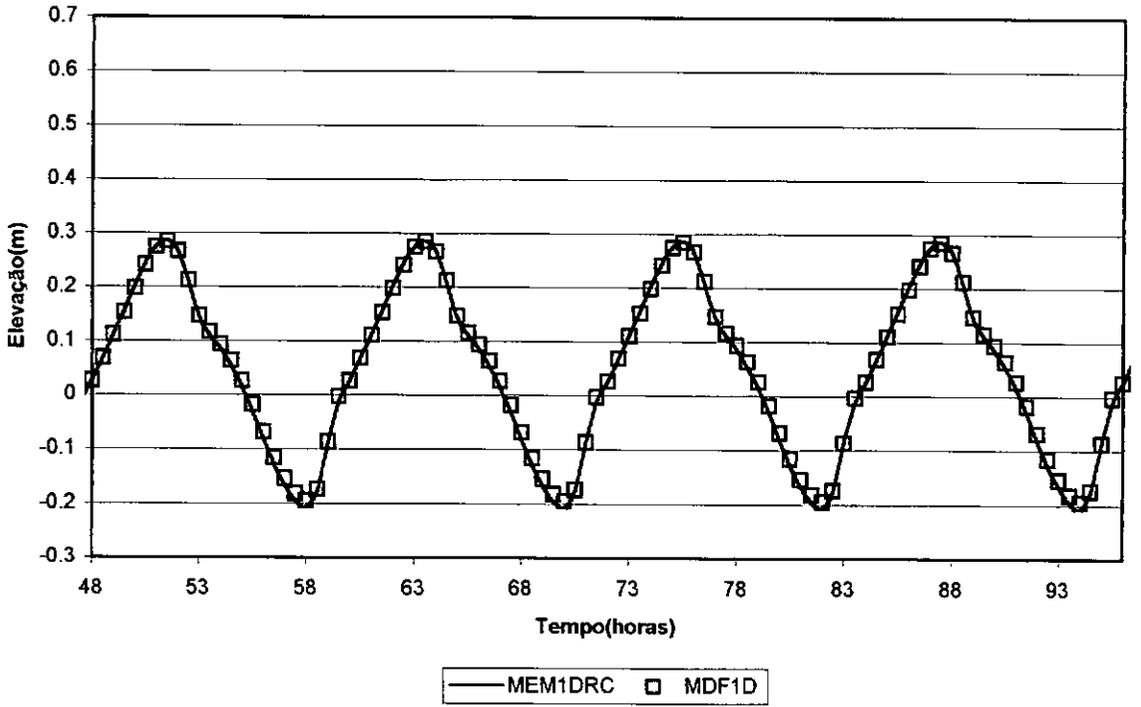


Figura 4.11: Resultados de elevação ao longo do tempo-Seção 13

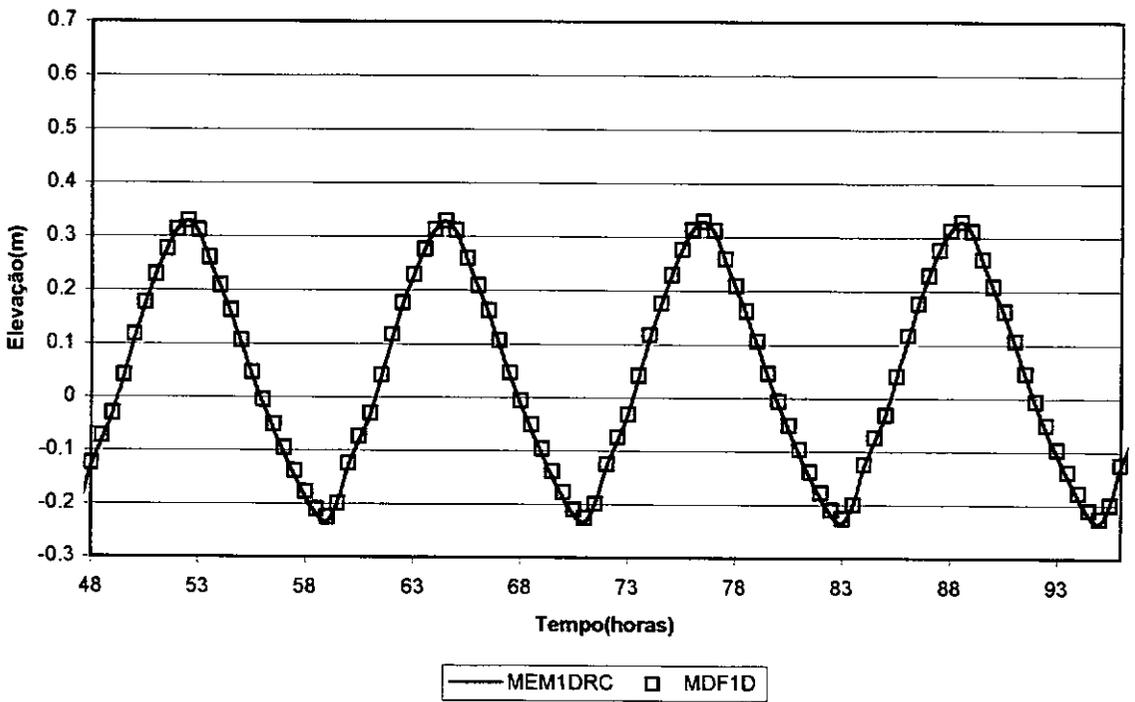


Figura 4.12: Resultados de elevação ao longo do tempo-Seção 17

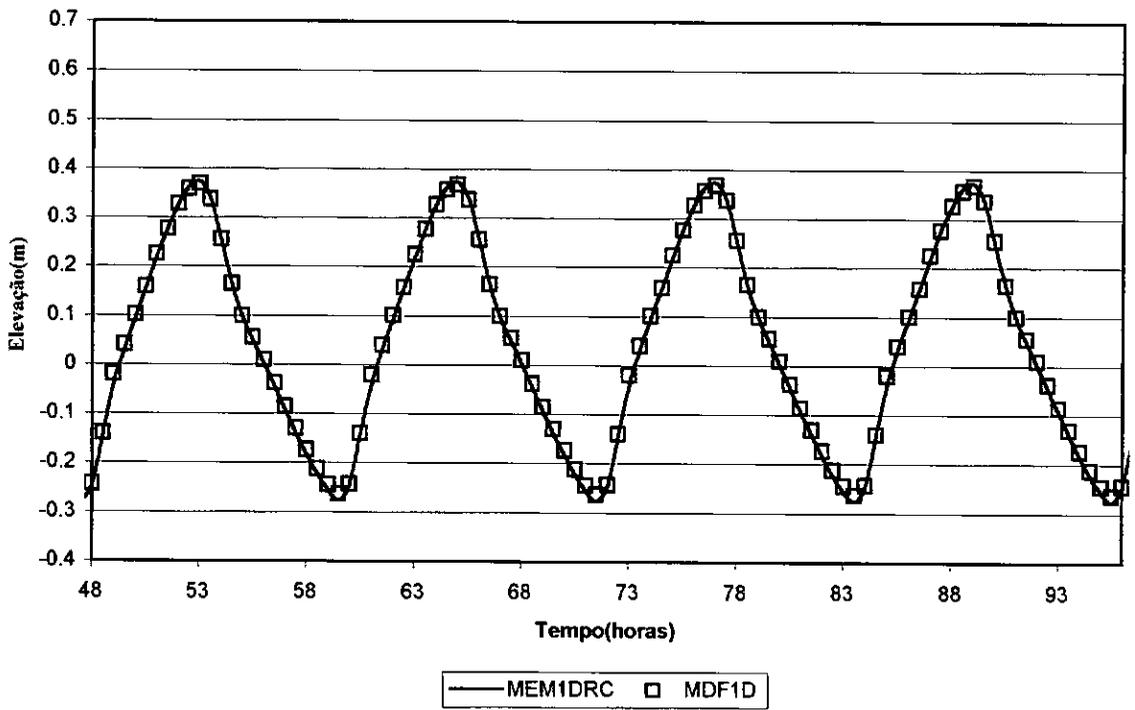


Figura 4.13: Resultados de elevação ao longo do tempo-Seção 21

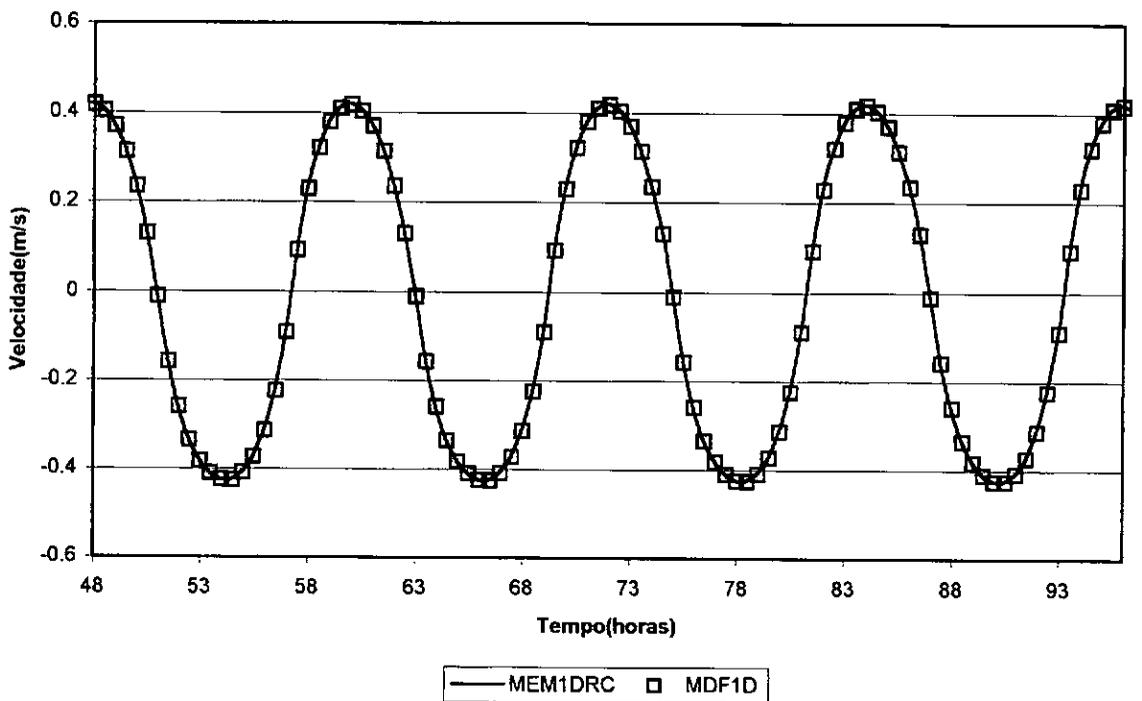


Figura 4.14: Resultados de velocidade ao longo do tempo-Seção 5

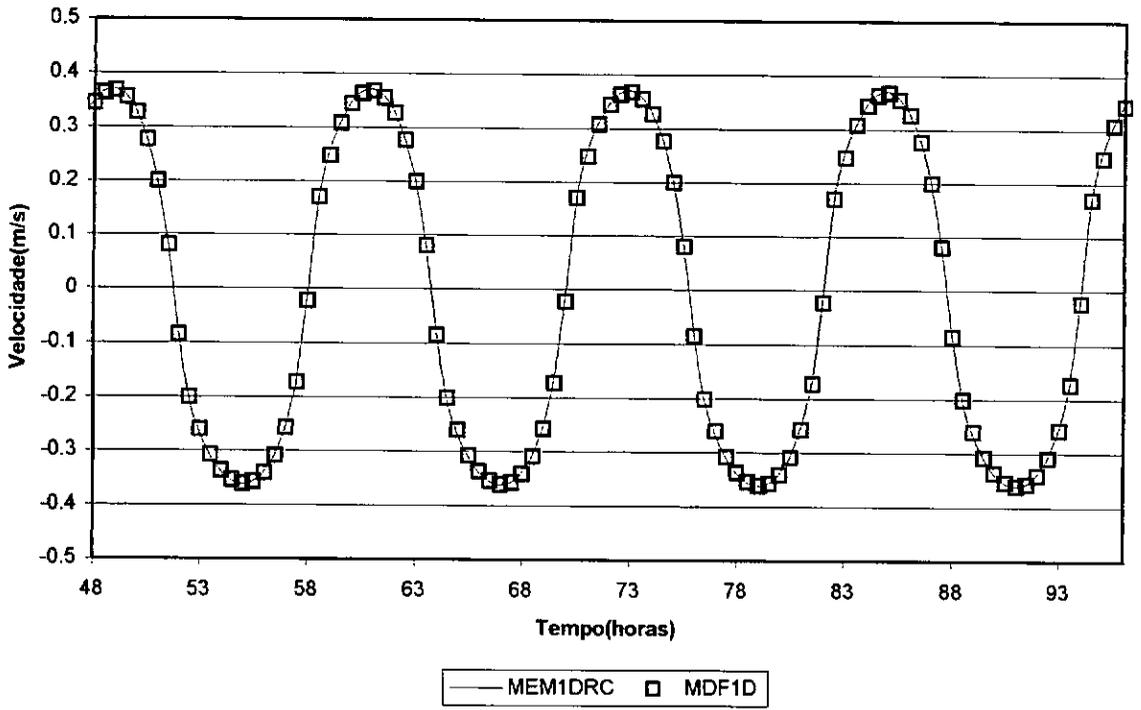


Figura 4.15: Resultados de velocidade ao longo do tempo-Seção 9

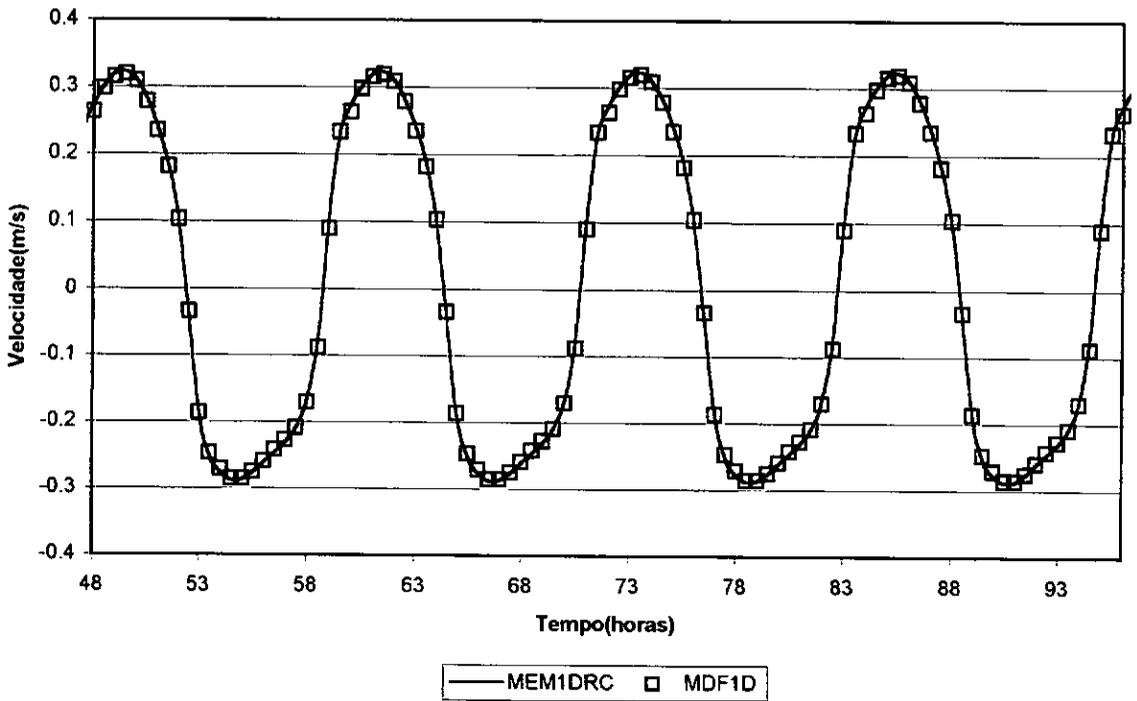


Figura 4.16: Resultados de velocidade ao longo do tempo-Seção 13

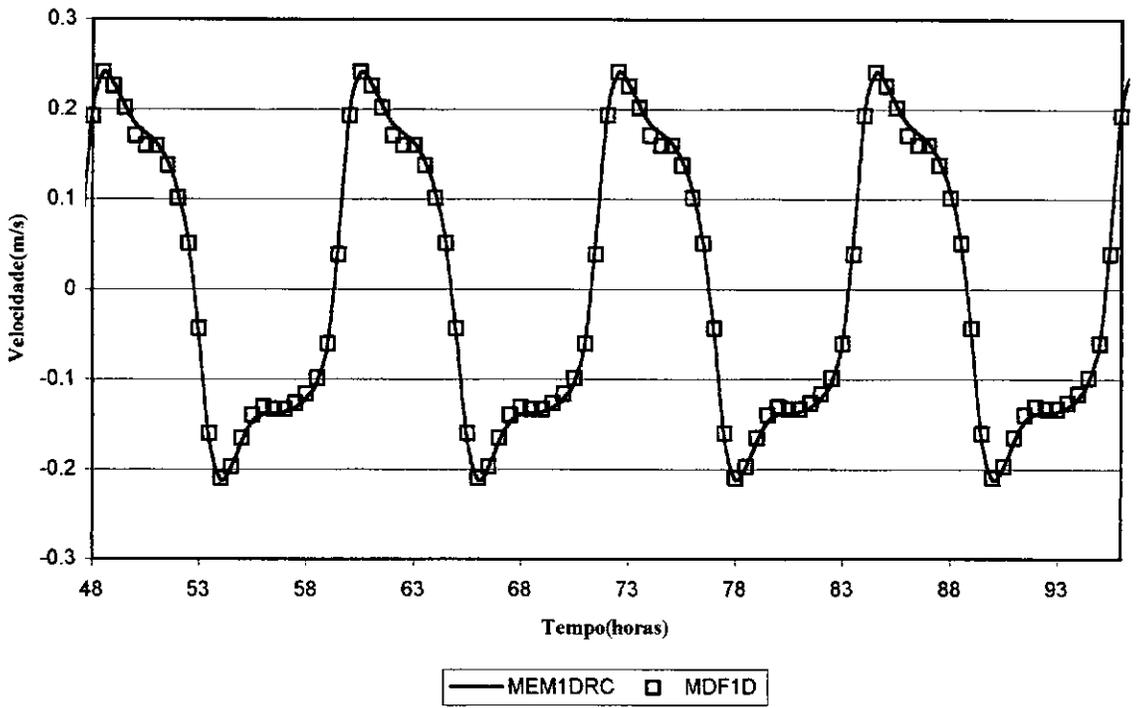


Figura 4.17: Resultados de velocidade ao longo do tempo-Seção 17

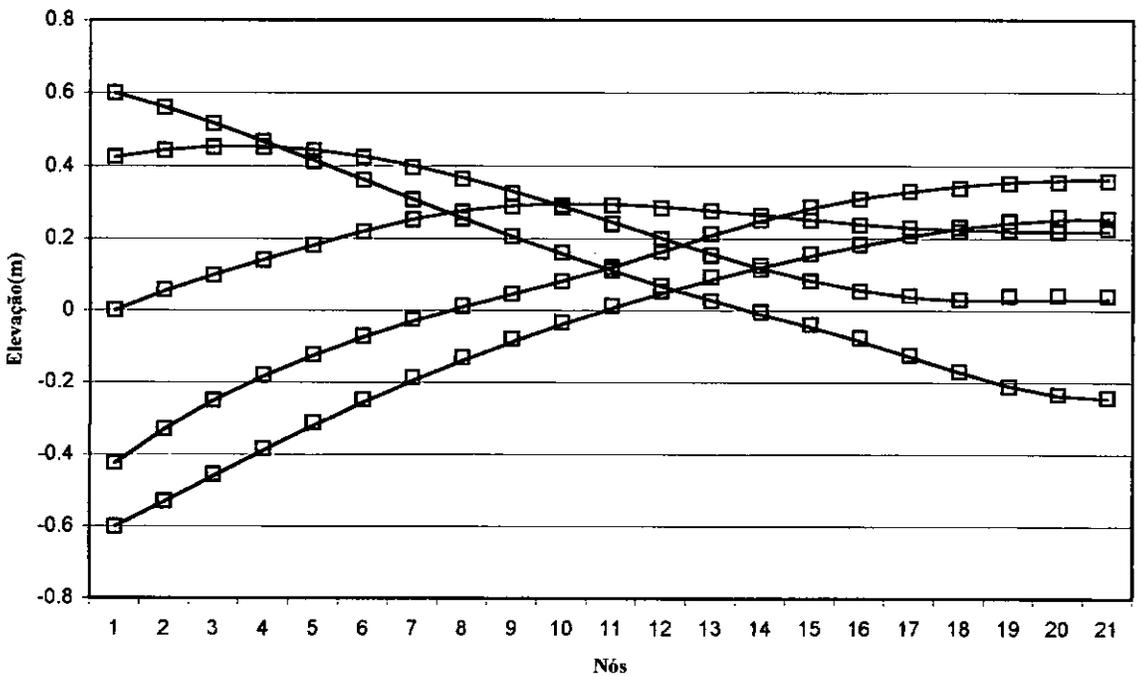


Figura 4.18: Resultados de elevação ao longo do canal

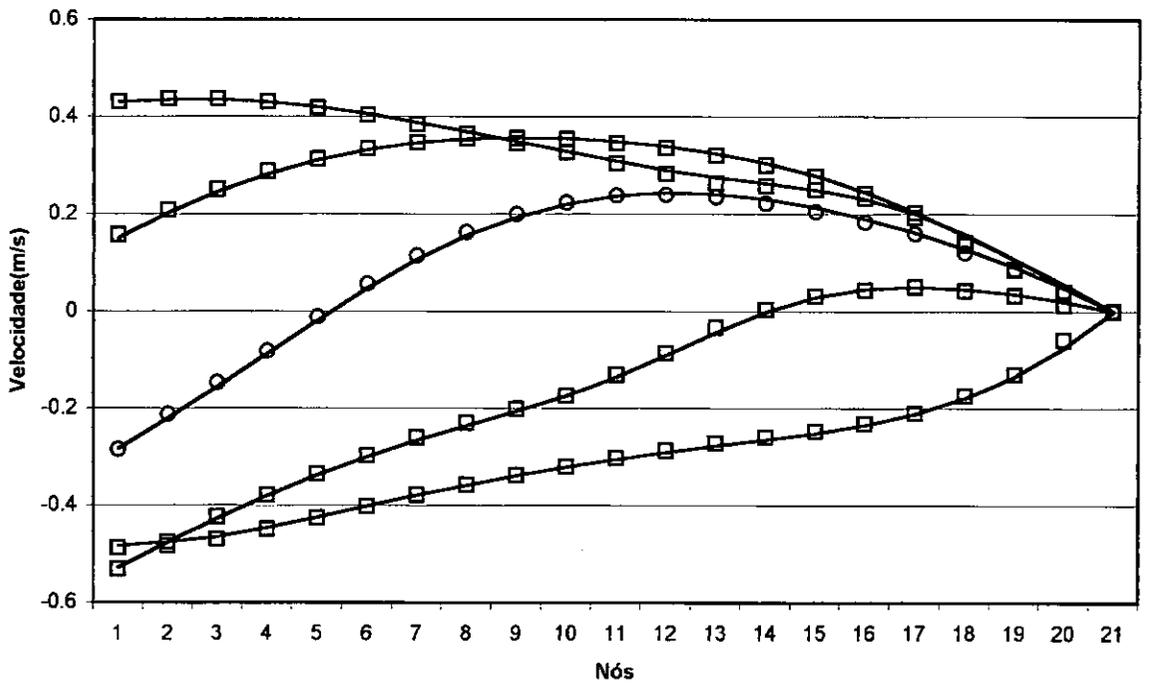


Figura 4.19: Resultados de velocidade ao longo do canal

4.3 Estuário do Canal do Cunha

O terceiro teste teve o objetivo de avaliar o comportamento do modelo quando aplicado a um estuário real, com geometria complexa, que fosse possível testar o esquema de rede de canais.

Aproveitando a existência de uma malha de discretização de elementos finitos do estuário do Canal do Cunha, preparada para um estudo de circulação hidrodinâmica bidimensional no âmbito do trabalho de revitalização da circulação do canal do Fundão e do canal do Cunha, Rosman(1997), foi escolhido este estuário para a simulação do caso real. O padrão do escoamento a ser simulado neste caso, deve-se apenas a variação da maré. Os resultados do modelo proposto são comparados com os do modelo bidimensional.

Para o modelo bidimensional, o domínio foi discretizado em 167 elementos, totalizando 808 nós, conforme ilustra a Figura 4.20. Para o modelo unidimensional, o domínio foi discretizado em 102 seções espaçadas de maneira irregular, de acordo com a Figura 4.21, divididas em nove trechos distintos. Estes trechos estão conectados entre si por quatro entroncamentos. A Tabela 4.1 mostra cada trecho com seus respectivos nós fronteiros, e a Tabela 4.2 apresenta os nós pertencentes aos entroncamentos e seus respectivos tipos.

Trecho	Nó inicial	Nó final
1	102	94
2	81	93
3	92	49
4	62	48
5	47	26
6	31	25
7	24	6
8	15	5
9	4	1

Tabela 4.1: Trechos do domínio e respectivos nós fronteiros



Figura 4.20: Malha de elementos finitos para o estuário do Canal do Cunha

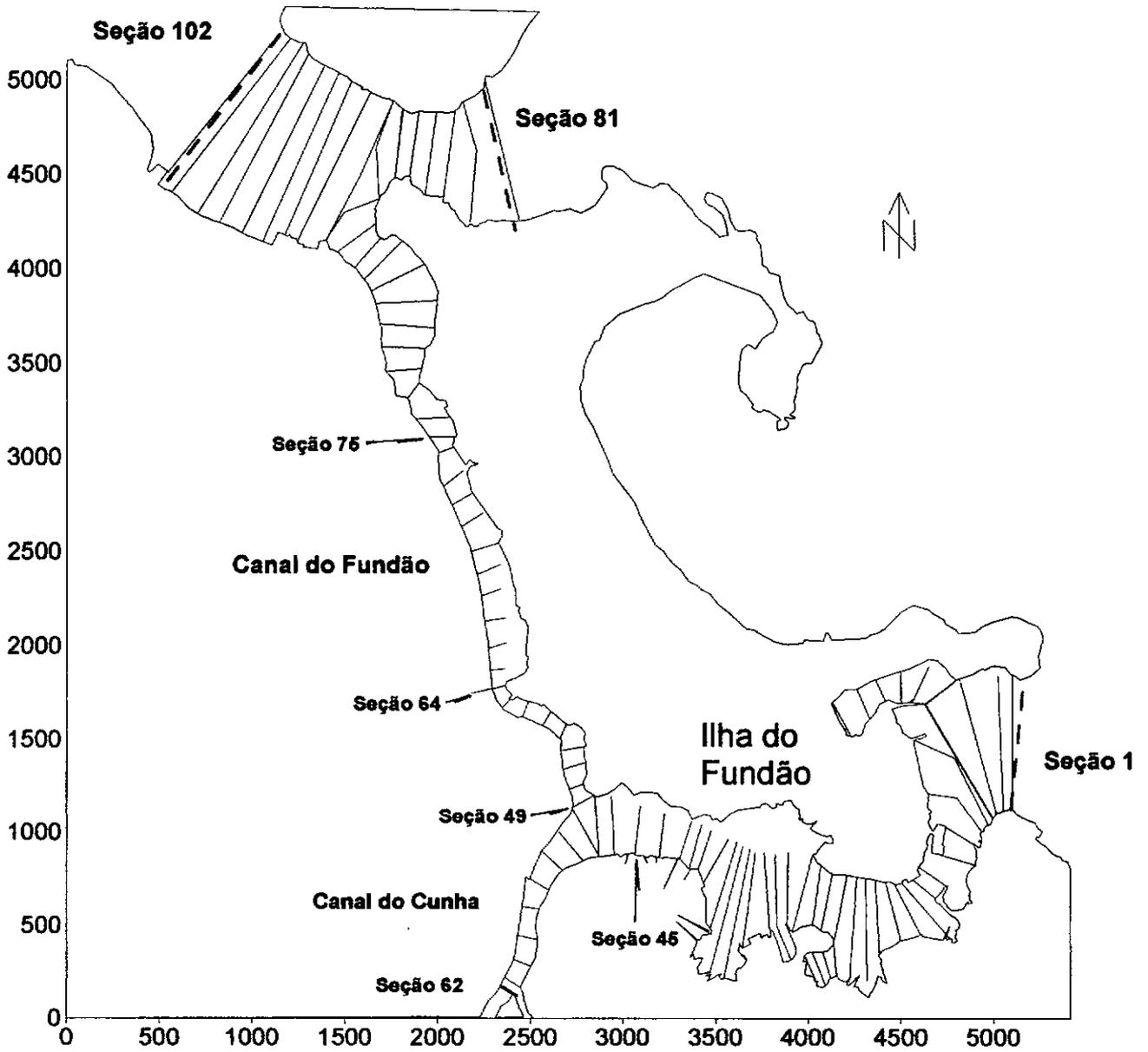


Figura 4.21: Discretização do estuário do Canal do Cunha em seções utilizada pelo modelo

Tipo	Nós
3	4, 24, 47
4	5, 6, 25, 26, 48, 49
5	92, 93
6	94

Tabela 4.2: Nós dos entroncamentos

As seções 1, 81 e 102 estão localizadas no contorno da Baía de Guanabara, onde as elevações são prescritas. A seção 62 é a seção limite do modelo no Canal do Cunha, onde as vazões são prescritas.

A maré utilizada na simulação apresenta apenas uma constante harmônica, cuja amplitude vale 0,50 m e o período é de 12 horas. Foi considerada uma defasagem na maré, em relação à seção 102, de 600 s para a seção 81 e de 1320 s para a seção 1. Estas defasagens são decorrentes da propagação da maré no interior da Baía de Guanabara, e seus valores foram retirados dos resultados de simulações do escoamento feitas com modelo bidimensional(2DH) abrangendo toda a baía. Na seção de contorno de terra, seção 62, foi considerada a vazão nula com armazenamento no trecho de montante, cuja declividade adotada foi de 1/1000.

O passo de tempo utilizado na simulação foi de 20 s, o que representa um número de Courant de 2,30. Foi necessária a utilização de interfaces dissipativas para conter as oscilações numéricas.

São comparados os resultados de elevação dos nós 45, 49, 64 e 75, conforme ilustram as figuras a seguir. Pode-se observar que para as seções 45, 49 e 75 os valores de elevação simulados pelos dois modelos são praticamente idênticos, sem diferenças de amplitude ou de fase.

Na seção 64, existe uma diferença de fase e de amplitude na vazante, porém os resultados na enchente são muito próximos. Estas diferenças podem ser justificadas pela

maneira como o modelo unidimensional representa a seção. Neste local a seção transversal do canal é muito irregular, e é difícil representá-la por uma seção trapezoidal, além disso o nó da malha do modelo bidimensional escolhido para comparação está localizado no centro da seção 64 do modelo unidimensional, portanto as profundidades de ambos são diferentes, já que no modelo unidimensional procura-se determinar um valor médio que represente toda a seção.

Os resultados apresentados foram considerados satisfatórios, mostrando a boa precisão do modelo na simulação do escoamento em estuários.

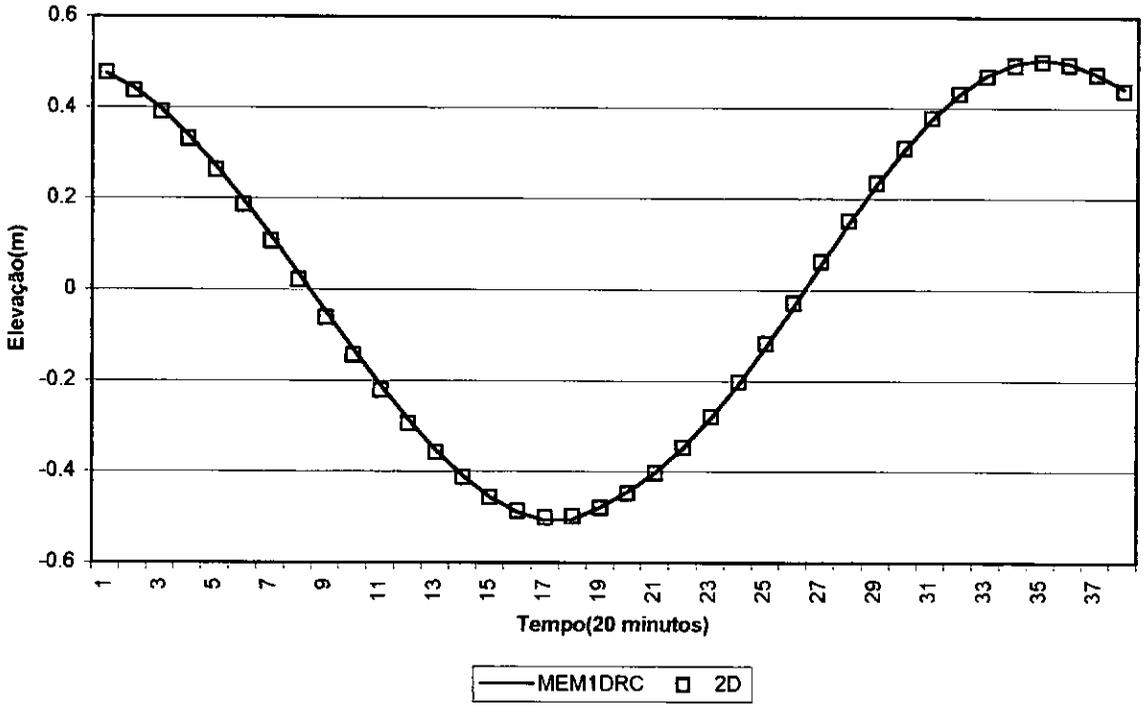


Figura 4.22: Resultados de elevação ao longo do tempo – Seção 45

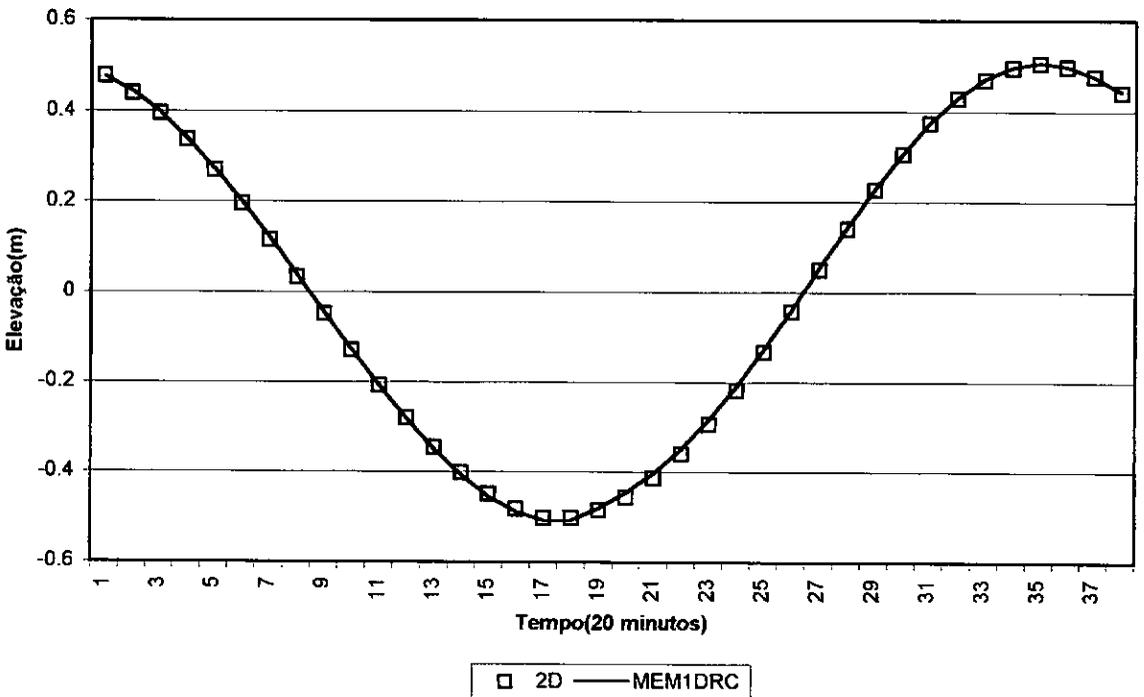


Figura 4.23: Resultados de elevação ao longo do tempo – Seção 49

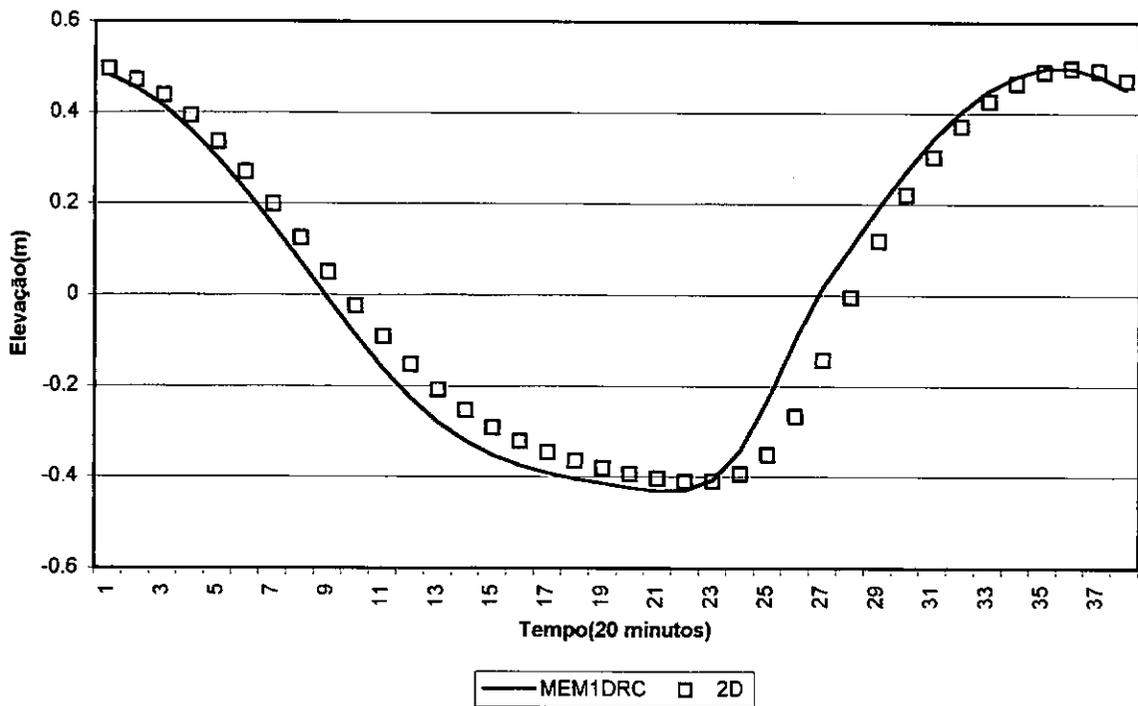


Figura 4.24: Resultados de elevação ao longo do tempo – Seção 64

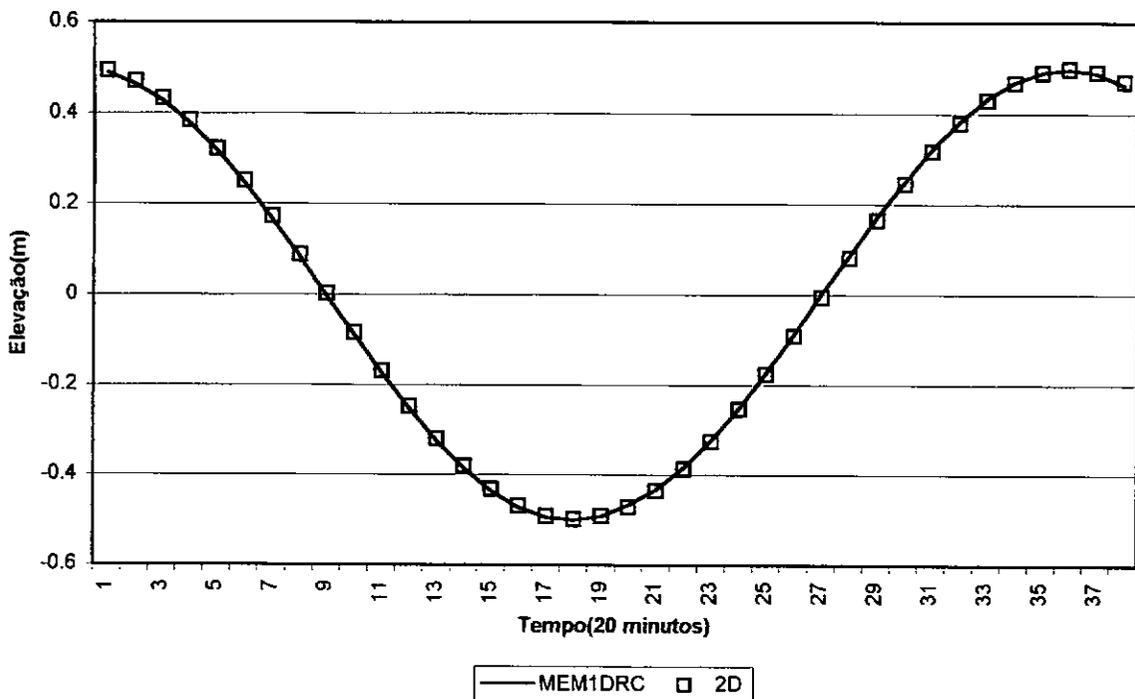


Figura 4.25: Resultados de elevação ao longo do tempo – Seção 75

4.4 Caso Ilustrativo

Este caso visa ilustrar a potencialidade do uso do modelo de rede canais em estuários, onde pode-se modelar afluentes, trechos com ilhas e ramificações. A Figura 4.26 apresenta a geometria do problema, que representa o estuário de um rio com a chegada de um afluente, a presença de uma ilha no trecho médio, e no seu trecho final uma ramificação do corpo d'água.

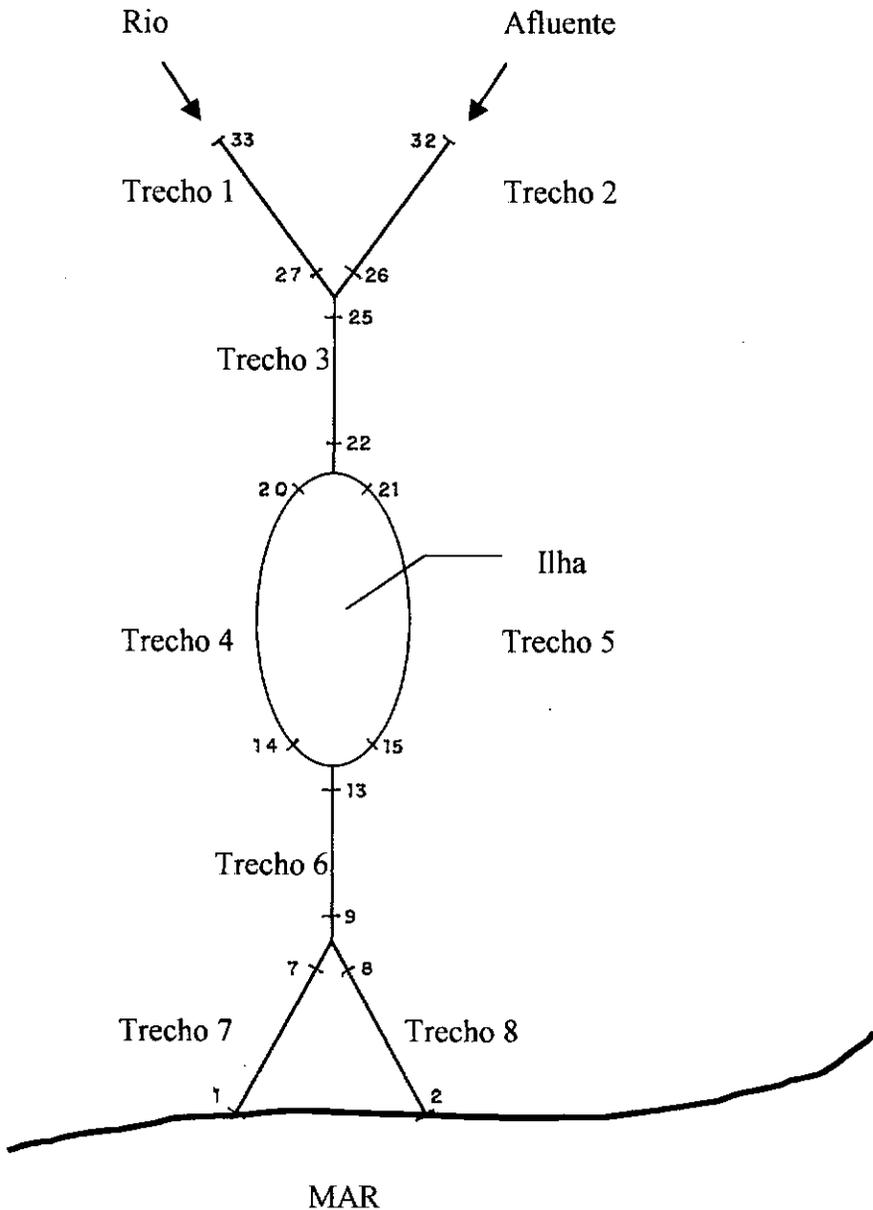


Figura 4.26: Geometria do problema

O domínio do problema foi representado por 33 seções, divididas em 8 trechos. Os canais possuem fundo horizontal com profundidade de 2,0 m e a seção transversal foi considerada retangular com largura da base diferente para cada trecho. A tabela a seguir apresenta os trechos com os nós inicial e final de cálculo, bem como a largura da base correspondente.

Trecho	Nó inicial	Nó final	Largura da base
1	33	27	40
2	32	26	60
3	25	22	100
4	20	14	60
5	21	15	40
6	13	9	100
7	7	1	50
8	8	2	50

Tabela 4.3: Definição dos trechos

A tabela a seguir mostra os nós localizados nos contornos de cada trecho e seus respectivos tipos:

Tipo	Nós
1	1, 2
2	32, 33
3	13, 25
4	14, 15, 26, 27
5	7, 8, 20, 21
6	9, 22

Tabela 4.4: Definição dos tipos dos nós localizados no contorno de cada trecho

Os nós 1 e 2 definem o contorno no mar, onde as elevações são prescritas. Foi utilizada uma maré com um harmônico simples, cuja amplitude vale 0,50 m e o período 43.200 s. Os nós 33 e 32 definem o contorno de terra onde as vazões são prescritas. Foram impostas nestes pontos dois hidrogramas iguais, conforme ilustra a Figura 4.27. Valores negativos de vazão e de velocidade indicam que o fluxo se dá da terra em direção ao mar, e valores positivos indicam que o escoamento se dá no sentido do mar para terra.

Este exemplo foi rodado com passo de tempo de 60 s, que representa número de Courant igual a 1,32.

Os resultados são apresentados a seguir. A Figura 4.28 mostra a variação da vazão ao longo do tempo nas seções 1 e 10, comparando com o hidrograma afluente na seção 32. O mesmo é feito para as seções 16 e 17(Figura 4.29), que estão localizadas nos trechos que contornam a ilha, e para as seções 23, 28 e 29, localizadas nos trechos 3, 2 e 1 respectivamente(Figura 4.30).

A Figura 4.31 ilustra a variação da elevação ao longo do tempo nas seções 1, 10, 17 e 32, e a Figura 4.32 apresenta os valores de velocidade ao longo do tempo para as seções 1, 10, 16 e 17.

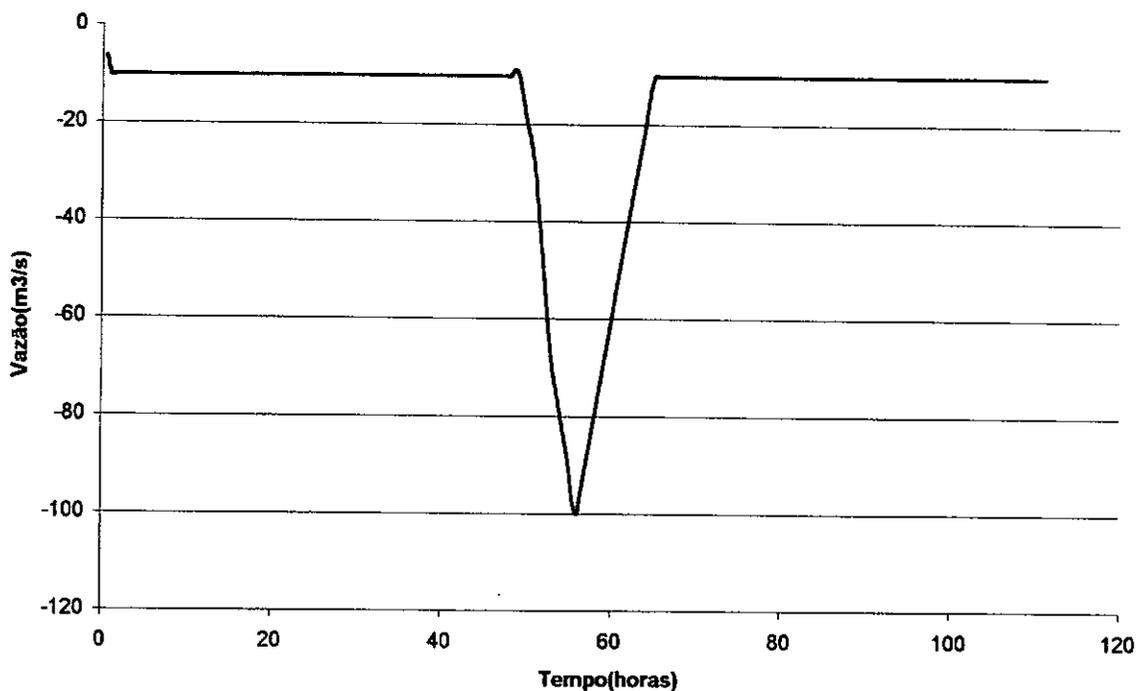


Figura 4.27: Hidrograma afluente nas seções 32 e 33

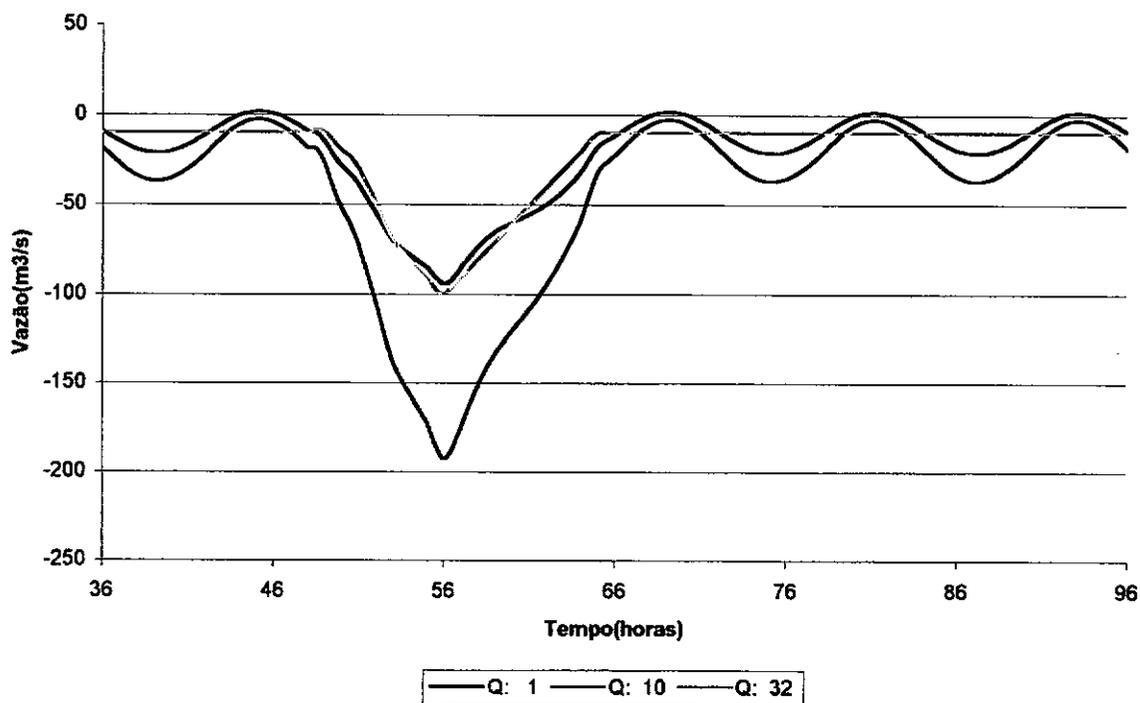


Figura 4.28: Resultados de vazão ao longo do tempo para as seções 1, 10 e 32

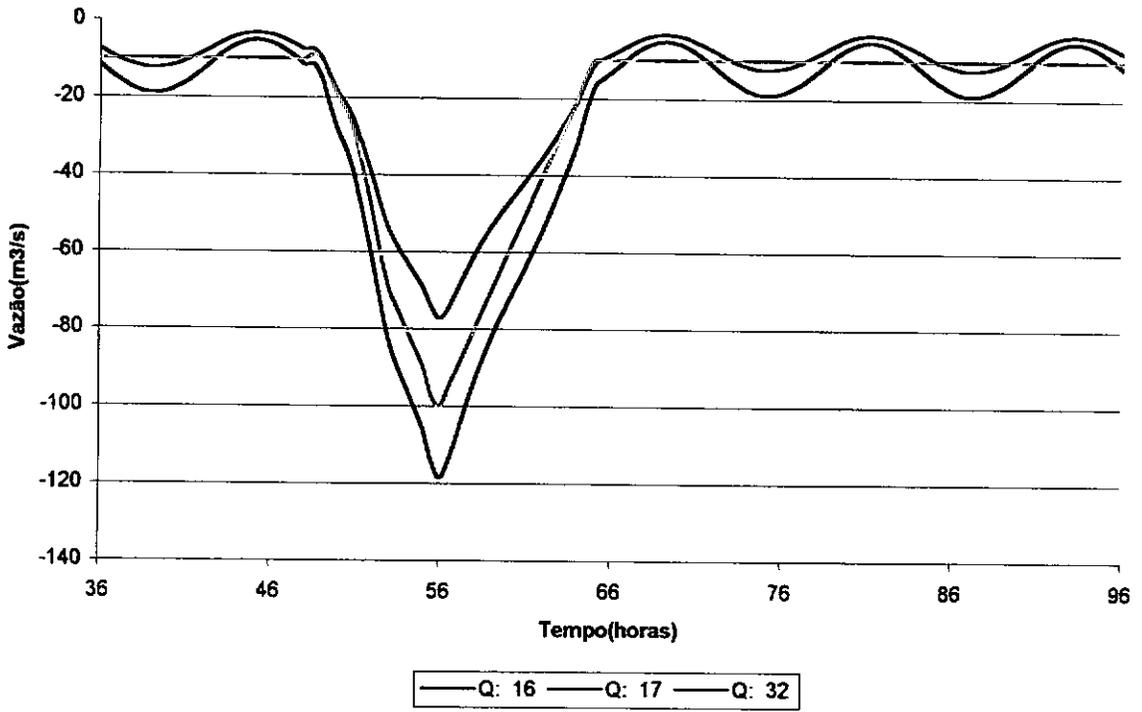


Figura 4.29: Resultados de vazão ao longo do tempo para as seções 16, 17 e 32

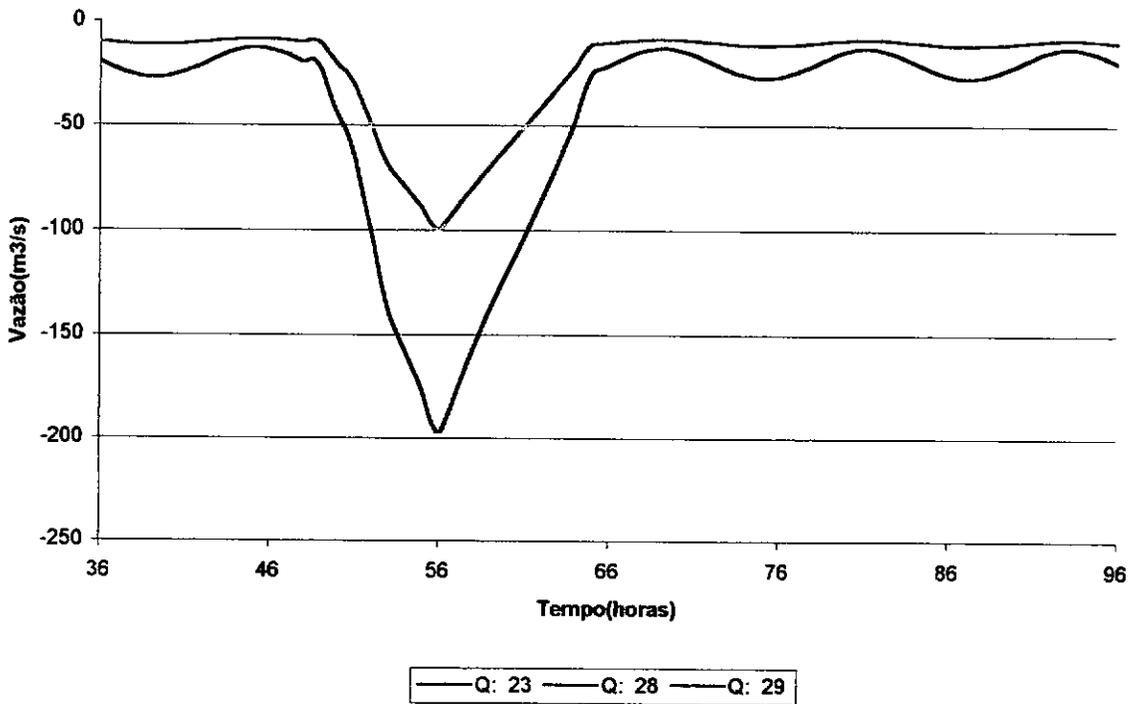


Figura 4.30: Resultados de vazão ao longo do tempo para as seções 23, 28 e 29

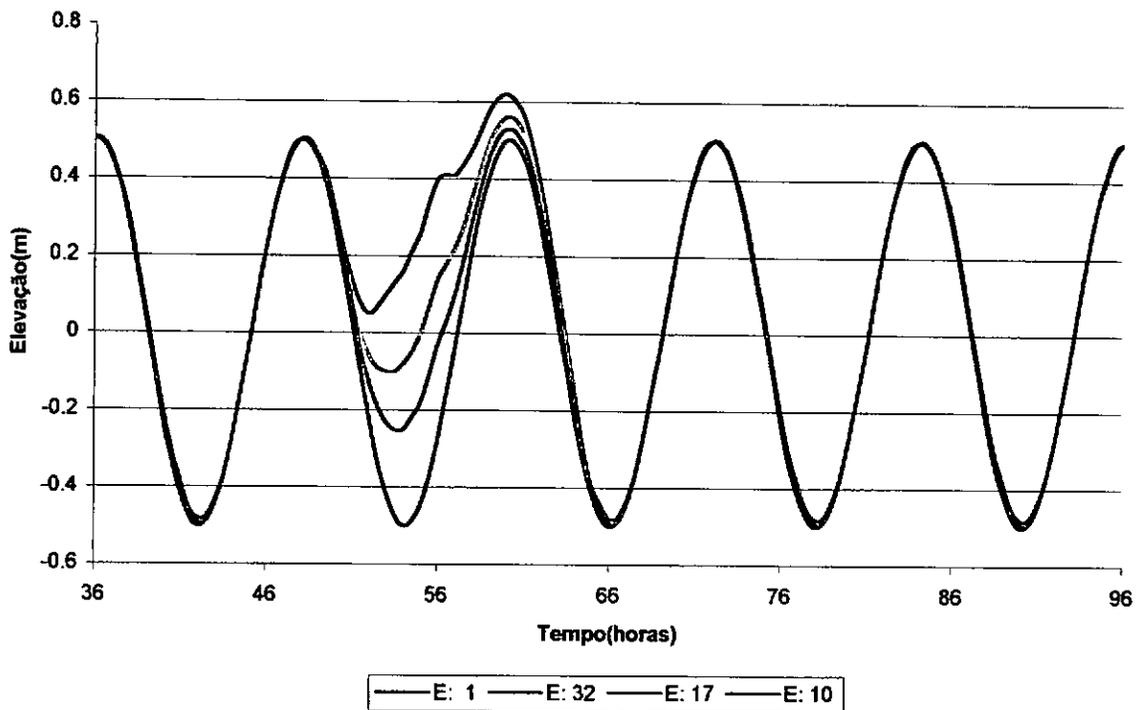


Figura 4.31: Resultados de elevação ao longo do tempo para as seções 1, 10, 17 e 32

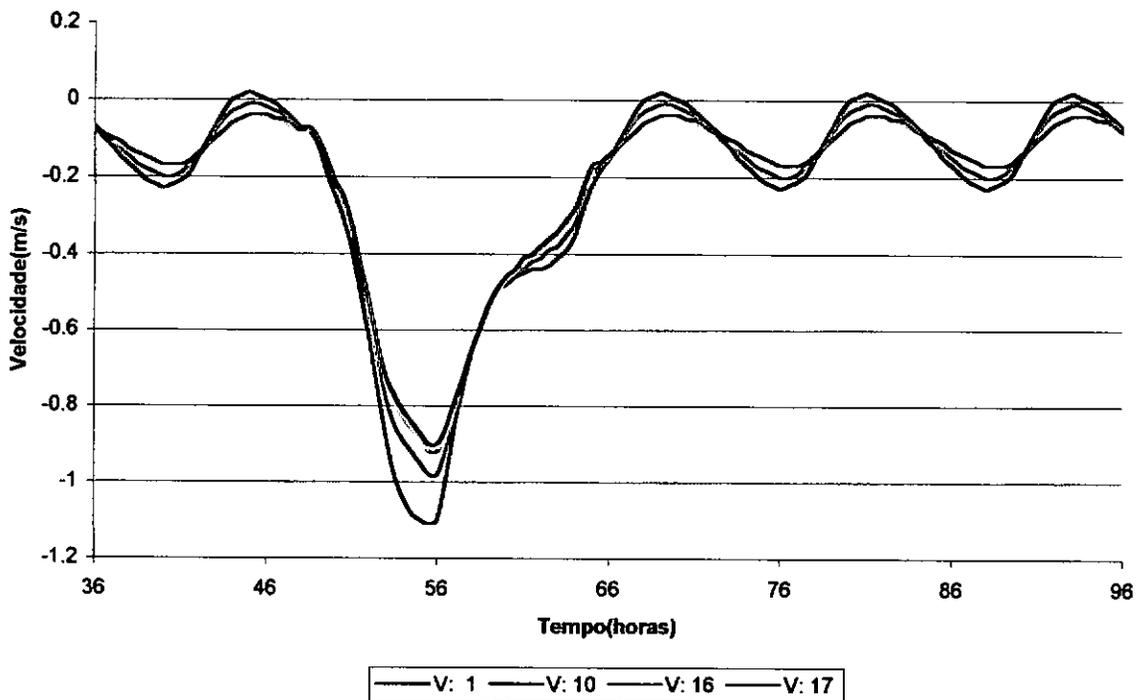


Figura 4.32: Resultados de velocidade ao longo do tempo para as seções 1, 10, 16 e 17

5. Conclusões e Recomendações

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo numérico hidrodinâmico unidimensional para rede de canais, utilizando o método do elemento móvel para a discretização espacial e o método do fatoramento implícito em conjunto com o método das substituições sucessivas para a discretização temporal.

O método do elemento móvel pode ser considerado um caso mais geral do método das diferenças finitas, embora não utilize a expansão truncada em série de Taylor. O método utiliza funções de interpolação como no método dos elementos finitos, permitindo que se utilize espaçamento irregular entre seções.

O método das substituições sucessivas utilizado no modelo tem o objetivo de diminuir o espaço de memória requerido e o tempo de processamento das simulações. Para canais simples não se espera um grande ganho no tempo de processamento, porém como o modelo é capaz de simular o escoamento para uma rede de de canais, dependendo do tamanho da rede, esta redução pode ser significativa.

Para que isto seja possível, o método das substituições sucessivas promove um desacoplamento do cálculo das variáveis. Isto é feito mediante a explicitação da velocidade em função da elevação na equação da quantidade de movimento e posterior substituição na equação da continuidade. A partir daí é montado um sistema de equações, onde apenas a elevação é incógnita. Depois de resolvido o sistema, calcula-se as velocidades diretamente através de substituições sucessivas dos valores de elevação na expressão da velocidade, extraída da equação da quantidade de movimento. Para que esta separação possa ser feita, faz-se necessária a extrapolação da velocidade nos tempos $t + \Delta t$ e $t + 1/2\Delta t$, e da elevação no tempo $t + 1/2\Delta t$.

A extrapolação da velocidade foi motivo de pesquisa durante o desenvolvimento do modelo computacional. Primeiramente tentou-se utilizar uma extrapolação linear, porém verificou-se que o modelo ficava bastante instável. Em seguida foi tentada uma extrapolação

quadrática que apresentou resultados bem melhores, no que tange a estabilidade do modelo, em relação à tentativa anterior. Finalmente adotou-se uma extrapolação quadrática da velocidade para os termos utilizados na montagem da matriz de coeficientes, e para os termos que compõe a expressão utilizada para o cálculo da velocidade, a extrapolação foi feita através da extrapolação linear da vazão, que é uma função mais bem comportada. Os resultados mostraram que para este caso, o modelo consegue simular escoamentos com até o dobro do número de Courant utilizado com a extrapolação linear. Por outro lado, para utilizar este tipo de extrapolação é necessário guardar na memória do modelo os valores de velocidade em três passos de tempo passados e os valores de vazão e elevação em dois passos tempo.

Em trabalhos futuros pode ser pesquisada uma melhor maneira de fazer estas extrapolações. Talvez seja mais interessante extrapolar a velocidade sempre através de uma extrapolação linear da vazão, deste modo a quantidade de memória necessária seria menor já que seria preciso guardar apenas os valores de vazão de dois passos de tempo anteriores, não sendo mais necessário guardar os valores de velocidade.

O esquema de cálculo utilizado para a representação de uma rede de canais consistiu em dividir o domínio em trechos que estão interligados através de entroncamentos. Cada entroncamento é formado por três nós, sendo que cada um deles pertence a um trecho distinto. Nestes nós são aplicadas condições de contorno específicas. Por localizarem-se em trechos diferentes e conseqüentemente terem conectividades diferentes, e devido ao tipo de condição de contorno imposta a um dos nós do entroncamento, a linha, referente a este nó, na matriz de coeficientes utilizada para o cálculo das elevações possui nove coeficientes não nulos (banda ≥ 9). Em trabalhos futuros pode ser estudada uma maneira diferente de determinar as derivadas das funções nos nós localizados nos entroncamentos, de modo que a banda da matriz possa ser diminuída, tornando a resolução do sistema mais rápida.

Depois de calculadas as elevações de uma maneira global, o cálculo da velocidade é feito trecho a trecho mediante uma ordem pré estabelecida pelo modelador, onde os primeiros trechos devem ser aqueles que possuem nós onde a vazão é prescrita. Este esquema foi testado em um caso prático, obtendo-se bons resultados quando comparados com resultados de um modelo bidimensional de elementos finitos.

O modelo foi testado em três casos. O primeiro teste foi aplicar o modelo a um caso com solução analítica. Foi estudada a propagação de uma onda em um canal com seção retangular variando linearmente e fundo horizontal sem atrito. Os resultados foram praticamente idênticos, demonstrando a boa consistência do modelo.

Em seguida foi realizado um estudo de propagação de uma onda de maré em um canal com atrito e os resultados foram comparados com um modelo unidimensional de diferenças finitas já validado. Os resultados foram muito bons e não apresentaram oscilação numérica até número de Courant igual a 5,2. A partir de número de Courant igual a 6,3 é necessário o uso de interfaces dissipativas

Por último o modelo foi aplicado ao estuário do canal do Cunha, onde o esquema de rede de canais pode ser testado. Os resultados foram comparados com os resultados de um modelo bidimensional de elementos finitos. Apesar da diferença de discretização do domínio, e da representação da seção transversal do corpo d'água, os resultados foram muito próximos, comprovando a eficiência do esquema numérico proposto .

Além das recomendações já feitas, seria interessante que fosse implantado no modelo uma condição de contorno tipo curva-chave, deste modo o mesmo poderia ser aplicado em regiões distantes do mar, onde não há influência da maré. Além disso, poderia ser incluído o termo de contribuição lateral na equação da continuidade.

Referências Bibliográficas

- Abbott, M. B. e Basco, D. R. (1979). *Computational Fluid Hydraulics – An Introduction for Engineers*. Longman Scientific & Technical, New York.
- Abbott, M. B. (1979). *Computational Hydraulics: Elements of the Theory of Free Surface Flow*. Longman, London
- Aldama, A. A. (1995). *Theory and Applications of Two and Three-Scale Filtering Approaches for Turbulent Flow Simulations*. Ph.D. Thesis. Department of Civil Engineering. Massachusetts Institute of Technology.
- Araújo, A. M. (1993). *Um Sistema Computacional para Simulação do escoamento e Transporte Fluido Turbulentos em Corpos D'água Rasos Usando Técnicas de Filtragem*. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ.
- Beam, R. M. and Warming, R. F. (1978). *An Implicit Factored Scheme for The Compressible Navier-Stokes Equations*. *AIAA Journal*, 16, pp 393-402.
- Bueno, M. C. D. (1995). *Uso de Interfaces Dissipativas em Modelos de Circulação para Corpos D'água Rasos*. Tese de Mestrado. COPPE/UFRJ.
- Calixto, R. J. (1990). *Estabilidade Hidráulico-Sedimentológica de Embocaduras de Canais de Maré- O Caso da Lagoa Rodrigo de Freitas*. Tese de Mestrado. COPPE/UFRJ.
- Dean, R.G. & Dalrymple, R.A. (1978). *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. Perntice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Dongarra, J. J. Bunch, J. R., Moler, C. B. and Stewart, G. W. (1979). *Limpack- User's Guide*. SIAM, Filadelfia.

- Eiger, S. (1989). Modelos de Escoamentos Turbulentos. In: Métodos Numéricos em Recursos Hídricos 1. ABRH.
- Rosman, P. C. C. (1987). Modeling Shallow Water Bodies Via Filtering Techniques. PhD Thesis. Department of Civil Engineering. Massachusetts Institute of Technology.
- Rosman, P. C. C. (1989). Modelos de Circulação em Corpos D'água Rasos. In: Métodos Numéricos em Recursos Hídricos 1. ABRH.
- Rosman, P. C. C. (1994). Modelo Matemático Desacoplado para Circulação 2DH em Corpos D'água Rasos. Anotação Pessoal. Programa de Engenharia Oceânica, COPPE/UFRJ.
- Rosman, P. C. C. (1997). Subsídios para Modelagem de Sistemas Estuarinos. In: Métodos Numéricos em Recursos Hídricos 3. ABRH.
- Rosman, P. C. C. (1997). Estudo Hidrodinâmico e Geotécnico para Revitalização da Circulação no Canal do Fundão e no Canal do Cunha, Baía de Guanabara, RJ-Relatório COPPETEC ET-150786.
- Scudelari, A. D. (1997). Desenvolvimento de um Método de Elemento Móvel Aplicado à Equações de Águas Rasas. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ.
- Vasconcellos Filho, F. M. C. (1991). Investigações sobre um Esquema Numérico Desacoplado para Modelos de Circulação. Tese de mestrado. COPPE/UFRJ.
- White, F. M. (1974). Viscous Fluid Flow. McGraw-Hill.