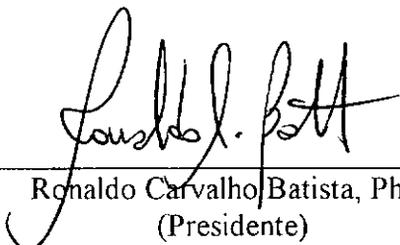


**ABSORSOR PENDULAR NÃO-LINEAR PARA REDUÇÃO DE
VIBRAÇÕES EM TORRES ESBELTAS**

Marco Antonio Silva Pinheiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL

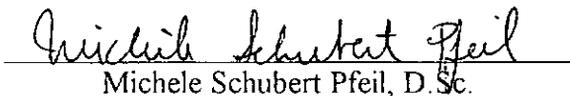
Aprovada por:



Ronaldo Carvalho Batista, Ph.D
(Presidente)



Paulo Batista Gonçalves, D.Sc.



Michele Schubert Pfeil, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
Fevereiro de 1997

PINHEIRO, MARCO ANTONIO SILVA

Absorção Pendular Não-Linear para Redução de Vibrações em Torres Esbeltas

[Rio de Janeiro] 1997

xi, 116p., 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1997)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Absorção Pendular

2. Análise Dinâmica

3. Estruturas Cíveis Tipo Torre

I. COPPE/UFRJ

II. TÍTULO (série)

Aos meus pais, pelo apoio constante.

À querida Dina, pela compreensão e carinho.

Ao professor e amigo Ronaldo Batista, por toda paciência e incentivo.

Agradecimentos:

Ao Mestre dos Mestres, por sempre estar presente, principalmente nos momentos mais difíceis, encorajando-me e mostrando-me um caminho de Luz. Obrigado, Oh Deus, pela bondade e generosidade.

A minha família, em especial à Aninha, pelas boas conversas por telefone.

À professora Michele Pfeil, pelos esclarecimentos teóricos e pela atenção dedicada ao longo da tese.

Às amigas Natália e Patrícia, por terem perseverança diante de um sentimento nobre: a amizade. Muito obrigado pelas dicas e conversas do dia-a-dia.

Aos amigos (e amigas) de Turma de mestrado, destacando Paulo, Flávio Barbosa, Túlio Moreira, Djalene, Aécio Pereira, Flávio Pietrobon, Ediberto e Marcos André.

Agradecimentos especiais a: Murilo e Josane, à pequena Shantal, Telma, Alberto, Alexandre, Sérgio, Zé Mário e Chicão, pelo tempo que passei morando com vocês. Seguem as desculpas por qualquer incômodo.

Aos amigos Paulinho, Assis, Afonso, sem esquecer de Beth e da dupla Norma e Nilda, de David e Silvestre respectivamente, pelas aulas de Maple, pela piadas, pelas caronas, pelos biscoitinhos, e pela descontração no cafezinho.

A todo o pessoal do laboratório de computação (Thelmo, Jonny, Célio, Orlando, ...) e aos professores e funcionários do PEC.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que de uma forma ou de outra, contribuíram para o término deste trabalho e por terem me suportado durante esse tempo aqui no Rio.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

ABSORSOR PENDULAR NÃO-LINEAR PARA REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES EM TORRES ESBELTAS

Marco Antonio Silva Pinheiro

Fevereiro de 1997

Orientador: Ronaldo Carvalho Batista

Programa: Engenharia Civil

O avanço tecnológico tem contribuído significativamente para o surgimento de estruturas cada vez mais arrojadas. E não foi diferente para as estruturas tipo torre, altas e esbeltas. Por outro lado, uma preocupação maior deve ser voltada para esse tipo de estrutura com relação às cargas dinâmicas que possam atuar sobre as mesmas. Essas solicitações, além das próprias características físicas e propriedades dinâmicas da estrutura, na maioria dos casos, podem fazer com que ela apresente grandes níveis de amplitudes de vibração.

Para minimizar ou atenuar essas amplitudes de vibração, diferentes soluções são adotadas, cada uma com características adequadas a cada tipo de estrutura e solicitação dinâmica, dentre elas aquelas que fazem uso de absorvedores de vibração. Dentre os diversos tipos de sistemas de absorção, esse trabalho mostra o emprego do Pêndulo como Absorvedor de Vibrações – bastante adequado à redução dos deslocamentos horizontais decorrentes de oscilação por flexão em torres altas e esbeltas – explorando a sua maior eficiência para certas faixas de valores de parâmetros, que são funções do grau de não-linearidade geométrica e das suas propriedades dinâmicas.

Alguns dos principais aspectos de dimensionamento, localização e faixa ótima das amplitudes de movimento do absorvedor são apresentados e discutidos, com auxílio dos resultados obtidos com modelos analíticos e discretizados via MEF, e das respostas no tempo e em frequência do sistema controlado e não controlado sob cargas harmônicas. Um exemplo de aplicação prática de uma torre esbelta sob a ação dinâmica do vento é apresentado para demonstrar a viabilidade e eficiência desses dispositivos mecânicos de redução de oscilações.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master Science (M.Sc.)

NON-LINEAR PENDULUM ABSORBER OF THE HORIZONTAL VIBRATIONS IN SLENDER TOWERS

Marco Antonio Silva Pinheiro

February, 1997

Thesis Supervisor: Ronaldo Carvalho Batista

Department: Civil Engineering

The technological advance has significantly contributed to the appearance of more and more bold structures. And this wasn't different for tall and slender tower structures. On the other hand, a greater concern should be given to that kind of structure, with regard to dynamic loadings that can act on them, as for instance, wind loading. Those solicitations, besides the peculiar physical features and dynamic properties of these structures, may cause, in general, to these tall and slender towers large amplitudes of bending vibration.

To minimize or to attenuate the amplitudes of vibration, engineering solutions have been adopted, each one with attributes adequate for each type of structure and dynamic loading, emphasizing the use of vibration absorbers. This work shows the application of the Pendulum as a Vibration Absorber – suitable enough to reduce horizontal displacement due to transversal bending oscillations in tall and slender towers – exploring the best of its efficiency, for certain ranges of parameters which are functions of the geometric non-linearity and dynamics properties.

Some of the main design aspects, including location and optimum range of amplitudes of pendular motion, are presented and discussed with the aid of the results obtained by using analytical and discretized FEM models, together with comparisons between the controlled and uncontrolled systems' responses in time and frequency domain, for harmonic loadings. Finally, an example of practical application of a tall and slender tower under simplified wind loading is presented to demonstrate the feasibility and performance of these pendulum absorbers in reducing oscillations amplitudes.

ÍNDICE

| | |
|--|-----------|
| SIMBOLOGIA | ix |
| Capítulo I | |
| INTRODUÇÃO | 01 |
| Capítulo II | |
| MODELAGEM TEÓRICA DO ABSORSOR PENDULAR NÃO LINEAR (APNL) | 05 |
| II.1 - Formulação das Equações de Movimento | 05 |
| II.1.1 - Frequência Natural do Sistema | 11 |
| II.1.2 - Determinação do Coeficiente de Amortecimento do Pêndulo | 16 |
| II.1.3 - Determinação de Relações Ótimas de Absorção via Equações Linearizadas | 17 |
| II.2 - Modelagem de um Sistema Análogo Alternativo do APNL | 24 |
| Capítulo III | |
| ESTUDO PARAMÉTRICO E DIMENSIONAMENTO DO PÊNDULO | 29 |
| III.1 - Dimensionamento quanto às Relações de Frequência | 29 |
| III.2 - Influência de θ na Redução de Vibrações | 43 |
| III.3 - Influência de C_p e K_p nas Respostas | 55 |
| III-4 - Sistema APNLV | 60 |
| Capítulo IV | |
| RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA | 64 |
| IV.1 - Formulação das Equações Algébricas Não-Lineares | 64 |
| IV.2 - Algoritmo de Solução Numérica das Equações Não-Lineares | 70 |
| IV.3 - Resultados Numéricos | 75 |
| Capítulo V | |
| IMPLEMENTAÇÃO DOS APNL's EM SISTEMA DISCRETIZADO VIA MEF | 81 |
| V.1 - Sistema Discretizado via MEF | 81 |
| V.1.1 - Equação de Movimento de um Elemento | 82 |
| V.1.2 - Equação de Movimento da Estrutura | 82 |
| V.2 - Superposição Modal | 83 |
| V.3 - Implementação do Absorsor no Modelo Discretizado via MEF | 87 |
| V.3.1 - Formulação das Equações de Movimento da Estrutura com Absorsor | 87 |
| V.3.2 - Algoritmo de Soluções das Equações | 90 |

Capítulo VI

APLICAÇÃO PRÁTICA DO PÊNULO ABSORSOR EM TORRES ESBELTAS 93

VI.1 - Torre de Telecomunicações 94

VI.2 - Descrição do Carregamento Dinâmico 96

VI.3 - Dimensionamento do Pêndulo 102

Capítulo VII

CONCLUSÕES 112

BIBLIOGRAFIA 115

SIMBOLOGIA

| | |
|----------------------|--|
| A | – área da seção transversal do cilindro |
| \underline{C} | – matriz de amortecimento da estrutura |
| C | – coeficiente de amortecimento da estrutura |
| \underline{c}^e | – matriz de amortecimento do elemento no referencial local |
| C_i | – coordenada normal de amortecimento generalizado |
| C_L | – coeficiente de deslocamento lateral |
| C_p | – coeficiente de amortecimento do pêndulo |
| D_{ext} | – diâmetro externo de um cilindro |
| e | – espessura de um cilindro |
| E | – módulo de elasticidade do aço |
| E_d | – energia dissipada |
| \bar{F} | – relação entre a amplitude da força de excitação e a força peso |
| F_e | – carregamento harmônico |
| $\underline{f}^e(t)$ | – vetor de forças nodais no elemento no referencial local |
| \bar{F}_e | – relação entre o carregamento harmônico e a força peso |
| \underline{F} | – vetor de forças nodais |
| \underline{F} | – vetor de forças generalizadas |
| $F_i(t)$ | – força generalizada associada ao modo i |
| F_L | – força lateral (perpendicular a direção do vento) por unidade de comprimento |
| F_o | – amplitude da força de excitação |
| F_p | – carregamento harmônico horizontal gerado pelo pêndulo |
| \bar{F}_P | – relação entre o carregamento harmônico horizontal gerado pelo pêndulo e a força peso |
| F_{ph} | – componente horizontal da força imposta pelo pêndulo em M |
| F_{pv} | – componente vertical da força imposta pelo pêndulo em M |
| f_v | – frequência de vórtice (Hz) |
| f_n | – frequência natural |
| g | – aceleração da gravidade |
| I | – momento de inércia |
| J_0, J_1, J_2 | – funções de Bessel de primeira espécie |
| J_o | – momento de inércia de massa |
| \underline{K} | – matriz de rigidez da estrutura |
| K | – rigidez elástica da estrutura |
| \underline{k}^e | – matriz de rigidez elástica mais a geométrica do elemento no referencial local |
| K_i | – coordenada normal de rigidez generalizada |
| K_p | – rigidez do pêndulo |

| | |
|-----------------------|---|
| l | - comprimento da haste pendular |
| \underline{L} | - vetor de posição nodal do pêndulo |
| \underline{L} | - vetor de força unitária ou posição generalizada do pêndulo |
| L_i | - posição modal do pêndulo |
| M | - massa principal (estrutura) |
| m | - massa do pêndulo |
| \underline{M} | - matriz de massa da estrutura |
| \underline{m}^e | - matriz de massa do elemento no referencial local |
| M_i | - coordenada normal de massa generalizada |
| \underline{O} | - matriz nula |
| p | - constante associada a topografia para variação da velocidade do vento |
| q_i | - coordenadas generalizadas da equação de Lagrange |
| \underline{Q}_i | - força genérica externa atuando num sistema |
| R | - raio da seção transversal do cilindro |
| r | - raio da massa m |
| S | - número de Strouhal |
| T | - energia cinética |
| t | - tempo |
| T | - período; indicação de matriz transposta |
| T_1, T_2, T_3 | - forças que atuam na haste do pêndulo |
| T_h | - componente horizontal de T_i |
| T_i | - força total na haste do pêndulo |
| T_v | - componente vertical de T_i |
| \underline{u} | - vetor de deslocamento de um elemento |
| \underline{U} | - vetor de deslocamento da estrutura |
| V | - energia potencial; velocidade |
| v | - velocidade tangencial de m |
| V_o | - velocidade do vento a uma altura H_o |
| $v_{\bar{x}}$ | - velocidade de m na direção horizontal |
| v_y | - velocidade de m na direção vertical |
| x | - deslocamento da massa principal (estrutura) |
| \bar{x} | - amplitude de deslocamento da massa principal (estrutura) |
| x_{est} ou x_{st} | - deslocamento estático |
| \underline{Y} | - vetor de coordenadas generalizadas |
| Y_i | - amplitudes modais ou coordenadas generalizadas do modo i |
| z_1, z_2 | - deslocamento, velocidade de estado |

| | |
|--------------------------------|---|
| $\alpha, \beta, \varphi, \psi$ | – ângulo de fase |
| δ | – coeficiente de controle (x_e/x_o) |
| Φ | – matriz de formas modais |
| ϕ_i | – funções de forma ou de interpolação do modo i |
| μ | – relação de massa |
| θ | – deslocamento angular |
| $\bar{\theta}$ | – amplitude de deslocamento angular |
| ρ | – massa específica do aço |
| ρ_f | – densidade do fluido (ar) |
| Ω | – frequência de resposta |
| ω | – frequência de oscilação; frequência de excitação |
| ω_a | – frequência natural amortecida |
| ω_e | – frequência de excitação; frequência de oscilação |
| ω_i | – frequência natural da estrutura referente ao modo i |
| ω_p | – frequência natural do pêndulo (simples ou elástico) |
| ω_s | – frequência natural da estrutura |
| ω_v | – frequência de vórtice |
| ξ | – taxa de amortecimento |
| ξ_i | – taxa de amortecimento do modo i |
| ξ_p | – taxa de amortecimento do pêndulo |

CAPÍTULO I

Introdução

Os projetos em engenharia estrutural são sempre desenvolvidos sob certas restrições e limitações de ordem construtiva e prática, além de critérios de conforto do ser humano, segurança e estabilidade que são estabelecidos em função dos tipos de carregamentos atuantes, estáticos e dinâmicos. Mas essas restrições têm sido modificadas e minimizadas cada vez mais com o surgimento de novos sistemas de absorção e/ou novos materiais que ampliam a capacidade da estrutura de resistir a diversas ações e reduzem as amplitudes de movimento, garantindo, assim, que todos esses critérios citados sejam satisfeitos.

Estruturas submetidas a ações dinâmicas, como abalos sísmicos ou ação do vento, concebidas e/ou projetadas com auxílio de novos sistemas e/ou materiais, passaram a apresentar uma maior vida útil, devido às menores amplitudes de vibração resultantes.

O caso das estruturas tipo torre de telecomunicações, por exemplo, é notório, pois a necessidade tecnológica levou à criação de torres cada vez mais altas e esbeltas. Para essas estruturas, a ação do vento tem uma importância significativa no comportamento dinâmico e é capaz de gerar oscilações não só na direção do fluxo de vento, mas também transversais a ele. Essas oscilações podem interferir tanto no conforto do usuário, nos casos, por exemplo, de torres que servem como locais públicos de visitação como mirante e ponto de observação, quanto nos deslocamentos da antena no topo das torres de telecomunicações, o que pode gerar grandes variações no sinal emitido, além da fadiga do material.

Os sistemas auxiliares de redução das amplitudes de oscilação transversal por flexão mais empregados em estruturas tipo torre são aerodinâmicos ou mecânicos, sendo que estes últimos possuem algumas vantagens sobre os primeiros. Daí um número cada vez maior no uso dos sistemas mecânicos, também chamados de absorvedores de vibração, enquadrados nos sistemas de controle passivo (SCP).

Nesse tipo de controle, o sistema auxiliar, a partir de suas propriedades de massa, rigidez e amortecimento, é responsável pela criação de forças de inércia, forças elásticas e de amortecimento opostas às forças atuantes na estrutura, fazendo com que o trabalho realizado pelas forças distribuídas na estrutura principal seja reduzido [1].

A magnitude dessas forças de controle é dependente das propriedades do próprio sistema auxiliar e também das amplitudes de resposta da estrutura (deslocamento, velocidade e aceleração), o que caracteriza o SCP como de ciclo fechado [2].

A determinação dessas propriedades ou características do sistema de absorção geralmente é feita em função das propriedades dinâmicas da estrutura e dos níveis de redução desejáveis. É o que se chama de calibração do sistema, que está diretamente ligada a eficiência na redução de vibrações [1,2].

Essas características do Sistema de Controle Passivo fazem com que ele seja considerado, num âmbito maior, um conceito amplo e aberto, onde, fundamentalmente, pode-se usar da criatividade para engenhar qualquer modelo de um sistema de absorção, desde que não seja necessária uma fonte de alimentação para as forças de controle e sim que elas dependam apenas das respostas do sistema principal.

E assim surgiram sistemas como o de vasos comunicantes entre dois tanques de água [3], os sistemas massa-mola [4], mecanismos de amortecimento adicional, isoladores e absorsores de vibração, aplicados em diversas concepções estruturais, como lajes [5] e pontes [6,7], entre outras.

Sob esse aspecto e observando ainda que esses sistemas são aplicados como medidas corretivas simples e econômicas, além de fácil manutenção e da possibilidade de criação de estruturas cada vez mais altas e esbeltas, tem-se, neste trabalho, a aplicação de um sistema de absorção para redução de vibrações horizontais em torres.

Trata-se de um sistema conhecido que é um pêndulo ligado a uma massa M ou estrutura principal, que está submetida a um dado carregamento dinâmico. Esse sistema é chamado de pêndulo absorsores de vibrações horizontais e, inicialmente, será apresentado com uma modelagem matemática em um sistema de 02 graus de liberdade, para, posteriormente, adaptá-lo a sistemas discretizados via método de elementos finitos e, finalmente, a sua aplicação em estruturas tipo torre.

Uma característica intrínseca a esse tipo de absorvedor é que ele pode desenvolver oscilações em regime não-linear, diferente da maioria dos sistemas de absorção massa-mola ou outros mais comuns. O seu uso é bastante adequado a estruturas tipo torre. Mas não se deve apenas considerar a faixa de trabalho num regime linear, e sim, ter um conhecimento melhor sobre os parâmetros de eficiência no regime não-linear de oscilação (faixa média e larga de amplitudes de oscilação angular). Chama-se, neste caso, de **Absorvedor Pendular Não-Linear (APNL)** para redução de vibrações horizontais.

Ao se considerar apenas as equações que regem o movimento desse sistema no regime linear, os resultados são comprometidos e dessa maneira não se pode projetar um pêndulo em estruturas, onde o tipo de carregamento a que estão sujeitas pode variar e aumentar a magnitude de suas forças, exigindo-se, assim, que o absorvedor trabalhe em regime não-linear.

Considerar a não-linearidade também é importante do ponto de vista do nível de absorção pretendida, com amplitude do movimento pendular limitada apenas pelas dimensões do espaço disponível na estrutura onde será instalado o APNL. O modelo matemático que melhor descreve o funcionamento do absorvedor é dado pelas equações não lineares completas, contendo os termos de inércia, elástico e amortecimento do APNL.

O estudo desses parâmetros e do comportamento do pêndulo no regime não-linear, associados as novas pesquisas realizadas na área de controle estrutural dinâmico no Programa de Engenharia Civil-COPPE/UFRJ, podem ser resumidos como a principal **motivação do trabalho** aqui desenvolvido, o qual oferece uma singela contribuição à literatura técnica.

O trabalho está dividido em sete capítulos e tem como principal meta a **redução de vibrações horizontais** numa torre ou estrutura tipo torre, com o uso de um sistema de controle passivo, o pêndulo não-linear de absorção de vibrações.

O capítulo II traz a descrição do problema de 2 graus de liberdade e a formulação das equações de movimento do pêndulo elástico preso a uma massa que se desloca horizontalmente, para um carregamento harmônico senoidal. Além disso, mostra algumas propriedades dinâmicas do pêndulo, extraídas da equação linearizada de movimento, que representa apenas a oscilação angular, e um estudo, baseado na

referência [4], do uso do pêndulo como absorvedor, a partir das equações de movimento linearizadas, fazendo-se uma comparação dos parâmetros ótimos de absorção obtidos para um absorvedor tipo massa-mola naquela referência com os parâmetros equivalentes encontrados aqui. Traz ainda uma sugestão de outro sistema de absorção equivalente, que é uma massa de forma cilíndrica ou esférica deslocando-se sobre uma superfície circular de comprimento igual ao que seria descrito pela massa em movimento do pêndulo simples. Este sistema alternativo seria usado em substituição ao pêndulo simples (com haste) nos casos onde este último tivesse sua instalação inviabilizada pelo comprimento excessivo de sua haste.

O capítulo III tem por objetivo encontrar as relações de calibração (relações de frequência) do pêndulo com a estrutura e com a excitação através de um estudo paramétrico das respostas no tempo obtidas pelas equações não-lineares de movimento do sistema de 2 graus de liberdade. A influência dessas relações e do movimento do absorvedor em seu desempenho também são mostradas neste capítulo, bem como a influência de suas propriedades em seu movimento.

No capítulo IV é feita uma análise, no domínio da frequência, da influência da não-linearidade do APNL sobre as respostas do sistema principal (i.e. da estrutura).

O capítulo V busca, a partir da formulação desenvolvida no capítulo II, a implementação do pêndulo absorvedor em sistemas planos com vários graus de liberdade, discretizados por elementos finitos. Nele são descritos alguns conceitos básicos de sistemas discretizados e de análise modal, método com o qual foi implementado o absorvedor e resolvidas as equações de movimento da estrutura discretizada.

O capítulo VI apresenta um exemplo prático para aplicação do pêndulo: uma torre alta e esbelta, sob o efeito de vibrações induzidas por vorticidade provocada pela ação do vento. O propósito deste capítulo é mostrar a viabilidade, sob distintos aspectos, e a eficiência do sistema de absorção APNL.

Finalmente, no capítulo VII são apresentadas as conclusões extraídas desse trabalho, com algumas sugestões de aperfeiçoamento do sistema e de novas propostas para pesquisa.

CAPÍTULO II

Modelagem Teórica do Absorvor Pendular Não-Linear (APNL)

Absorvores dinâmicos passivos do tipo pendular são especialmente indicados para a redução das amplitudes dos deslocamentos horizontais decorrentes das oscilações por flexão de estruturas de torres altas e esbeltas.

O funcionamento dinâmico desse tipo de absorvor é, basicamente, caracterizado pelas forças de inércia, geradas pelo movimento pendular, que se opõem ao movimento de oscilação transversal da estrutura da torre, e o seu melhor desempenho ocorre, em geral, dentro de uma faixa de amplitudes angulares médias e largas, em que a teoria linear não se aplica.

Assim, o modelo matemático que melhor representa o comportamento de um absorvor pendular colocado perto do topo de uma torre esbelta é descrito pelas equações não-lineares de movimento. Como será demonstrado mais adiante, o desempenho do APNL depende não só da faixa de deslocamentos angulares, mas também do comprimento de sua haste e amortecimento angular para limitar o deslocamento lateral da massa na ponta de sua haste, evitando-se, assim, situações não práticas em presença das dimensões globais da estrutura na qual ele será instalado.

Sendo assim, torna-se necessário conhecer seus melhores parâmetros para a maior redução possível dos deslocamentos da estrutura, bem como determinar a sua eficiência para o regime não linear de oscilação.

II.1 Formulação das Equações de Movimento

O uso do Absorvor Pendular Não-Linear (APNL) para redução de vibrações aqui proposto é inicialmente investigado para uma estrutura representada por um modelo com apenas 1 grau de liberdade, submetida a um carregamento harmônico senoidal, cujas equações de movimento são deduzidas a seguir.

Assim, o pêndulo será aplicado a um sistema massa-mola-amortecedor de apenas 1 grau de liberdade, chamado de massa principal ou sistema original, ou simplesmente estrutura, e as respostas desse sistema com o APNL serão comparadas com as respostas obtidas com o sistema estrutural original.

Seja então o sistema estrutural original apresentado na figura abaixo.

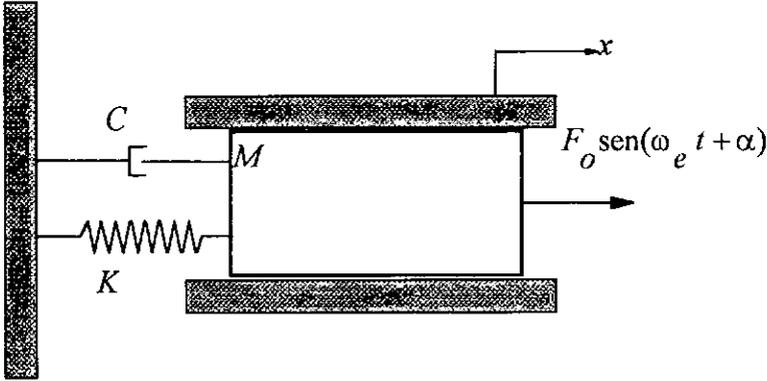


Figura II-1 - Esquema do Sistema 01 GL

A equação de equilíbrio dinâmico pode ser obtida usando-se a equação de Lagrange em sua forma fundamental para coordenadas generalizadas q_i . Seja a equação de Lagrange dada por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T)}{\partial q_i} + \frac{\partial(V)}{\partial q_i} + \frac{\partial(E_d)}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (\text{II-1})$$

onde,

T = Energia Cinética do sistema;

V = Energia Potencial do sistema;

E_d = Energia dissipada do sistema e

Q_i = Força genérica externa atuando no sistema.

Chamando a coordenada generalizada q_i de x tem-se as seguintes expressões de energia:

$$T = \frac{M \dot{x}^2}{2}, \quad V = \frac{K x^2}{2}, \quad E_d = \frac{C \dot{x}^2}{2} \quad (\text{II-2})$$

e a força dinâmica externa de excitação dada por:

$$Q = F_o \text{sen}(\omega_e t + \alpha) \quad (\text{II-3})$$

onde,

M é a massa principal (“estrutura”);

C é o coeficiente de amortecimento ($C = 2 \xi M \omega_s$);

K é o coeficiente de rigidez elástica do sistema;

F_o é a amplitude da força de excitação;

ω_e é a frequência de excitação do sistema;

ω_s é a frequência natural da estrutura;

ξ é a taxa de amortecimento e

α é o ângulo de fase.

As derivadas parciais são dadas, então, pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= M \dot{x}, & \frac{\partial V}{\partial x} &= K x, & \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}} &= C \dot{x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= M \ddot{x}, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Rearrmando essas expressões de acordo com a equação de Lagrange, tem-se a equação de movimento do sistema de 1 grau de liberdade:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F_o \text{sen}(\omega_e t + \alpha) \quad (\text{II-4})$$

Pode-se obter as respostas do sistema massa-mola-amortecedor através de uma solução fechada, ou uma solução numérica, pelo método de Runge-Kutta, através das equações de estado.

Assim, tem-se a solução dada por:

$$x(t) = D e^{(-\xi \omega_s t)} \text{sen}(\omega_a t + \varphi) + E \text{sen}(\omega_e t + \psi) \quad (\text{II-5})$$

ou dada pela resolução das equações de estado do sistema de primeira ordem:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (\text{II-6})$$

$$\dot{z}_2 = \frac{F_o \text{sen}(\omega_e t + \alpha) - C \dot{z}_1 - K z_1}{M} \quad (\text{II-7})$$

Aqui z_1 é deslocamento, \dot{z}_1 e z_2 , velocidades e \dot{z}_2 , aceleração.

Conectando-se agora um pêndulo de massa m à massa M através de uma mola linear e um amortecedor não mostrado na Figura II-2, tem-se o novo sistema de 02 graus de liberdade, onde o pêndulo é um sistema passivo de absorção, com o objetivo de reduzir a resposta do sistema original.

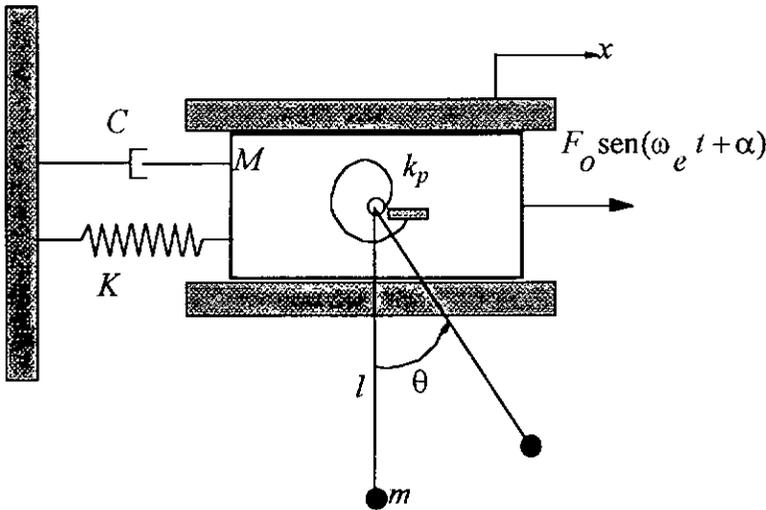


Figura II-2 - Esquema do Sistema com um pêndulo absorvedor - 02 GL

Mais uma vez, as equações diferenciais de movimento podem ser obtidas através da equação de Lagrange.

Da Figura II-3 pode-se determinar as expressões da Energia Cinética (T), Energia Potencial (V) e Energia Dissipada do Sistema (E_d).

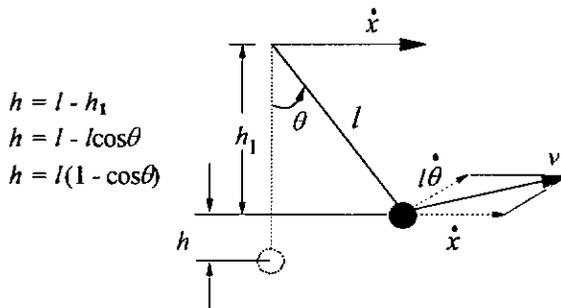


Figura II-3

onde v é a velocidade tangencial da massa m .

Estas expressões são dadas por:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{II-8})$$

$$V = \frac{1}{2} K x^2 + m g h + \frac{1}{2} K_p \theta^2 \quad (\text{II-9})$$

$$E_d = \frac{1}{2} C \dot{x}^2 + \frac{1}{2} C_p \dot{\theta}^2 \quad (\text{II-10})$$

Tomando x e θ como coordenadas generalizadas q_1 e q_2 , pode-se montar as equações de movimento. Para isso, é necessário escrever v em função de θ .

Da Figura II-4, tem-se:

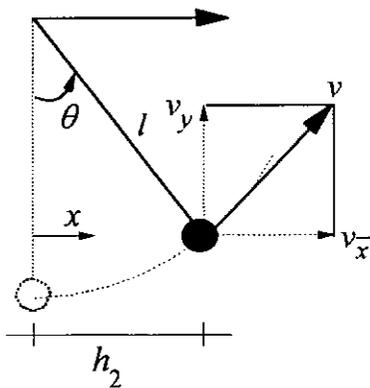


Figura II-4

$$\bar{x} = x + h_2 = x + l \text{sen}(\theta)$$

$$y = h_1 = l \text{cos}(\theta)$$

$$v^2 = v_{\bar{x}}^2 + v_y^2$$

$$\text{sen}(\theta) = h_2 / l$$

$$v_{\bar{x}} = \frac{d\bar{x}}{dt} = \dot{x} + l\dot{\theta} \text{cos}(\theta) \text{ e}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -l\dot{\theta} \text{sen}(\theta).$$

Então:

$$v^2 = (\dot{x} + l\dot{\theta} \text{cos}(\theta))^2 + (-l\dot{\theta} \text{sen}(\theta))^2$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \text{cos}(\theta) + l^2 \dot{\theta}^2$$

Assim:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \text{cos}(\theta) + l^2 \dot{\theta}^2) \quad (\text{II-11})$$

$$V = \frac{1}{2} K x^2 + m g l (1 - \text{cos}(\theta)) + \frac{1}{2} K_p \theta^2 \quad (\text{II-12})$$

$$E_d = \frac{1}{2} C \dot{x}^2 + \frac{1}{2} C_p \dot{\theta}^2 \quad (\text{II-13})$$

As derivadas parciais da equação de Lagrange, para a coordenada generalizada ou grau de liberdade x são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= M \dot{x} + m(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos(\theta)) \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= Kx & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= M \ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \end{aligned}$$

E, por fim, rearrumando os termos de acordo com a equação de Lagrange, obtém-se a primeira equação de movimento:

$$(M + m) \ddot{x} + C \dot{x} + Kx + ml(\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)) = F_o \sin(\omega_e t + \alpha) \quad (\text{II-14})$$

O mesmo processo deve ser seguido a fim de se obter a segunda equação de movimento do sistema, associada a θ . Tem-se as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -m \dot{x} l \dot{\theta} \sin(\theta) & \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= m(\dot{x} l \cos(\theta) + l^2 \dot{\theta}) \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= mgl \sin(\theta) + K_p \theta & \frac{\partial E_d}{\partial \dot{\theta}} &= C_p \dot{\theta} & Q_\theta &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ml(\ddot{x} \cos(\theta) - \dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta) + l\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

A segunda equação de movimento é, então, obtida através da equação de Lagrange e tem a seguinte forma:

$$ml^2 \ddot{\theta} + C_p \dot{\theta} + K_p \theta + ml\ddot{x} \cos(\theta) + mgl \sin(\theta) = 0 \quad (\text{II-15})$$

As equações diferenciais de movimento formam, portanto, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (M + m) \ddot{x} + C \dot{x} + Kx + ml(\ddot{\theta} \cos(\theta))' = F_o \sin(\omega_e t + \alpha) \\ ml^2 \ddot{\theta} + C_p \dot{\theta} + K_p \theta + mgl \sin(\theta) + ml\ddot{x} \cos(\theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-16})$$

com $(\ddot{\theta} \cos(\theta))' = (\dot{\theta} \cos(\theta))' = \ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)$.

Montando as equações de estado, tem-se o sistema de equações diferenciais de 1ª ordem:

$$\dot{z}_1 = z_3 \quad (\text{II-17})$$

$$\dot{z}_2 = z_4 \quad (\text{II-18})$$

$$\dot{z}_3 = \frac{F_o \text{sen}(\omega_e t + \alpha) - C z_3 - K z_1 - ml(\dot{z}_4 \cos(z_2) - z_4^2 \text{sen}(z_2))}{(M + m)} \quad (\text{II-19})$$

$$\dot{z}_4 = \frac{-[C_p z_4 + K_p z_2 + ml(g \text{sen}(z_2) + \dot{z}_3 \cos(z_2))]}{ml^2} \quad (\text{II-20})$$

Este sistema será resolvido por integração numérica pelo método de Runge-Kutta. Os resultados obtidos através de um estudo paramétrico, apresentado mais adiante no capítulo III, servirão para elaborar conclusões sobre a eficiência dos APNL's em função dos vários parâmetros envolvidos no projeto.

II.1.1 Frequência Natural do Sistema

A frequência natural do sistema tem uma importância significativa no que diz respeito ao dimensionamento do pêndulo ou sua calibração com outros parâmetros do sistema absorvedor de vibrações.

Como será visto adiante, são as razões de frequência que servirão de base para obtenção de um melhor sistema controlado, daí a necessidade de conhecê-las.

Pode-se encontrar a frequência natural do sistema através de duas maneiras básicas: considerando cada grau de liberdade isoladamente, conseqüentemente, obtendo uma frequência natural associada ao subsistema massa-mola e outra associada ao pêndulo; ou considerando um único sistema com primeira e segunda frequências naturais associadas aos modos de vibração.

Neste último caso, sejam as equações de movimento já obtidas anteriormente.

Para o cálculo das frequências naturais de vibrações não-amortecidas, linearizam-se as equações e eliminam-se os termos que contêm amortecimento, obtendo-se:

$$(M + m)\ddot{x} + Kx + ml\ddot{\theta} = 0 \quad (\text{II-21})$$

$$ml^2\ddot{\theta} + K_p\theta + mgl\theta + ml\ddot{x} = 0 \quad (\text{II-22})$$

O cálculo da frequência natural usando a forma exata da equação diferencial conduz a uma expressão para frequência de oscilação que é uma integral elíptica de primeira espécie [8,9]. Serão feitas algumas aproximações nesse sentido.

Supondo-se que o movimento é periódico e composto de movimento harmônico de várias amplitudes e frequências, faz-se uma dessas componentes ser:

$$x = \bar{x} \cos(\omega t + \psi) \quad (\text{II-23})$$

$$\theta = \bar{\theta} \cos(\omega t + \psi) \quad (\text{II-24})$$

Substituindo-se esses valores nas equações de movimento e eliminando o termo $\cos(\omega t + \psi)$, tem-se:

$$(K - \omega^2(M + m))\bar{x} - ml\omega^2\bar{\theta} = 0$$

$$-ml\omega^2\bar{x} + (K_p + mgl - ml^2\omega^2)\bar{\theta} = 0$$

Obtém-se a equação de frequência igualando a zero o determinante dos coeficientes de \bar{x} e $\bar{\theta}$, ou seja,

$$\begin{vmatrix} K - \omega^2(M + m) & -ml\omega^2 \\ -ml\omega^2 & K_p + mgl - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^4 M l^2 m - (m^2 g l + M K_p + m K l^2 + M m g l + m K_p) \omega^2 + K K_p + K m g l = 0 \quad (\text{II-25})$$

Esta equação tem dois pares de soluções simétricas. Obviamente, se forem consideradas para caracterizar o sistema de 02 graus de liberdade, serão tomadas apenas as positivas, equivalentes a ω_1 (primeira frequência natural) e ω_2 (segunda frequência natural do sistema).

A outra forma de encontrar as frequências naturais associadas a cada grau de liberdade isoladamente é dada a seguir.

Da equação de equilíbrio dinâmico da massa principal pode-se escrever a equação que representa a vibração livre não-amortecida dessa massa:

$$M \ddot{x} + K x = 0 \quad (\text{II-26})$$

Uma maneira clássica de resolver esse problema é admitir uma solução harmônica na forma:

$$x = \bar{x} \text{sen}(\omega t + \alpha) \quad (\text{II-27})$$

Substituindo tal solução na equação (II-26), chega-se ao seguinte problema de autovalor:

$$\left[K/M - \omega^2 \right] \bar{x} = 0 \quad (\text{II-28})$$

Daí, a frequência natural da massa principal é:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (\text{II-29})$$

O mesmo pode ser feito para o pêndulo. Da segunda das equações de movimento (II-16), pode-se escrever, de forma linearizada, a equação de oscilação livre não-amortecida do pêndulo em termos de θ , após eliminação do termo em x .

Alternativamente, apresenta-se a seguir o desenvolvimento da equação de movimento do pêndulo elástico ($K_p \neq 0$) isolado.

Da Figura II-5, tem-se que a energia cinética e potencial são dadas por:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

$$V = m g h + \frac{1}{2} K_p \theta^2, \text{ com}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$h = l - h_1 = l(1 - \cos(\theta))$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} = h_2 = l \text{sen}(\theta) \therefore \frac{d\bar{x}}{dt} = l \dot{\theta} \cos(\theta) \\ y = h = l \cos(\theta) \therefore \frac{dy}{dt} = -l \dot{\theta} \text{sen}(\theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = l \dot{\theta}$$

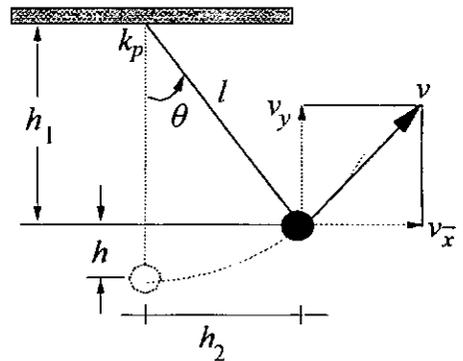


Figura II-5 - Pêndulo Elástico

Então:

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad V = m g l (1 - \cos(\theta)) + \frac{1}{2} K_p \theta^2$$

As derivadas parciais têm a seguinte forma:

$$\frac{\partial(T)}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T)}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta} \quad \frac{\partial(T)}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial(V)}{\partial \theta} = m g l \text{sen}(\theta) + K_p \theta$$

Montando a equação de Lagrange e lembrando que se trata de vibração livre, tem-se:

$$m l^2 \ddot{\theta} + m g l \text{sen}(\theta) + K_p \theta = 0 \quad (\text{II-30})$$

Fazendo $\text{sen}(\theta) \cong \theta$, obtém-se a frequência natural do pêndulo elástico (ω_p) resolvendo o problema de autovalor. Portanto:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{K_p / m + g l}{l^2}} \quad (\text{II-31})$$

Comparando-se as frequências naturais obtidas dessas duas maneiras, pode-se verificar que as calculadas com as equações isoladas são aproximadamente iguais àquelas obtidas pelas equações acopladas, apresentando a maior diferença quando se faz ω_p da equação isolada igual a ω_s , também de sua equação isolada. A solução dada pela equação extraída do determinante apresenta ω_1 cerca de 1.2 vezes ω_s , e ω_2 , 0.8 vezes ω_p .

Para efeito de calibração do sistema de absorção serão utilizadas aqui as expressões das frequências naturais obtidas de forma isolada, equações (II-29) e (II-31).

Da expressão de frequência natural do pêndulo, pode-se observar rapidamente, em função da variação do parâmetro m , que: quando a massa do pêndulo torna-se muito maior, numericamente, que K_p , a frequência natural do pêndulo elástico tenderá a ser igual a do pêndulo simples, pois o termo K_p/m da expressão (II-31) diminui, aproximando-a para $(g/l)^{1/2}$.

Isso pode ser visto no Gráfico II-1, que mostra também a variação de ω_p em função de K_p e em função de l .

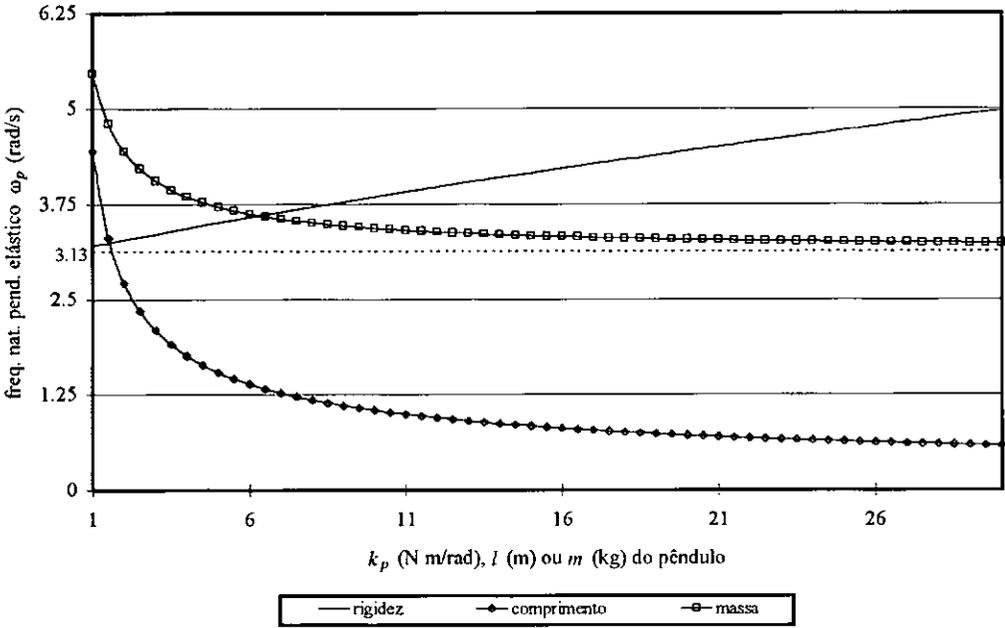


Gráfico II-1 - Variação da frequência natural do pêndulo elástico (ω_p) em função de K_p , l e M

Vê-se que a curva em função do acréscimo de m , tem como assíntota a reta horizontal $\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l}}$ e a curva em função do acréscimo de l tem como assíntota o eixo $\omega_p = 0$.

Percebe-se ainda que ω_p é inversamente proporcional a l e a m , e diretamente proporcional a K_p , com l interferindo significativamente em ω_p , depois m e por fim K_p . Interferência essa dada até certo valor de m e l , pois, a partir daí, a variação em K_p aumenta ω_p , enquanto que para valores crescentes de m , ω_p aproxima-se do valor constante, e para valores crescentes de l , ω_p tende a zero. Deve-se respeitar, é claro, os limites práticos de cada parâmetro.

II.1.2 Determinação do Coeficiente de Amortecimento do Pêndulo

O amortecimento de um sistema é geralmente considerado proporcional à massa e representado pela taxa de amortecimento ($C = 2 \xi M \omega_s$). Para um sistema massa-mola-amortecedor-haste (pêndulo), no entanto, C_p não obedece exatamente a essa relação.

Da equação linearizada de movimento do pêndulo amortecido

$$ml^2 \ddot{\theta} + C_p \dot{\theta} + K_p \theta + mgl\theta = 0 \quad (\text{II-32})$$

e admitindo-se uma solução do tipo $\theta = e^{st}$, obtém-se a equação característica de (II-32)

$$ml^2 s^2 + C_p s + (K_p + mgl) = 0 \quad (\text{II-33})$$

que tem duas raízes iguais a:

$$s_{1,2} = -\frac{C_p}{2ml^2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_p}{2ml^2}\right)^2 - \frac{K_p/m + gl}{l^2}} \quad (\text{II-34})$$

Da teoria de equações diferenciais, a solução geral de uma equação diferencial homogênea é dado por:

$$\theta = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (\text{II-35})$$

Considerando as soluções (II-34), tem-se:

$$\theta = e^{-\left(\frac{C_p}{2ml^2}\right)t} \left(Ae^{at} + Be^{-at} \right), \quad a = \sqrt{\left(\frac{C_p}{2ml^2}\right)^2 - \frac{K_p/m + gl}{l^2}} \quad (\text{II-36})$$

Essa solução pode representar um movimento oscilatório ou não, dependendo do valor numérico sob o radical de a ser positivo, zero ou negativo. Quando os expoentes (a e $-a$) em (II-36) são números reais não há oscilação possível. É o que se chama de *superamortecimento*. Quando os valores de a são números imaginários,

escrevendo em termos de senos e co-senos (forma de Euler), tem-se um movimento oscilatório. Este é o caso de *subamortecimento*. O caso limite entre o movimento oscilatório e o não-oscilatório é chamado de *amortecimento crítico* e é dado para o valor de C_p que reduz a a zero. Daí:

$$\left(\frac{C_{pc}}{2ml^2} \right)^2 - \frac{K_p / m + gl}{l^2} = 0$$

Lembrando de (II-31):

$$\frac{C_{pc}}{2ml^2} = \sqrt{\frac{K_p / m + gl}{l^2}} = \omega_p$$

obtém-se, finalmente, o amortecimento crítico do pêndulo:

$$C_{pc} = 2ml^2\omega_p \quad \text{(II-37)}$$

É conveniente exprimir o valor de qualquer amortecimento em função do amortecimento crítico, usando-se a taxa de amortecimento do pêndulo ξ_p :

$$C_p = 2\xi_p ml^2\omega_p \quad \text{(II-38)}$$

Agora, o movimento passa a ser oscilatório ou não dependendo de ξ_p ser menor ou maior que 1, respectivamente.

II.1.3 Determinação de Relações Ótimas de Absorção via Equações Linearizadas

Ao se introduzir um absorsor num sistema de 1 grau de liberdade pretende-se, obviamente, reduzir as amplitudes de deslocamento da massa principal.

Para isso, num sistema massa-mola, a referência [4] indica que a frequência do absorsor deve ser escolhida de forma a igualar-se com a frequência de perturbação (excitação). Diz ainda que a massa principal não vibra, pois o sistema de absorção oscila de forma que a força criada por sua mola é igual e oposta, a todo instante, a força de excitação. Faz ainda um estudo do sistema massa-mola-amortecedor e

encontra algumas relações ótimas de absorção. Baseado nesse estudo, pretende-se aqui encontrar relações semelhantes para o absorvedor pendular não linear.

Para a determinação desses parâmetros, segundo o procedimento apresentado a seguir, algumas considerações devem ser feitas:

- As equações de movimento devem ser linearizadas, pois o método conduz a expressões algébricas de onde serão obtidas as relações e os parâmetros ótimos de ajuste. Uma análise com as equações em sua forma completa será vista no capítulo IV.

- O amortecimento da estrutura não deverá ser considerado ($C = 0$). Mais a frente é dada uma explicação para isso.

- Para facilitar os cálculos, K_p também deve ser nulo ($K_p = 0$).

Sejam, então, as equações linearizadas de movimento do sistema de absorção pendular:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + Kx + ml\ddot{\theta} = F_o \text{ sen}(\omega t + \alpha) \\ ml^2\ddot{\theta} + C_p\dot{\theta} + mgl\theta + ml\ddot{x} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-39})$$

Admitindo as soluções para x e θ na forma complexa,

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} e^{j\omega t} \\ \theta(t) &= \bar{\theta} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (\text{II-40})$$

substituindo em (II-39) e eliminando o termo $e^{j\omega t}$, consegue-se transformar as equações, originalmente diferenciais, em equações algébricas, obtendo-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} [K - (m + M)\omega^2] \bar{x} - ml\omega^2 \bar{\theta} &= F_o \\ -ml\omega^2 \bar{x} + [ml(g - l\omega^2) + C_p\omega i] \bar{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-41})$$

Fazendo $Q_1 = K - (m + M)\omega^2$, $Q_2 = -ml\omega^2$, $Q_3 = ml(g - l\omega^2)$ e resolvendo para as amplitudes de deslocamento horizontal e angular, tem-se:

$$\bar{x} = \frac{F_o(Q_3 + C_p \omega i)}{Q_1 Q_3 - Q_2^2 + Q_1 C_p \omega i} \quad (\text{II-42})$$

$$\bar{\theta} = \frac{-F_o Q_2}{Q_1 Q_3 - Q_2^2 + Q_1 C_p \omega i} \quad (\text{II-43})$$

Vê-se que a amplitude de deslocamento da estrutura será nula se o numerador de (II-42) for igual a zero. Então, fazendo $C_p = 0$ (absorvedor de vibração não-amortecido):

$$F_o Q_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad m l (g - l \omega^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = g/l \quad \therefore \quad \omega = \omega_p$$

Portanto, se o pêndulo for calibrado com a excitação, a massa M apresentará deslocamento nulo. Já o pêndulo terá amplitude de deslocamento que pode ser encontrada através de (II-43) igual a, para $\omega = \omega_p$ e $C_p = 0$:

$$\bar{\theta} = \frac{F_o}{Q_2} = -\frac{F_o}{mg} \quad (\text{II-44})$$

É conveniente lembrar que o movimento do pêndulo imprime duas componentes de força atuantes em M , uma horizontal (F_{ph}) e outra vertical (F_{pv}), escritas em sua forma linearizada como:

$$\begin{aligned} F_{pv} &= m(\ddot{x}\theta + g) \\ F_{ph} &= m(\ddot{x}\theta + g)\theta \end{aligned} \quad (\text{II-45})$$

Para o caso em que $\omega = \omega_p$ e $C_p = 0$, tem-se:

$$x(t) = 0 \text{ e}$$

$$\theta(t) = \bar{\theta} e^{i\omega t} = -\frac{F_o e^{i\omega t}}{mg}$$

Então:

$$F_{pv} = mg$$

$$F_{ph} = mg\theta = mg\bar{\theta}e^{i\omega t} = -mg\frac{F_o e^{i\omega t}}{mg} = -F_o e^{i\omega t}$$

Isso significa que as forças que atuam em M , geradas pelo pêndulo, são iguais a força peso (vertical) do pêndulo e a força horizontal igual e oposta à força de excitação, de onde se vê que a resultante das forças na direção horizontal é nula. Portanto, não há movimento de M .

Voltando a (II-42), agora com $C_p \neq 0$ e considerando que essa equação está numa forma vetorial, após algumas operações de números complexos, a sua magnitude é igual a:

$$\left(\frac{\bar{x}}{F_o}\right)^2 = \frac{Q_3^2 + (C_p \omega)^2}{(Q_1 Q_3 - Q_2^2)^2 + (Q_1 C_p \omega)^2} \quad (\text{II-46})$$

ou escrevendo como razão de deslocamento:

$$\left(\frac{\bar{x}}{x_{est}}\right)^2 = \frac{K^2 [Q_3^2 + (C_p \omega)^2]}{(Q_1 Q_3 - Q_2^2)^2 + (Q_1 C_p \omega)^2} \quad (\text{II-47})$$

onde $x_{est} = F_o/K$.

Essa equação algébrica representa a amplitude de deslocamento da massa M , em função de uma variação na frequência de excitação. O Gráfico II-2 mostra algumas curvas para essa variação de ω e diferentes valores de C_p , com $\omega_p/\omega_s = 1.0$ e $\mu = m/M = 0.05$.

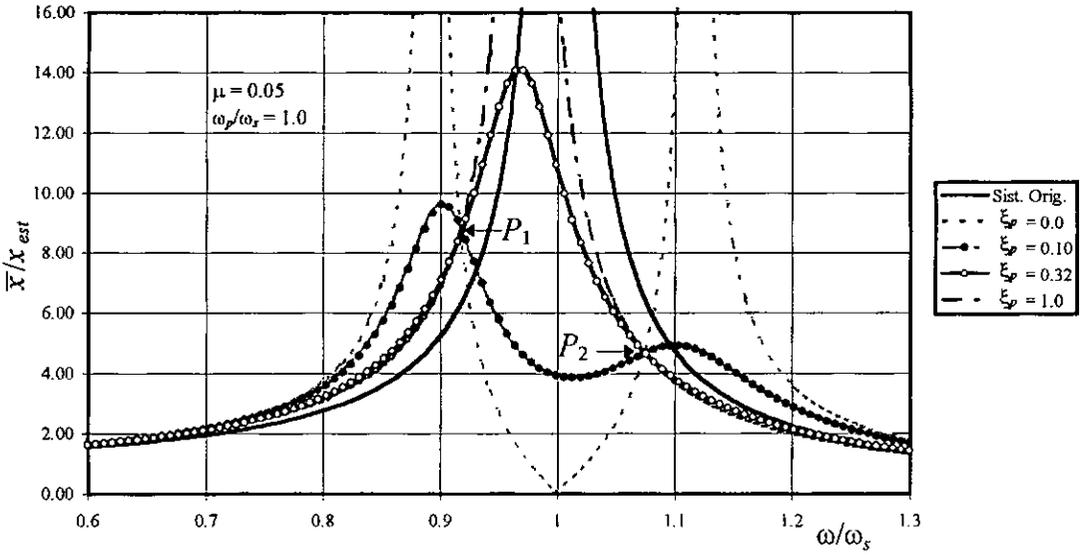


Gráfico II-2 - Amplitudes de deslocamento de M para diferentes valores de C_p

Pode-se observar que as quatro curvas, que representam diferentes valores de C_p para o sistema de absorção, interceptam os mesmos pontos P_1 e P_2 . Na verdade todas as curvas passam por esses dois pontos independentemente do amortecimento. O objetivo agora é encontrar os valores de ω que determinam esses dois pontos e, para uma dada calibração de ω_p , a curva em que P_1 é igual a P_2 . Com isso, obtém-se os principais parâmetros de ajuste ótimo.

Retornando à equação (II-47) para uma verificação da existência de valores de ω para os quais a amplitude de deslocamento horizontal é independente de C_p , nota-se que ela pode ser escrita na seguinte forma:

$$\left(\frac{\bar{x}}{x_{est}} \right)^2 = \frac{B_1 (C_p^2) + B_2}{B_3 (C_p^2) + B_4} \quad (\text{II-48})$$

Esta equação será independente de C_p se $B_1/B_3 = B_2/B_4$. Pode-se explicar aqui porque foi tomado $C = 0$. Quando $C \neq 0$, (II-48) tem a forma:

$$\left(\frac{\bar{x}}{x_{est}}\right)^2 = \frac{A_1(C_p^2) + B_1 C_p + C_1}{D_1(C_p^2) + E_1},$$

o que torna dependente de C_p , dificultando o andamento dos cálculos.

Sendo $B_1 = K^2\omega^2$, $B_2 = K^2Q_3^2$, $B_3 = Q_1^2\omega^2$, $B_4 = (Q_1 Q_3 - Q_2^2)^2$ e montando $B_1/B_3 = B_2/B_4$, obtém-se uma equação para ser resolvida em ω , cujos valores são os dois pontos independentes do amortecimento C_p .

$$Q_2^4 - 2Q_1 Q_3 Q_2^2 = 0. \quad (\text{II-49})$$

Substituindo os valores de Q_1 , Q_2 e Q_3 , tem-se:

$$C_8\omega^8 + C_6\omega^6 + C_4\omega^4 = 0 \quad (\text{II-50})$$

com

$$C_8 = -m^3 l^4 (m + 2M)$$

$$C_6 = 2m^3 l^3 [Kl + g(m + M)]$$

$$C_4 = -2Km^3 l^3 g$$

Além das soluções triviais, esta equação fornece os valores de ω nos pontos P_1 e P_2 :

$$\omega_{P_{1,2}} = \sqrt{\frac{Kl + g(m + M) \pm \sqrt{K^2 l^2 - 2KgMl + g^2(m + M)^2}}{l(m + 2M)}} \quad (\text{II-51})$$

que também pode ser escrita como:

$$\omega_{P_{1,2}} = \sqrt{\frac{\omega_s^2 + \omega_p^2(1 + \mu) \pm \sqrt{\omega_s^4 - 2\omega_s^2\omega_p^2 + \omega_p^4(1 + \mu)^2}}{(\mu + 2)}} \quad (\text{II-52})$$

Com os valores de ω em P_1 e P_2 , o próximo passo é ajustar a relação de frequência (ω_p/ω_s) para que esses pontos tenham a mesma ordenada. Então, substituindo ω_{p1} em (II-47) obtém-se uma ordenada para a amplitude de deslocamento. Substituindo ω_{p2} , tem-se a mesma ordenada. Igualando as duas, chega-se, finalmente, a equação que determina a calibração ótima do pêndulo com a estrutura.

$$\left[g(m+M)^2 - K M l \left[K^2 l^2 - 2 K g M l + g^2 (m+M)^2 \right]^{1/2} \right] = 0 \quad (\text{II-53})$$

que pode ser facilmente resolvida para l tomando-se o primeiro termo do produto, obtendo-se a calibração de ω_p ou o comprimento l desejado igual a:

$$l = \frac{g(m+M)^2}{M K} \quad (\text{II-54})$$

ou na forma adimensional:

$$\frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{1}{1+\mu} \quad (\text{II-55})$$

As outras duas soluções obtidas para l , utilizando-se o outro termo do produto em (II-53), são na forma complexa e não têm significado físico. Portanto, não devem ser consideradas.

Com a determinação de l (ou ω_p) fica garantido que os pontos P_1 e P_2 possuem a mesma ordenada, no entanto não se sabe o valor desta. Para se determinar esse valor, substitui-se uma das raízes de (II-50) em (II-48), com o l dado em (II-54). O resultado final é igual a:

$$\frac{\bar{x}}{x_{est}} = \sqrt{\frac{m+2M}{m}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \quad (\text{II-56})$$

O Gráfico II-3 a seguir mostra algumas curvas para diferentes valores de C_p e uma calibração ótima, dada por (II-55). Percebe-se que os pontos P_1 e P_2 têm a mesma ordenada. É o valor de l quem determina a posição relativa entre esses dois pontos. Já a curva de menor amplitude máxima é definida pelo valor de C_p ótimo ($\xi_p = 0.25$). Esse valor é calculado da seguinte maneira: deriva-se (II-47) em relação a ω , após a

substituição de l ótimo, iguala-se a zero e substitui-se o valor de ω dado em (II-51) para o ponto P_1 . Repete-se o processo para o ponto P_2 e, finalmente, calcula-se uma média entre os dois valores de C_p obtidos, resultando no amortecimento ótimo.

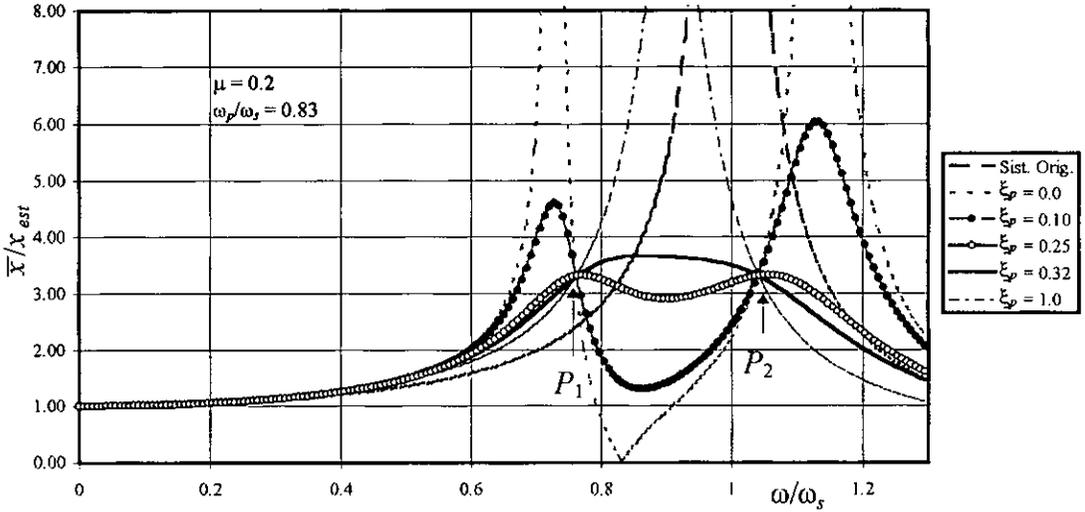


Gráfico II-3 - Amplitudes de deslocamento de M para ajuste ótimo

II.2 Modelagem de um Sistema Análogo Alternativo do APNL

Em se tratando de limites práticos dos parâmetros do pêndulo, deve ser voltada uma maior atenção ao comprimento l da haste, pois, muitas vezes, em função das relações de frequência de calibração, para estruturas com baixas frequências naturais, a haste apresenta comprimentos relativamente grandes, o que de certo modo impede a operação efetiva do absorvedor passivo pendular.

Pensando dessa forma, sugere-se aqui um modelo alternativo para o absorvedor pendular, onde o comprimento da haste do absorvedor (sem considerar as dimensões de sua massa m) deixa de ser um item de limitação prática e dá lugar ao deslocamento horizontal da massa, a qual define agora a dimensão necessária para a instalação e operação do APNLV - Absorvedor Pendular Não-Linear Virtual.

Trata-se de um cilindro (ou esfera) de raio r e massa m , que desliza numa superfície circular de raio R , massa M , amortecimento C e rigidez K , conforme se vê na Figura II-6.

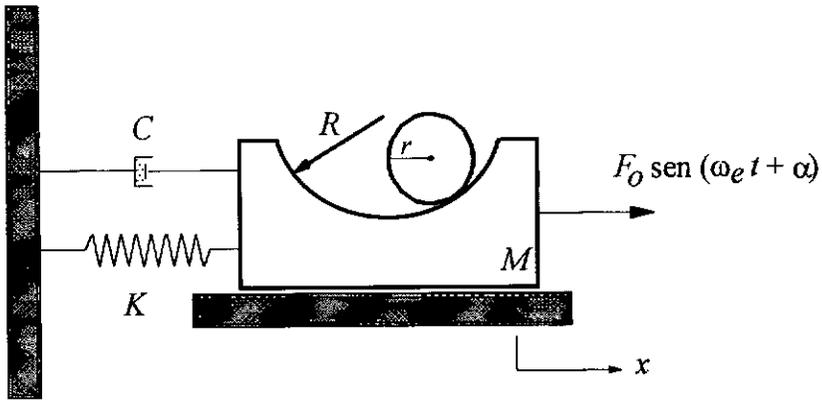


Figura II-6 - Esquema Sistema de Absorção Alternativo PV Pêndulo Virtual - 02 GL

A simulação do pêndulo absorvor é dada pela substituição do comprimento da haste l por um comprimento virtual $R-r$, mantendo-se a mesma massa m , amortecimento C_p e rigidez K_p . Este modelo será chamado aqui de Pêndulo Virtual (PV).

As equações de movimento serão deduzidas utilizando-se novamente o Método da Energia.

As expressões de energia do sistema são semelhantes àsquelas do sistema anterior, com uma nova parcela na energia cinética devida à rotação sofrida pela massa m . Da Figura II-7 vê-se que:

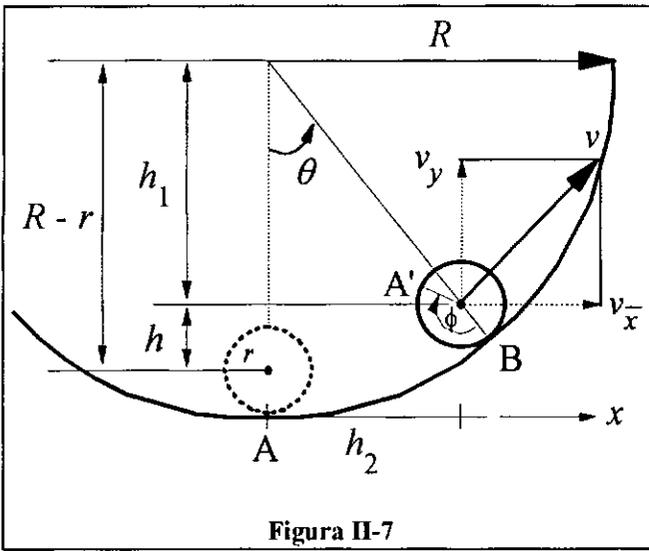


Figura II-7

$$h_1 = (R - r) \cos(\theta)$$

$$h = (R - r) - h_1$$

$$h = (R - r) (1 - \cos(\theta))$$

$$h_2 = (R - r) \sin(\theta)$$

$$\bar{x} = x + h_2$$

$$y = h_1$$

x representa o deslocamento da massa M ;

\bar{x} representa o deslocamento absoluto do eixo do cilindro ou centro da esfera;

h_2 é o deslocamento do centro do cilindro em relação à massa M ,

h está associada a diferença de nível adquirida pelo cilindro, portanto à energia potencial;

ϕ representa a rotação do cilindro.

Tem-se, então, as expressões de energia:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_o (\dot{\phi} - \dot{\theta})^2 \quad (\text{II-57})$$

$$V = \frac{1}{2} K x^2 + m g h + \frac{1}{2} K_p \theta^2 \quad (\text{II-58})$$

$$E_d = \frac{1}{2} C \dot{x}^2 + \frac{1}{2} C_p \dot{\theta}^2 \quad (\text{II-59})$$

onde

J_o é o momento de inércia de massa do cilindro e está relacionado com a energia de rotação de m ;

ϕ é o ângulo de rotação do cilindro e pode ser escrito como $\phi = R \theta / r$, pois o comprimento do arco AB descrito pela translação é exatamente igual ao comprimento do arco A'B descrito por m , ao girar sobre a superfície;

v é a velocidade absoluta do eixo do cilindro.

Se $\bar{x} = x + h_2$, $y = h_1$ e $v^2 = \left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, então:

$$v^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}(R-r)\dot{\theta}\cos(\theta) + (R-r)^2\dot{\theta}^2.$$

As derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + \frac{1}{2}m(2\dot{x} + 2(R-r)\dot{\theta}\cos(\theta)),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + m(R-r)(\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2\sin(\theta)),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = Kx, \quad \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}} = C\dot{x}.$$

Montando a equação de Lagrange, tem-se a primeira equação de movimento:

$$(M+m)\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + m(R-r)\left(\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2\sin(\theta)\right) = F_o \sin(\omega_e t + \alpha) \quad (\text{II-60})$$

Para a coordenada generalizada $q_2 = \theta$, tem-se as seguintes expressões das derivadas parciais:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m}{2}\left[2\dot{x}(R-r)\cos(\theta) + 2(R-r)^2\dot{\theta}\right] + \frac{1}{2}J_o\left[\left(\frac{R\dot{\theta}}{r} - \dot{\theta}\right)^2\right]'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = m\left[\dot{x}(R-r)\cos(\theta) + (R-r)^2\dot{\theta}\right] + J_o\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\left[\ddot{x}(R-r)\cos(\theta) - \dot{x}(R-r)\dot{\theta}\sin(\theta) + (R-r)^2\ddot{\theta}\right] + J_o\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m\dot{x}(R-r)\dot{\theta}\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = K_p\theta + mg(R-r)\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{\theta}} = C_p\dot{\theta}.$$

Finalmente, agrupando-se as derivadas na equação de Lagrange, obtém-se a segunda equação de movimento do sistema:

$$\left[m(R-r)^2 + J_o \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 \right] \ddot{\theta} + C_p \dot{\theta} + K_p \theta + m(R-r) [\ddot{x} \cos(\theta) + g \sin(\theta)] = 0 \quad (\text{II-61})$$

As equações (II-60) e (II-61) formam o sistema de equações diferenciais de segunda ordem, que representa o modelo alternativo para absorção de vibrações dado pelo Pêndulo Virtual. Mais uma vez, ressalta-se que, por serem expressões não-lineares, a solução fechada para este sistema não é simples de se determinar, recorrendo-se, assim, a um método numérico.

CAPÍTULO III

Estudo Paramétrico e Dimensionamento do Pêndulo

III.1 Dimensionamento quanto às Relações de Frequência

Uma vez montadas as equações de movimento do sistema de 02 graus de liberdade, bem como suas equações de estado, parte-se então para a resolução dessas equações, a fim de se obter os deslocamentos, velocidades e/ou acelerações da estrutura e do pêndulo absorvor.

A resolução numérica do sistema de equações diferenciais de primeira ordem é feita pelo método de Runge-Kutta. Daí se ter desenvolvido um estudo paramétrico do comportamento do absorvor através de uma análise numérico-computacional.

Pretende-se aqui investigar o seu desempenho na redução das amplitudes de vibração da estrutura, observando as suas relações de frequência ou de ajuste com a excitação e com a estrutura, além das amplitudes θ de suas oscilações angulares. Os resultados são, então, obtidos para responder a seguinte questão: dado um sistema dinâmico (01 GL), com frequência natural ω_s e frequência de excitação ω_e , quais características deve ter um pêndulo absorvor (i.e. qual o conjunto de valores dos parâmetros l , C_p , K_p , m e ω_p), para que, instalado no sistema original, seja capaz de reduzir suas amplitudes de vibração? Além do comprimento l , que influencia a frequência ω_p , outros parâmetros, tais como, o amortecimento C_p e a rigidez elástica K_p do pêndulo, também têm influência no controle de vibrações, na calibração (K_p) e no comportamento do absorvor pendular.

As influências de K_p e C_p serão estudadas mais adiante e, inicialmente, a verificação de desempenho é feita para o absorvor constituído do pêndulo simples, $K_p = 0$, $C_p = 0$ e m qualquer, tomando sua frequência natural como parâmetro básico de variação no estudo paramétrico,

$$\omega_p = \sqrt{g/l},$$

onde g é a aceleração da gravidade e l é o comprimento do pêndulo.

Os outros parâmetros de variação tomados para esta investigação são: a frequência e a amplitude da força de excitação, esta última dada pela relação adimensional:

$$\bar{F} = F_o / M g,$$

onde F_o é a amplitude da força de excitação e M é a massa da estrutura.

A excitação dinâmica se refere a um único carregamento harmônico senoidal com diferentes frequências de excitação:

$$F_e = F_o \text{ sen}(\omega_e t + \alpha),$$

com F_e = Força de excitação ou carregamento harmônico; ω_e = frequência de excitação; t = variável tempo e α = ângulo de fase.

Dessa forma, para um ω_s conhecido, pode-se variar ω_e e ω_p de modo que todos os casos possíveis em termos de relações de frequências (ω_e/ω_s , ω_p/ω_e , ω_p/ω_s), maiores, menores ou iguais a 1.0 possam ocorrer, verificando-se, posteriormente, através das respostas no tempo, quais dessas relações promovem o controle de vibrações do sistema original de 01 grau de liberdade (estrutura) – algumas, todas ou nenhuma delas.

Daí se chamar a presente análise paramétrica de dimensionamento quanto as relações de frequência. Aliás, uma vez determinada a relação ω_p/ω_e ou ω_p/ω_s pode-se facilmente obter o principal parâmetro requerido do pêndulo, que é seu comprimento l .

A obtenção dos resultados numéricos depende, é claro, de algumas propriedades estáticas e dinâmicas da estrutura e do pêndulo, ou melhor, de propriedades físicas tais como massa, amortecimento e rigidez elástica. Para isso, são definidos alguns parâmetros adimensionais, onde elas estão implícitas. Sejam, então:

M , C , K e ω_s a massa, o coeficiente de amortecimento, a rigidez elástica da estrutura e a sua frequência natural, respectivamente;

m , C_p , K_p , l e ω_p a massa do pêndulo, o seu coeficiente de amortecimento, a rigidez do pêndulo elástico, o comprimento da haste e a frequência natural do pêndulo simples, respectivamente;

g , a aceleração da gravidade e F_o , a amplitude da força de excitação;

$$\omega_s^2 = \frac{K}{M}, \quad \omega_p^2 = \frac{g}{l}$$

e, finalmente, as relações adimensionais

$$c_s = \frac{C}{M\omega_s}, \quad c_p = \frac{C_p}{ml^2\omega_s}, \quad \mu = \frac{m}{M} \quad \text{e} \quad \bar{F} = \frac{F_0}{Mg}$$

Os resultados foram obtidos para os seguintes parâmetros:

$c_s = 0.014$, que representa o amortecimento da estrutura;

$c_p = 0.0$, que está associado ao amortecimento do absorvor e

$\mu = 0.20$, a relação de massa.

\bar{F} refere-se à amplitude da força de excitação normalizada em relação ao peso da massa principal e tem seu valor indicado nas tabelas ou nos gráficos que resumem cada conjunto de resultados.

É importante lembrar que o pêndulo analisado é o simples, apresentando, portanto, $K_p = 0.0$, e que quaisquer outros valores dos parâmetros diferentes destes apresentados acima serão apropriadamente indicados.

O primeiro caso a ser analisado refere-se uma situação em que $\omega_e < \omega_s$ e tem seus principais resultados resumidos no Gráfico III-1 dado a seguir:

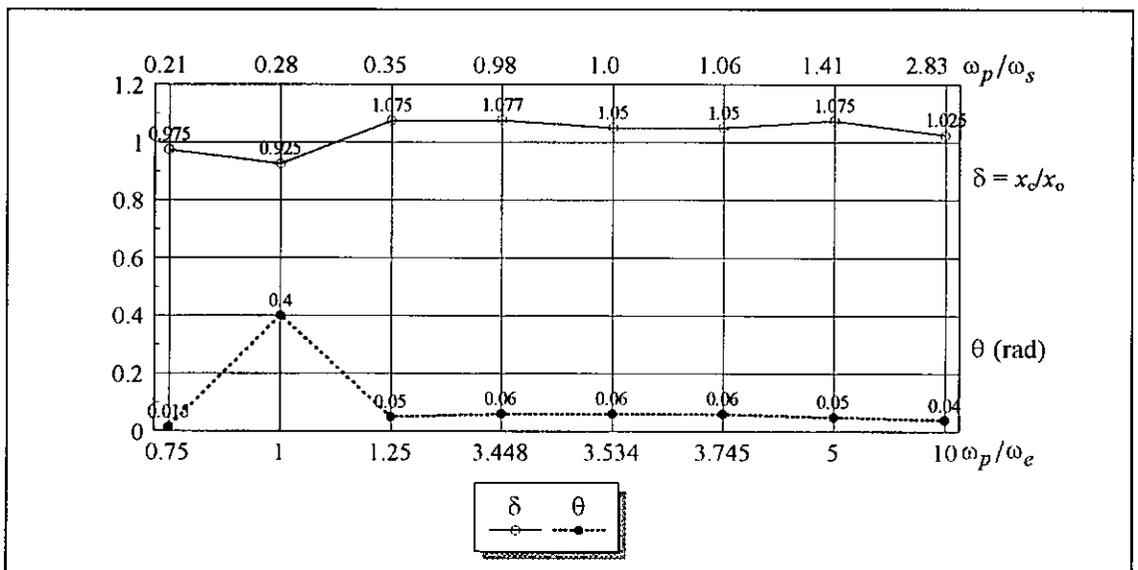


Gráfico III-1 - Coeficientes de Controle para $\omega_e < \omega_s$ e diferentes ajustes de ω_p
 $\omega_e/\omega_s = 0.283$ e $\bar{F} = -0.092$

O Gráfico III-1 ($\omega_e/\omega_s < 1.0$) mostra, para um valor fixo de ω_e , as variações dos coeficientes de controle dinâmico (δ) e das amplitudes de oscilação angular θ , com as razões ω_p/ω_s e ω_p/ω_e . O coeficiente de controle dinâmico é um índice de calibração do pêndulo absorvor dado pela razão entre as amplitudes das respostas da estrutura controlada (x_c) e da estrutura original (x_o), ambas extraídas do estado de regime. Desta forma, quando $\delta (= x_c/x_o) < 1.0$ significa que há uma redução da resposta.

É interessante observar com o auxílio do Gráfico III-1 que o sistema passivo de absorção com o pêndulo pode reduzir ou amplificar a resposta da estrutura, em função das relações de frequências ω_p/ω_e e ω_p/ω_s .

Quando a frequência de excitação ω_e é muito menor que ω_s , quase não há alteração nas amplitudes de deslocamento da estrutura, ou seja, o pêndulo não é eficiente. As oscilações θ do pêndulo são bastante pequenas, exceto para a razão de calibração $\omega_p/\omega_e = 1.0$, podendo o seu comportamento ser considerado linear para as demais calibrações. Quando o absorvor for calibrado com a excitação ($\omega_p = \omega_e$), embora as amplitudes de vibração da estrutura não sofram reduções de ordem prática (ver Gráfico III-2), a amplitude angular de oscilação do pêndulo sofre divergência ao longo do tempo (Gráfico III-3).

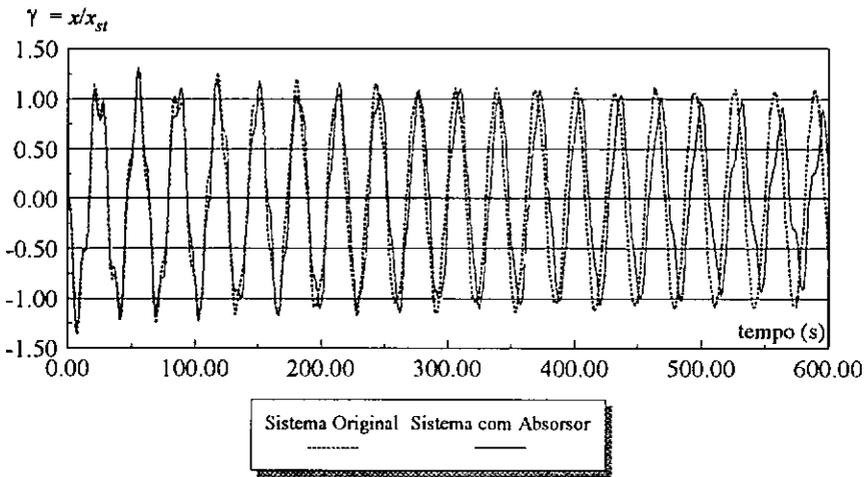


Gráfico III-2 - Resposta no tempo das razões de deslocamentos da Estrutura
 $\omega_e/\omega_s = 0.283$, $\omega_p/\omega_e = 1.0$, $\omega_p/\omega_s = 0.283$ e $\bar{F} = -0.092$

x_{st} é o deslocamento estático de M .

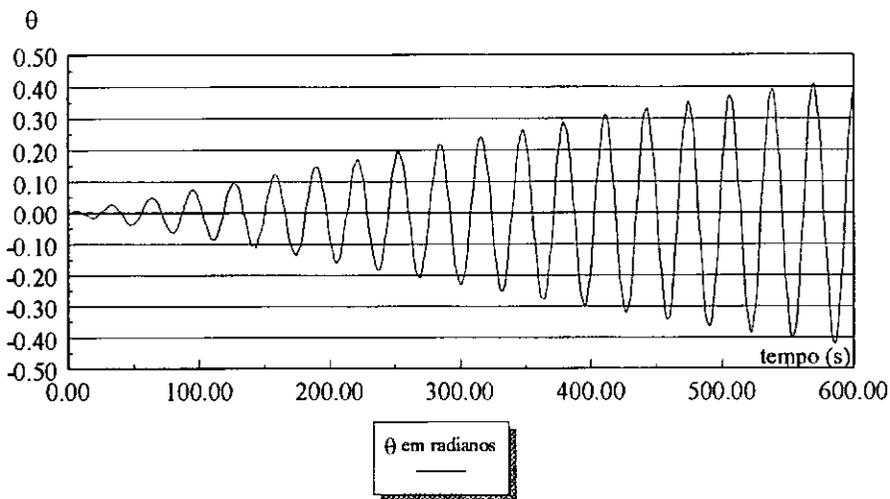
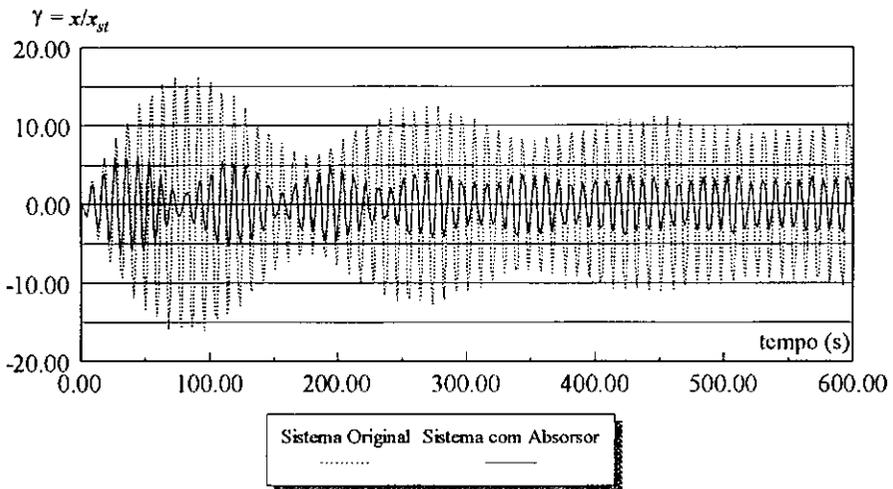
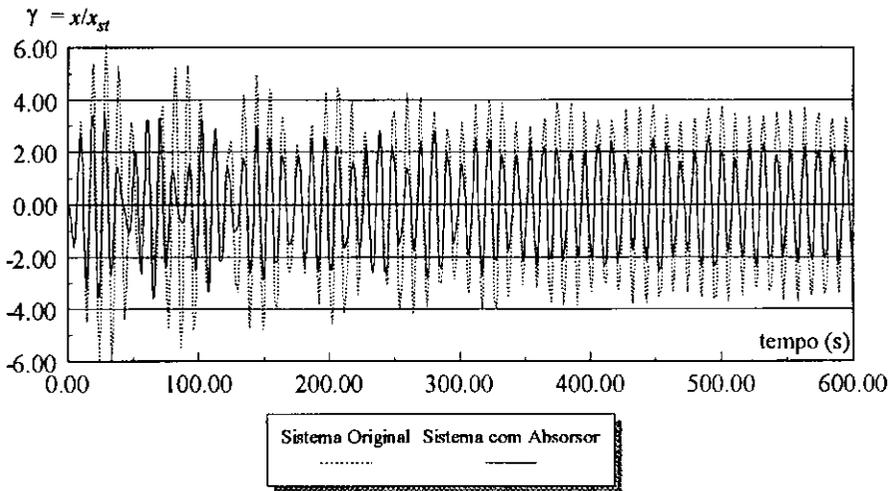


Gráfico III-3 - Resposta no tempo do deslocamento angular do Absorvedor
 $\omega_e/\omega_s = 0.283$, $\omega_p/\omega_e = 1.0$, $\omega_p/\omega_s = 0.283$ e $\bar{F} = -0.092$

Nos casos de oscilações pequenas, o absorvedor praticamente movimenta-se com a estrutura, e esta, quase que se comporta como se à ela fosse adicionada apenas uma massa m . Deve-se ressaltar que as amplitudes angulares são pequenas não só devidas às relações de frequência, mas também, às amplitudes da força de excitação. Tanto um acréscimo em \bar{F} quanto uma aproximação da frequência de excitação à frequência natural da estrutura acarretam, obviamente, um aumento nos deslocamentos da estrutura e também em θ . Essa é uma preocupação importante, pois o movimento do pêndulo deve obedecer não só a limites práticos impostos pelas dimensões geométricas do local de sua instalação, mas também a limites impostos por critérios de eficiência na redução de vibrações; isto será visto mais adiante.

À medida que a relação ω_e/ω_s se aproxima de 1.0, há um ganho na eficiência do sistema de absorção, bem como um aumento nas oscilações do pêndulo, sendo que este último efeito deve-se mais a aproximação por valores inferiores de ω_p/ω_s para o valor 1.0, já que ao se manter ω_p/ω_e fixa e variar ω_e/ω_s , automaticamente, altera-se ω_p/ω_s .

O Gráfico III-4 e o Gráfico III-5 a seguir ilustram essa melhor performance do absorvedor para relações de frequências mais altas $\omega_e/\omega_s = 0.849$ e $\omega_e/\omega_s = 0.95$, próximas da unidade.



O deslocamento angular do pêndulo para estes dois últimos casos é visto no Gráfico III-6 e no Gráfico III-7 que se seguem.

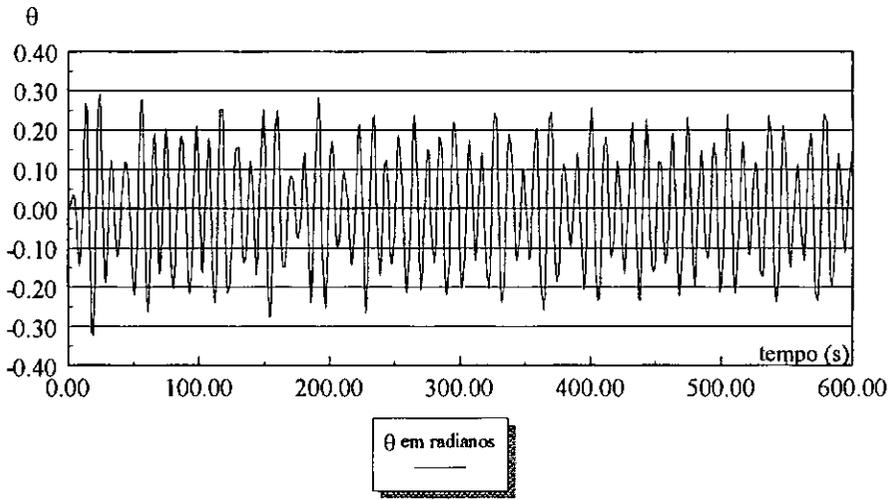


Gráfico III-6 - Resposta no tempo do deslocamento angular do Absoridor
 $\omega_e/\omega_s = 0.849$, $\omega_p/\omega_e = 0.75$, $\omega_p/\omega_s = 0.636$ e $\bar{F} = -0.092$

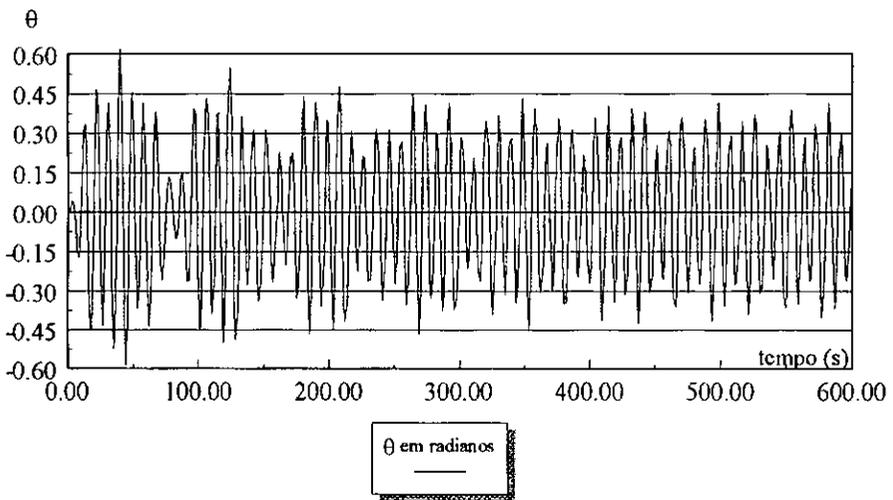


Gráfico III-7 - Resposta no tempo do deslocamento angular do Absoridor
 $\omega_e/\omega_s = 0.95$, $\omega_p/\omega_e = 0.75$, $\omega_p/\omega_s = 0.713$ e $\bar{F} = -0.092$

O Gráfico III-1 e os resultados vistos nos demais gráficos fornecem, portanto, o seguinte conjunto de relações de frequência e o correspondente efeito do pêndulo absorvor na estrutura:

$$\omega_e < \omega_s \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \\ \omega_p = \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \\ \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \\ \omega_p = \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \\ \omega_p < \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

A segunda condição investigada é a da ressonância, $\omega_e = \omega_s$, onde a estrutura amortecida mas não controlada atinge seus maiores deslocamentos, para um dado \bar{F} . As variações de δ e θ com as relações de calibração ω_p/ω_e e ω_p/ω_s do sistema de controle passivo, para essa condição de ressonância estão apresentadas no Gráfico III-8.

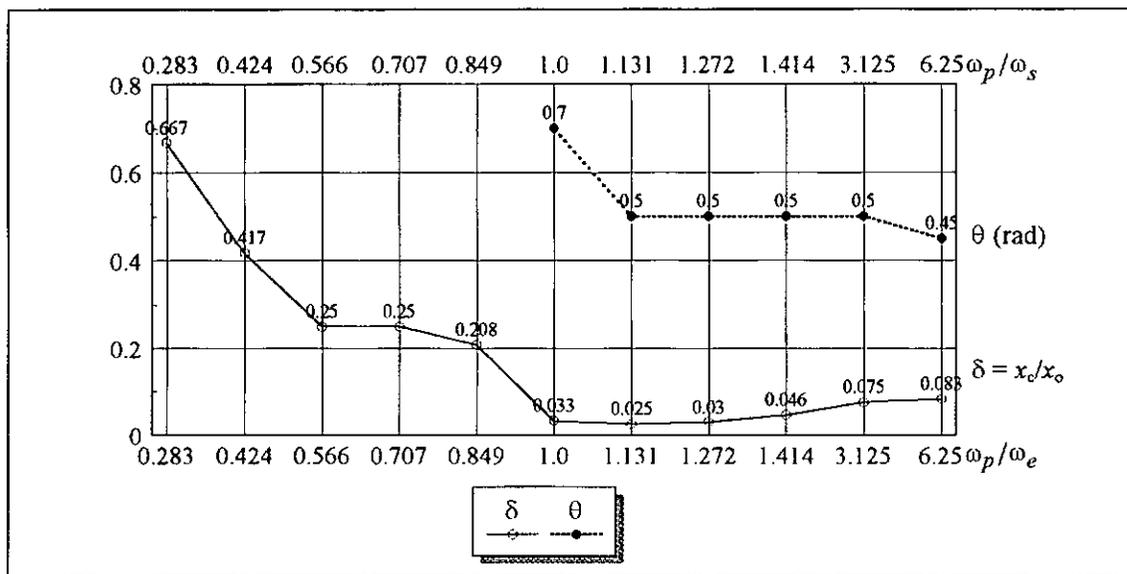


Gráfico III-8 - Coeficientes de Controle para $\omega_e = \omega_s$ e diferentes ajustes de ω_p
 $\omega_e/\omega_s = 1.0$ e $\bar{F} = -0.092$

Observando-se os resultados desse grupo, percebe-se uma grande redução das amplitudes de oscilação da estrutura para todos os casos de relações de frequência

apresentados. Portanto, o conjunto de relações de frequências e o efeito proporcionado em cada caso pode ser resumido da seguinte maneira:

$$\omega_e = \omega_s \begin{cases} \omega_p < \omega_e \left\{ \omega_p < \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \right. \\ \omega_p = \omega_e \left\{ \omega_p = \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \right. \\ \omega_p > \omega_e \left\{ \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \right. \end{cases}$$

Os níveis de redução alcançados aqui variam de 92% a 97.5% quando $\omega_p = \omega_e$ (Gráfico III-9) ou $\omega_p/\omega_e > 1.0$, e de 30% a 80% quando $\omega_p/\omega_e < 1.0$ (Gráfico III-10).

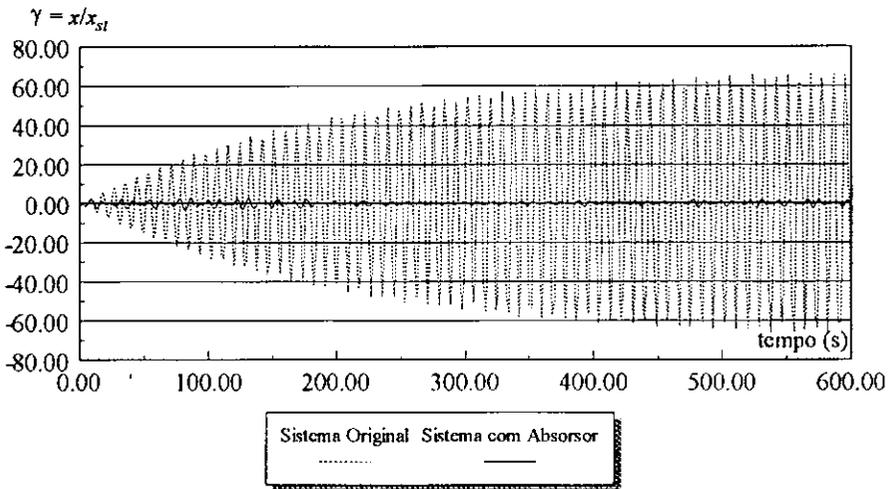


Gráfico III-9 - Resposta no tempo das razões de deslocamentos da Estrutura
 $\omega_e/\omega_s = 1.0$, $\omega_p/\omega_e = 1.0$, $\omega_p/\omega_s = 1.0$ e $\bar{F} = -0.092$

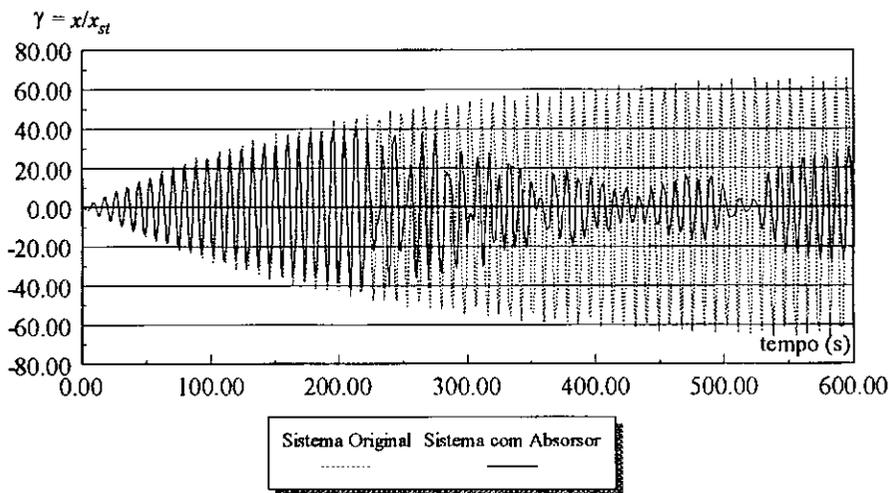


Gráfico III-10 - Resposta no tempo das razões de deslocamentos da Estrutura
 $\omega_e/\omega_s = 1.0$, $\omega_p/\omega_e = 0.424$, $\omega_p/\omega_s = 0.424$ e $\bar{F} = -0.092$

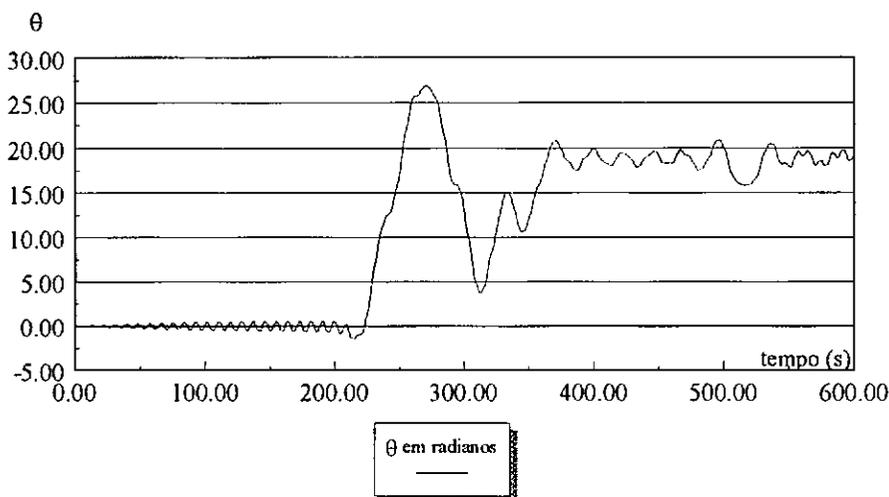


Gráfico III-11 - Resposta no tempo do deslocamento angular do Absorvor
 $\omega_e/\omega_s = 1.0$, $\omega_p/\omega_e = 0.424$, $\omega_p/\omega_s = 0.424$ e $\bar{F} = -0.092$

Deve-se ter uma preocupação maior na calibração quando $\omega_p/\omega_e < 1.0$, pois θ pode divergir, conforme se vê no Gráfico III-11. Este é um caso excepcional, onde, mesmo com ocorrência dessa instabilidade, obtém-se redução das amplitudes de deslocamentos. No entanto, é inviável a nível prático projetar-se um sistema de absorção onde se tem um comportamento inadequado de um de seus componentes. Na verdade, a divergência de θ mostra que, para uma situação de relações de frequência dadas no Gráfico III-8 ($\omega_e = \omega_s$), ajustando-se o pêndulo abaixo da excitação ($\omega_p/\omega_e < 1.0$ ou $\omega_p/\omega_s < 1.0$), a amplitude da força de excitação deve ser menor que a dos demais casos desse grupo ($\omega_p/\omega_e = 1.0$ e $\omega_p/\omega_e > 1.0$), a fim de que θ não apresente divergência, ou seja, o sistema de absorção de oscilações tem menor desempenho para

amplitudes crescentes da força de excitação, quando $\omega_e/\omega_s = 1.0$ e $\omega_p/\omega_e < 1.0$. Nos casos onde θ diverge, tomou-se uma amplitude média para a resposta da estrutura, devido ao longo tempo para se alcançar o estado de regime.

A Tabela III-1 a seguir mostra essa sensibilidade do sistema em função de \bar{F} :

| Grupo | ω_e/ω_s | ω_p/ω_e | ω_p/ω_s | \bar{F} | θ | δ | |
|-------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------|----------|------------|-------|
| III-1 | 1 | 1.0 | 0.849 | 0.849 | -0.087 | ± 0.60 | 0.050 |
| | 2 | " | " | " | -0.090 | ± 0.70 | 0.128 |
| | 3 | " | " | " | -0.091 | diverge | 0.339 |
| | 4 | " | " | " | -0.092 | diverge | 0.336 |

Tabela III-1 - Divergência de θ em função de \bar{F} para $\omega_e = \omega_s$ e $\omega_p/\omega_e < 1.0$

Nota-se uma pequena diferença em relação à situação em que $\omega_p = \omega_e$. Aliás, para este caso, a divergência de θ é dada para um $\bar{F} = 0.11$, conforme pode ser visto na Tabela III-2 abaixo.

| Grupo | ω_e/ω_s | ω_p/ω_e | ω_p/ω_s | \bar{F} | θ | δ | |
|-------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------|----------|------------|-------|
| III-2 | 1 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | -0.107 | ± 0.75 | 0.058 |
| | 2 | " | " | " | -0.109 | ± 0.80 | 0.063 |
| | 3 | " | " | " | -0.110 | diverge | 0.251 |
| | 4 | " | " | " | -0.112 | diverge | 0.252 |

Tabela III-2 - Divergência de θ em função de \bar{F} para $\omega_e = \omega_s$ e $\omega_p/\omega_e = 1.0$

Já a Tabela III-3 mostra que o movimento pendular θ é bastante estável, com respeito ao crescimento da magnitude \bar{F} quando $\omega_p > \omega_e$.

| Grupo | ω_e/ω_s | ω_p/ω_e | ω_p/ω_s | \bar{F} | θ | δ | |
|-------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------|----------|------------|-------|
| III-3 | 1 | 1.0 | 1.414 | 1.414 | -0.204 | ± 1.15 | 0.053 |
| | 2 | " | " | " | -0.255 | ± 1.40 | 0.054 |
| | 3 | " | " | " | -0.306 | ± 1.70 | 0.059 |
| | 4 | " | " | " | -0.408 | ± 2.00 | 0.066 |

Tabela III-3 - Variação de θ em função de \bar{F} para $\omega_e = \omega_s$ e $\omega_p/\omega_e > 1.0$

Ainda analisando as influências das relações de calibração em frequências de ressonância entre excitação e estrutura, notou-se um desempenho cerca de dez vezes melhor nos casos onde θ não divergiu, apresentando oscilações entre 0.45 e 0.70 radianos.

Até aqui, pode-se depreender que a redução ótima fica vinculada a frequência de excitação a qual está submetida a estrutura. No primeiro caso ($\omega_e < \omega_s$), o melhor resultado é obtido quando $\omega_p = \omega_e$, e no segundo ($\omega_e = \omega_s$), tem-se ω_p em torno de ω_e (ω_p igual ou um pouco maior que ω_e). A redução ótima em cada caso é também dependente da faixa de trabalho do pêndulo em termos das amplitudes máximas de θ .

Agora será analisada a terceira situação de relações de frequência entre excitação e estrutura, que obedece a condição ($\omega_e/\omega_s > 1.0$).

Esse é um caso semelhante ao primeiro tanto com relação a ordem de grandeza dos deslocamentos induzidos à estrutura, pela excitação externa, quanto ao comportamento do absorvor, com pequenos deslocamentos quando a sua calibração está muito aquém ($\omega_p \ll \omega_e$) ou muito além ($\omega_p \gg \omega_e$) da excitação. No entanto, são outras as relações de frequências de calibração que levam a uma redução de deslocamentos na estrutura, conforme se pode extrair da Tabela III-4 dada a seguir.

| variação de ω_p com $\omega_e > \omega_s$ | | | | | | | |
|--|---------------------|---------------------|---------------------|-----------|----------|------------|-------|
| Grupo | ω_e/ω_s | ω_p/ω_e | ω_p/ω_s | \bar{F} | θ | δ | |
| III-4 | 1 | 4.243 | 0.067 | 0.283 | -0.092 | < 0.0025 | 1.0 |
| | 2 | " | 0.200 | 0.849 | " | < 0.040 | 1.429 |
| | 3 | " | 0.236 | 1.0 | " | < 0.050 | 1.429 |
| | 4 | " | 0.333 | 1.414 | " | < 0.070 | 1.429 |
| | 5 | " | 1.000 | 4.243 | " | ± 1.60 | 2.143 |
| | 6 | " | 1.033 | 4.385 | " | ± 2.00 | 2.143 |
| | 7 | " | 1.044 | 4.427 | " | ± 0.60 | 0.643 |
| | 8 | " | 1.333 | 5.658 | " | ± 0.20 | 1.0 |

Tabela III-4 - Coeficientes de Controle para $\omega_e > \omega_s$ e diferentes ajustes de ω_p

Inicialmente, partiu-se de uma calibração do absorvor com uma frequência muito abaixo da excitação e da estrutura para um dado \bar{F} . Nessa faixa de calibração, θ mostra uma imobilidade da massa m e o coeficiente de controle δ igual a 1.0 demonstra não ter ocorrido qualquer mudança significativa na resposta. O coeficiente

de controle é dado pela razão entre as amplitudes das respostas do sistema com absorvedor e do sistema original, em regime.

Aumentando-se um pouco o ajuste de ω_p , percebe-se também um acréscimo nas amplitudes θ , embora muito pequenas ainda, bem como alterações na resposta da massa M , caracterizadas por ampliações (grupo III-4.2 da Tabela III-4).

Continuando-se a aumentar ω_p , tem-se agora, para $\omega_e > \omega_s$, a igualdade entre ω_p e ω_s (grupo III-4.3 da Tabela III-4). Porém, não se consegue nenhum resultado satisfatório, já que a resposta é amplificada, conforme pode ser visto através do coeficiente de controle $\delta (= x_c/x_o)$. A amplitude de θ continua pequena, mas superior a dos casos em que $\omega_p/\omega_s < 1.0$. Isso porque a excitação não está próxima de nenhuma das frequências naturais dos componentes do sistema.

Com mais acréscimos em ω_p ou aproximando-se ω_p de ω_e , nota-se na Tabela III-4 que as amplitudes angulares também crescem, mas permanece a amplificação dos deslocamentos de M , mesmo quando o pêndulo é ajustado com a excitação (grupo III-4.5). Isto difere do primeiro caso estudado, quando $\omega_e < \omega_s$, onde os resultados foram satisfatórios para $\omega_p = \omega_e$. O deslocamento angular θ passa a ter um comportamento não-linear, explicado pela atuação da excitação sobre o pêndulo.

Por fim, tem-se o ajuste de ω_p acima de ω_e , representado pelos três últimos grupos da Tabela III-4. Observa-se que para esse caso há amplificação e redução das amplitudes e que θ volta a diminuir quando se afasta ω_p de ω_e .

Diante disso, dos cinco casos de relações de frequências fornecidos, apenas um apresentou resultados favoráveis quanto à absorção de vibrações, com cerca de 35% de eficiência, tal como pode ser visto no Gráfico III-12.

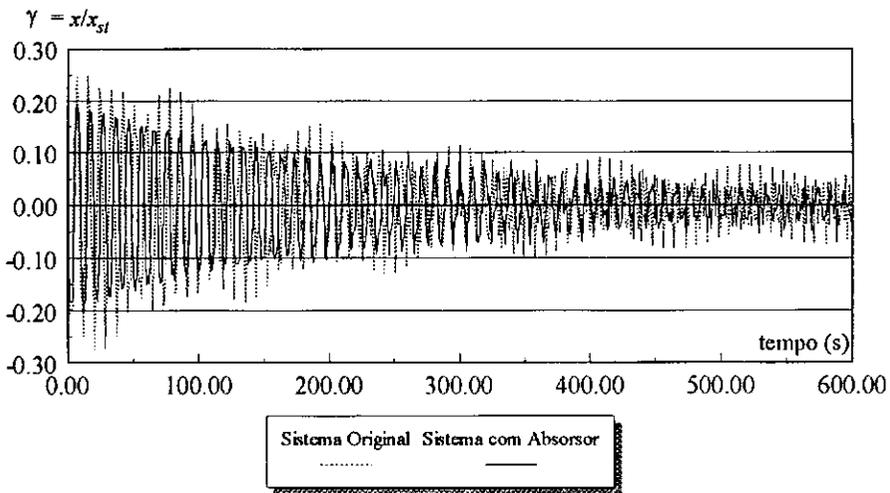


Gráfico III-12 - Resposta no tempo das razões de deslocamentos da Estrutura
 $\omega_e/\omega_s = 4.243$, $\omega_p/\omega_e = 1.044$, $\omega_p/\omega_s = 4.427$ e $\bar{F} = -0.092$

Portanto, considerando-se todos os dados da Tabela III-4 e apenas o conjunto de relações de frequências entre ω_s , ω_e e ω_p , sem levar em conta θ , as condições para absorção de vibrações da massa M quando $\omega_e > \omega_s$ são, até aqui, resumidas da seguinte maneira:

$$\omega_e > \omega_s \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \\ \omega_p = \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \\ \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \end{array} \right. \\ \omega_p = \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \end{array} \right. \\ \omega_p > \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Desses estudos preliminares, pode-se inferir que o pêndulo deve sempre ser ajustado com a excitação ou melhor:

- ω_p deve ser menor ou igual ω_e quando $\omega_e < \omega_s$;
- ω_p deve ser maior que ω_e quando $\omega_e > \omega_s$;
- uma maior liberdade de calibração no pêndulo é permitida quando $\omega_e = \omega_s$,

com um cuidado maior ao se fazer a calibração com $\omega_p < \omega_e$.

III.2 Influência de θ na Redução de Vibrações

Observando-se as pequenas oscilações angulares bem como a divergência de θ ocorridas em alguns casos vistos anteriormente, pode-se imaginar que o absorvedor não está trabalhando como deveria. No primeiro caso, as baixas amplitudes fazem com que o sistema de absorção seja equivalente apenas ao sistema original acrescido de uma massa m . No segundo, a instabilidade dos deslocamentos angulares torna o sistema de absorção, alguma vezes, numericamente, eficaz, mas impossível de se construir e controlar na prática o próprio sistema. Esse último comportamento do absorvedor é caracterizado por giros sucessivos que o pêndulo realiza em torno da massa M , implicando, na maioria dos casos, na amplificação da resposta do sistema.

Torna-se necessário, então, fazer com que o pêndulo trabalhe em uma determinada faixa de amplitudes de oscilação. Na verdade, tal faixa é a responsável pelo surgimento das forças de inércia no absorvedor que se opõem as forças de inércia geradas no sistema pela excitação externa.

O que se pretende agora é, então, investigar a influência das amplitudes das oscilações do pêndulo nos deslocamentos da estrutura.

Inicialmente, considera-se uma pré-definição da faixa admissível para oscilação de θ entre 10 e 90 graus, correspondendo a 0.175 e 1.57 radianos, respectivamente.

Explorar a não linearidade do pêndulo e limitar seus deslocamentos máximos em 1.57 radianos, onde a força horizontal de inércia de m atinge seu valor máximo, são dois critérios básicos para a pré-definição dessa faixa.

O Gráfico III-13 mostra, simultaneamente, como variam no tempo a força horizontal produzida pela massa m e a sua amplitude angular. Obviamente, essa força é nula quando $\theta = 0$ e, máxima, quando θ atinge seu maior valor.

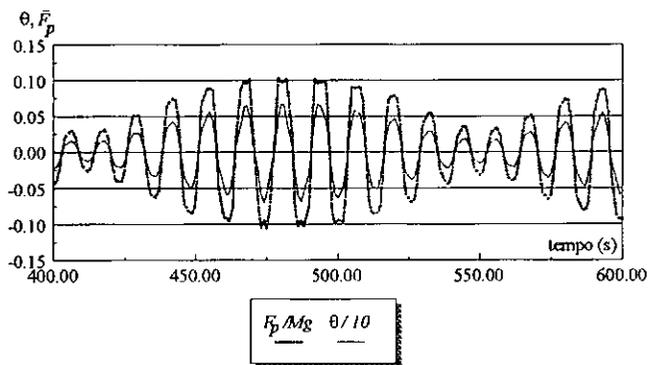


Gráfico III-13 - Resposta no tempo do deslocamento angular com a força horizontal produzida pelo pêndulo

$$\omega_e/\omega_s = 0.707, \omega_p/\omega_e = 1.0, \omega_p/\omega_s = 0.707 \text{ e } \bar{F} = -0.092$$

Deve-se lembrar que a restrição de θ pode ser feita acrescentando-se amortecimento C_p ou rigidez K_p ao pêndulo, ou mesmo modificando o seu comprimento. No entanto, os dois últimos parâmetros alteram a frequência ω_p do sistema. O amortecimento C_p não modifica significativamente ω_p , mas ele será estudado mais à frente.

Tem-se, então, uma avaliação da restrição das amplitudes angulares através de um estudo paramétrico envolvendo a amplitude da força de excitação F_o , não alterando, assim, as relações de frequências que se pretende reavaliar quanto a redução de vibrações da massa M . Obviamente, para se aumentar as amplitudes atingidas por θ , eleva-se o valor de \bar{F} . Para se obter um efeito contrário, diminui-se \bar{F} .

Os casos avaliados aqui são referentes aos grupos vistos anteriormente no Gráfico III-1 e na Tabela III-4. O grupo do Gráfico III-8 ($\omega_e = \omega_s$) tem uma característica peculiar em reduzir as amplitudes de vibração da estrutura para qualquer comprimento l do pêndulo e para qualquer θ , conforme se viu anteriormente. Sendo assim, fazer uma avaliação dos casos de redução quanto às amplitudes angulares para este grupo não trará resultados diferentes daqueles já encontrados em termos dos efeitos do absorvedor sobre a estrutura. Daí se levar em consideração apenas os casos em que a frequência de excitação está abaixo ou acima da frequência natural da estrutura.

A tabela e os gráficos a seguir mostram os principais resultados dos coeficientes de controle para uma variação de \bar{F} , nos dois casos de relação de

frequência entre ω_e e ω_s , analisados anteriormente e todas as possibilidades de ajuste do pêndulo com a excitação e com a estrutura.

Na primeira análise (Gráfico III-1, $\omega_e < \omega_s$), os resultados exprimiram redução de vibrações quando se calibrou o pêndulo abaixo da excitação ou com ω_p igual a ω_e . Para outros ajustes do absorvor, houve uma amplificação nas respostas, sendo que neste último caso, o pêndulo apresentou oscilações bastante pequenas. Isso levou a pensar que a eficiência do absorvor estaria ligada ao seu deslocamento.

A Tabela III-5 dada a seguir traz os resultados dos coeficientes de controle para um ajuste do pêndulo acima da excitação e mostra que, independentemente da sua faixa de oscilação, não há redução das amplitudes de vibração da estrutura quando $\omega_e < \omega_s$ e, portanto, que a eficiência deste tipo de absorvor está relacionada primordialmente com as relações de frequências entre estrutura e excitação, pêndulo e excitação e, por fim, pêndulo e estrutura, sendo as duas primeiras suficientes para se definir o uso adequado do absorvor submetido a um harmônico senoidal.

| Grupo | ω_e / ω_s | ω_p / ω_e | ω_p / ω_s | \bar{F} | θ | δ | |
|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------|----------|------------|-------|
| III-5 | 1 | 0.707 | 1.20 | 0.849 | -0.020 | ± 0.30 | 3.75 |
| | 2 | " | " | " | -0.041 | ± 0.60 | 3.75 |
| | 3 | " | " | " | -0.092 | diverge | 5.464 |
| | 4 | 0.707 | 1.414 | 1.0 | -0.020 | ± 0.10 | 2.0 |
| | 5 | " | " | " | -0.041 | ± 0.20 | 2.0 |
| | 6 | " | " | " | -0.092 | ± 0.40 | 1.956 |
| | 7 | " | " | " | -0.204 | ± 0.90 | 1.933 |
| | 8 | 0.707 | 2.0 | 1.414 | -0.041 | ± 0.10 | 1.50 |
| | 9 | " | " | " | -0.092 | ± 0.20 | 1.481 |
| | 10 | " | " | " | -0.204 | ± 0.40 | 1.441 |
| | 11 | " | " | " | -0.408 | ± 0.80 | 1.475 |

Tabela III-5 - Coeficientes de Controle em função de θ para $\omega_e < \omega_s$ e $\omega_p > \omega_e$

Pode-se entender a amplificação das respostas, observando-se os sinais ou a direção da força de excitação (F_e) e da força horizontal promovida pelo pêndulo (F_{ph}), ambas atuando sobre a estrutura. F_e e F_{ph} são dadas pelas seguintes expressões:

$$F_e = F_o \text{sen}(\omega_e t + \alpha)$$

$$F_{ph} = m \left(\ddot{x} \text{sen}(\theta) + l \dot{\theta}^2 + g \cos(\theta) \right) \text{sen}(\theta)$$

Tomando-se as relações adimensionais dadas por

$$\bar{F}_e = F_e / Mg \text{ e}$$

$$\bar{F}_{ph} = F_{ph} / Mg$$

tem-se, por exemplo, o Gráfico III-14 do grupo III-5.6, que mostra \bar{F}_e e \bar{F}_{ph} no tempo.

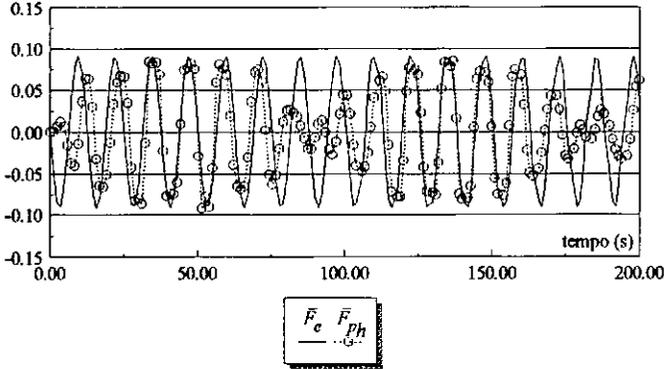


Gráfico III-14 - Resposta no tempo da força de excitação e da força horizontal produzida pelo pêndulo

$$\omega_p/\omega_s = 0.707, \omega_p/\omega_e = 1.414, \omega_p/\omega_s = 1.0 \text{ e } \bar{F} = -0.092$$

Nota-se que as forças estão em fase, o que dá uma resultante de forças que atuam sobre a estrutura muito maior que F_e . Isso ocorre para todas as condições de relação de frequência onde não há redução de vibrações. A Figura III-1 resume essa situação.

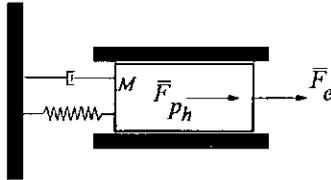


Figura III-1 - Direção das forças atuantes na massa M para os casos de amplificação de resposta

Embora as relações de frequência sejam predominantes para se obter redução de vibrações com o uso do absorvor, é possível falar sobre um melhor desempenho do pêndulo em função de seu deslocamento, nos casos onde tais relações permitem o controle das oscilações de M . Tais casos foram vistos anteriormente no Gráfico III-1 e correspondem às condições em que ω_p é igual ou menor que ω_e .

O Gráfico III-16 (a e b), a seguir, mostra que as condições quanto às relações de frequência para redução de vibrações continuam válidas, e que há uma relação entre a eficiência do absorvor e suas amplitudes angulares.

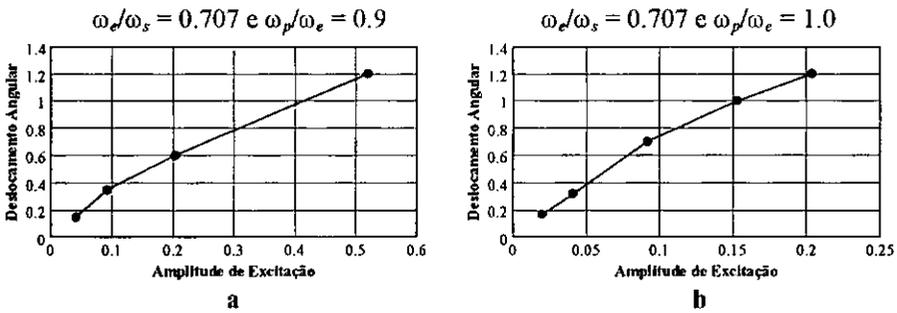


Gráfico III-15 - Deslocamento Angular θ em função de \bar{F}

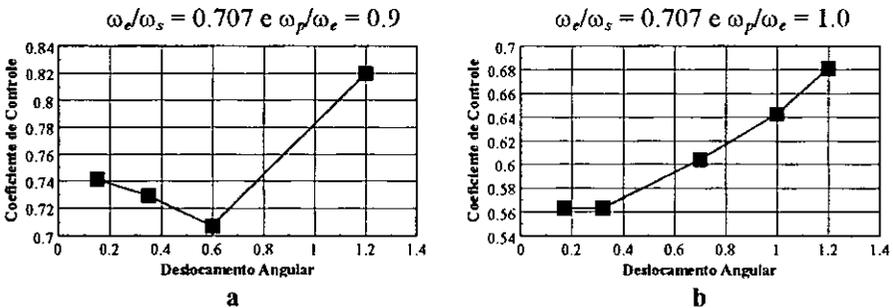


Gráfico III-16 - Coeficientes de Controle em função de θ para $\omega_e < \omega_s$ e $\omega_p \leq \omega_e$

Quando $\omega_p < \omega_e$, θ , crescente com a amplitude da força de excitação (Gráfico III-15.a), apresentou uma sensibilidade em relação a essa força, de maneira tal que divergiu para amplitudes acima de 1.20 radianos. Por outro lado, os coeficientes de controle diminuíram até θ atingir 0.60 radianos (Gráfico III-16.a), após o que voltaram a crescer, alcançando um valor igual a 3.0 para θ instável (não visto no gráfico). Neste caso, isso significa que o pêndulo trabalha com melhor eficiência no regime não-linear e perde todo o seu desempenho quando suas amplitudes divergem. Por enquanto,

limitar-se-á θ a um máximo de 1.20 radianos, após o qual os deslocamentos da estrutura sofrem uma amplificação.

Do Gráfico III-16.b, quando se ajusta o absorvedor com a excitação ($\omega_p = \omega_e$), ele é mais eficiente para menores amplitudes de oscilação angular e apresenta uma perda de eficiência à medida que θ aumenta, chegando a amplificar a resposta para uma divergência de θ , dada após se atingir 1.2 radianos. Neste caso, o pêndulo trabalha melhor em regime linear e, semelhante ao caso anterior, perde a sua eficiência para θ instável. Aqui também o valor de θ será limitado em 1.2 radianos.

A partir desses dois casos, nota-se também, à medida que as relações ω_e/ω_s e ω_p/ω_e se aproximam de 1.0, que o sistema torna-se mais eficiente (comparando com os resultados do Gráfico III-1, página 31), no entanto se apresenta mais sensível a uma divergência de θ , ou seja, os sistemas mais eficientes têm menor capacidade de resistência as amplitudes da força de excitação. Por exemplo, para $\omega_p/\omega_e = 1.0$, θ diverge com $\bar{F} = 0.265$ e só ocorre o mesmo para $\bar{F} = 0.531$, quando $\omega_p/\omega_e = 0.9$.

Quanto às relações de frequência e a redução de vibrações vistas no item anterior não há modificações a serem feitas. Portanto, diante da avaliação das oscilações angulares, pode-se dizer que há redução de vibração quando se ajusta o pêndulo com a excitação ou abaixo dela, para um sistema original onde $\omega_e < \omega_s$, respeitando o limite de oscilação angular que é dado em torno de 1.2 radianos. Acima desse limite, não se recomenda usar o absorvedor pendular, pois há amplificação das respostas. Não há controle das respostas para um ajuste acima da excitação, independentemente da variação de θ .

Tem-se agora a investigação da influência de θ para $\omega_e > \omega_s$.

Os casos avaliados anteriormente para esta condição (Tabela III-4, página 40) mostraram amplificações de resposta para qualquer calibração do pêndulo abaixo da excitação ($\omega_p < \omega_e$), com deslocamentos angulares bastante pequenos.

Os gráficos a seguir revelam que a amplificação da resposta depende exclusivamente das condições de relações de frequência, pois, mesmo θ trabalhando em maiores regimes de oscilação (regime não-linear) não se consegue redução de vibrações, quando se faz $\omega_p < \omega_e$.

$$\omega_e/\omega_s = 4.243, \omega_p/\omega_e = 0.213 \text{ e } \omega_p/\omega_s = 0.91$$

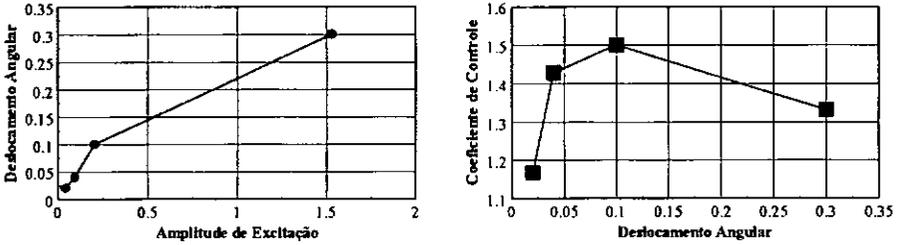


Gráfico III-17 - Deslocamento Angular θ em função de \bar{F} e Coeficientes de Controle em função de θ para $\omega_e > \omega_s$, $\omega_p < \omega_e$ e $\omega_p < \omega_s$

$$\omega_e/\omega_s = 4.243, \omega_p/\omega_e = 0.236 \text{ e } \omega_p/\omega_s = 1.0$$

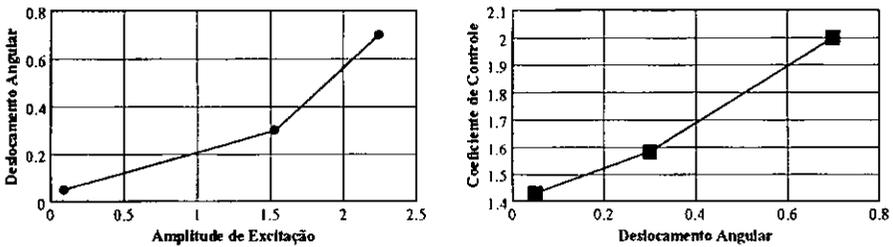


Gráfico III-18 - Deslocamento Angular θ em função de \bar{F} e Coeficientes de Controle em função de θ para $\omega_e > \omega_s$, $\omega_p < \omega_e$ e $\omega_p = \omega_s$

$$\omega_e/\omega_s = 4.243, \omega_p/\omega_e = 0.967 \text{ e } \omega_p/\omega_s = 4.102$$

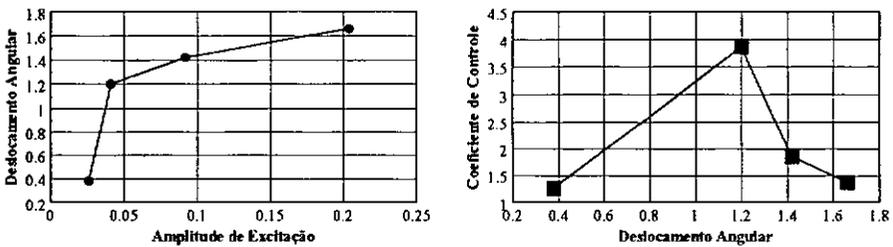


Gráfico III-19 - Deslocamento Angular θ em função de \bar{F} e Coeficientes de Controle em função de θ para $\omega_e > \omega_s$, $\omega_p < \omega_e$ e $\omega_p > \omega_s$

Percebe-se, obviamente, observando-se o gráficos da amplitude angular em função de \bar{F} , que, para um ajuste do pêndulo muito abaixo da excitação, a intensidade da força necessária para produzir uma determinada amplitude θ é muito maior quando comparada com aquela capaz de produzir o mesmo efeito, ao se ajustar o absorvedor com uma frequência mais próxima da frequência de excitação.

Quando se ajustou ω_p sobre a excitação (Tabela III-4), foi obtido coeficiente de controle igual a 2.143 para um $\theta = 1.60$ radianos. Esse efeito de amplificação, no entanto, não é o que mostra o Gráfico III-20 a seguir, quando θ apresenta outras amplitudes de oscilação.

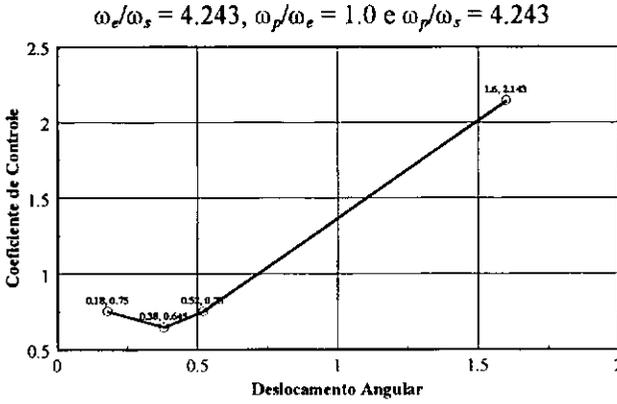


Gráfico III-20 - Coeficientes de Controle em função de θ para $\omega_e > \omega_s, \omega_p = \omega_e$ e $\omega_p > \omega_s$

Percebe-se, aqui, que, para certos valores de θ , ocorre ou não a redução de vibrações no sistema, ou seja, fica clara a influência de θ nos coeficientes de controle. Neste caso, o absorvor mostrou-se mais eficiente para um valor de θ que pode ser considerado linear (em torno de 0.4 radianos).

A influência de θ na redução de vibrações também pode ser ratificada pelo Gráfico III-21 abaixo, além dos casos de redução já confirmados anteriormente. Trata-se da última situação de relações de frequências quando $\omega_e > \omega_s$, com ajuste de ω_p acima de ω_e .

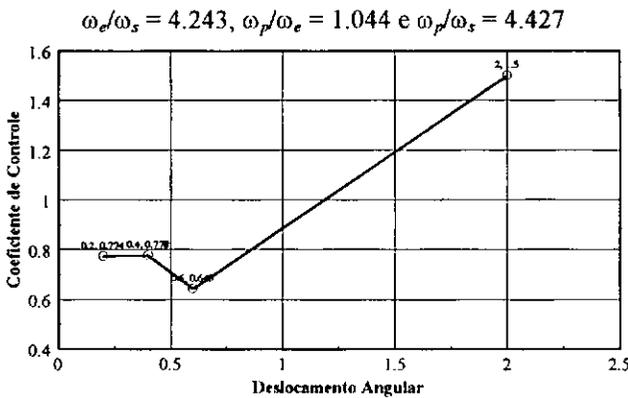


Gráfico III-21 - Coeficientes de Controle em função de θ para $\omega_e > \omega_s, \omega_p > \omega_e$ e $\omega_p > \omega_s$

Neste caso, o absorvedor tem melhor desempenho trabalhando num regime não-linear, conforme se pode ver para $\theta = 0.60$ radianos.

A estimativa feita no item III-1 deste capítulo permitia dizer que o pêndulo deveria ser ajustado somente acima da excitação, quando $\omega_e > \omega_s$. Agora, com os resultados da avaliação dos coeficientes de controle para distintas oscilações angulares em função das amplitudes da força de excitação, pode-se estender esse ajuste para ω_p igual ou maior que ω_e . Portanto, as condições quanto as relações de frequências e o efeito de cada calibração do absorvedor na estrutura, quando $\omega_e > \omega_s$, são resumidos da seguinte maneira:

$$\omega_e > \omega_s \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \\ \omega_p = \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \\ \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \end{array} \right. \\ \omega_p = \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \end{array} \right. \\ \omega_p > \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dessa forma, fica fechado o conjunto de situações de carregamento dinâmico para uma excitação harmônica sobre uma dada massa M , bem como o efeito de cada ajuste do absorvedor pendular não-linear sobre essa massa. A busca de valores absolutos para essas relações é muito vasta diante da não-linearidade do problema e tornaria, para cada um deles, um caso específico. Por isso, o conjunto de situações é relativo a condições de igualdade ou desigualdade com respeito ao valor 1.0.

A partir da análise dos resultados obtidos, pode-se concluir que as relações de frequências entre estrutura, excitação e absorvedor são preponderantes para se conseguir algum nível de redução nos deslocamentos de M , pois em alguns casos, mesmo fazendo θ trabalhar em regimes linear e não-linear, não se alcança êxito e sim uma amplificação nas respostas. Em seguida, dentro dos casos eficientes, são as oscilações angulares da massa m do absorvedor que devem obedecer a uma determinada faixa de atuação, para se garantir um bom desempenho na redução de vibrações.

O absorsor mostrou-se mais eficiente no regime linear quando $\omega_p = \omega_e$ ($\omega_e < \omega_s$ ou $\omega_e > \omega_s$). Para $\omega_p < \omega_e$ ($\omega_e < \omega_s$) ou $\omega_p > \omega_e$ ($\omega_e > \omega_s$) ele tem melhor performance no regime não-linear, ressaltando-se que existe uma amplitude θ , dentro da faixa de atuação, que minimiza os deslocamentos da estrutura.

Sendo assim, as condições para redução de vibrações horizontais na estrutura quanto as relações de frequências, utilizando-se o pêndulo absorsor não-linear, são as seguintes:

$$\omega_e < \omega_s \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \end{array} \right. \\ \omega_p = \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \end{array} \right. \\ \omega_p > \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \\ \omega_p = \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \\ \omega_p < \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{independente de } \theta$$

$$\omega_e = \omega_s \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \end{array} \right. \\ \omega_p = \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p = \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \end{array} \right. \\ \omega_p > \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\omega_e > \omega_s \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p < \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \\ \omega_p = \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \\ \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Não Reduz} \end{array} \right. \right\} \text{independente de } \theta \\ \omega_p = \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \end{array} \right. \\ \omega_p > \omega_e \left\{ \begin{array}{l} \omega_p > \omega_s \rightarrow \text{Reduz} \end{array} \right.$$

As duas tabelas que seguem resumem isso.

| Grupo | Ocorre redução para | | com θ |
|-------|-----------------------|--------------------------|--|
| III-6 | $\omega_e < \omega_s$ | $\omega_p \leq \omega_e$ | limitado a 1.20 radianos e a condições práticas; em regime linear - sistema mais eficiente para $\omega_p = \omega_e$; em regime não-linear - sistema mais eficiente para $\omega_p < \omega_e$. |
| | $\omega_e = \omega_s$ | ω_p qualquer | qualquer, limitado apenas a condições práticas; em qualquer regime - ótima eficiência. |
| | $\omega_e > \omega_s$ | $\omega_p \geq \omega_e$ | limitado a 1.20 radianos e a condições práticas; em regime linear - sistema mais eficiente para $\omega_p = \omega_e$; em regime não-linear - sistema mais eficiente para $\omega_p > \omega_e$. |

Tabela III-6 - Ajustes do Absorvor que produzem redução de vibrações

| Grupo | NÃO ocorre redução para | | com θ |
|-------|--------------------------------|-----------------------|--|
| III-7 | $\omega_e < \omega_s$ | $\omega_p > \omega_e$ | qualquer. |
| | $\omega_e > \omega_s$ | $\omega_p < \omega_e$ | qualquer. |
| | os casos 1 e 3 da Tabela III-6 | | não respeitando o limite de oscilação ou divergindo. |

Tabela III-7 Ajustes do Absorvor que NÃO produzem redução de vibrações

Foram vistas aqui as condições para redução de vibração da estrutura em função das relações de frequências: natural da estrutura (ω_s), de excitação (ω_e) e do pêndulo simples (ω_p). No entanto, alguns testes revelam redução das amplitudes de deslocamentos para relações dentro das quais não é possível tal efeito, em função dos resultados e conclusões antecedentes.

Neste sentido, foi feito um refinamento nessas relações para uma redefinição das condições de redução e para se garantir uma maior confiança na avaliação do efeito do absorvor no sistema original, em função de tais relações de frequência.

Pelas relações obtidas dos resultados precedentes, não seria possível obter, por exemplo, redução de vibrações para $\omega_e/\omega_s < 1.0$ e $\omega_p/\omega_e > 1.0$; ambas devem ser maiores ou menores que 1.0. Porém alguns resultados não confirmam isso.

Para $\omega_e/\omega_s = 0.89$ e $\omega_p/\omega_e = 1.124$, por exemplo, o coeficiente de controle é igual a 0.653. Para $\omega_e/\omega_s = 1.03$ e $\omega_p/\omega_e = 0.971$, tem-se um ótimo nível de redução. Isso leva a uma redefinição das relações obtidas a partir do Gráfico III-8. A investigação revelou que a faixa de relações entre ω_e e ω_s capaz de reduzir as amplitudes de vibrações horizontais na estrutura é, para θ oscilando com amplitudes

menores que aproximadamente 1.0 radiano e para uma calibração do pêndulo com a estrutura ($\omega_p = \omega_s$), a seguinte:

$$\omega_e = (\text{de } 0.88 \text{ a } 1.14) \omega_s, \text{ com } \omega_p = \omega_s.$$

Em todos os outros casos fora dessa faixa não há redução de vibrações, mesmo com θ trabalhando em amplitudes menores que 1.0.

Deve-se ressaltar que esta faixa é definida para $\omega_p = \omega_s$ e, à medida que esta última relação afasta-se da unidade, os limites entre cada relação mudam. Por exemplo: outros testes revelaram que para $\omega_p/\omega_s = 0.283$ as relações são rigorosas e obedecem exatamente àquelas vistas na página 53 (Tabela III-6). Para $\omega_p/\omega_s = 0.636$, $\omega_e = (1.03 \text{ a } 1.0) \omega_s$, ocorre redução. Para $\omega_p/\omega_s = 4.427$, $\omega_e = (0.96 \text{ a } 1.0) \omega_s$, há redução.

Uma vez definidas as relações ω_p/ω_e e ω_p/ω_s em função da relação ω_e/ω_s , dimensiona-se, enfim, o pêndulo, lembrando que ω_p é a frequência natural do pêndulo simples, obtendo-se, assim, o seu comprimento através da expressão $l = g/\omega_p^2$.

A sua massa é definida a partir da relação de massa $\mu = m/M$, onde m é a massa do pêndulo e M , a massa da estrutura. Todos os resultados obtidos acima são referentes para $\mu = 0.2$. Para relações de massa menores, continuam válidos, no entanto o sistema tem uma queda muito grande na capacidade de resistência às amplitudes de excitação. Ele apresenta divergência das oscilações angulares muito mais fácil, não só porque a força horizontal produzida por m é menor, mas também porque μ menor diminui a faixa admissível de oscilação do pêndulo. Deve-se, sempre avaliar θ para se garantir um funcionamento prático do sistema de absorção.

As outras características do pêndulo como elasticidade (K_p) e amortecimento (C_p) também podem ser inseridas. Até aqui, estudou-se o pêndulo simples ($K_p = 0$) e sem amortecimento ($C_p = 0$). Esses dois novos parâmetros e o efeito que provocam no absorsor e na estrutura serão estudados no próximo item, a seguir.

III.3 Influência de C_p e K_p nas Respostas

Algumas vezes, as amplitudes de deslocamento angular apresentam valores altos ou até mesmo chegam a divergir, instabilizando o sistema de absorção. Para limitar os valores de θ , pode-se usar o amortecimento C_p e a rigidez K_p do pêndulo. Esses dois parâmetros têm efeito semelhante sobre o comportamento do absorvor, ou seja, ambos conseguem diminuir as amplitudes θ . No entanto, para a estrutura, a variação de cada um desses parâmetros causa efeitos diferentes.

O Gráfico III-22 a seguir mostra a resposta no tempo para uma dada situação de relações de frequência que permitiria a redução das vibrações horizontais da estrutura, conforme se viu anteriormente, mas na qual ocorreu amplificação das respostas, atribuída aos deslocamentos angulares que foram no máximo aproximadamente iguais a 2.0 radianos (Gráfico III-23).

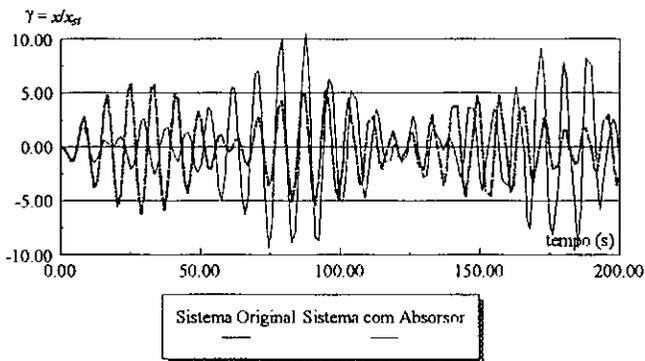


Gráfico III-22 - Resposta no tempo das razões de deslocamentos da Estrutura
 $\omega_e/\omega_s = 1.146$, $\omega_p/\omega_e = 1.0$, $\omega_p/\omega_s = 1.146$, $\bar{F} = -0.092$ e $\xi_p = 0.0\%$

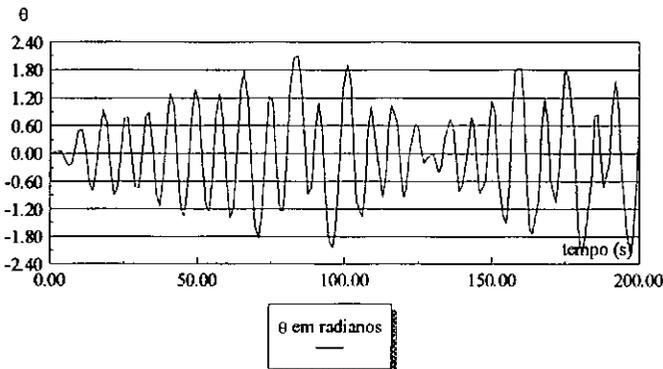


Gráfico III-23 - Resposta no tempo do deslocamento angular do Absorvor
 $\omega_e/\omega_s = 1.146$, $\omega_p/\omega_e = 1.0$, $\omega_p/\omega_s = 1.146$, $\bar{F} = -0.092$ e $\xi_p = 0.0\%$

Acrescentando-se um coeficiente de amortecimento pendular equivalente a uma taxa de amortecimento igual a 10% ao mesmo sistema dinâmico, consegue-se uma redução bastante significativa nas oscilações θ e também nos deslocamentos horizontais da estrutura, tal como pode ser observado através da comparação direta das respostas mostradas no Gráfico III-24 e no Gráfico III-25, respectivamente, com aquelas do Gráfico III-22 e do Gráfico III-23.

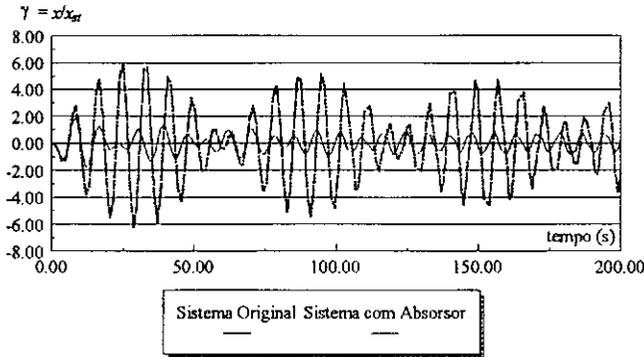


Gráfico III-24 - Resposta no tempo das razões de deslocamentos da Estrutura
 $\omega_e/\omega_s = 1.146$, $\omega_p/\omega_e = 1.0$, $\omega_p/\omega_s = 1.146$, $\bar{F} = -0.092$ e $\xi_p = 10.0\%$

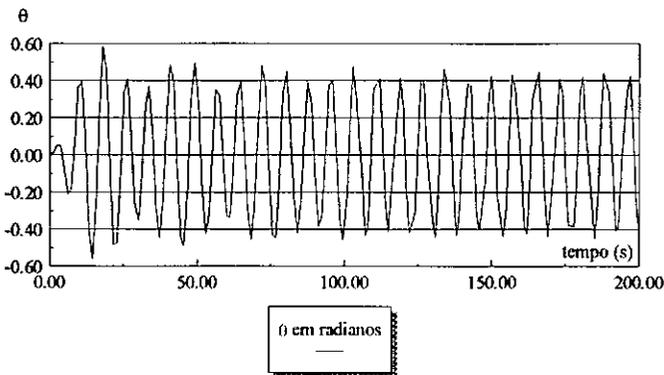


Gráfico III-25 - Resposta no tempo do deslocamento angular do Absorvor
 $\omega_e/\omega_s = 1.146$, $\omega_p/\omega_e = 1.0$, $\omega_p/\omega_s = 1.146$, $\bar{F} = -0.092$ e $\xi_p = 10.0\%$

Essa é uma das vantagens do uso de C_p . Neste caso, o amortecimento limitou as amplitudes angulares em 0.40 radianos, o que levou a redução dos deslocamentos da estrutura. Uma consequência disso é que o sistema de absorção apresenta um melhor desempenho para grandes magnitudes da força de excitação.

Para cada sistema dinâmico com as relações de frequência conhecidas e um dado F_o , sendo $\omega_e/\omega_s > 1.0$, o uso de C_p reduz θ , limitando-o a determinadas faixas de oscilação. Com isso, pode-se reduzir os deslocamentos da estrutura, principalmente

nos casos onde θ apresenta amplitudes muito grandes, as quais normalmente não permitiriam o controle das respostas. Esta é uma situação em que o controle dos deslocamentos da estrutura em função de ξ_p é assintótico. Isso pode ser visto no Gráfico III-26 abaixo, que mostra o deslocamento angular θ (eixo esquerdo das ordenadas) e o coeficiente de controle (eixo direito das ordenadas) em função da taxa de amortecimento ξ_p do pêndulo.

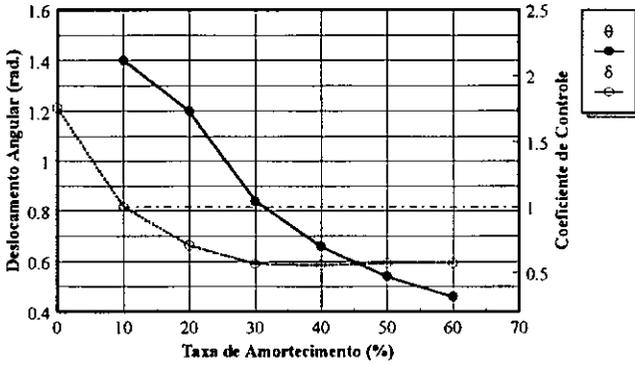


Gráfico III-26 - Deslocamento Angular θ e Coeficiente de Controle em função de ξ_p
 $\omega_e/\omega_s = 1.2$, $\omega_p/\omega_e = 1.0$, $\omega_p/\omega_s = 1.2$ e $\bar{F} = -0.306$

Uma outra vantagem de C_p é que ele muda a fase entre a excitação e a força horizontal produzida pelo pêndulo, permitindo, em alguns casos, obter redução dos deslocamentos mesmo quando as relações de frequência não a admitem, para um pêndulo simples, sem amortecimento. A redução dos deslocamentos para esse caso se dá de maneira semelhante àquela vista no Gráfico III-26.

Quando $\omega_e/\omega_s < 1.0$, os efeitos provocados por C_p são diferentes. Para cada sistema dinâmico com as relações de frequência conhecidas e um dado F_o , há um θ que minimiza os deslocamentos da estrutura, após o qual, tais deslocamentos voltam a crescer, mesmo continuando-se a diminuir θ através de um aumento em ξ_p . Isso pode ser visto no Gráfico III-27 a seguir, que mostra o deslocamento angular θ e o coeficiente de controle em função da taxa de amortecimento ξ_p do pêndulo.

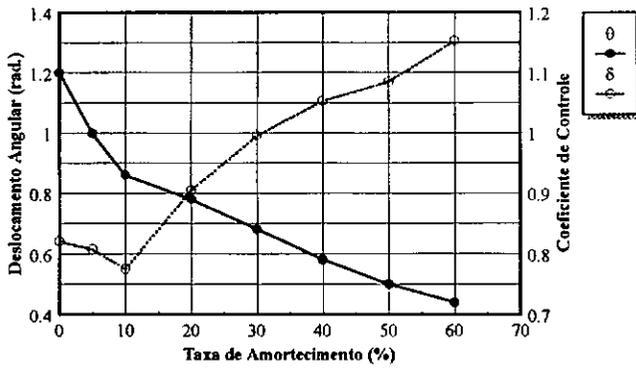


Gráfico III-27 - Deslocamento Angular θ e Coeficiente de Controle em função de ξ_p
 $\omega_e/\omega_s = 0.707$, $\omega_p/\omega_e = 0.9$, $\omega_p/\omega_s = 0.636$ e $\bar{F} = -0.520$

O Gráfico III-28 abaixo também mostra a queda do coeficiente de controle, neste caso, de 2.5 para aproximadamente 0.5, com uma taxa de amortecimento pouco menor que 5.0%. A partir daí, os deslocamentos voltam a crescer, em função da mudança de fase entre as forças e da diminuição da intensidade da força horizontal produzida pelo movimento de m .

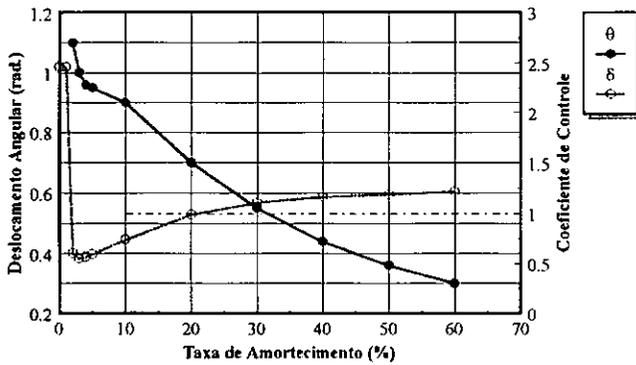


Gráfico III-28 - Deslocamento Angular θ e Coeficiente de Controle em função de ξ_p
 $\omega_e/\omega_s = 0.707$, $\omega_p/\omega_e = 1.0$, $\omega_p/\omega_s = 0.707$ e $\bar{F} = -0.520$

De uma maneira geral, o amortecimento C_p do absorvor promove uma queda bastante significativa nas amplitudes da massa m , o que pode permitir o controle de possíveis divergências do pêndulo, bem como a limitação de seus deslocamentos a condições práticas ou de projeto. A consequência disso é que os deslocamentos da estrutura também são reduzidos, pois θ passa a trabalhar num regime onde a força horizontal promovida pelo seu movimento permite o equilíbrio com a força de

excitação. No entanto, a defasagem que ocorre entre essas forças com o aumento de ξ_p , pode provocar uma perda de eficiência do absorvor, nos casos onde as relações de frequência permitem o controle das resposta. Por outro lado, C_p pode também defasar essas forças nos casos onde não há redução quanto às relações de frequência, de maneira tal que podem permitir o efeito contrário, ou seja, dá eficiência ao absorvor.

A rigidez K_p do pêndulo também limita os deslocamentos angulares de m para uma dada amplitude da força de excitação, além de aumentar a faixa de oscilação de θ para a qual é possível a redução das vibrações horizontais da estrutura.

No entanto, deve-se tomar um cuidado especial em seu uso, pois ela interfere na frequência natural do pêndulo, o que de certa forma provoca uma mudança nas relações de frequência entre a excitação e estrutura. Com isso, pode-se sair de uma relação de frequência em que é possível o controle dos deslocamentos para outra situação contrária.

É o caso, por exemplo, da situação em que $\omega_e/\omega_s < 1.0$. Partindo-se de um pêndulo simples, deve-se, para este caso, calibrar ω_p com a excitação ou abaixo dela ($\omega_p \leq \omega_e$). A presença de rigidez aumenta ω_p (II-31). Isso pode levar à condição $\omega_p > \omega_e$, que não permite o controle das oscilações horizontais. Mas, fazendo-se uma reavaliação do comprimento da haste do pêndulo, consegue-se manter as relações de frequências necessárias à redução de vibrações. A outra vantagem disso é que o sistema torna-se menos sensível à divergência de θ , que pode passar a trabalhar em maiores regimes de oscilação, mas nunca superior a 1.57 radianos. Uma desvantagem é que o novo comprimento l da haste sempre será um pouco maior que o do pêndulo simples. Mas o aumento em K_p não é menor que o acréscimo de l , percentualmente se falando. O novo comprimento l é dado por:

$$l = \frac{1}{2} l_i \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 K_p}{g l_i m}} \right) \quad \text{(III-1)}$$

onde l_i é o comprimento do pêndulo simples.

Quando $\omega_e/\omega_s > 1.0$, a calibração de ω_p deve ser sempre maior ou igual a ω_e . Neste caso, pode-se usar K_p para limitar θ , sem necessitar aumentar o comprimento l .

III.4 Sistema APNLV

O sistema de absorção pendular não-linear virtual (sem haste), anteriormente apresentado, tem aplicações práticas para estruturas no plano, considerando-se que o corpo de massa m é cilíndrico. Para uma torre com seção com dois eixos de simetria ou seção circular, esse dispositivo deverá ser projetado para uma superfície esférica (calota esférica côncava) num sistema de coordenadas esféricas R , θ_1 e θ_2 . As relações de ajuste são basicamente as mesmas encontradas para o APNL.

A partir das equações lineares de movimento do APNLV pode-se obter algumas expressões referentes ao raio R da superfície circular, cujo valor está associado à calibração do sistema quanto às relações de frequência. Estas expressões foram calculadas a fim de que as amplitudes de deslocamento da massa principal do sistema APNLV sejam iguais àquelas obtidas através das equações do pêndulo absorvor, usando uma comparação direta dos termos das duas últimas equações de estado dos dois sistemas.

Assim, para manter \bar{x} , deve-se usar, considerando m um corpo cilíndrico:

$$R = \frac{A_1 \omega^6 + A_2 \omega^4 + A_3 \omega^2 + A_4}{A_5 \omega^6 + A_6 \omega^4 + A_7 \omega^2} \quad (\text{III-2})$$

com ω igual a frequência de excitação e

$$A_1 = -r l(m + 6M)$$

$$A_2 = 2g(M(3r - 2l) + 2mr) + 2l(3Kr - mg)$$

$$A_3 = 4g^2(M + m) - 2Kg(3r - 2l)$$

$$A_4 = -4g^2K$$

$$A_5 = -l(m + 6M)$$

$$A_6 = 2g(2m + 3M) + 6Kl$$

$$A_7 = -6gK$$

ou adotar

$$R = \frac{2g(l+r) + lr\omega^2}{2g + l\omega^2} \quad (\text{III-3})$$

Deve-se ressaltar que as respostas no tempo não são exatamente iguais as obtidas com o uso do pêndulo absorvor, mas as amplitudes de resposta são bastante próximas. Os gráficos a seguir mostram uma comparação das respostas no tempo para os dois sistemas pendulares: com a haste (APNL) e o virtual (APNLV).

O Gráfico III-29 abaixo mostra a resposta de M no tempo para uma certa relação de frequência, usando-se o absorvor pendular (APNL).

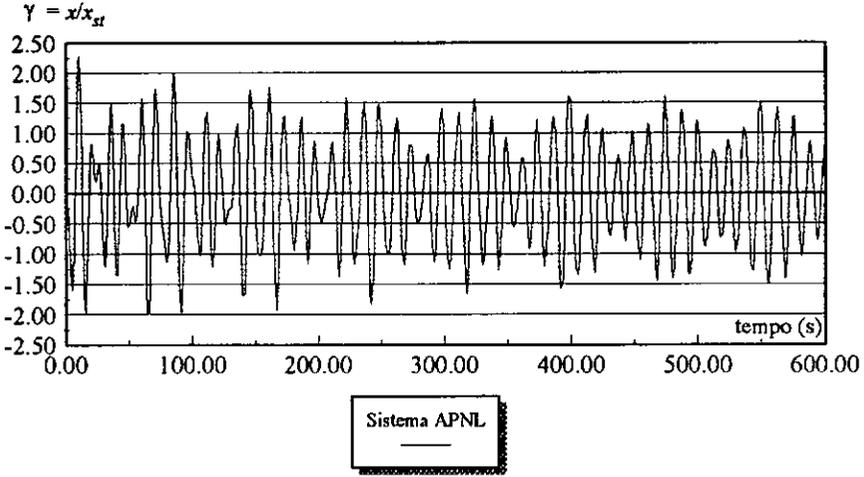


Gráfico III-29 - Resposta no tempo das razões de deslocamentos da Estrutura
 $\omega_e/\omega_s = 0.707$, $\omega_p/\omega_e = 0.9$, $\omega_p/\omega_s = 0.636$ e $\bar{F} = -0.092$

A resposta angular para este sistema APNL pode ser vista no Gráfico III-30.

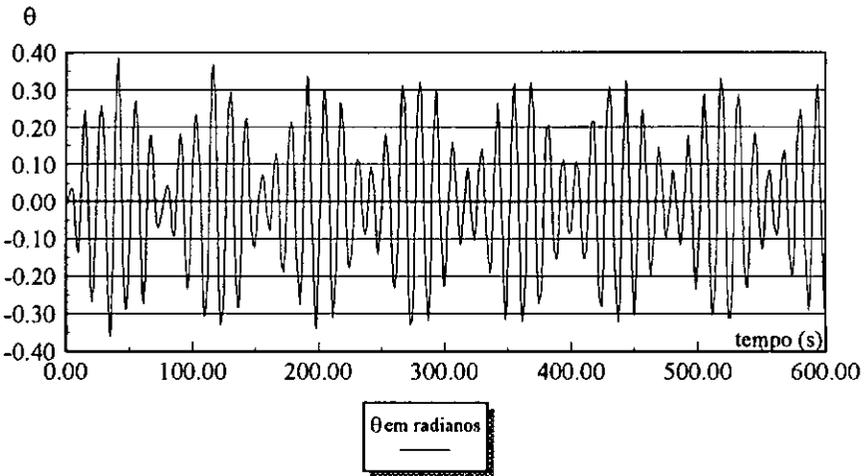


Gráfico III-30 - Resposta no tempo do deslocamento angular do Absorvor - APNL
 $\omega_e/\omega_s = 0.707$, $\omega_p/\omega_e = 0.9$, $\omega_p/\omega_s = 0.636$ e $\bar{F} = -0.092$

Em se tratando do sistema de absorção APNLV, adotando-se um raio dado por (III-2), as relações de frequência e a resposta da massa principal podem ser vistas no Gráfico III-31. A amplitude angular máxima em regime para este caso é igual a 1.1 radianos, portanto muito maior que a amplitude referente ao APNL apresentada no Gráfico III-30.

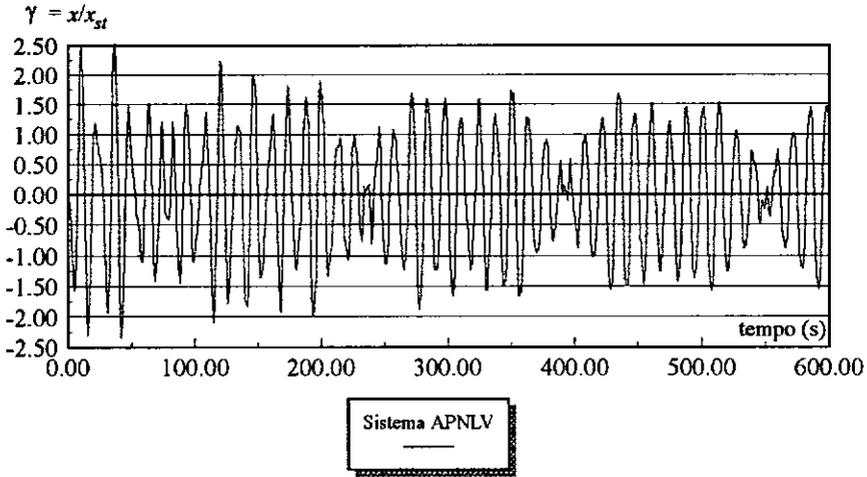


Gráfico III-31 - Resposta no tempo das razões de deslocamentos da Estrutura
 $\omega_e/\omega_s = 0.707$, $\omega_{cil}/\omega_e = 1.024$, $\omega_{cil}/\omega_s = 0.724$, $R/r = 25.88$ e $\bar{F} = -0.092$

Usando-se um ajuste dado por (III-3), a amplitude angular máxima em regime do APNLV atinge valores pouco maiores que a do APNL, i. e., cerca de 0.50 radiano. A comparação direta entre as amplitudes de resposta de M , dadas nos Gráficos III-32 e III-29, mostra que os dois sistemas de absorção têm eficiência equivalente.

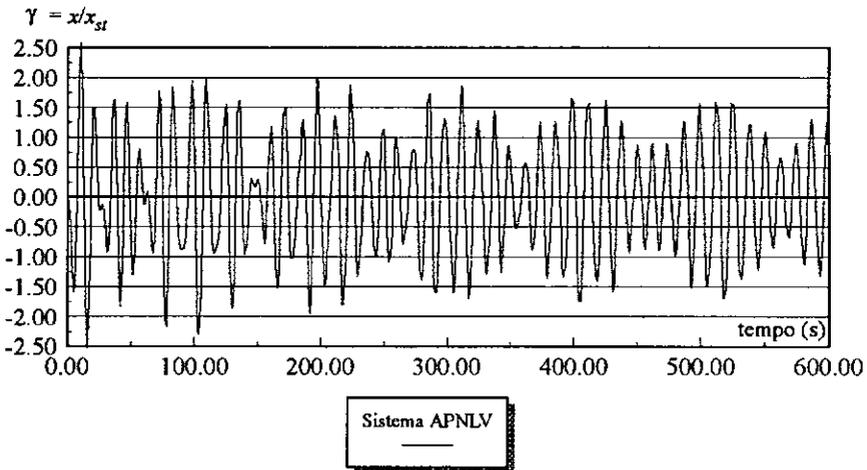


Gráfico III-32 - Resposta no tempo das razões de deslocamentos da Estrutura
 $\omega_e/\omega_s = 0.707$, $\omega_{cil}/\omega_e = 0.935$, $\omega_{cil}/\omega_s = 0.661$, $R/r = 30.92$ e $\bar{F} = -0.092$

Do mesmo modo, fazendo-se iguais as frequências dos dois sistemas pendulares de absorção (APNL e APNLV), as respostas resultantes são bastante próximas, conforme pode ser visto por comparação direta entre os Gráficos III-33 e III-34, e III-29 e III-30, respectivamente.

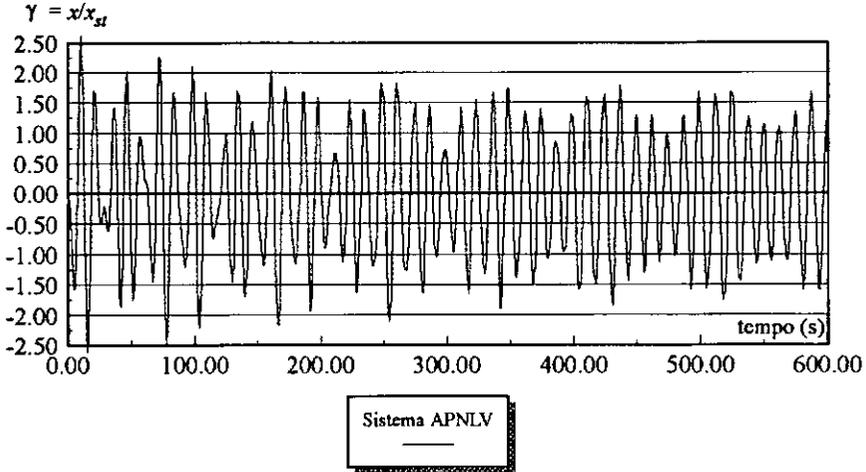


Gráfico III-33 - Resposta no tempo das razões de deslocamentos da Estrutura

$$\omega_p/\omega_s = 0.707, \omega_{cil}/\omega_e = 0.9, \omega_{cil}/\omega_s = 0.636, R/r = 33.26 \text{ e } \bar{F} = -0.092$$

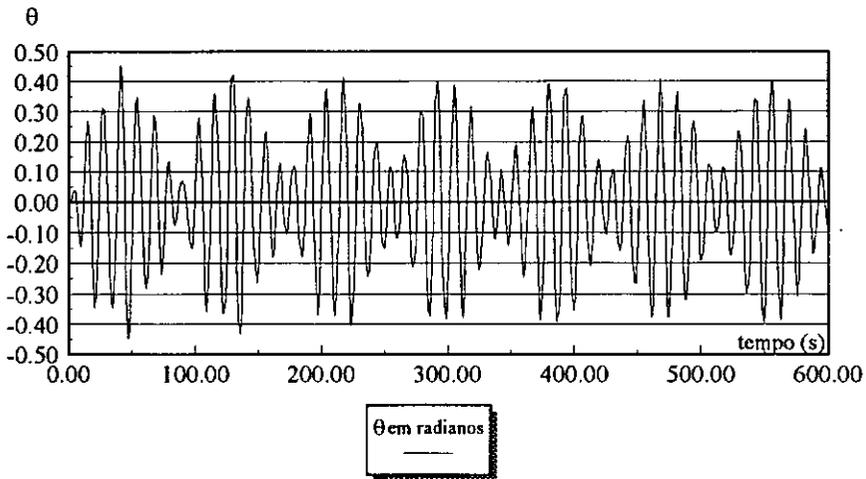


Gráfico III-34 - Resposta no tempo do deslocamento angular do Absorvor - APNLV

$$\omega_p/\omega_s = 0.707, \omega_{cil}/\omega_e = 0.9, \omega_{cil}/\omega_s = 0.636, R/r = 33.26 \text{ e } \bar{F} = -0.092$$

Portanto, pode-se concluir que o sistema de absorção pendular virtual APNLV obedece às mesmas relações de frequência do APNL, ou seja, os seus efeitos são praticamente os mesmos, quando se faz $\omega_{cil} = \omega_p$.

CAPÍTULO IV

Respostas no Domínio da Frequência

Conforme deduzidas, as equações de movimento do sistema de absorção analisado têm uma certa não-linearidade, representada por funções trigonométricas, que poderia ser desconsiderada para pequenas amplitudes de vibrações.

Levando-se em consideração a sua não-linearidade, o sistema não apresenta uma solução fechada. Deve-se, então, procurar uma solução aproximada, que pode ser obtida, por exemplo, no domínio da frequência, de onde se pode fazer uma análise do grau de não-linearidade do sistema, bem como uma análise dos casos de ajustes do absorsor.

Para isso, é necessário encontrar as equações que fornecem uma relação entre a frequência de excitação e as amplitudes de movimento de cada grau de liberdade (x , deslocamento horizontal de M , e θ , deslocamento angular do pêndulo). A formulação e o método de resolução das equações não-lineares são dados nos próximos itens.

IV.1 Formulação das Equações Algébricas Não-Lineares

De uma maneira geral, seja a equação diferencial que define um sistema oscilatório não-linear, não-autônomo:

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, x, t) = F \cos(\omega t) \quad (\text{IV-1})$$

Como se sabe, equações dessa forma distinguem-se das lineares por não prevalecer o princípio da superposição para as mesmas, o que gera uma certa dificuldade na resolução destas equações.

O que se pretende alcançar é uma solução harmônica aproximada para o sistema não-linear de equações diferenciais, a partir da transformação dessas equações em uma forma algébrica, também não-linear.

Seja, então, uma solução de (IV-1) escrita na seguinte maneira:

$$x(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} A_n \cos(n\omega t) \quad (\text{IV-2})$$

onde ω é a frequência de resposta.

Considerando-se as possíveis defasagens entre a excitação e os vários harmônicos da resposta, $x(t)$ pode também ser escrito na forma:

$$x(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} A_n \cos(n\Omega t + \psi_n) \quad (\text{IV-3})$$

Reescrevendo o co-seno da soma como o produto das funções trigonométricas

$$\cos(n\Omega t + \psi_n) = \cos(\psi_n) \cos(n\Omega t) - \text{sen}(\psi_n) \text{sen}(n\Omega t)$$

e definindo as constantes A_{cn} e A_{sn} como:

$$A_{cn} = A_n \cos(\psi_n) \text{ e } A_{sn} = -A_n \text{sen}(\psi_n), \quad (\text{IV-4})$$

tem-se por substituição em (IV-3):

$$x(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(A_{cn} \cos(n\Omega t) + A_{sn} \text{sen}(n\Omega t) \right) \quad (\text{IV-5})$$

Uma vez definida a solução harmônica, obtém-se um sistema de $2n$ equações algébricas não-lineares, através da substituição da equação (IV-5) em (IV-1), considerando-se $\cos(n\Omega t)$ e $\text{sen}(n\Omega t)$ como funções peso.

A solução desse sistema pode ser obtida por um método numérico-iterativo, que fornece os n A_{cn} e A_{sn} e, portanto, a amplitude de resposta A_n e o ângulo de fase

ψ_n :

$$\psi_n = \arctan\left(-\frac{A_{sn}}{A_{cn}}\right) \quad (\text{IV-6})$$

$$A_n = \frac{A_{cn}}{\cos(\psi_n)} = \frac{-A_{sn}}{\text{sen}(\psi_n)} \quad (\text{IV-7})$$

Para se ter uma aproximação melhor da solução, deve-se integrar as $2n$ equações resultantes da substituição de (IV-5) em (IV-1) e do produto com as funções peso, fixando as constantes de integração em zero, já que a solução é para ser harmônica com período $T = 2\pi/\Omega$.

Após a integração no intervalo de 0 a $2\pi/\Omega$, o sistema de equações algébricas resultante deve, finalmente, ser resolvido por um método numérico para sistemas não-lineares, como por exemplo o Método de Newton-Raphson.

Alternativamente, pode-se encontrar a solução da equação não-linear (IV-1) através de uma forma simplificada fazendo:

$$\cos(\Omega t) = \cos(\omega t + \psi) \quad (\text{IV-8})$$

na própria equação (IV-1) e reescrevendo-a na forma:

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, x, t) = F_c \cos(\omega t) + F_s \sin(\omega t) \quad (\text{IV-9})$$

com

$$x = \bar{x} \cos(\omega t). \quad (\text{IV-10})$$

Substituindo (IV-10) em (IV-9), multiplicando pelas funções peso $\phi_1 = \cos(\omega t)$ e $\phi_2 = \sin(\omega t)$ e integrando de 0 a $2\pi/\omega$, obtém-se mais uma vez um sistema de $2n$ equações algébricas.

Esse processo [10] será empregado nas equações diferenciais do sistema de absorção pendular, com a segunda alternativa de resolução.

Seja, então, o sistema de equações do pêndulo absorcor:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + ml\left(\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)\right) = F_o \sin(\omega_e t + \alpha) \\ ml^2 \ddot{\theta} + C_p \dot{\theta} + K_p \theta + mgl \sin(\theta) + ml\ddot{x} \cos(\theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-11})$$

A força de excitação pode ser escrita na seguinte forma:

$$F_o \sin(\omega_e t + \alpha) = F_o \sin(\omega t + \psi) = F_c \cos(\omega t) + F_s \sin(\omega t)$$

Tomando-se as duas soluções como harmônicos, com uma certa defasagem β entre si, tem-se:

$$x = \bar{x} \cos(\omega t) \quad \theta = \bar{\theta} \cos(\omega t + \beta) \quad (\text{IV-12})$$

Após as derivações necessárias e substituições de (IV-12) em (IV-11), estas últimas são dadas por:

$$\begin{aligned} & \bar{x} \left(-\omega^2 (M + m) \cos(\omega t) - \omega C \operatorname{sen}(\omega t) + K \cos(\omega t) \right) - ml \omega^2 \bar{\theta} \\ & \left[\cos(\omega t + \beta) \cos(\bar{\theta} \cos(\omega t + \beta)) + \bar{\theta} \operatorname{sen}^2(\omega t + \beta) \operatorname{sen}(\bar{\theta} \cos(\omega t + \beta)) \right] = \quad (\text{IV-13}) \\ & F_c \cos(\omega t) + F_s \operatorname{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{\theta} \left(ml^2 \omega^2 \cos(\omega t + \beta) + C_p \omega \operatorname{sen}(\omega t + \beta) - K_p \cos(\omega t + \beta) \right) - ml \\ & \left[g \operatorname{sen}(\bar{\theta} \cos(\omega t + \beta)) - \omega^2 \bar{x} \cos(\omega t) \cos(\bar{\theta} \cos(\omega t + \beta)) \right] = 0 \quad (\text{IV-14}) \end{aligned}$$

Nota-se que dessas expressões não se consegue eliminar com facilidade a variável tempo, para torná-las apenas função das amplitudes de deslocamento e da frequência de excitação. Isso seria possível após a multiplicação de (IV-13) e (IV-14) pelas funções peso ϕ_1 e ϕ_2 e, em seguida, a integração das expressões resultantes no intervalo de 0 a $2\pi/\omega$.

Mas se pode observar ainda que (IV-13) e (IV-14) contêm funções trigonométricas cujos argumentos são co-senos. Isso faz surgir algumas integrais do tipo

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen}(\bar{\theta} \cos(\omega t + \beta)) \operatorname{sen}^2(\omega t + \beta) \phi_1 dt$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\bar{\theta} \cos(\omega t + \beta)) \cos(\omega t + \beta) \phi_1 dt$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen}(\bar{\theta} \cos(\omega t + \beta)) \phi_1 dt$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\bar{\theta} \cos(\omega t + \beta)) \cos(\omega t) \phi_1 dt$$

bastante complicadas de se resolver.

Usando-se a expansão de Jacobi de funções trigonométricas em séries de funções de Bessel de primeira espécie [11]

$$\cos(\bar{\theta} \cos(\zeta)) = J_0(\bar{\theta}) + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n J_{2n}(\bar{\theta}) \cos(2n\zeta)$$

$$\sin(\bar{\theta} \cos(\zeta)) = -2 \sum_1^{\infty} (-1)^n J_{2n-1}(\bar{\theta}) \cos[(2n-1)\zeta]$$

e tomando-se apenas o primeiro termo ou o primeiro harmônico da série, as equações perdem os termos em seno e co-seno de argumentos também trigonométricos.

$$\begin{aligned} \cos(\bar{\theta} \cos(\omega t + \beta)) &= J_0(\bar{\theta}) - 2 J_2(\bar{\theta}) \cos(2(\omega t + \beta)) \\ \sin(\bar{\theta} \cos(\omega t + \beta)) &= 2 J_1(\bar{\theta}) \cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad \text{(IV-15)}$$

Tem-se, então:

$$\begin{aligned} \bar{x} \left(-\omega^2 (M + m) \cos(\omega t) - \omega C \sin(\omega t) + K \cos(\omega t) \right) - ml \omega^2 \bar{\theta} \\ \left[\cos(\omega t + \beta) \left(J_0(\bar{\theta}) - 2 J_2(\bar{\theta}) \cos(2(\omega t + \beta)) \right) + \right. \\ \left. \bar{\theta} \sin^2(\omega t + \beta) \left(2 J_1(\bar{\theta}) \cos(\omega t + \beta) \right) \right] = F_c \cos(\omega t) + F_s \sin(\omega t) \end{aligned} \quad \text{(IV-16)}$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta} \left(ml^2 \omega^2 \cos(\omega t + \beta) + C_p \omega \sin(\omega t + \beta) - K_p \cos(\omega t + \beta) \right) - ml \\ \left[2g J_1(\bar{\theta}) \cos(\omega t + \beta) - \omega^2 \bar{x} \cos(\omega t) \left(J_0(\bar{\theta}) - 2 J_2(\bar{\theta}) \cos(2(\omega t + \beta)) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad \text{(IV-17)}$$

Multiplicando-se, agora, (IV-16) e (IV-17) pelas funções peso ϕ_1 e ϕ_2 e, finalmente, integrando de 0 a $2\pi/\omega$ cada membro das quatro equações resultantes, obtém-se um sistema algébrico para ser resolvido em \bar{x} e ω ou $\bar{\theta}$ e ω .

$$\bar{x} \left(-\omega^2 (M + m) + K \right) - \omega^2 m l \bar{\theta} \cos(\beta) \left(J_0(\bar{\theta}) + \frac{\bar{\theta}}{2} J_1(\bar{\theta}) - J_2(\bar{\theta}) \right) = F_c \quad (\text{IV-18})$$

$$-\omega C \bar{x} + \omega^2 m l \bar{\theta} \sin(\beta) \left(J_0(\bar{\theta}) + \frac{\bar{\theta}}{2} J_1(\bar{\theta}) - J_2(\bar{\theta}) \right) = F_s \quad (\text{IV-19})$$

$$-\omega^2 m l \left[l \bar{\theta} \cos(\beta) - \bar{x} \left(J_2(\bar{\theta}) \cos(2\beta) - J_0(\bar{\theta}) \right) \right] - \omega C_p \bar{\theta} \sin(\beta) + \cos(\beta) \left(K_p \bar{\theta} + 2 m g l J_1(\bar{\theta}) \right) = 0 \quad (\text{IV-20})$$

$$\frac{\sin(\beta)}{\omega} \left[m l \left(2 g J_1(\bar{\theta}) - \omega^2 l \bar{\theta} \right) + K_p \bar{\theta} \right] + \omega m l \bar{x} J_2(\bar{\theta}) \sin(2\beta) + \cos(\beta) C_p \bar{\theta} = 0 \quad (\text{IV-21})$$

Um fato interessante que se pode observar é que se $\beta = 0$, a quarta equação do sistema fica

$$C_p \bar{\theta} = 0, \quad (\text{IV-22})$$

de onde se conclui que C_p deve ser igual a zero para satisfazer (IV-22). Ou seja, as respostas só estarão em fase ($\beta = 0$) se não houver amortecimento do absorvor, o que já se esperava, devido às próprias características do amortecimento.

Elevando ao quadrado as duas primeiras equações, somando-as e lembrando que $F_c^2 + F_s^2 = F_o^2$, consegue-se uma equação onde \bar{x} e $\bar{\theta}$ são as variáveis para as quais se pretende encontrar soluções, em função da frequência de excitação.

$$\left[A_1 \bar{x} + A_3 A_4 \cos(\beta) \right]^2 + \left[A_2 \bar{x} - A_3 A_4 \sin(\beta) \right]^2 = F_o^2 \quad (\text{IV-23})$$

sendo,

$$A_1 = -\omega^2 (M + m) + K \quad A_2 = -\omega C$$

$$A_3 = -\omega^2 m l \bar{\theta} \quad A_4 = J_0(\bar{\theta}) + \frac{\bar{\theta}}{2} J_1(\bar{\theta}) - J_2(\bar{\theta})$$

Restam, então, as duas últimas equações, que, somadas membro a membro ou fazendo a igualdade $0 = 0$, fornecem uma equação da qual se pode isolar \bar{x} .

$$\bar{x} = \frac{\omega C_p \bar{\theta} (\sin(\beta) + \cos(\beta)) + \left(2mgl J_1(\bar{\theta}) + K_p \bar{\theta} - \omega^2 ml^2 \bar{\theta} \right) \lambda}{\omega^2 ml \left[J_2(\bar{\theta}) (\cos(2\beta) - \sin(2\beta)) - J_0(\bar{\theta}) \right]} \quad (\text{IV-24})$$

com $\lambda = \sin(\beta) - \cos(\beta)$.

Finalmente, substituindo \bar{x} em (IV-23), chega-se a uma equação transcendental não-linear, da qual se pode extrair as amplitudes angulares $\bar{\theta}$ do pêndulo para distintas frequências de excitação, uma vez que todos os outros parâmetros são conhecidos.

$$\left(A_2^2 + A_1^2 \right) \bar{x}^2 + 2 A_3 A_4 \left(A_1 \cos(\beta) - A_2 \sin(\beta) \right) \bar{x} + A_3^2 A_4^2 - F_o^2 = 0 \quad (\text{IV-25})$$

Com $\bar{\theta}$ calculado para cada ω , utiliza-se a equação (IV-24) para se conhecer o as amplitudes de deslocamento da massa principal M .

A não-linearidade de (IV-25) pode ser vista não só nos termos quadráticos, como também naqueles que contêm as funções de Bessel de primeira espécie, o que leva a um certo grau de dificuldade para sua resolução. Neste caso, deve-se utilizar um método iterativo, dentre eles o de Newton-Raphson, cujo procedimento é descrito a seguir.

IV.2 Algoritmo de Solução Numérica das Equações Não-Lineares

Uma vez determinada a equação da resposta no domínio da frequência (IV-25), as amplitudes de deslocamento angular bem como as amplitudes de massa principal podem ser encontradas pelo Método Iterativo de Newton-Raphson.

A Figura IV-1 mostra uma função $f(x) = 0$, cuja raiz \bar{x} , abcissa do ponto em que a curva corta o eixo horizontal, pretende-se encontrar.

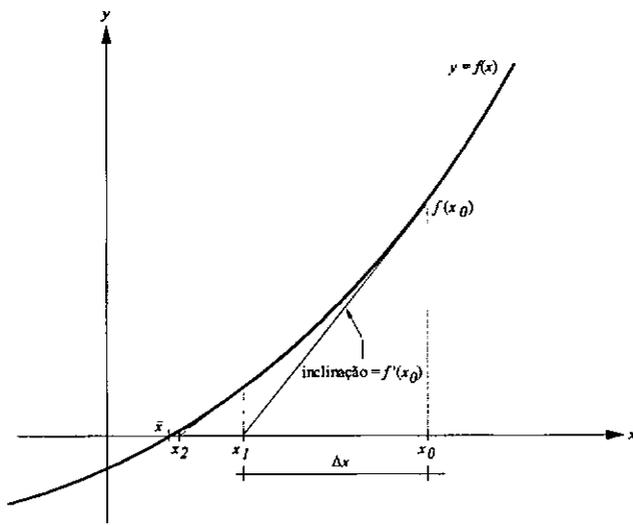


Figura IV-1 - Dedução do Método de Newton-Raphson

Para isso, parte-se de uma escolha inicial x_0 como solução e, em seguida, verifica-se o quanto este valor selecionado está próximo da solução verdadeira.

Conforme se vê na figura, a proximidade entre x_0 e a solução exata será cada vez menor, à medida que Δx tender a zero.

Para se obter o novo valor x_1 , deve ser traçada uma tangente à curva no ponto $x = x_0$ e $y = f(x_0)$, encontrando, em seguida, a interseção entre essa tangente com o eixo dos x . Esta interseção é o novo ponto de partida para se encontrar \bar{x} . Repete-se este processo, traçando-se uma nova tangente à $f(x)$ no ponto x_1 , encontrando, assim o ponto x_2 . verifica-se mais uma vez Δx , até que se alcance um certa tolerância ou erro.

Ainda da figura, tem-se que:

$$x_1 = x_0 - \Delta x$$

A inclinação da reta tangente à curva no ponto $[x_0, f(x_0)]$ é dada por:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{\Delta x} \text{ de onde } \Delta x = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ e, conseqüentemente,}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad \text{(IV-26)}$$

Como se trata de um processo iterativo, pode-se generalizar (IV-26) através de:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = g(x_i). \quad (\text{IV-27})$$

Esta é a relação que traduz o método de Newton-Raphson.

Para a equação (IV-25), é necessário considerar que a derivada de uma função de Bessel de primeira espécie e ordem n é dada por:

$$J_n'(\bar{\theta}) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(\bar{\theta}) - J_{n+1}(\bar{\theta})] \quad (\text{IV-28})$$

e ainda que:

$$J_n(\bar{\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\bar{\theta}/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(k+n+1)} \quad (\text{IV-29})$$

$$J_{-n}(\bar{\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\bar{\theta}/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k-n+1)} \quad (\text{IV-30})$$

$$J_{-n}(\bar{\theta}) = (-1)^n J_n(\bar{\theta}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{IV-31})$$

Para a programação destas funções, considera-se que os máximos valores assumidos por $\bar{\theta}$ sejam equivalentes a um giro de 2π radianos, de maneira que tomando-se $k = 10$ em (IV-29) e (IV-30), os resultados são satisfatórios, conforme se vê nos gráficos que seguem.

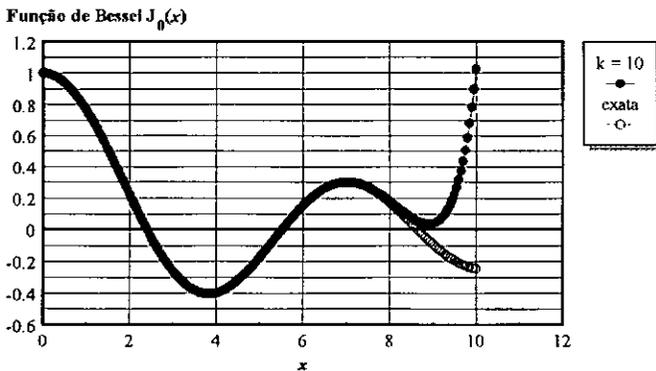


Gráfico IV-1 - Diferença entre Funções de Bessel de Primeira Espécie para os dez primeiros termos de (IV-29) e a solução exata - $n = 0$

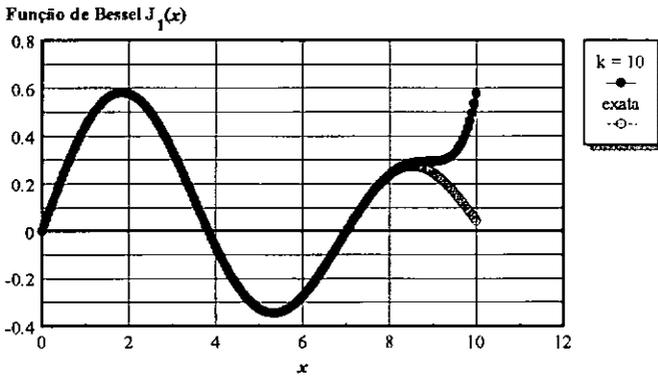


Gráfico IV-2 - Diferença entre Funções de Bessel de Primeira Espécie para os dez primeiros termos de (IV-29) e a solução exata - $n = 1$

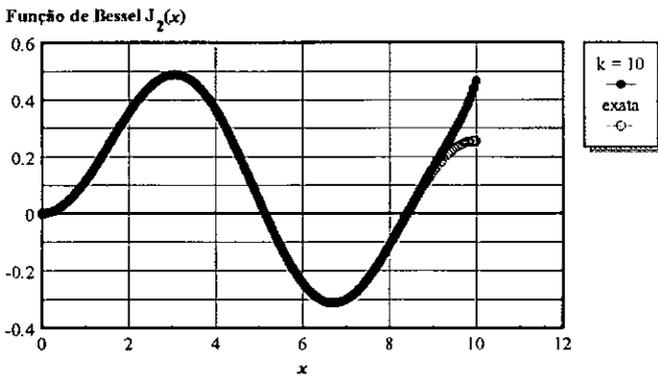


Gráfico IV-3 - Diferença entre Funções de Bessel de Primeira Espécie para os dez primeiros termos de (IV-29) e a solução exata - $n = 2$

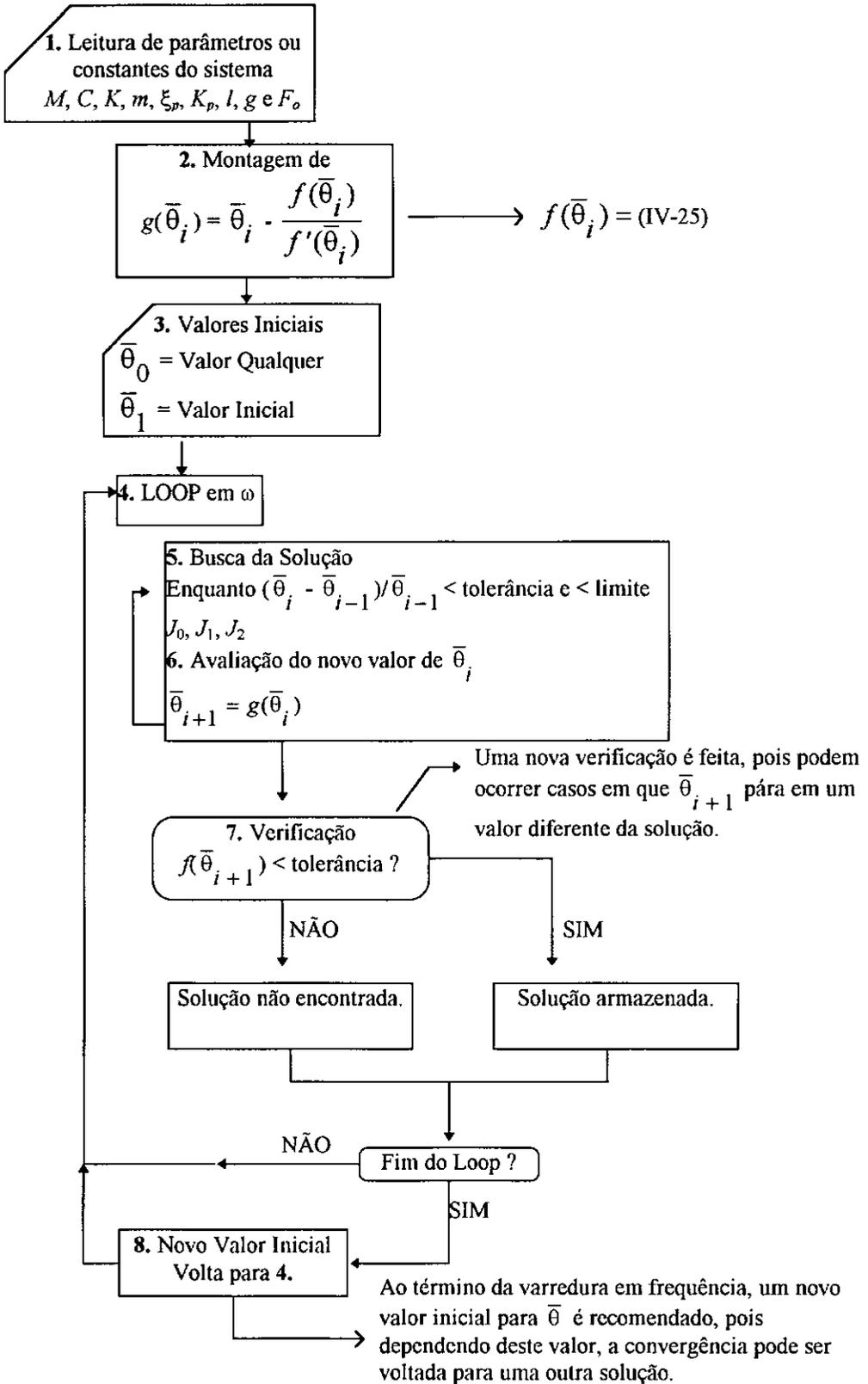
Assim, as funções de Bessel foram programadas em linguagem Fortran com as seguintes fórmulas:

$$J_0(\bar{\theta}) = 1 - \frac{\bar{\theta}^2}{2^2} + \frac{\bar{\theta}^4}{2^2 4^2} - \frac{\bar{\theta}^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots + \frac{\bar{\theta}^{20}}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2 12^2 14^2 16^2 18^2 20^2}$$

$$J_1(\bar{\theta}) = \frac{\bar{\theta}}{2} - \frac{\bar{\theta}^3}{2^2 4} + \frac{\bar{\theta}^5}{2^2 4^2 6} + \dots + \frac{\bar{\theta}^{21}}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2 12^2 14^2 16^2 18^2 20^2 22}$$

$$J_2(\bar{\theta}) = \frac{2}{\bar{\theta}} J_1(\bar{\theta}) - J_0(\bar{\theta})$$

O algoritmo para obtenção das respostas no domínio da frequência é resumido na página seguinte.



Dessa maneira, tem-se um conjunto de soluções para cada ω , o que se permite gerar a resposta em frequência da estrutura e do absorvor, conforme mostra o próximo item deste capítulo.

IV.3 Resultados Numéricos

Geralmente, quando se usa um absorvor não-linear, aumenta-se a faixa de frequência para a qual ele é eficiente. Uma mola não linear, por exemplo, faz com que a frequência natural do absorvor seja uma função de suas amplitudes de vibração. Ela aumenta ou diminui, dependendo se a rigidez da mola diminui ou aumenta com a deflexão.

No caso de um pêndulo não-linear, o seu período de oscilação também é uma função de suas amplitudes, o que leva a uma certa inclinação nas curvas de resposta em frequência (Gráfico IV-4). Deve-se ressaltar que o que caracteriza a não-linearidade são as amplitudes atingidas pelo pêndulo. Um acentuado grau de não-linearidade torna-se presente quanto maior for a amplitude de excitação.

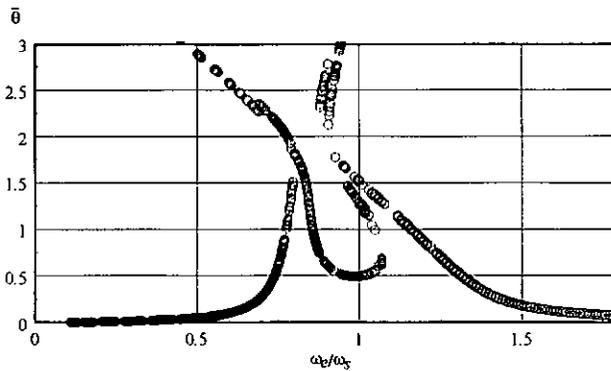


Gráfico IV-4 - Amplitude de Deslocamento Angular $\bar{\theta}$ no domínio da Frequência
 $\omega_p/\omega_s = 1.0$, $\xi_p = 0.0\%$, $\mu = 0.20$ e $\bar{F} = 0.092$

Distintamente da mola, o pêndulo não tem uma influência muito grande no grau de não-linearidade da massa principal, ou ainda, a curva de resposta em frequência de M não apresenta uma espinha inclinada tanto quanto outros sistemas não-lineares (Gráfico IV-5).

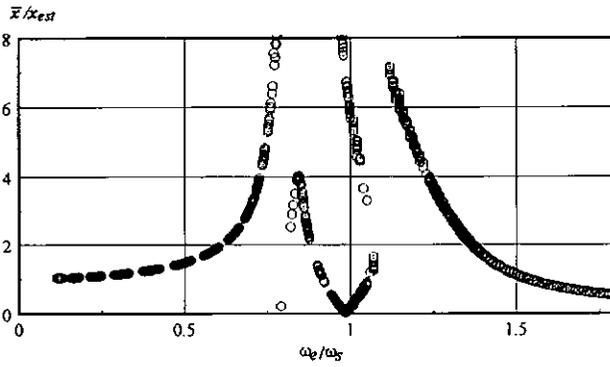


Gráfico IV-5 - Amplitude de Deslocamento \bar{x} no domínio da Frequência
 $\omega_p/\omega_s = 1.0$, $\xi_p = 0.0\%$, $\mu = 0.20$ e $\bar{F} = 0.092$

No entanto, o regime não-linear de oscilação do pêndulo muda os parâmetros ótimos de ajuste quando comparados com a teoria linear, alterando assim os níveis de deslocamentos atingidos pela estrutura.

Da teoria linear pode-se encontrar alguns parâmetros de ajuste ótimo, que podem ser caracterizados por seu comprimento l e pelo amortecimento C_p , basicamente.

Para mostrar essa mudança nos parâmetros, pode-se observar, por exemplo, a curva de resposta em frequência dada a seguir de um determinado sistema de absorção pendular.

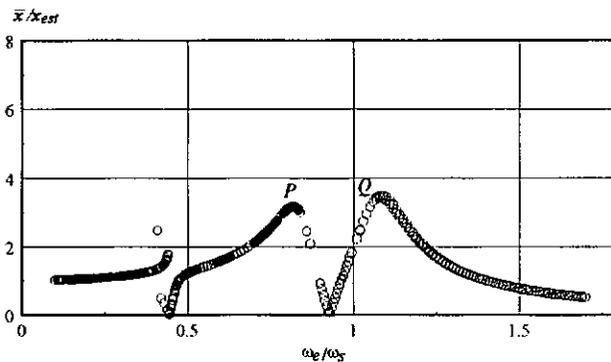


Gráfico IV-6 - Amplitude de Deslocamento \bar{x} no domínio da Frequência
 $\omega_p/\omega_s = 0.833$, $\xi_p = 26.23\%$, $\mu = 0.20$ e $\bar{F} = 0.041$

Das equações linearizadas do pêndulo, os parâmetros que fazem com que os pontos P e Q tenham a mesma amplitude de deslocamento são facilmente obtidos. No

exemplo representado pela curva acima, para uma relação de massa igual a 0.20, eles são iguais a:

$$\omega_p/\omega_s = 0.833 \text{ e } \xi_p = 26.23 \%$$

O Gráfico IV-6 foi gerado a partir dos mesmos parâmetros, para as equações não-lineares. Nota-se que as amplitudes dos pontos P e Q também apresentam ordenadas praticamente iguais, ou seja, os parâmetros de ajuste estão de acordo com a teoria linear, em função dos deslocamentos angulares (Gráfico IV-7), pequenos em relação ao próximo caso visto no Gráfico IV-8.

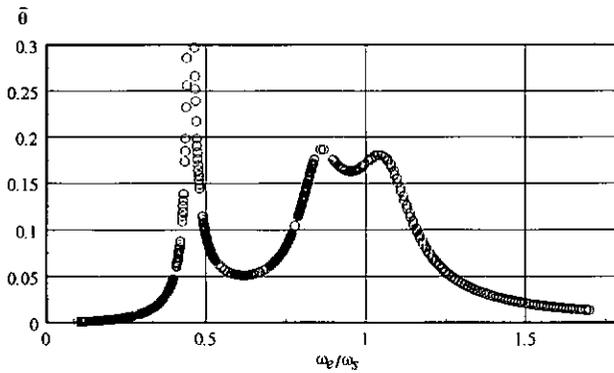


Gráfico IV-7 - Amplitude de Deslocamento Angular $\bar{\theta}$ no domínio da Frequência
 $\omega_p/\omega_s = 0.833$, $\xi_p = 26.23\%$ e $\bar{F} = 0.041$

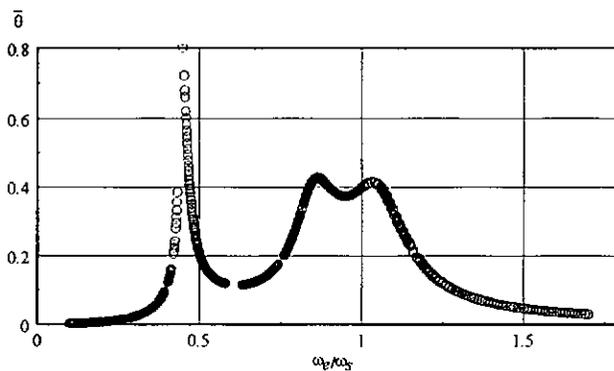


Gráfico IV-8 - Amplitude de Deslocamento Angular $\bar{\theta}$ no domínio da Frequência
 $\omega_p/\omega_s = 0.833$, $\xi_p = 26.23\%$ e $\bar{F} = 0.092$

Neste outro caso, os mesmos parâmetros foram usados, mas a amplitude de excitação é maior, fazendo com que as amplitudes $\bar{\theta}$ sejam maiores (Gráfico IV-8).

A curva de amplitudes $\bar{\theta}$ não mostra características não lineares acentuadas, por conta do amortecimento que aumenta a faixa de oscilação para a qual o pêndulo pode ser visto como um absorvedor linear.

Já a curva de amplitudes de deslocamento da massa principal apresenta uma mudança nas ordenadas dos pontos P e Q , significando que os parâmetros de ajuste não mais satisfazem a condição ótima, o que mostra a influência das oscilações θ quando em regime não-linear.

E a diferença entre os pontos P e Q torna-se maior para maiores amplitudes $\bar{\theta}$, conforme se vê nos gráficos a seguir.

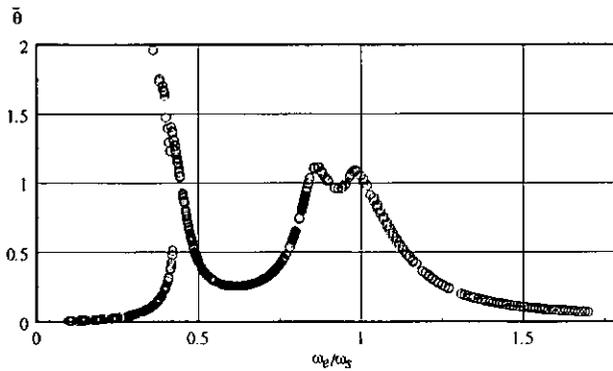


Gráfico IV-9 - Amplitude de Deslocamento Angular $\bar{\theta}$ no domínio da Frequência
 $\omega_p/\omega_s = 0.833$, $\xi_p = 26.23\%$ e $\bar{F} = 0.204$

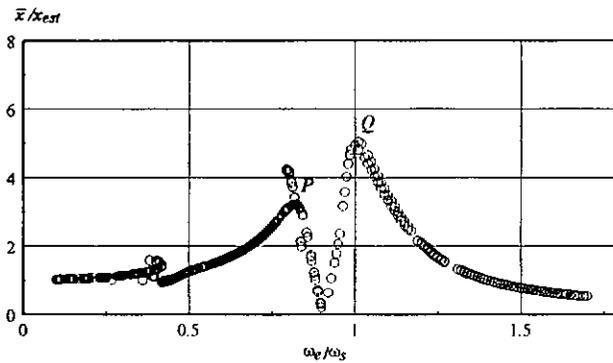


Gráfico IV-10 - Amplitude de Deslocamento \bar{x} no domínio da Frequência
 $\omega_p/\omega_s = 0.833$, $\xi_p = 26.23\%$ e $\bar{F} = 0.204$

A análise no domínio da frequência traz uma vantagem de se conhecer os níveis de deslocamento da estrutura e do absorvedor calibrado numa certa relação com a

estrutura, além da influência do grau de não-linearidade apresentado para um determinado sistema dinâmico (Gráfico IV-4).

No entanto, alguns resultados podem ser diferentes daqueles obtidos através da resposta no tempo, visto que as soluções tomadas para x e θ são consideradas como harmônicas. Dessa maneira, as amplitudes de deslocamento tornam-se diferentes principalmente nos casos onde há batimento. Para a resposta no tempo, tomou-se o pico do regime de oscilação como a amplitude. Outras vezes, ocorre a convergência de determinadas soluções para θ , usando (IV-25), enquanto que na análise no tempo a resposta diverge, após um intervalo de tempo Δt .

A tabela a seguir mostra uma correlação entre os resultados obtidos a partir da análise no tempo e no domínio da frequência.

| ω_e / ω_s | θ | | | | \bar{x} / x_{est} | | | | $X_{original} / x_{est}$ | |
|-----------------------|----------|--------|-------|--------|---------------------|-------|-------|-------|--------------------------|-------|
| | 01 | 02.1 | 02.2 | 02.3 | 01 | 02.1 | 02.2 | 02.3 | 01 | 02 |
| 0.283 | 0.0088 | 0.06 | 0.020 | * | 1.106 | 1.14 | - | * | 1.08 | 1.11 |
| 0.5 | 0.045 | 0.08 | - | 0.046 | 1.461 | 1.67 | 1.39 | 1.47 | 1.33 | 1.33 |
| 0.6 | 0.098 | 0.15 | - | 0.098 | 1.894 | 2.22 | 1.94 | 1.88 | 1.56 | 1.61 |
| 0.707 | 0.30 | 0.40 | 0.30 | 0.304 | 3.306 | 3.89 | 3.19 | 3.33 | 2.00 | 2.00 |
| 0.8 | 1.81 | diver. | - | diver. | -1.683 | 11.11 | - | 11.11 | 2.77 | 2.78 |
| 0.849 | 1.208 | diver. | - | diver. | 3.911 | 13.89 | 10.56 | 11.11 | 3.57 | 3.33 |
| 0.8911 | 0.66 | 1.00 | 0.61 | 0.67 | 1.644 | 2.78 | 1.94 | 1.78 | 4.84 | 5.28 |
| 0.9 | 0.619 | 0.80 | 0.63 | 0.625 | 1.383 | 2.22 | 1.39 | 1.47 | 5.24 | 5.56 |
| 1.0 | 0.49 | 0.70 | - | 0.65 | -0.167 | 2.22 | 1.67 | 2.17 | 70.71 | 66.67 |
| 1.05 | 0.554 | diver. | - | diver. | -0.865 | 8.33 | - | 8.33 | 9.69 | 9.44 |
| 1.1 | 1.19 | diver. | - | diver. | -7.858 | 8.33 | - | 8.22 | 4.76 | 5.00 |
| 1.2 | 0.866 | 1.00 | 0.86 | 0.90 | -4.743 | 5.00 | - | 4.72 | 2.27 | 2.22 |
| 1.3 | 0.542 | 0.60 | 0.50 | 0.55 | -2.839 | 3.33 | 2.78 | 2.83 | 1.45 | 1.61 |
| 1.414 | 0.277 | 0.30 | 0.25 | 0.280 | -1.567 | 1.67 | 1.39 | 1.58 | 1.00 | 1.11 |
| 2.828 | 0.015 | 0.02 | - | 0.016 | -0.148 | 0.22 | - | 0.15 | 0.14 | 0.17 |
| 4.24 | 0.0058 | 0.015 | - | 0.006 | -0.059 | 0.10 | - | 0.06 | 0.06 | 0.08 |

Tabela IV-1 - Comparação entre as respostas no domínio do tempo e da frequência

$$\omega_p / \omega_s = 1.0, \xi_p = 0.0\% \text{ e } \bar{F} = 0.092$$

01: Dados obtidos a partir das equações de resposta em frequência.

02: Dados obtidos a partir das respostas no tempo.

.1: valor obtido por observação direta das respostas (gráficos).

.2: média entre o maior e o menor pico de resposta de $\bar{\theta}$ e de \bar{x} , para os casos onde há batimento.

.3: valor obtido por observação das respostas (gráficos) para um tempo maior.

Para os casos onde há o sinal - não foi possível calcular a média, pois não houve batimento. As células com * representam casos que não foram avaliados.

Nos casos onde houve batimento, fazendo as amplitudes iguais a média entre o maior e o menor pico da resposta no tempo elas se equiparam aquelas obtidas pela equação (IV-25).

Esses resultados mostram algumas diferenças entre uma análise feita no domínio do tempo e no domínio da frequência, mas não invalida os dois métodos, pois a partir de cada um deles pode-se extrair conclusões distintas.

Uma vez caracterizados os principais efeitos do pêndulo absorção na massa M , bem como o seu comportamento para diferentes frequências de excitação e ajustes com a estrutura, a partir das análises feitas no domínio do tempo e da frequência, parte-se agora para uma extensão desse sistema de absorção, originalmente em dois graus de liberdade, para n graus de liberdade, conforme será visto no próximo capítulo.

CAPÍTULO V

Implementação dos APNL's em Sistema Discretizado via MEF

V.1 Sistema Discretizado via MEF

Um sistema contínuo pode ser representado por um sistema equivalente discreto, como por exemplo, um mecanismo ou máquina, com um número de graus de liberdade conhecido, chamado de sistema discretizado.

A discretização é dada através de vários elementos que subdividem um sistema contínuo, geralmente nos casos em que a formulação direta das equações de movimento é de grande complexidade ou mesmo impossível de se determinar, em função da geometria ou de características do sistema mecânico estrutural.

A partir das matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez obtidas através dos mesmos procedimentos utilizados na análise estática de estruturas [12] chega-se à equação matricial diferencial de movimento, para um sistema com n graus de liberdade:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}} + \underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{\underline{F}} \quad (\text{V-1})$$

Essa equação diferencial de movimento de segunda ordem é o ponto de partida para a análise modal via método por elementos finitos.

O MEF é genericamente uma maneira pela qual uma estrutura contínua, geralmente complexa, é discretizada em vários elementos.

Tais elementos podem ser os mais diversos, dentre eles o elemento barra, cujo campo de deslocamentos ($\underline{\phi}_i$) é representado por funções de forma ou de interpolação que definem a configuração deformada do elemento.

Em função da caracterização do movimento desses elementos, é que se pode chegar até às equações de movimento da estrutura e, finalmente, às equações modais, donde se pode extrair as respostas dinâmicas da estrutura.

V.1.1 Equação de Movimento de um Elemento

Definidos os campos de deslocamentos, pode-se determinar a equação diferencial de movimento para um elemento, utilizando-se, por exemplo, o princípio de Hamilton [12]

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (V-2)$$

onde o somatório das energias conservativas e não conservativas é igual a zero.

Para um elemento barra, a partir da variação da Energia Cinética (T), da Energia Potencial (V) e do trabalho das forças não conservativas (W_{nc}) tem-se, por substituição na equação variacional do Princípio de Hamilton, a equação diferencial de movimento do elemento [12]:

$$\underline{\underline{m}}^e \ddot{\underline{u}} + \underline{\underline{c}}^e \dot{\underline{u}} + \underline{\underline{k}}^e \underline{u} = \underline{f}^e(t),$$

onde,

$\underline{f}^e(t)$ é o vetor de forças nodais associadas aos deslocamentos dinâmicos;

$\underline{\underline{k}}^e$ é a matriz de rigidez elástica mais a geométrica do elemento, no sistema referencial local;

$\underline{\underline{c}}^e$ é a matriz de amortecimento do elemento no sistema local e

$\underline{\underline{m}}^e$ é a matriz de massa consistente ou equivalente, no sistema local.

A partir daí, pode-se montar as equações de movimento da estrutura.

V.1.2 Equação de Movimento da Estrutura

A equação de movimento de uma estrutura completa, discretizada em elementos finitos, é obtida também na forma matricial a partir das matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento dos elementos, fazendo-se uso ainda da transformação do sistema de referência local para o global.

Com as contribuições dos vários elementos que chegam a um mesmo nó na estrutura, pode-se montar as suas matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez. Da mesma forma, monta-se o vetor de forças. Assim, a equação de movimento da estrutura na forma matricial é dada por:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\dot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \quad (\text{V-3})$$

Essa equação determina as acelerações, velocidades e deslocamentos da estrutura, originalmente contínua, através de cada nó discretizado, para um determinado vetor de forças nodais.

Em se tratando de vibração livre, tem-se:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (\text{V-4})$$

cujas soluções podem ser consideradas como harmônicas:

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}(t) = \underline{\underline{\bar{U}}}\cos(\omega t) \quad (\text{V-5})$$

onde ω é a frequência de oscilação e $\underline{\underline{\bar{U}}}$ é um vetor constante, definindo a forma modal de vibração.

Substituindo (V-5) em (V-4) chega-se ao problema de auto-valor

$$\left(\underline{\underline{\mathbf{K}}} - \omega^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}} \right) \underline{\underline{\bar{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (\text{V-6})$$

de onde se determinam as frequências naturais ao quadrado e os modos naturais de vibração da estrutura, respectivamente, os auto-valores e auto-vetores.

V.2 Superposição Modal

A seguir é apresentado um resumo do método da Superposição Modal baseado nas referências [12] e [16].

Com os modos naturais de vibração determinados, em função da análise de vibração livre do sistema, é possível se definir o deslocamento de um nó ao longo do tempo.

Esses modos, também conhecidos como formas modais, são constituídos por N deslocamentos principais ou amplitudes representativas de cada um dos N modos de

vibração, que são usadas como coordenadas generalizadas para exprimir qualquer conjunto de deslocamentos.

As formas modais e os auto-valores de uma estrutura discretizada são a base da superposição modal e trazem as vantagens de possuírem as propriedades de ortogonalidade e mostrarem boas soluções, utilizando-se poucas formas ou os principais modos de vibração.

Os modos naturais de vibração, quando multiplicados por cada uma das amplitudes modais Y_i , fornecem os deslocamentos da estrutura promovidos pelo modo

i . Chamando $\underline{\underline{U}}$ de $\underline{\underline{\phi}}_i$, tem-se:

$$\underline{\underline{U}}_i = \underline{\underline{\phi}}_i Y_i \quad (\text{V-7})$$

e o vetor deslocamento total é obtido pela soma de cada contribuição de um modo i .

Dessa forma:

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\phi}}_1 Y_1 + \underline{\underline{\phi}}_2 Y_2 + \dots + \underline{\underline{\phi}}_i Y_i = \sum_{i=1}^N \underline{\underline{\phi}}_i Y_i \quad (\text{V-8})$$

ou na notação matricial:

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{Y}} \quad (\text{V-9})$$

Esta equação permite que o vetor de coordenadas generalizadas $\underline{\underline{Y}}$ seja transformado em um vetor de coordenadas geométricas ou nodais $\underline{\underline{U}}$. Cada componente de $\underline{\underline{Y}}$ é chamada de coordenada normal da estrutura e pode ser determinada por:

$$Y_i = \frac{\underline{\underline{\phi}}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}}}{\underline{\underline{\phi}}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\phi}}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{V-10})$$

levando-se em consideração as propriedades de ortogonalidade com relação à matriz de massa.

As propriedades de ortogonalidade das formas modais podem ser genericamente escritas através de:

$$\underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{M}} \left[\underline{\mathbf{M}}^{-1} \underline{\mathbf{K}} \right]^b \underline{\phi}_j = 0, \quad -\infty < b < \infty \quad (\text{V-11})$$

Pode-se notar de (V-11) que a ortogonalidade com relação à matriz de massa é dada para $b = 0$, e com relação à matriz de rigidez, para $b = 1$.

$$\underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\phi}_j = 0, \quad i \neq j \quad (\text{V-12})$$

$$\underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\phi}_j = 0, \quad i \neq j \quad (\text{V-13})$$

Essas duas equações formam as principais propriedades das funções modais. Elas são usadas para simplificar as equações de movimento de um sistema de vários graus de liberdade. Em geral, essas equações de movimento têm a forma (V-3). Para um sistema não amortecido, as equações desacopladas ficam na forma (V-4).

Com a equação (V-9) e lembrando que as formas modais não mudam com relação ao tempo, tem-se:

$$\underline{\mathbf{M}} \underline{\Phi} \ddot{\underline{Y}}(t) + \underline{\mathbf{K}} \underline{\Phi} \dot{\underline{Y}}(t) = \underline{\mathbf{F}}(t) \quad (\text{V-14})$$

Multiplicando-se (V-14) por $\underline{\phi}_i^T$ e lembrando que os termos do lado esquerdo da equação resultante podem ser expandidos na forma:

$$\underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{U}} = \underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\phi}_1 Y_1 + \underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\phi}_2 Y_2 + \dots + \underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\phi}_j Y_j \quad (\text{V-15})$$

todos os termos, exceto o i -ésimo, serão iguais a zero, devido as propriedades de ortogonalidade. Isso resulta em:

$$\underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\phi}_i \ddot{Y}_i(t) + \underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\phi}_i Y_i(t) = \underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{F}}(t) \quad (\text{V-16})$$

onde,

$\underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\phi}_i = M_i$ é a coordenada normal de massa generalizada;

$\underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\phi}_i = K_i$ é a coordenada normal de rigidez generalizada e

$\underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{F}}(t) = F_i(t)$ é a força generalizada associada ao modo i .

Reescrevendo (V-16), tem-se

$$M_i \ddot{Y}_i(t) + K_i Y_i(t) = F_i(t) \quad (\text{V-17})$$

que é uma equação representativa do modo i , donde se pode extrair a frequência natural ao quadrado (auto-valor) associado a esse modo:

$$\omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i} \quad (\text{V-18})$$

Usa-se esse procedimento para se obter as equações de movimento para cada modo de vibração da estrutura. Assim, as coordenadas normais servem para transformar as N equações de movimento, originalmente acopladas, em outro sistema de N equações modais independentes. Resolvendo isoladamente cada equação modal e, em seguida, superpondo os resultados através de (V-9), tem-se, finalmente, a resposta dinâmica das coordenadas geométricas originais.

Esse é o chamado Método da Superposição Modal.

Quando o amortecimento é considerado, não se pode fazer uma aplicação desse método, exceto quando as equações são desacopladas, ao se fazer o amortecimento proporcional a massa ou a rigidez. A equação modal para vibração amortecida pode ser escrita na seguinte forma:

$$\ddot{Y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{Y}_i(t) + \omega_i^2 Y_i(t) = \bar{F}_i(t), \quad (\text{V-19})$$

onde $\xi_i = \frac{c_v}{2M_i \omega_i} + \frac{c_r \omega_i}{2E}$ é a taxa de amortecimento modal e

c_v é o amortecimento viscoso, da parte proporcional a massa;

c_r é o amortecimento interno da parcela proporcional a rigidez;

$C_i = c_v + c_r$ é o coeficiente de amortecimento modal e

$$\bar{F}_i(t) = \frac{F_i(t)}{M_i}$$

V.3 Implementação do Absorvor no Modelo Discretizado via MEF

O que se pretende apresentar a seguir é uma modelagem e implementação de um único absorvor no modelo estrutural discretizado via MEF de uma torre alta e esbelta. Essa implementação simplificada de apenas um absorvor justifica-se, no presente trabalho, pela aplicação e praticidade da solução do problema de redução de vibrações horizontais, que é a colocação de um absorvor numa seção próxima ao topo da torre. Para mais de um absorvor, com calibrações distintas, deve-se utilizar um método mais geral, como por exemplo, a sub-estruturação dinâmica, com introdução dos absorvores nos nós de ligação [1,13].

V.3.1 Formulação das Equações de Movimento da Estrutura com Absorvor

A formulação das equações de movimento da estrutura com absorvor tem como base o efeito que o pêndulo causa a essa estrutura e é desenvolvida a partir de uma analogia com o sistema de dois graus de liberdade, visto no capítulo II.

Neste sistema, o pêndulo está preso a uma massa principal M , cujo deslocamento x promove uma parcela de deslocamento angular θ .

Uma das ligações entre o sistema de dois graus de liberdade e o sistema discretizado é dada ao se fazer x equivalente ao deslocamento de um nó onde estará preso o pêndulo na estrutura. Outro vínculo entre esses dois sistemas é através das forças que surgem em função do movimento de m . Da mesma forma em que elas são transmitidas à massa principal M no sistema discreto, devem ser transferidas para um determinado ponto ou nó da estrutura discretizada.

Recorre-se à análise modal para se fazer uma equivalência entre as características físicas da estrutura e do sistema de dois graus de liberdade. Assim, as propriedades de massa, amortecimento e rigidez modais são equiparadas a M , C e K (Figura II-1) do sistema discreto.

Do DCL para o corpo de massa m na extremidade da haste, considerando as forças efetivas e de inércia (Figura V-1), pode-se escrever a expressão para a força na haste.

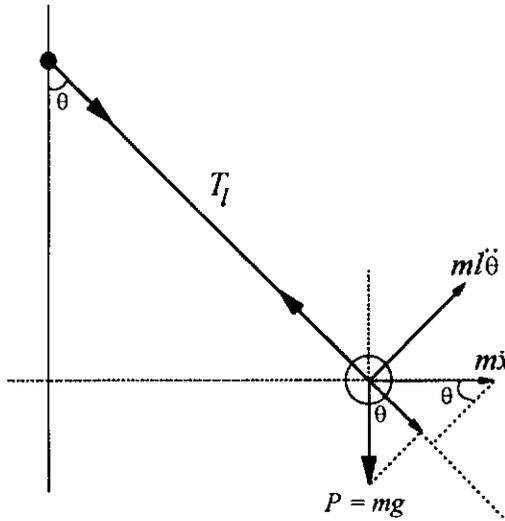


Figura V-1 - Forças que atuam na haste do pêndulo

T_1 é a componente da força peso na direção da haste. A força centrípeta é representada por T_2 , e T_3 é a componente na direção da haste da força promovida pela aceleração \ddot{x} de M sobre a massa m do pêndulo. Da figura, tem-se que:

$$T_1 = m g \cos \theta, \quad T_2 = m l \dot{\theta}^2, \quad T_3 = m \ddot{x} \sin \theta \quad (\text{V-20})$$

Essas componentes formam a força de tração na haste, dada por:

$$T_l = T_1 + T_2 + T_3 \quad (\text{V-21})$$

$$T_l = m \left(g \cos \theta + l \dot{\theta}^2 + \ddot{x} \sin \theta \right)$$

Dessa forma se tem a força gerada pelo movimento de m , atuante na massa principal, que pode ser decomposta em suas componentes horizontal e vertical.

$$T_h = T_l \sin \theta \quad (\text{V-22})$$

$$T_v = T_l \cos \theta$$

Considerando-se que o pêndulo deve atuar como um absorvedor de vibrações horizontais, a força que será transmitida à estrutura é tomada apenas como a componente horizontal T_h de T_i .

A equação modal que representa toda a estrutura em vibração é dada por:

$$M_i \ddot{Y}_i + \alpha M_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 M_i Y_i = \lambda(t) F_i \quad (\text{V-23})$$

onde α é o coeficiente de proporcionalidade entre o amortecimento e a massa e $\lambda(t)$ é uma função que define o tipo de carregamento dinâmico.

A equação que descreve o movimento do pêndulo, ligado a uma massa M é dado por:

$$ml^2 \ddot{\theta} + C_p \dot{\theta} + K_p \theta + ml \ddot{x} \cos \theta + mgl \sin \theta = 0 \quad (\text{V-24})$$

O sistema de absorção para estruturas discretizadas pode ser representado através do acoplamento dessas duas equações. Assim:

$$M_i \ddot{Y}_i + \alpha M_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 M_i Y_i = \lambda(t) F_i + T_h \quad (\text{V-25})$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + C_p \dot{\theta} + K_p \theta + ml \ddot{x} \cos \theta + mgl \sin \theta = 0$$

No entanto, a componente T_h é referente apenas a um nó estabelecido da estrutura e dessa maneira não pode ser acoplada a equação modal. Isso pode ser resolvido, criando-se um vetor que determina a posição nodal onde será instalado o pêndulo e transformando este vetor em um vetor de posição modal, através das funções de interpolação, ou seja:

$$L_i = \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{L} \quad (\text{V-26})$$

onde L_i é a posição modal do pêndulo.

Dessa forma o produto entre L_i e T_h fornece a intensidade da força produzida pelo pêndulo naquela posição.

O mesmo deve ser feito em relação ao termo \ddot{x} que aparece na segunda equação. Além disso, deve-se considerar que essa aceleração é correspondente a aceleração nodal no ponto onde está o absorvor. Com isso, o sistema passa a ser:

$$M_i \ddot{Y}_i + \alpha M_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 M_i Y_i = \lambda(t) F_i + L_i T_h(t) \quad (\text{V-27})$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + C_p \dot{\theta} + K_p \theta + ml \ddot{Y}_i L_i \cos \theta + mgl \sin \theta = 0$$

que representa, finalmente, as equações de movimento da estrutura com o pêndulo absorvor, para um sistema estrutural discretizado via MEF.

V.3.2 Algoritmo de Soluções das Equações

A implementação do absorvor em linguagem Fortran, aqui apresentada, foi realizada a partir do problema de excitação dinâmica sobre uma estrutura, discretizada em elementos de barra, e da análise modal para obtenção das respostas no tempo.

A seguir, são descritos os principais passos do algoritmo de análise dinâmica para estruturas planas, bem como as modificações básicas para a montagem do APNL.

Passo 1 - Leitura de Dados:

Por se tratar de uma análise numérica, torna-se necessário o fornecimento dos principais dados relativos à estrutura e à discretização. São eles: o número de nós, número de elementos e incidências, condições de contorno, nós carregados, intensidade da carga nodal, propriedades físicas e geométricas da estrutura (coordenadas, área, inércia, módulo de elasticidade, ...);

- Leitura das características do absorvor (massa, amortecimento, rigidez, comprimento da haste, ...);
- Criação de uma variável correspondente ao número de pêndulos (NNP) colocados na estrutura. A princípio, este número é fixo em apenas um absorvor;
- Criação de uma variável de leitura do posicionamento do absorvor (NNT) na estrutura, ou seja, o nó onde o pêndulo está conectado.

Passo 2 - Formação dos Vetores de Forças Nodais:

Uma vez conhecidos os nós onde há forças aplicadas, torna-se necessário montar o vetor que caracteriza todo o carregamento atuante na estrutura, colocando estas forças em cada respectivo grau de liberdade .

- Lembrando que o pêndulo é responsável pelo surgimento de forças que também agem na estrutura, em posição conhecida, criou-se um vetor para associar esta localização em relação a todos os outros nós, chamado de vetor de força unitária do pêndulo. Ele contém o valor 1 na direção horizontal de movimento e zero nas demais direções daquele nó (vertical e de rotação). Isso significa que será desprezada a parcela de esforço vertical promovida pelo movimento do absorvedor e, obviamente, não há esforço rotacional. Como a intensidade da força horizontal depende do próprio deslocamento angular, de m e de l , adota-se 1 para a posição correspondente ao ponto de ligação da haste com a estrutura.

- Ainda aqui é criado o vetor-posição do pêndulo, para indicar o grau de liberdade horizontal da estrutura que também promove o deslocamento angular, no sistema referencial global. Este vetor, tal como o vetor de força unitária, é todo preenchido por zeros, exceto na posição equivalente ao grau de liberdade horizontal, correspondente ao nó onde está preso o absorvedor.

Passo 3 - Montagem das Matrizes de Rigidez e de Massa da Estrutura:

Essa montagem é feita a partir das contribuições de cada elemento discretizado da estrutura, resultando nas matrizes globais de massa e de rigidez [12], considerando-se que as características do absorvedor não interferem nessas propriedades de rigidez e massa da estrutura.

Passo 4 - Imposição das Condições de Contorno.

Passo 5 - Análise Modal:

A partir das matrizes de massa e de rigidez da estrutura, são extraídas as suas propriedades modais, com os auto-valores e auto-vetores, de onde se tem as frequências naturais ω_i e as funções de forma ou de interpolação ϕ_i .

As formas modais são representadas por matrizes quadradas, de ordem igual ao número de graus de liberdade da estrutura e, para cada modo i , há uma frequência natural associada.

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{ngl} \\ \sim & \sim & & \sim \end{bmatrix} \quad \phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \\ \vdots \\ \phi_{ingl} \end{bmatrix} \quad \phi_i^n = \frac{1}{\phi_{ij}} \phi_i$$

ϕ_i^n é a forma modal i , normalizada.

A normalização da função de forma é feita através da divisão de cada elemento desse vetor pelo elemento de maior valor absoluto. Dessa maneira, os vetores normalizados são formados por 1 e frações de unidade, sendo o elemento de valor unitário equivalente à coordenada representativa daquele modo i .

Passo 6 - Montagem dos Vetores de Forças Generalizadas:

$$\tilde{F} = \phi_i^T \tilde{F}$$

- Segue ainda a montagem do vetor de força unitária generalizada e da posição generalizada do pêndulo.

$$\tilde{L} = \phi_i^T \tilde{L}$$

Último Passo - Solução das Equações:

Chega-se, finalmente, a solução das equações que representam a estrutura discretizada com o absorber, obtida via Método de Integração Numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem. Tem-se da análise modal, portanto, os deslocamentos da estrutura e do absorber que são dados por:

$$\underline{U} = \tilde{\Phi} \underline{Y}$$

$$\theta = \sum_{i=1}^m Y_{i+m}, \quad m = \text{número de modos considerados na superposição modal.}$$

CAPÍTULO VI

Aplicação Prática do Pêndulo Absorvor em Torres Esbeltas

Torres altas e esbeltas, em aço ou em concreto, ou mistas, têm sido projetadas para satisfazer a exigências que a tecnologia impõe, como por exemplo, torres de telecomunicação.

Torres desse tipo, mormente em aço, apresentam grandes níveis de vibração, seja por abalos sísmicos ou por ação do vento, devido ao amortecimento relativamente baixo que possuem. Daí a razão de se tentar controlar as amplitudes de vibração, recorrendo-se, basicamente, ao uso de absorvores.

Diversos aspectos devem ser considerados ao se usar um absorvor para redução de vibrações em estruturas tipo torre. Critérios de cálculo de projeto, proteção, posicionamento e forma estrutural do absorvor são alguns deles.

Em muitos casos, o absorvor deve ser posicionado nas seções mais altas do fuste da torre, sendo alojados na parte de dentro, onde não são observadas grandes diferenças de temperatura, o que torna adequado o uso de diversos amortecedores tipo viscoso. Nestes casos, a instalação permite que se faça uma inspeção sistemática para a manutenção dos absorvores. Mas, por outro lado, a eficiência de redução é relativamente baixa, principalmente nos casos em que as torres apresentam o fuste muito rígido, onde os deslocamentos são menores que aqueles da parte mais alta da torre, a antena.

Pode-se aumentar a sua eficiência, colocando-se o absorvor na antena, mas aparecem dificuldades relativas a manutenção, parâmetros de estabilidade e espaço suficiente para o movimento requerido.

Aliás, esta última condição é considerada um dos aspectos mais importantes do projeto de um absorvor pendular, pois ela envolve a frequência natural da estrutura, a forma estrutural do absorvor e o fator de amortecimento, que serve para limitar as amplitudes angulares, muitas vezes mais importantes que a eficiência de absorção.

Como aplicação prática apresentada neste capítulo, tem-se o pêndulo instalado em uma torre de televisão, submetida a ação do vento, com excitação por vorticidade.

Primeiro é feita uma descrição das principais características da torre, e em seguida, do tipo de carregamento, dados necessários ao dimensionamento do pêndulo.

Os resultados obtidos a partir da formulação vista no capítulo anterior serão analisados, basicamente sob o enfoque de eficiência, posicionamento e movimento do absorvor, levando-se em consideração as características da torre avaliada.

VI.1 Torre de Telecomunicações

A torre que será analisada aqui tem seus principais dados baseados na torre de televisão Alma-Ata [22], construída em Alma-Ata, no Cazaquistão, no início da década de 80, com 362.7 m de altura. Esta torre é toda em tubos metálicos, com trechos de seção transversal constante e massa uniformemente distribuída, apresentando uma variação de diâmetro que vai de 18.5 m na base a 0.72 m no topo.

A torre foi discretizada com 49 nós, que geram 48 elementos, de comprimento em média igual a 7.5 m.

A base tem 38.5 m de altura, com 5 elementos de seções transversais distintas. O fuste está dividido em duas partes: uma com diâmetro externo igual a 13.0 m e comprimento igual a 136.0 m; a outra, com 73.5 m de comprimento e $D_{ext} = 12.0$ m. Daí para cima, tem-se a parte da antena da torre.

A discretização e o esquema geral da torre podem ser vistos na Figura VI-1, que mostra também os diâmetros e a espessura de cada trecho, com as massas distribuídas uniformemente, e uma possível indicação do posicionamento do pêndulo.

Considera-se que a área e o momento de inércia da torre são calculados para tubos cilíndricos:

$$A = \pi e (D_{ext} - e)$$

$$I = \pi/64 (D_{ext}^4 - (D_{ext} - 2e)^4)$$

e que a estrutura é toda em aço, cuja massa específica e módulo de elasticidade são

$$\rho = 7.85 \text{ t/m}^3; E = 2.10 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2.$$

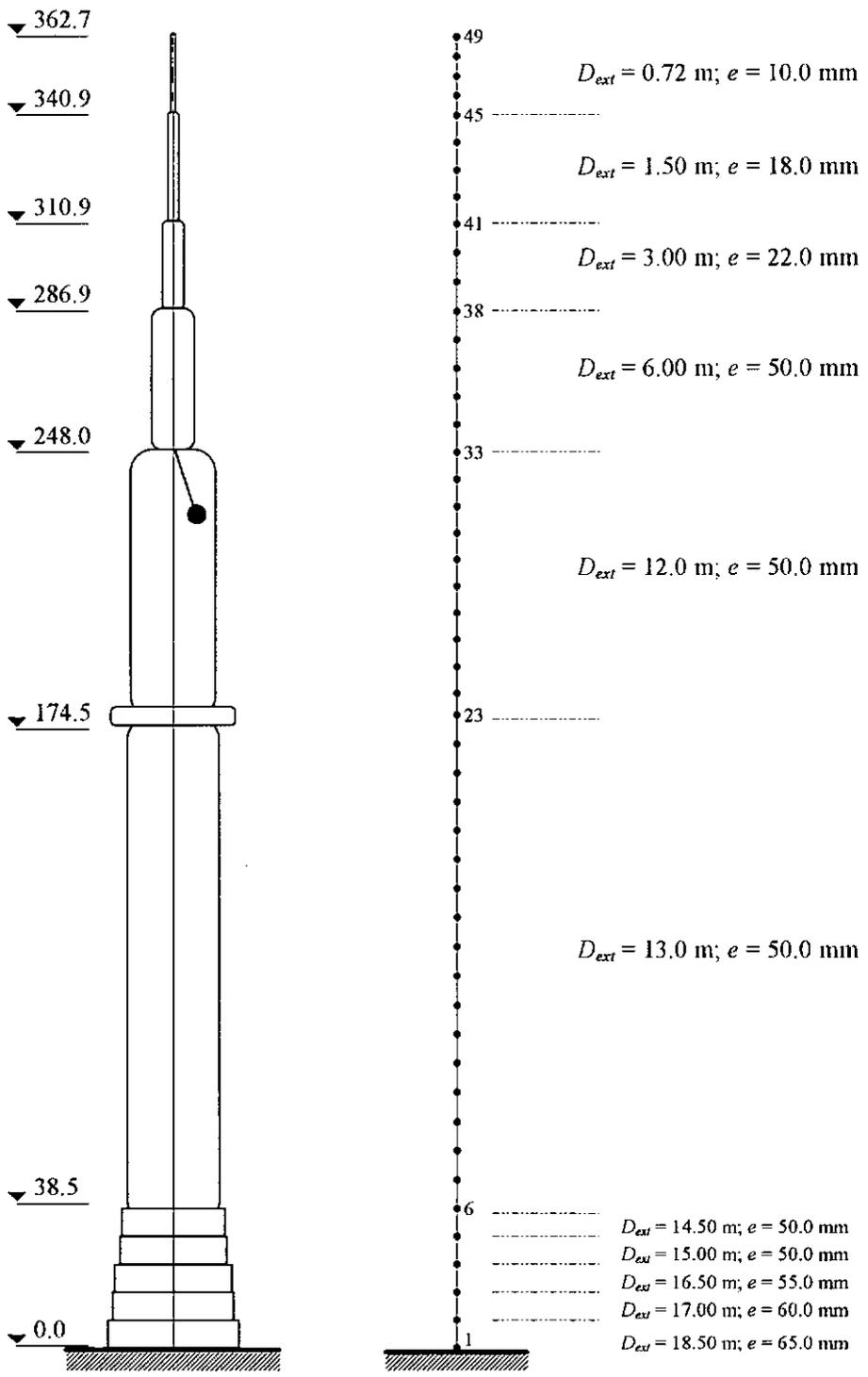


Figura VI-1 - Esquema geral, seções transversais e discretização da Torre de televisão

Com esses dados, a massa total da torre, considerando somente os tubos de aço, sem os elementos de ligação, contraventamento e outros, é igual a 4473.9 t.

A análise em vibração livre da torre fornece as três primeiras frequências naturais iguais a:

$$\omega_1 = 1.2854 \text{ rad/s ou } f_1 = 0.20 \text{ Hz};$$

$$\omega_2 = 4.4765 \text{ rad/s ou } f_2 = 0.71 \text{ Hz e}$$

$$\omega_3 = 7.2103 \text{ rad/s ou } f_3 = 1.15 \text{ Hz.}$$

As propriedades modais, obtidas pela multiplicação matricial entre as funções de interpolação normalizadas e as matrizes de massa e rigidez, são iguais a:

$$M_1 = 313.6 \text{ t} \quad K_1 = 518.2 \text{ t/s}^2 \text{ ou kN/m};$$

$$M_2 = 3.0 \text{ t} \quad K_2 = 61.21 \text{ t/s}^2;$$

$$M_3 = 9.8 \text{ t} \quad K_3 = 508.9 \text{ t/s}^2;$$

O amortecimento da torre foi feito proporcional à massa, com $\xi_i = \alpha/2\omega_i$.

Fazendo $\xi_1 = 1\%$, $\alpha = 0.025708 \text{ 1/s}$. Portanto:

$$C_1 = 8.062 \text{ t/s (kN s/m)};$$

$$C_2 = 0.0785 \text{ t/s};$$

$$C_3 = 0.2516 \text{ t/s.}$$

A investigação também revelou que a torre é bastante flexível no topo, e apresenta como modo predominante, o primeiro.

VI.2 Descrição do Carregamento Dinâmico

As principais ações de efeito dinâmico que atuam numa torre desse tipo são os abalos sísmicos e a ação do vento, ambas de natureza aleatória e de difícil caracterização.

Neste trabalho será utilizado o carregamento dinâmico provocado pelo vento e, diante do objetivo principal que é mostrar o efeito do pêndulo na estrutura, serão feitas algumas simplificações para essa descrição, mas com uma aproximação que não foge muito da situação mais condizente com a real.

A ação do vento em estruturas pode ser analisada sob distintos aspectos, pois trata-se de uma ação natural, de comportamento aleatório e de uma formulação baseada em critérios estatísticos, que dependem das condições climáticas da região, características da superfície, entre outros fatores [14].

Essas ações podem gerar vibrações aleatórias ao longo do fluxo do vento, na direção transversal ao fluxo do vento, por arrasto, turbulência ou vibrações induzidas por vorticidade.

A aproximação feita aqui é referente aos casos de vibrações induzidas por vorticidade [15].

Essa vorticidade atuando, por exemplo, numa superfície cilíndrica, faz com que os vórtices sejam difundidos ora num lado do cilindro, ora noutro, formando diferenças de pressão que são impostas a ele.

Para uma velocidade (V) de fluxo livre do vento, que se aproxima de uma superfície cilíndrica de diâmetro D , a frequência de desprendimento de vórtices (f_v) pode ser relacionada com V e D através do número de Strouhal (S). Essa relação é dada por:

$$f_v = \frac{SV}{D} \quad (\text{VI-1})$$

Esse número é função do número de Reynolds, e para vibrações induzidas por vorticidade em um cilindro, $S \cong 0.2$.

Quando essa frequência aproxima-se da frequência natural f_n de uma estrutura, ocorre o que se chama de trancamento de f_v , ou seja, ela continua vibrando com frequência f_n mesmo para f_v um pouco maior que f_n . A vibração induzida por vorticidade pode gerar grandes amplitudes de vibração na estrutura.

Para caracterizar a força transversal ao fluxo, induzida por vorticidade à estrutura, recorreu-se ao modelo proposto por Blevins [15].

Essa força é dada por:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho_f V^2 D C_L \text{sen}(\omega_v t), \quad (\text{VI-2})$$

onde,

ρ_f é a massa específica do fluido;

V é a velocidade do vento, ao longo da altura;

D é o diâmetro do cilindro;

C_L é o coeficiente de deslocamento lateral, adimensional;

ω_v é igual a frequência de desprendimento de vórtice (rad/s) e

F_L é a força lateral (perpendicular ao fluxo principal) por unidade de comprimento do cilindro.

A variação da velocidade do vento com a altura é representada pela lei exponencial [14]:

$$V = V_o \left(\frac{h}{H_o} \right)^p, \quad (\text{VI-3})$$

onde V_o é a velocidade do vento medida a uma altura H_o acima do solo e p é uma constante associada à topografia da região ($0.1 < p < 0.4$).

As forças que atuam na torre serão calculadas a partir de (VI-2), para cada seção de diâmetro externo D_{ext} , ao longo da altura (Figura VI-2b), fazendo-se, em seguida, uma distribuição dessas forças para cada nó (Figura VI-2c).

A velocidade V será tomada como a média entre a velocidade na altura do nó inferior e do nó superior de cada elemento discretizado na torre (Figura VI-2a). Essa velocidade média (V_m) será ainda usada no cálculo da frequência de vórtice para o respectivo elemento, juntamente com seu diâmetro.

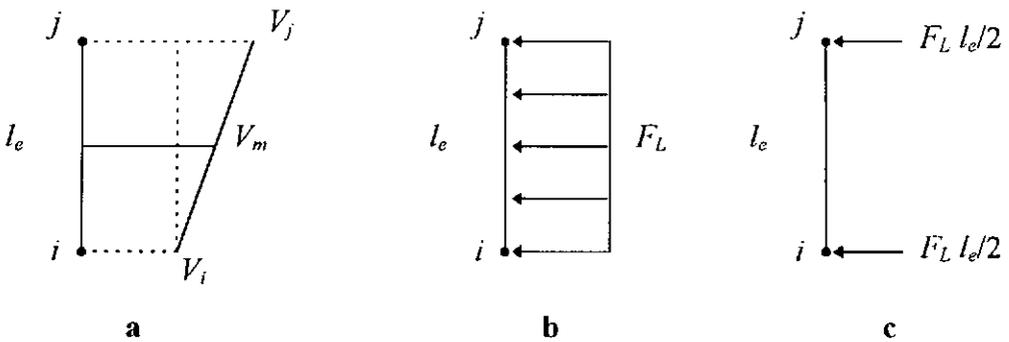


Figura VI-2 - Representação da velocidade média e da força lateral do vento na estrutura

Na Figura VI-2 tem-se que:

i e j são os nós que incidem no elemento, de comprimento l_e ;

V_i e V_j são as velocidades do vento na altura dos nós i e j , respectivamente, obtidas por (VI-3);

F_L é a força lateral por unidade de comprimento no elemento de diâmetro D_{ext} .

Para a variação da velocidade V , adotou-se uma velocidade $V_o = 5.3$ m/s (= 19.08 km/h), a uma altura $H_o = 10.0$ m, com $p = 0.3$. O coeficiente de deslocamento lateral foi adotado igual a 1.0 [15] e a densidade do ar, igual a 1.25 kg/m³, para o cálculo de F_L .

A tabela a seguir mostra as velocidades médias, as frequências de desprendimento de vórtices e a intensidade da força lateral por elemento. A quarta coluna é a relação entre ω_v e a frequência natural do primeiro modo da estrutura.

| elemento | V_m (m/s) | ω_v (rad/s) | ω_v/ω_1 | \bar{F}_L (kN/m) |
|----------|-------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| 1 | 2.45 | 0.17 | 0.13 | 535.29 |
| 2 | 5.47 | 0.40 | 0.31 | 2448.63 |
| 3 | 6.43 | 0.49 | 0.38 | 3281.06 |
| 4 | 7.13 | 0.60 | 0.46 | 3665.50 |
| 5 | 7.69 | 0.67 | 0.52 | 4127.08 |
| 6 | 8.18 | 0.79 | 0.62 | 4348.60 |
| 7 | 8.62 | 0.83 | 0.65 | 4825.34 |
| 8 | 9.01 | 0.87 | 0.68 | 5272.22 |
| 9 | 9.36 | 0.90 | 0.70 | 5694.95 |
| 10 | 9.69 | 0.94 | 0.73 | 6097.58 |
| 11 | 9.99 | 0.97 | 0.75 | 6483.13 |
| 12 | 10.27 | 0.99 | 0.77 | 6853.90 |
| 13 | 10.53 | 1.02 | 0.79 | 7211.71 |
| 14 | 10.78 | 1.04 | 0.81 | 7558.02 |
| 15 | 11.02 | 1.07 | 0.83 | 7894.04 |
| 16 | 11.25 | 1.09 | 0.85 | 8220.75 |
| 17 | 11.46 | 1.11 | 0.86 | 8539.01 |
| 18 | 11.67 | 1.13 | 0.88 | 8849.54 |
| 19 | 11.87 | 1.15 | 0.89 | 9152.96 |
| 20 | 12.06 | 1.17 | 0.91 | 9449.81 |
| 21 | 12.24 | 1.18 | 0.92 | 9740.56 |
| 22 | 12.42 | 1.20 | 0.93 | 10025.63 |
| 23 | 12.58 | 1.32 | 1.03 | 8730.35 |
| 24 | 12.74 | 1.33 | 1.04 | 8944.75 |
| 25 | 12.89 | 1.35 | 1.05 | 9155.77 |
| 26 | 13.03 | 1.36 | 1.06 | 9363.60 |
| 27 | 13.17 | 1.38 | 1.07 | 9568.39 |
| 28 | 13.31 | 1.39 | 1.08 | 9770.30 |

| elemento | V_m (m/s) | ω_v (rad/s) | ω_v/ω_1 | \bar{F}_L (kN/m) |
|----------|-------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| 29 | 13.45 | 1.41 | 1.10 | 9969.46 |
| 30 | 13.58 | 1.42 | 1.11 | 10166.01 |
| 31 | 13.71 | 1.44 | 1.12 | 10360.05 |
| 32 | 13.84 | 1.45 | 1.13 | 10551.70 |
| 33 | 13.96 | 2.92 | 2.27 | 5687.61 |
| 34 | 14.09 | 2.95 | 2.30 | 5792.38 |
| 35 | 14.22 | 2.98 | 2.32 | 5895.91 |
| 36 | 14.34 | 3.00 | 2.34 | 5998.24 |
| 37 | 14.46 | 3.03 | 2.36 | 6099.42 |
| 38 | 14.58 | 6.11 | 4.75 | 3188.12 |
| 39 | 14.70 | 6.16 | 4.79 | 3240.44 |
| 40 | 14.81 | 6.21 | 4.83 | 3292.21 |
| 41 | 14.93 | 12.50 | 9.73 | 1566.50 |
| 42 | 15.03 | 12.59 | 9.80 | 1588.80 |
| 43 | 15.14 | 12.68 | 9.87 | 1610.89 |
| 44 | 15.24 | 12.77 | 9.93 | 1632.79 |
| 45 | 15.33 | 26.75 | 20.81 | 576.06 |
| 46 | 15.40 | 26.88 | 20.91 | 581.53 |
| 47 | 15.47 | 27.00 | 21.01 | 586.96 |
| 48 | 15.54 | 27.12 | 21.10 | 592.35 |

Com a determinação de F_L , as forças na torre foram transformadas em forças concentradas em cada nó.

Considerando-se que o modo predominante da estrutura é o primeiro, adotou-se o seguinte critério para definir o carregamento final na estrutura:

- tomar apenas as frequências próximas a ω_1 ;
- calcular a média entre essas frequências, usando essa média como frequência de excitação na função harmônica senoidal e
- adotar somente as cargas concentradas nos nós respectivos a cada ω_v , ponderado.

Dessa maneira, observando as relações entre ω_v e ω_1 na tabela anterior e escolhendo aquelas situadas entre 0.8 e 1.2, os elementos representativos estão entre o 13 e o 32, o que dá uma média para ω_v igual a 1.25 rad/s.

A Figura VI-3 mostra a distribuição das forças de ação do vento, calculadas em função dos dados e considerações previamente apresentados, destacando em setas cheias aquelas utilizadas para o cálculo final das respostas dinâmicas.

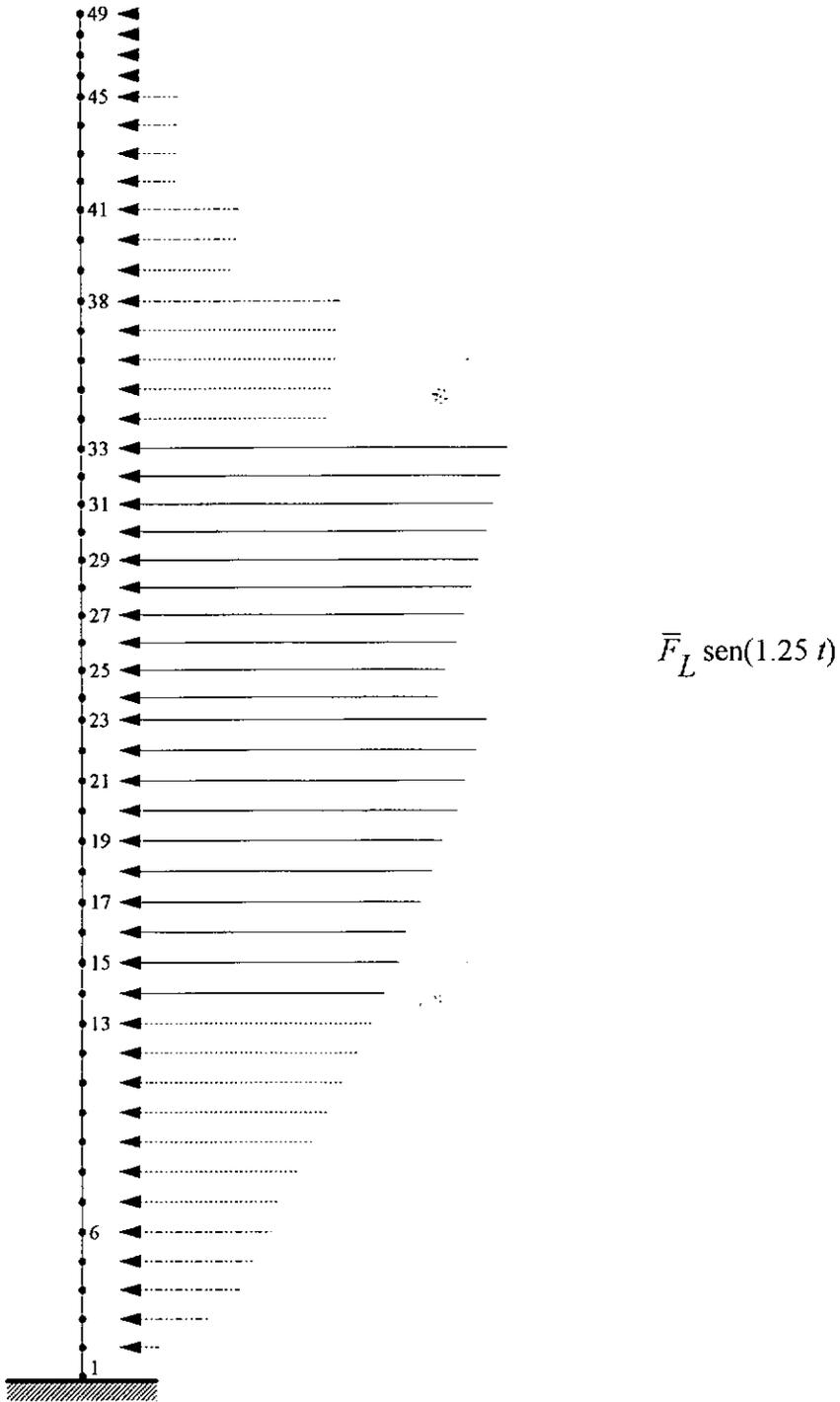


Figura VI-3 - Esquema da Distribuição das Forças de Ação do Vento na Estrutura

VI.3 Dimensionamento do Pêndulo

Após a determinação das cargas atuantes na estrutura, tem-se agora uma avaliação das respostas obtidas para o sistema estrutural original e com o absorvor.

Por se tratar de uma estrutura onde a presença humana não é um fator preponderante, o sistema de absorção não será direcionado para o controle de acelerações, mas de deslocamento, com a observação dos deslocamentos no topo da torre e no nó onde será instalado o absorvor.

Como já foi dito, o modo predominante da estrutura é o primeiro. Isto se confirmou não só pelo tipo de excitação imposta, mas também pela alta flexibilidade na parte da antena da torre, onde se tem os maiores deslocamentos.

No nó 49, as amplitudes de deslocamentos chegaram a 2.0 m, para o sistema sem absorvor.

Como a excitação por vorticidade é dada numa frequência muito próxima da natural da estrutura (ω_s), pode-se fazer um pré-dimensionamento do pêndulo, ajustando-o com ω_s . Essa situação de calibração está enquadrada nos casos de ressonância e permite que sejam obtidos excelentes níveis de redução, conforme se viu no capítulo III. Então, calibrando com C_p e K_p , inicialmente, iguais a zero, tem-se:

$$\omega_p \cong \omega_1 \cong \omega_e \text{ e } l = g/\omega_p^2$$

Dai

$$l \cong 5.9 \text{ m, usando } \omega_1 \text{ ou } l \cong 6.3 \text{ m, usando } \omega_e.$$

Uma discussão sobre o posicionamento do pêndulo na torre pode ser feita a partir desse pré-dimensionamento e de sua massa m , adotada em torno de 1% de M_{total} .

A investigação revelou que, com o pêndulo colocado nos nós 33 (248 m de altura), 35 (263.56 m) e 49 (topo), a estrutura apresenta os menores níveis de deslocamento na ordem crescente dos nós. O mesmo ocorre para as amplitudes angulares.

Observou-se ainda que os deslocamentos alcançados no topo, com absorvor de massa igual a 50 t, são bastante próximos daqueles obtidos com um pêndulo de massa 30 t, mas a relação das respectivas amplitudes de deslocamento angular é cerca de 0.6.

Com um comprimento igual a 6.30 m, as amplitudes máximas de θ , para que não haja choque com as paredes dos tubos, sem levar em consideração as dimensões da massa m , devem ser iguais a:

$$\bar{\theta} = 0.06 \text{ rad, para instalação no interior do tubo de } 0.72 \text{ m (topo);}$$

$$\bar{\theta} = 0.12 \text{ rad, com pêndulo dentro do tubo de } 1.5 \text{ m de diâmetro;}$$

$$\bar{\theta} = 0.24 \text{ rad, para o } D_{ext} = 3.0 \text{ m;}$$

$$\bar{\theta} = 0.50 \text{ rad, para instalação dentro do tubo de } 6.0 \text{ m de diâmetro e}$$

$$\bar{\theta} = 1.26 \text{ rad, com } D_{ext} = 12.0 \text{ m.}$$

Considerando-se a possibilidade de θ trabalhar no regime não-linear, além das dimensões de m , adotou-se, aqui, a colocação do pêndulo no nó mais alto do fuste: nó 33, a 248 m de altura e $D_{ext} = 12 \text{ m}$. A necessidade de manutenção do sistema implicaria numa posição mais abaixo, mas uma perda de eficiência em função disso também leva à escolha do nó 33. A massa adotada é igual a 30 t, cerca de 0.6% de M_{total} , levando a uma relação com a massa modal M_1 , $\mu = 0.09$.

Com as definições da massa e do posicionamento do pêndulo, resta agora adotar o seu comprimento em função das relações de frequência e observar as respostas no tempo.

O gráfico a seguir mostra os resultados de deslocamento no topo da torre, para um ajuste do pêndulo com a estrutura, ou seja, $l = 5.9 \text{ m}$.

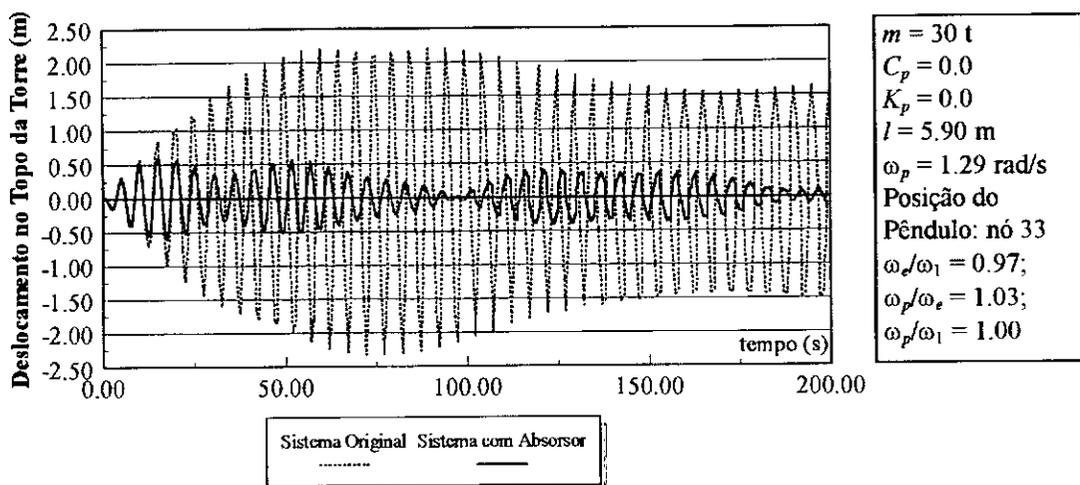


Gráfico VI-1 - Deslocamento da Estrutura para Sistema Original e com Absorvor

O deslocamento angular (Gráfico VI-2) não ultrapassa 0.70 rad, o que torna possível a sua instalação no nó 33. O deslocamento máximo horizontal do pêndulo é igual 3.80 m em cada lado. Nessa posição, o pêndulo não excita os demais modos da estrutura, pois ω_2 e ω_3 são muito maiores que ω_p , além do que o primeiro modo é dominante. Essa preocupação é importante quando as frequências naturais da estrutura são próximas.

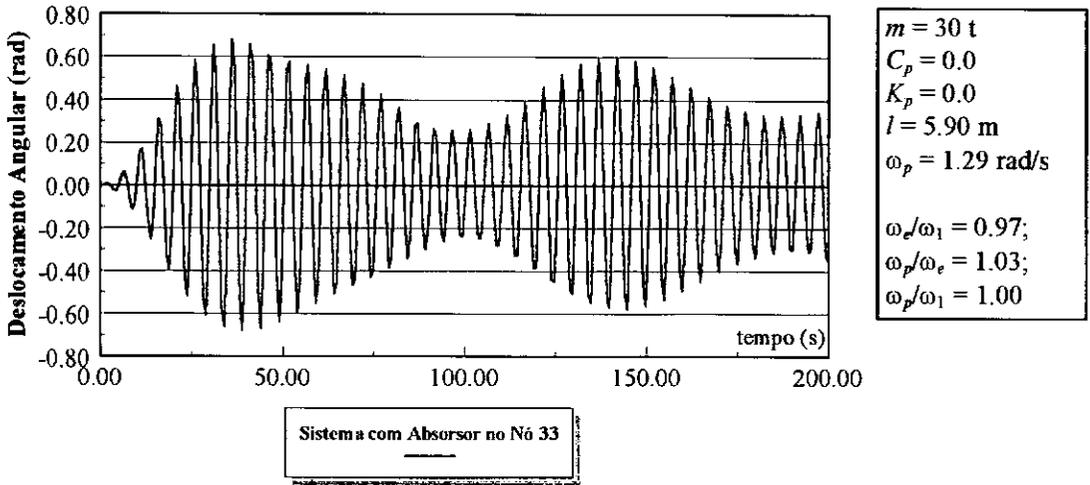


Gráfico VI-2 - Deslocamento do Pêndulo com $\xi_p = 0.0$, $K_p = 0.0$ e $l = 5.90$ m

O nível de redução obtido é alto e as oscilações da estrutura acompanham o batimento presente em θ . Esse batimento pode ser eliminado com o uso de C_p . O Gráfico VI-3 mostra a resposta de θ , para $C_p = 269.179$ kN m s / rad ($\xi_p = 10.0\%$).

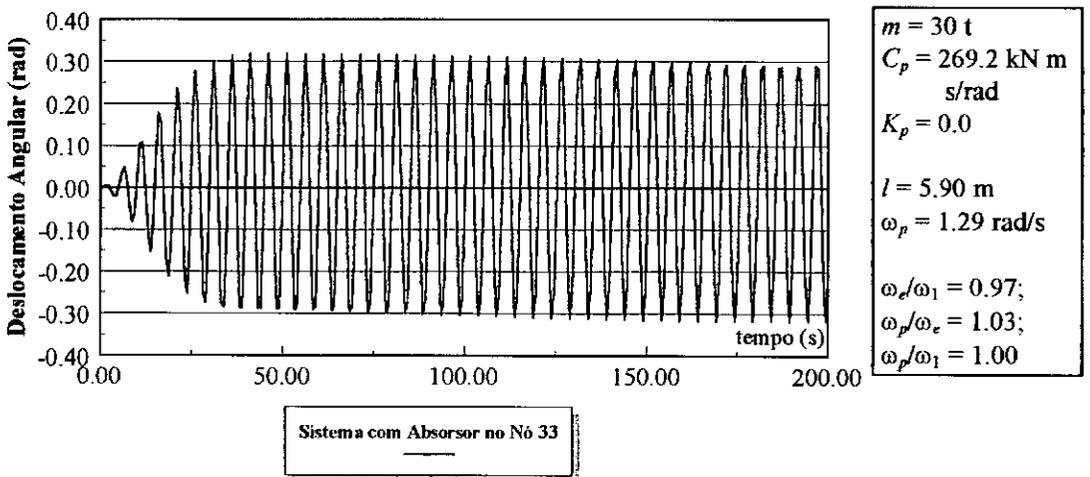


Gráfico VI-3 - Deslocamento do Pêndulo com $\xi_p = 10.0\%$, $K_p = 0.0$ e $l = 5.90$ m

Também a resposta da estrutura sofre uma mudança nas oscilações quanto ao batimento, mas a eficiência do sistema de absorção é menor, conforme se pode ver no Gráfico VI-4 a seguir:

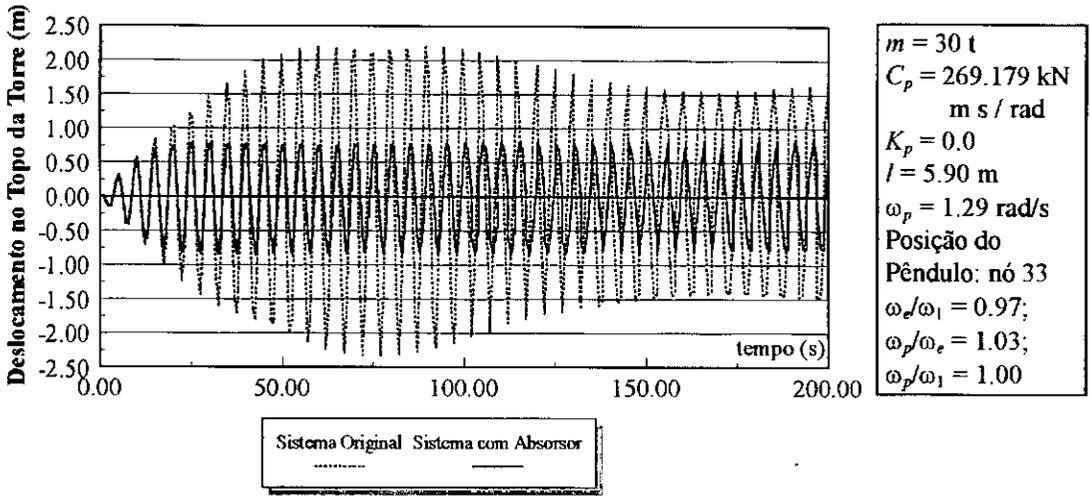


Gráfico VI-4 - Deslocamento da Estrutura para Sistema Original e com Absoridor

Essa diminuição na absorção de vibração é dada pela necessidade que o pêndulo tem de se movimentar e criar as forças de oposição ao movimento da estrutura, na intensidade coerente com a solicitação.

A presença de rigidez no pêndulo tem uma significativa importância em seu movimento pois ela interfere nas relações de frequência, podendo levar o sistema a uma certa instabilidade e conseqüente perda de eficiência. No entanto, ela pode ser utilizada para calibrar a frequência do pêndulo, se necessário for, durante a sua instalação ou durante a sua vida útil. K_p terá o papel de diminuir θ , quando as relações de frequência forem favoráveis à redução de vibrações, vistas no capítulo III.

Para a torre em questão, usando-se um $K_p = 100.0 \text{ kN m/rad}$ ($\omega_p = 1.33 \text{ rad/s}$) e $C_p = 0$, os deslocamentos angulares aumentaram em função da mudança nas relações de frequência ($\omega_e/\omega_1 = 0.97$, $\omega_p/\omega_e = 1.06$ e $\omega_p/\omega_1 = 1.03$), com uma conseqüente perda de eficiência na absorção, conforme se pode ver no Gráfico VI-5. O momento máximo gerado na torre para este valor de K_p pode ser desprezado para uma seção transversal de $D_{ext} = 12.0 \text{ m}$ e $e = 50.0 \text{ mm}$, não considerado, portanto, como força externa atuante na estrutura.

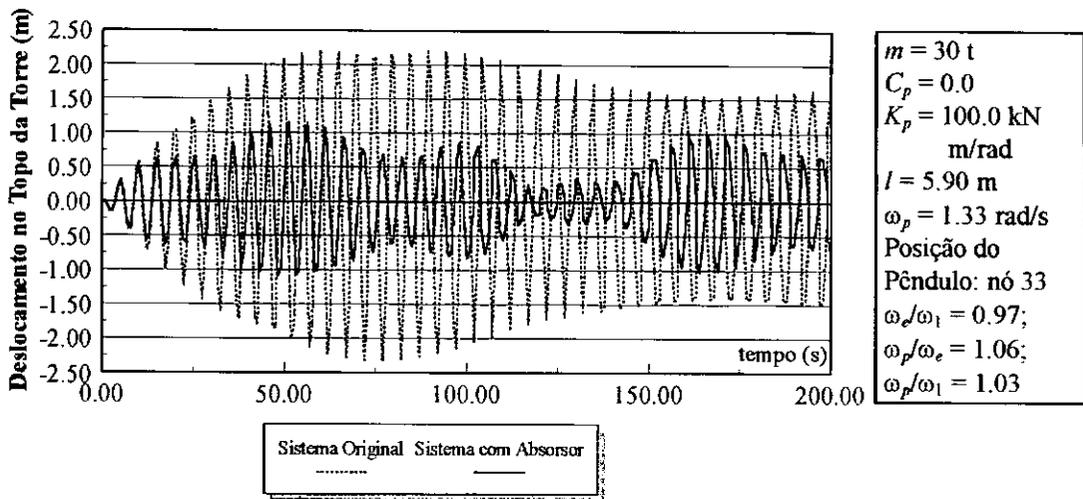


Gráfico VI-5 - Deslocamento da Estrutura para Sistema Original e com Absorvor

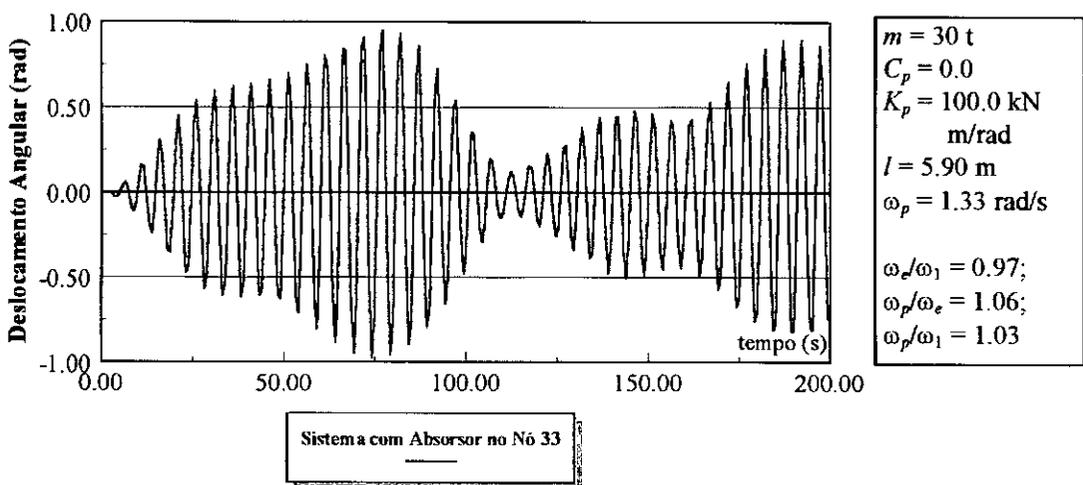


Gráfico VI-6 - Deslocamento do Pêndulo com $\xi_p = 0.0$, $K_p = 100.0 \text{ kN m/rad}$ e $l = 5.90 \text{ m}$

Nota-se que os deslocamentos angulares aproximam-se muito do limite estabelecido para θ . O deslocamento horizontal total para este caso atinge aproximadamente 10.0 m. Para corrigir ou melhorar tanto o nível de deslocamento angular, quanto a eficiência na redução de vibrações da estrutura, pode-se fazer uma reavaliação de l , utilizando-se a equação (III-1). Essa medida impõe um acréscimo em l , na proporção do valor de K_p , mas faz com que as relações de frequência retornem àquelas iniciais e mais favoráveis. Assim:

$$l = 6.22 \text{ m} \cong 6.20 \text{ m}, \text{ para que } \omega_p = 1.29 \text{ rad/s}.$$

Os gráficos a seguir mostram os resultados para a reavaliação de l .

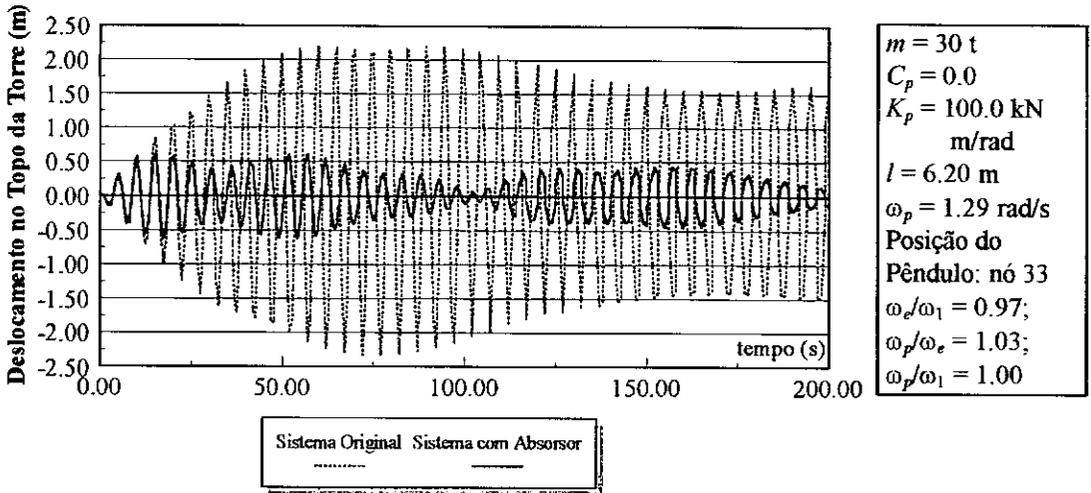


Gráfico VI-7 - Deslocamento da Estrutura para Sistema Original e com Absorvedor

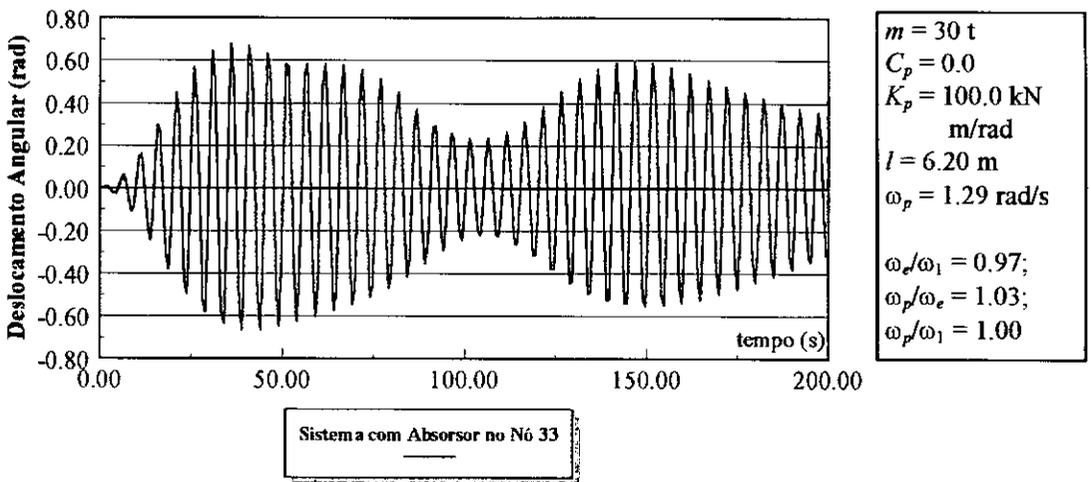


Gráfico VI-8 - Deslocamento do Pêndulo com $\xi_p = 0.0$, $K_p = 100.0 \text{ kN m/rad}$ e $l = 6.20 \text{ m}$

A redução aqui chega a 75 % na fase inicial de movimento e a 66.7% no estado de regime. Mais uma vez aparece um batimento em θ e na estrutura.

Utilizando-se amortecimento C_p não só para estabilizar o movimento, mas também para limitar θ , na possibilidade de variações na intensidade das forças de ação do vento, tem-se, finalmente, um sistema de absorção que inclui todas as propriedades

físicas do pêndulo. Na verdade, em um sistema prático real devem ser contempladas todas essas propriedades.

O gráficos a seguir mostram os novos resultados com a inclusão de C_p .

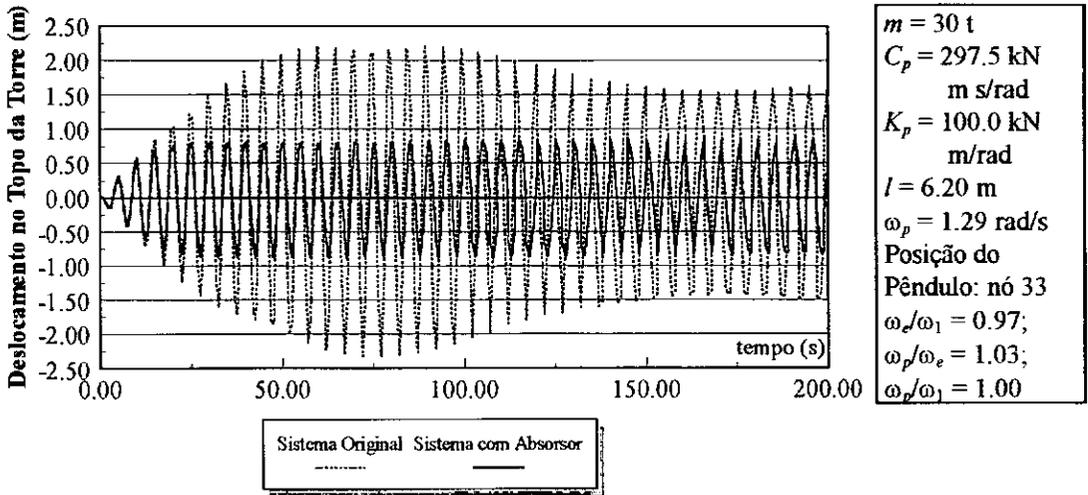


Gráfico VI-9 - Deslocamento da Estrutura para Sistema Original e com Absorvedor

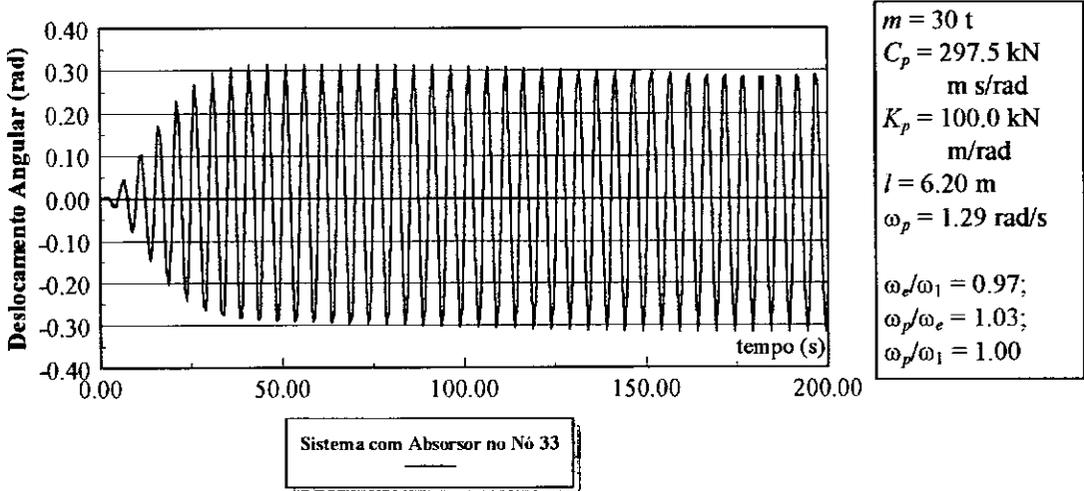
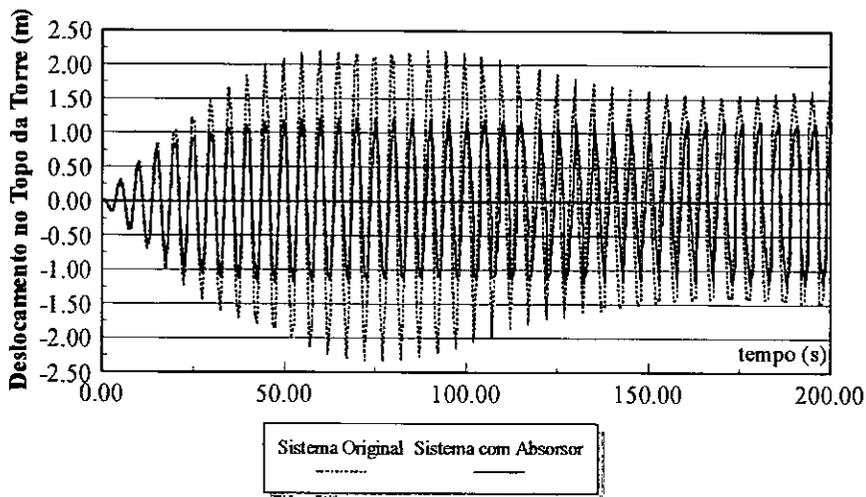


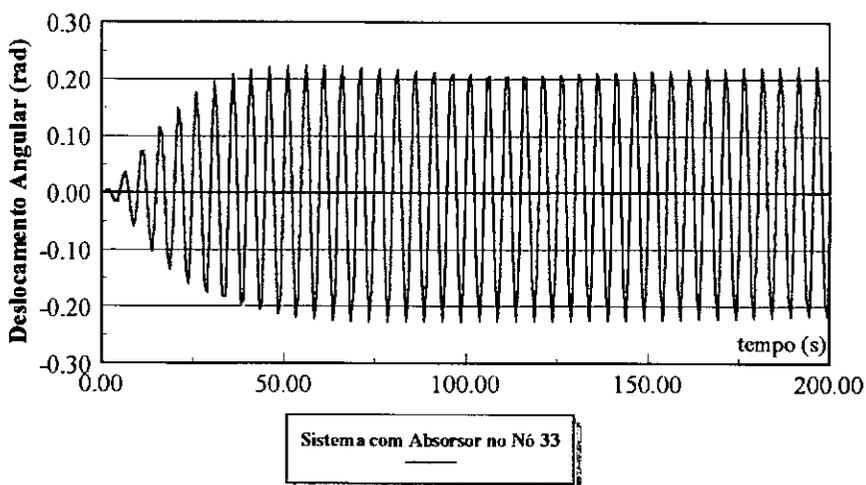
Gráfico VI-10 - Deslocamento do Pêndulo com $\xi_p = 10.0\%$, $K_p = 100.0 \text{ kN m/rad}$ e $l = 6.20 \text{ m}$

Para este caso, o nível de redução na fase inicial, comparando com o caso anterior, passou de 0.25 para 0.5 e, no estado de regime, de 0.33 para 0.667. Essa diferença será maior para grandes limitações de θ , com o uso de C_p maiores. O gráfico a seguir mostra os resultados para $\xi_p = 20.0\%$.



$m = 30 \text{ t}$
 $C_p = 595.1 \text{ kN m s/rad}$
 $K_p = 100.0 \text{ kN m/rad}$
 $l = 6.20 \text{ m}$
 $\omega_p = 1.29 \text{ rad/s}$
 Posição do Pêndulo: nó 33
 $\omega_e/\omega_1 = 0.97;$
 $\omega_p/\omega_e = 1.03;$
 $\omega_p/\omega_1 = 1.00$

Gráfico VI-11 - Deslocamento da Estrutura para Sistema Original e com Absorvor



$m = 30 \text{ t}$
 $C_p = 595.1 \text{ kN m s/rad}$
 $K_p = 100.0 \text{ kN m/rad}$
 $l = 6.20 \text{ m}$
 $\omega_p = 1.29 \text{ rad/s}$
 $\omega_e/\omega_1 = 0.97;$
 $\omega_p/\omega_e = 1.03;$
 $\omega_p/\omega_1 = 1.00$

Gráfico VI-12 - Deslocamento do Pêndulo com $\xi_p = 20.0\%$, $K_p = 100.0 \text{ kN m/rad}$ e $l = 6.20 \text{ m}$

A perda de eficiência é perceptível, com θ oscilando em torno de 0.2 radianos.

Todos esses resultados levam a uma discussão quanto ao nível de redução requerido.

Para o caso dessa torre, não foi necessária uma limitação muito grande de θ , dada pelas dimensões do tubo onde será instalado o APNL. A situação mostra-se mais favorável para uma faixa maior de oscilação e um conseqüente ganho no desempenho.

Essa maior faixa de oscilação de θ implica em menores coeficientes de amortecimento, dando uma maior liberdade ao seu movimento. No entanto, é preciso ter uma melhor caracterização da intensidade das forças atuantes, para que seja possível, até mesmo, usar um pêndulo com amortecimento praticamente igual a zero. Caso contrário, essas amplitudes poderão divergir e instabilizar cada vez mais o sistema.

Dessa maneira, o dimensionamento do pêndulo deve ser feito em função do nível de redução exigido, para cada caso. Por exemplo: em algumas torres de televisão, a emissão do sinal pode variar em função dos deslocamentos atingidos no topo, o que se caracteriza como uma exigência ou condição na redução das vibrações.

Se, no caso da torre em questão, a exigência fosse de 0.5 m de amplitude, por exemplo, poder-se-ia usar um amortecimento menor, permitindo maiores deslocamentos para θ e uma melhor redução nos deslocamentos da torre. Isso pode ser visto no Gráfico VI-13 a seguir.

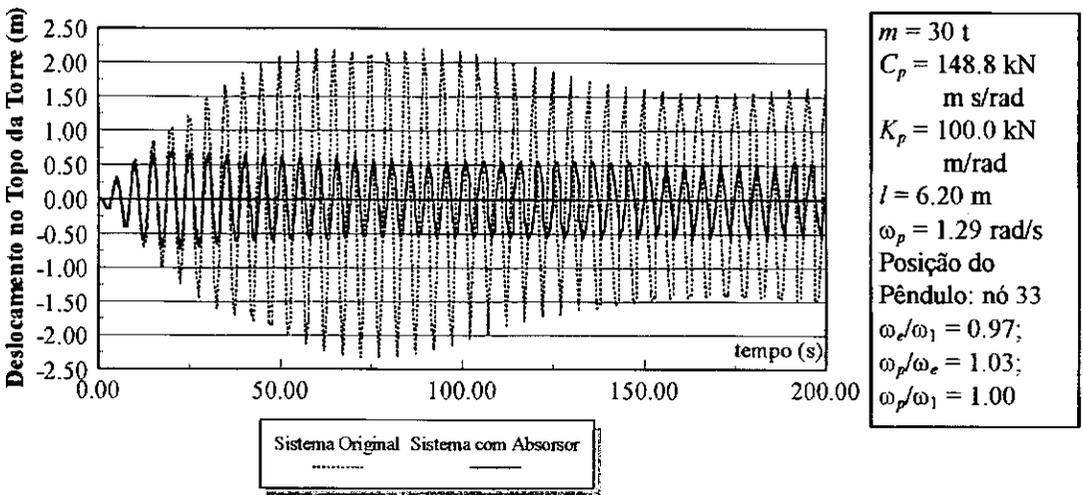


Gráfico VI-13 - Deslocamento da Estrutura para Sistema Original e com Absorvor

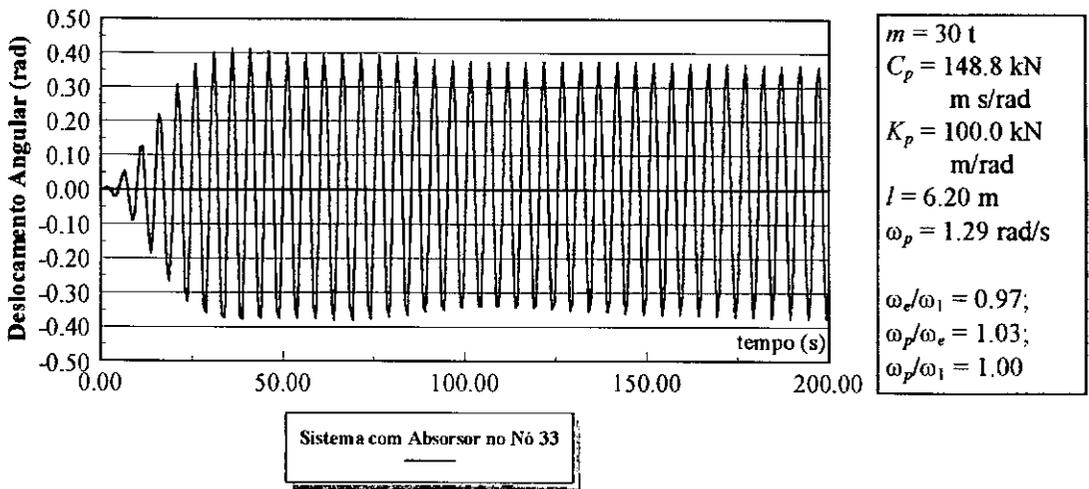


Gráfico VI-14 - Deslocamento do Pêndulo com $\xi_p = 5.0\%$, $K_p = 100.0 \text{ kN m/rad}$ e $l = 6.20 \text{ m}$

Sendo assim, admitindo que a caracterização das forças de ação do vento está adequada, pode-se, finalmente, definir os principais dados para se projetar o pêndulo absorvor de vibrações na torre avaliada com as características citadas anteriormente.

$$m = 30 \text{ t}, C_p = 148.8 \text{ kN m s/rad} (\xi_p = 5\%), K_p = 100.0 \text{ kN m/rad}.$$

$$l = 6.20 \text{ m}.$$

As dimensões do corpo que caracteriza a massa m , o tipo de material a ser usado, as conexões e ligações estruturais da haste com a estrutura, o tipo de amortecedor, as dimensões e características da mola, e todos os detalhes de instalação e manutenção do absorvor são etapas de um projeto executivo, que está fora do escopo desse trabalho acadêmico.

CAPÍTULO VII

Conclusões

- As principais conclusões extraídas desse trabalho podem ser resumidas nos itens seguintes.

Diante da análise das **equações linearizadas**:

- o absorsor pendular ($K_p = 0$) apresentou relações de calibração bastante simples, iguais às do absorsor de vibrações tipo massa-mola. Isso pode ser explicado, fisicamente, considerando que ambos proporcionam na estrutura uma força gerada pelo próprio movimento da massa auxiliar.

- Uma analogia entre esses dois tipos de absorsores pode ser feita no sentido de que, para a aplicação prática do absorsor pendular (torres esbeltas), este tem maior viabilidade que o tipo massa-mola, pois não é necessário, “teoricamente”, o uso de molas (rigidez), o que no segundo caso muitas vezes exige grandes deslocamentos e conseqüentemente grandes tensões na mola. Outra diferença é que o absorsor tipo massa-mola é melhor indicado para controle de vibrações verticais, onde o pêndulo teria limitada aplicação.

- O amortecimento ótimo também obedece às relações dadas na referência [4] e, dentro de faixa de valores encontrados, mostra-se viável. Apesar da análise ter sido feita com amortecimento da estrutura (ou massa principal) igual a zero, é possível aplicar os parâmetros obtidos para os casos em que $C \neq 0$, já que esse amortecimento, geralmente, é relativamente baixo.

Quando se leva em consideração a **não-linearidade do absorsor pendular (APNL)**:

- os parâmetros de ajuste já não são os mesmos, pois o movimento do absorsor muda as suas características de oscilação (período e frequência), afetando, de certa maneira, as demais (amortecimento, massa).

- Em grandes níveis de solicitações de carga, o deslocamento do absorvedor entra numa faixa de oscilação não-linear, que deve ser conhecida, principalmente, para se fazer uma verificação do espaço necessário a seu funcionamento, um dos aspectos mais importantes em um projeto desse tipo de absorvedor.

- A sua eficiência está intimamente ligada às relações de frequência, seguida da amplitude de seu movimento oscilatório. Para relações de frequência bastante próximas ($\omega_e \cong \omega_s \cong \omega_p$), o desempenho será maior, comparando com as demais situações. De uma maneira geral, o pêndulo deve ser calibrado em uma frequência igual ou acima da excitação quando $\omega_e > \omega_s$, e igual ou abaixo da excitação quando $\omega_e < \omega_s$. Nesses casos, as amplitudes de deslocamento do pêndulo simples (com $\mu = 0.2$) não devem ultrapassar 1.2 radianos, para que ele seja eficiente. Quando se tem $\omega_e = \omega_s$, essas amplitudes não podem ser maiores que 1.0 radiano, para $\omega_p = \omega_s$.

- Pode-se usar amortecimento para limitar os valores de θ , mas a perda de eficiência é perceptível, para grandes valores de C_p . Por isso, deve-se ter um conhecimento amplo do tipo de excitação e de sua intensidade para se garantir o máximo nível de absorção, em cada caso. Todo cuidado deve ser tomado ao se usar a rigidez pendular, pois ela altera a frequência ω_p e interfere positivamente ou não na performance da absorção. A vantagem é que K_p aumenta a faixa de valores de oscilação angular para a qual não há divergência nas respostas, desde que seja feita uma reavaliação do comprimento da haste.

- A implementação feita aqui para elementos finitos tem resultados significativos desde que seja considerado apenas um absorvedor, que deve ser calibrado com a excitação ou, para o caso de uma excitação por ressonância, ajustado com a estrutura, naquele modo de vibração dominante. Pode-se verificar rapidamente nestes casos que, se $\omega_s < 1.0$ rad/s ou $f_s < 0.16$ Hz, o pêndulo exigirá comprimentos maiores que aproximadamente 12.0 m; para estruturas com $\omega_s > 1.0$ rad/s, pêndulos mais curtos seriam suficientes para se alcançar bons níveis de redução. Comprimentos muito grandes podem inviabilizar o projeto. Nesses casos, pode-se usar o absorvedor pendular não-linear virtual (APNLV), que tem o mesmo efeito sobre a estrutura para calibrações equivalentes.

- Do ponto de vista prático, o pêndulo apresentou bons resultados para pequenas relações de massa ($\mu \cong 0.01$ para o exemplo visto no capítulo anterior) e baixos valores de amortecimento. Viável também no aspecto econômico, ao se considerar, por exemplo, que não é necessário o uso de materiais caros para se montar uma haste (dimensionada para a força peso mg de tração) e uma massa (entre 30 t e 50 t). É válido ainda para a aplicação em torres pelas próprias características de movimento de ambos: o predominante é o horizontal. Outro aspecto prático é a previsão de reposição dos componentes, principalmente, amortecimento, durante a vida útil do absorvedor. Ao mesmo tempo, devem ser tomadas algumas precauções contra eventuais falhas dos elementos de sustentação e fixação do pêndulo na torre, aspecto que cabe ao projeto, mas que merece ser citado.

Para finalizar, alguns pontos para continuação e melhor caracterização deste trabalho podem ser citados:

- A possibilidade de preponderância de mais de um modo de vibração na estrutura implica numa implementação de mais de um ponto de localização do pêndulo, com ajustes distintos na torre.
- Melhor caracterização das forças, além de uma análise também para abalos sísmicos, e outros tipos de ação do vento, como, por exemplo, turbulência.
- Consideração do movimento tridimensional da estrutura e do absorvedor.
- Desenvolvimento de um projeto do sistema de absorção pendular, com plantas de detalhes, mostrando as ligações com a estrutura, com o amortecedor, da haste com a massa m , memória de cálculo com dimensionamento das peças, seções e volume, e outros aspectos construtivos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Magluta, C. - **Sistemas Dinâmicos Passivos para Absorção de Vibrações Estruturais**, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, 1993.
- [2] Batista, R. C. - **Redução e Controle de Vibrações em Estruturas**, Notas de Aula, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.
- [3] Fram - **Device for Damping Vibration**, U.S. Patent nº 989, 958, 1911.
- [4] Den Hartog, J. P. - **Vibrações nos Sistemas Mecânicos**, Ed. Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1972.
- [5] Lenzen, K. H. - **Vibration of Steel Joist - Concrete Slab Floors**, Engineering Journal, Vol. 3, no 3, pp. 133-136, 1966.
- [6] Batista, R. C. - **Redução de Vibrações da Ponte de Acesso ao Porto de Sepetiba**, Relatório Complementar ao ET150434, COPPETEC, COPPE/UFRJ, 1993.
- [7] Batista, R. C.; Pfeil, M. S. - **Passive Damping of Vortex - Induced Oscillations of Rio-Niterói Bridge**, Proceedings of Smarts Structures and Materials, San Diego, California, USA, Vol. 2445, 1995 - Passive Damping, pp. 252-263.
- [8] Rao, S. S. - **Mechanical Vibrations**, 3rd Ed., Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1995.
- [9] Seto, W. W. - **Vibrações Mecânicas**, Ed. McGraw-Hill do Brasil, Ltda., Rio de Janeiro, 1971.
- [10] Batista, R. C. - Notas de Aula.
- [11] Relton, F. E., M. A., D. Sc. - **Applied Bessel Functions**, Blackie and Son Limited London and Glasgow, First Published 1946.
- [12] Batista, R. C. - **Dinâmica Estrutural**, Notas de Aula, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1994.

- [13] Faria, M. T. - **Redução de Vibrações Induzidas por Pessoas em Lajes de Grandes Vãos**, Tese M. Sc., COPPE/UFRJ, 1996.
- [14] Pereira, A. L. - **Análise Aeroelástica de Turbinas Eólicas de Eixo Horizontal**, Tese M. Sc., COPPE/UFRJ, 1993.
- [15] Blevins, R. D. - **Flow-Induced Vibration**, 2nd Edition, Van Nostrand Reinold, New York.
- [16] Clough, R. W; Penzien, J. - **Dynamics of Structures**, Second Editon, McGraw-Hill International Editions, 1993.
- [17] Thomson, W. T. - **Teoria da Vibração - Com Aplicações**, Ed. Interciência, Rio de Janeiro, 1978.
- [18] Harris, C. M.; Crede, C. E. - **Shock and Vibration Handbook**, McGraw-Hill Book Co.
- [19] Bulletin D'Information nº 209 - **Vibration Problems in Structures - Practical Guidelines**, CEB - Comité Euro-Internacional du Beton, 1991.
- [20] Spiegel, M. R. - **Manual de Formulas Y Tablas Matematicas**, Libros McGraw-Hill de Mexico, 1970.
- [21] Stark, P. A. - **Introdução aos Métodos Numéricos**, Ed. Interciência, Rio de Janeiro, 1979.
- [22] Korenev, B. G.; Reznikov, L. M. - **Dynamic Vibration Absorbers, Theory and Technical Applications**, John Wiley & Sons Ltd., England, 1993.